CORFEM

ACTES du 20ème colloque

GRENOBLE

coordonnés par

Michèle GANDIT

13-14 juin 2013

Université Joseph Fourier, Grenoble

Depuis maintenant une vingtaine d'années, la commission inter-IREM des formateurs des professeurs de mathématiques du second degré organise tous les ans un colloque. Le présent document constitue les actes du 20ème colloque de la CORFEM, qui s'est déroulé les 13 et 14 juin 2013 à l'IUFM de Grenoble.

La CORFEM est la commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré. Cette commission regroupe des formateurs – PRCE, PRAG ou enseignants-chercheurs – enseignant tous à l'IUFM, qui souhaitent réfléchir sur les stratégies de formation, produire des documents et mutualiser des ressources, afin d'améliorer leur action auprès des étudiants des masters se destinant au métier de professeur de mathématiques ou auprès des professeurs stagiaires. La CORFEM se donne pour buts d'accompagner la formation des formateurs d'enseignants ou de futurs enseignants de mathématiques, ainsi que d'échanger, de mutualiser et d'élaborer un ensemble de ressources pour la formation, en particulier, *via* son colloque annuel qui regroupe entre 60 et 80 participants. Ces colloques donnent lieu à des publications.

La CORFEM, les membres de son bureau (voir ci-dessous), espèrent ainsi favoriser une meilleure visibilité de la formation des professeurs dans l'enseignement secondaire et contribuer à la prise en compte de thèmes de formation pour la recherche.

Les thèmes abordés dans ces actes :

- Thème 1 – Modélisation : quels enjeux pour les mathématiques et leur enseignement ?
- Thème 2 – Ressources pour l'enseignement des mathématiques et pour la formation.

Les membres du bureau de la CORFEM en 2013 :

Aurélie Chesnais, IUFM de l'académie de Montpellier, Université Montpellier 2
Sylvie Coppé, IUFM de l'Académie de Lyon, Université Lyon 1, Responsable de la CORFEM
Lalina Coulange, IUFM de l'Académie de Bordeaux, Université Bordeaux 4
Michèle Gandit, IUFM de l'Académie de Grenoble, Université J. Fourier
Brigitte Grugeon-Allys, IUFM de l'Académie de Créteil, Université de Paris Est, Créteil
Marc Guignard, IUFM de l'Académie de Créteil, Université de Paris Est, Créteil
Philippe Le Borgne, IUFM de l'Université de Franche-Comté, Université de Franche Comté
Marie-Christine Levi, Université Paris Sud Didier Missenard, IUFM de l'Académie de Versailles, Université de Cergy Pontoise
Michel Poncy, IUFM de l'Académie de Lyon, Université Lyon 1

Table des matières

THEME 1

MODELISATION : QUELS ENJEUX POUR LES MATHEMATIQUES ET LEUR ENSEIGNEMENT ?

Les programmes actuels affichent des ambitions en ce qui concerne l'initiation des collégiens ou des lycéens à des pratiques de modélisation mathématique ou de simulation numérique. Ces ambitions se donnent à voir entre autres, dans l'enseignement de la statistique et des probabilités qui figure dans les programmes de collège et lycée, à travers la mise en place de l'option Méthode et Pratiques Scientifiques en Seconde ou dans la description de la troisième compétence du Socle Commun en fin de collège. Dans ce contexte, il nous a paru important de nous intéresser plus généralement au thème de la modélisation mathématique et de son enseignement. On constate d'une part que la définition même de pratique(s) de modélisation en mathématiques reste problématique. En quoi consisterait-elle exactement ? Quels rapports potentiels peut-on envisager entre la modélisation, la démarche d'investigation et la résolution de problèmes qui semblent parfois aller de pair dans le discours officiel ? D'autre part, la mise en œuvre d'un enseignement des mathématiques qui intègrerait des pratiques de modélisation est encore un champ de pratiques récent et soulève des questions ardues. Comment des pratiques de modélisation peuvent-elles être transposées dans l'enseignement des mathématiques ? Sous quelles conditions ? Notamment, en quoi ces conditions peuvent-elles conduire ou non à revoir les découpages « classiques » entre les savoirs mathématiques à enseigner ou à envisager d'autres savoirs ou savoir-faire, entre les disciplines scientifiques, à en repenser les liens ?

Enfin comment et dans quelle mesure la formation actuelle des futurs enseignants ou la formation continue prennent-elles en charge ces questions ou d'autres liées à la modélisation mathématique ?

DU MONDE REEL AU MONDE VIRTUEL : VOYAGE ALLER ET RETOUR

Stéphane LABBE
Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble [1]

Résumé – Dans ce texte, nous présentons les principes généraux de la modélisation et leur lien avec les mathématiques. En particulier, nous étudions le parti-pris que nous pouvons tirer de ce lien pour enseigner des notions mathématiques complexes en créant des analogies et surtout un lien avec le réel afin de capter l'attention des élèves et leur donner des images propres à imprimer les concepts.

Modélisation et monde réel

Un large aperçu des objectifs

La modélisation fait partie d'une dynamique scientifique globale allant de la conception de modèles physiques à la comparaison avec des expériences, en passant par l'analyse mathématique (voir Fig. 1). Dans ce cycle, trois mondes sont en présence : le monde réel, le monde virtuel des objets mathématiques et le monde numérique des objets informatiques. Le premier, le monde réel, infiniment complexe ne peut pas être appréhendé dans son ensemble. Les scientifiques tentent d'en comprendre les rouages, mais restent bien loin de la connaissance exhaustive de ses mécanismes. Malgré tout, il ne faut pas baisser les bras. En effet, la compréhension du monde réel induit, entre autres, l'amélioration des technologies. Cette compréhension permet la construction de modèles que l'on pourra appréhender dans leur ensemble. Par exemple, quand Isaac Newton présente en 1686 la théorie de la gravitation universelle dans son ouvrage Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, son travail permet de comprendre le mouvement des planètes et d'appréhender la mécanique d'un oeil nouveau, mais est basé sur une vision simplifiée du monde. Bien entendu, il ne faut pas prendre le terme "simplifié" comme étant péjoratif, bien au contraire ; la simplification du monde afin d'en extraire un phénomène pour le comprendre est une démarche essentielle de la modélisation. Le physicien, biologiste ou encore géologue de talent trouvera des idées forces qui permettront, à partir d'un modèle compréhensible, d'expliquer des phénomènes souvent redoutablement complexes. Si l'on reprend l'idée de la mécanique étudiée par Isaac Newton, le modèle présenté est très simple au regard des objets réels, mais contient toutes les bases pour être complexifié (traitement d'objets compliqués etc.) et ainsi produire des résultats pouvant être confrontés à la réalité. Isaac Newton avait mis en place un système intelligible des phénomènes naturels, faisant de lui un modélisateur. Comme tous les modèles, la théorie qu'il a développée a ses limites de validité ; quand la vitesse des objets devient trop grande, les formules formelles développées pour la mécanique newtonienne ne peuvent plus expliquer les phénomènes observés et le relais est alors passé à la théorie de la relativité générale développée par Albert Einstein en 1915. Tous ces modèles formels disciplinaires ayant pour objectif de

[1] stephane.labbe@imag.fr

comprendre le fonctionnement du monde ont ainsi leurs limitations, leurs domaines d'application et ne peuvent être utilisés que dans un cadre bien précis qui au fur et à mesure du temps s'affinera. Il ne faut pas non plus oublier les modèles analogiques qui permettent, à partir de maquettes, de mieux comprendre un phénomène en le confinant ou en le transformant en un objet plus accessible. Pour illustrer ceci on pourra citer par exemple les expériences d'avalanches en bassins noyés réalisées au CEMAGREF[2] de Grenoble. Afin d'étudier le déferlement de la neige sur une pente et en comprendre les mécanismes de propagation, déclencher une avalanche à taille réelle ne sera pas toujours aisé, alors, pour effectuer des expériences à une échelle contrôlable, des modèles analogiques sont réalisés. Dans le cas des avalanches mises en œuvre à IRSTEA, la neige a comme pendant analogique des écoulements de particules en suspension dans un fluide. Bien entendu, ces expériences ne rendent compte que d'une petite partie du réel, mais elles permettent de se faire une première idée des modèles et d'ainsi les tester sur des phénomènes plus facilement mesurables que les phénomènes naturels visés par l'étude.

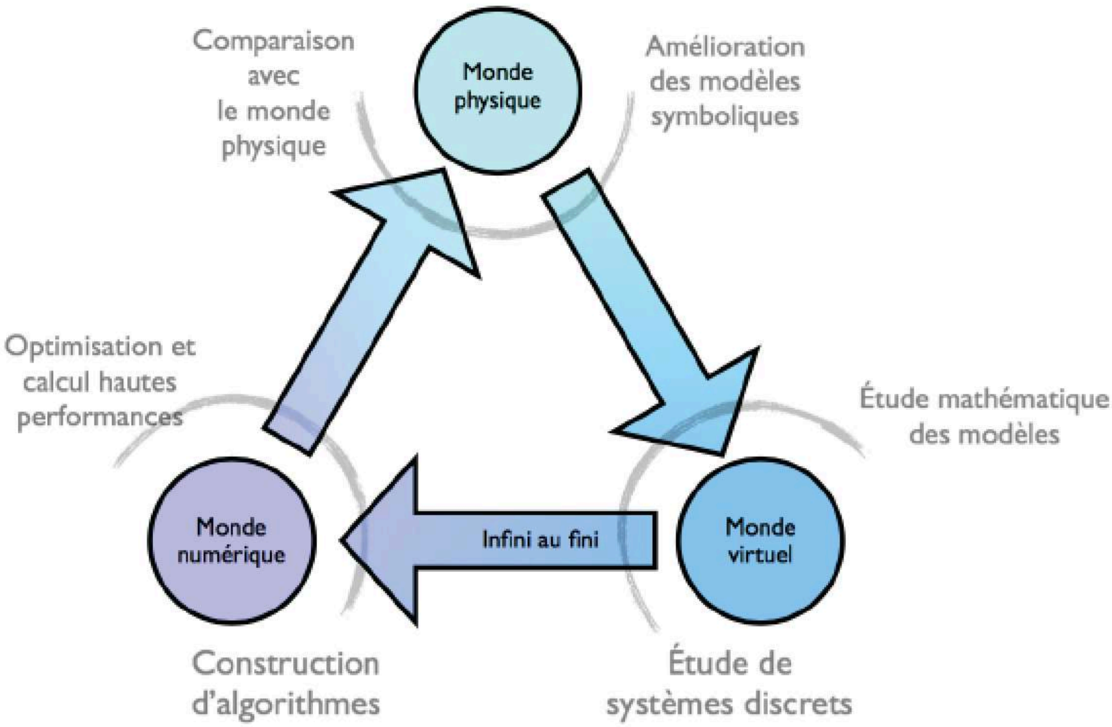


Figure 1

Des phénomènes physiques aux modèles analogiques, nous passons aux modèles formels. Ces derniers sont déjà éloignés du monde réel mais en donnent une bonne projection que l'on peut comparer au réel au moins de façon heuristique. Par contre, un problème se pose : comment analyser ces modèles, quelle signification ont-ils et les équations qui les composent désignent-elles des objets identifiables ? Pour commencer cette analyse, le premier point est de définir un monde dans lequel les modèles aient potentiellement une existence, un monde que l'on puisse décrire avec un langage précis : le monde virtuel, le monde des mathématiques. Dans ce monde virtuel, le deuxième

2 Maintenant IRSTEA, http://www.irstea.fr/etgr

dans notre liste, nous pouvons effectuer des expérimentations totales, c'est un monde qu'a priori l'on peut totalement maîtriser. Le premier travail à effectuer est donc de déterminer si le modèle considéré désigne un ou plusieurs objets dans ce monde virtuel, si l'on peut affiner la connaissance de ces objets en, par exemple, les situant dans des ensembles mathématiques de plus en plus petits, précis et dont on a donc une connaissance de plus en plus claire. L'image que l'on pourrait donner de cette approche est la suivante : quand on cherche ses clefs le matin, on restreint le périmètre de recherche à l'appartement et non à toute la ville ! Cette étape mathématique permet de prendre possession du problème formel et ainsi d'avoir une connaissance a priori claire des comportements des objets mathématiques entrant en jeu dans ces problèmes. La modélisation mathématique proprement dite réside alors dans l'analyse du problème et l'identification des espaces contenant la solution. Les questions d'unicité et de régularité des solutions sont alors abordées, mais en général, les espaces contenant les solutions sont de dimension infinie. Le problème que l'on rencontre alors est cette dimension infinie des espaces. En effet, à terme, nous voulons pouvoir prédire des comportements, calculer des solutions de ces problèmes, mais malheureusement, la plupart du temps, il est impossible de trouver des formules explicites les décrivant. Nous allons donc confier à des ordinateurs la tâche de déterminer, grâce à des algorithmes, des approximations de ces solutions. Le problème est alors le suivant : les ordinateurs ne connaissent que la dimension finie, comment donc passer d'un problème de dimension infinie à un problème de dimension finie ? Il faudra donc, pour espérer effectuer des simulations, filtrer les espaces de travail de dimension infinie en des suites bien choisies d'espaces de dimension finie. Ce qui nous conduit au troisième monde, le monde numérique, celui que les plateformes de calcul comprennent. Une fois les problèmes réécrits en dimension finie, on peut passer à la phase algorithmique dans laquelle les principaux outils sont l'algèbre linéaire et l'arithmétique. Cette étape de mise en forme d'un problème pour le rendre traitable via des moyens informatiques est suivie de l'ultime flèche du cycle ci-dessus : la simulation. Cette phase est cruciale et demande une connaissance de l'ensemble du cycle afin d'effectuer des comparaisons pertinentes non seulement avec le modèle mathématique pour s'assurer que les solutions représentées approchent effectivement celles du problème mathématique, mais aussi avec les données expérimentales et les observations à partir desquelles a été construit le modèle formel.

Bien entendu, dans un monde idéal, tout fonctionne du premier coup, mais, comme rappelé dans ce texte, le monde étant infiniment complexe, il y a toujours un détail qui nous échappe, un point que nous avons négligé mais qui s'avère primordial, un coin enfoncé dans nos convictions. Il est rare que le cycle boucle du premier coup, il faudra dans la plupart des cas plus d'un tour avant de calibrer de façon satisfaisante les modèles. Ces allers-retours permanents entre monde réel, monde virtuel et monde numérique sont à la base du cycle de modélisation dans lequel les mathématiques interviennent.

Modélisation, simulations et comparaisons

Dans le processus de modélisation, au moins quatre étapes peuvent être mises en avant : les modèles analogiques et formels, la compréhension des erreurs, les méthodes numériques, et les comparaisons avec l'expérience. Chacun de ces points fera intervenir des compétences différentes, des outils différents. Dans les exemples d'application et de travaux donnés dans la suite de ce texte, nous pourrions citer ainsi comme outils, la notion de dérivation, de limites, d'algorithmes ou encore les notions de physique élémentaire, de magnétisme de base, d'expérience de mécanique du point. L'essentiel est ici d'appréhender l'ensemble de la chaîne de traitement des modèles à partir d'exemples faciles à mettre en œuvre.

Les modèles analogiques représentent le point de départ du processus de modélisation, les physiciens, biologistes ou autres spécialistes d'une discipline en prise directe avec l'observation et la manipulation des phénomènes que l'on peut appréhender, ont l'intuition d'une loi de fonctionnement. Cette loi, en général édictée en langage mathématique, peut être aussi représentée à travers des expériences simples qui illustrent et imitent des aspects particuliers d'un processus complexe que sont les modèles analogiques. L'analyse mathématique de ces modèles formels ou analogiques conduit à des systèmes d'équations et des définitions d'univers, en général des espaces de fonctions, dans lesquels vivent les solutions de ces systèmes, qui ont un sens mathématique, c'est-à-dire dont on peut donner un sens aux solutions (ces solutions n'étant pas nécessairement uniques). Une fois cette phase accomplie, le passage de la dimension infinie aux objets de dimension finie, indispensable pour faire assimiler le problème à un ordinateur, est effectué en utilisant des méthodes numériques adaptées qui sont des filtres. Ces filtres vont permettre de mettre en relief des informations essentielles du système pour que la simulation rende compte, de façon satisfaisante, du fonctionnement du système complet. Cette étape nécessite d'avoir une connaissance fine de la qualification des erreurs commises par la méthode numérique, son écart au modèle complet que l'on désire étudier numériquement. Enfin, la dernière étape est celle de la comparaison avec les expériences. Cette ultime étape du processus permettra de quantifier la recevabilité du modèle mathématique étudié vis-à-vis des objectifs de modélisation fixés.

Que peut-on attendre des simulations ?

On peut attendre de la simulation avant tout d'être proche des phénomènes que l'on désire modéliser, mais aussi, et c'est là l'objectif principal, d'être prédictive. En effet, les modèles du monde réel que nous utilisons ont pour objectif d'en comprendre les mécanismes pour ainsi pouvoir prédire son évolution. Par exemple, les modèles de météorologie sont employés pour prédire le temps et non uniquement pour observer le temps en cours ! Les modèles numériques peuvent être également utilisés pour prédire des caractéristiques physiques d'un phénomène en assimilant des informations, ce qui est désigné sous le vocable d'assimilation de données. Cette discipline, assez récente, se base sur des simulations qui sont enrichies par des informations pour pouvoir améliorer la qualité des prédictions ; elle est abondamment utilisée en climatologie par exemple.

Objectif des comparaisons avec les expériences

Les comparaisons avec les expériences permettent de calibrer les modèles. Par exemple, il est très complexe de choisir de façon pertinente des paramètres dans un modèle formel. Ainsi, le skieur glissant sur les pentes aura une vitesse dépendant de la nature de la neige, de sa température mais aussi de la nature de ses skis. Pour pouvoir obtenir l'acuité la plus grande dans la compréhension de son mouvement et dans sa simulation, il sera nécessaire de prendre en compte tous les paramètres de l'expérience. Malheureusement, ces paramètres sont des données qui font intervenir des phénomènes physiques à des échelles très différentes (molécules, cristal de glace) et particulièrement complexes à quantifier a priori. Le calibrage de ces paramètres peut passer par des méthodes d'évaluation des paramètres à partir de données expérimentales parfaitement calibrées comparées à des expériences numériques.

Une fois cette phase de calibrage effectuée, il est alors possible de mettre en place des expériences numériques ayant pour objectif de prédire le comportement des systèmes physiques. L'exemple le plus classique et surtout le plus simple à exposer, est celui de la trajectoire des satellites mis en orbite. Il est possible, grâce aux connaissances poussées que nous avons maintenant en mécanique, de prédire de façon très précise la trajectoire d'un satellite et ainsi optimiser sa mise en orbite pour lui assurer la plus grande pérennité possible. Ces modèles numériques sont également utilisés pour commander les satellites depuis des centres de contrôle au sol afin de les mener au-dessus de points du globe pré-déterminés pour effectuer des observations. Ces applications demandent d'avoir à disposition des modèles numériques particulièrement précis.

Quelques exemples de travaux en laboratoire

Dans ce texte, nous donnons trois exemples de modélisation étudiées et développées au sein du Laboratoire Jean Kuntzmann. Les trois ont comme dénominateur commun les équations aux dérivées partielles et la mécanique, qu'elle soit des fluides ou des solides. Les équations aux dérivées partielles constituent un outil essentiel de la modélisation des problèmes physiques. En effet, la modélisation d'un problème passe souvent, dans le cas des systèmes mécaniques, par une étude à très faible échelle des processus. Cette étude à très faible échelle se base sur la quantification des variations locales de grandeurs, telles que la vitesse, la déformation ou encore la densité, en accord avec des lois fondamentales telles que, la conservation de la masse ou de l'énergie totale. Ces petites variations locales sont traduites en terme de taux de variation pour être visibles à grande échelle. Par exemple, sur une courbe associée à une fonction f de R dans R, localement, en fonction d'une petite variation h de x, il sera possible d'estimer la variation de f : $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. Cette variation dépend de la longueur d'observation h, ce qui rend le système non canonique, il est donc intéressant de faire disparaître cette longueur en passant à la limite. Pour une fonction suffisamment régulière, il est clair que la limite de la grandeur $\Delta_h f(x)$ quand h tend vers 0 sera 0, ce qui ne nous intéresse pas du tout ! Par contre, la limite du rapport $\Delta_h f(x)) / h$ quant à elle sera calculable pour une classe de fonctions f bien choisie : les fonctions dérivables. La notion de dérivée partielle est la généralisation de ce concept dans chaque direction de l'espace. Les petites variations ne sont plus alors portées par l'axe des réels mais par l'espace entier dans lequel vivent les objets étudiés. Si la fonction f est suffisamment régulière, cette variation ne dépendra pas de la direction choisie, elle sera une matrice agissant sur cette direction. Une fois que les équations sont écrites en terme de variations infinitésimales et retraduites en termes de dérivées généralisées, il est alors possible de déterminer si les solutions du problème construit sont bien posées.

Cette notion, introduite par Jacques Hadamard[3], mathématicien français, demande que :

1. la solution existe,
2. elle soit unique,
3. de faibles variations des paramètres du problème donnent de faibles variations de la solution.

[3] 1917-2008

Le premier point semble clair, si le problème n'admet aucune solution, l'intérêt de l'étudier est nul. Le second point se comprend de la façon suivante : si notre modèle est suffisamment bien construit, il n'y aura pas d'indétermination rendant difficile, voire impossible, le choix d'une solution. Souvent, dans les problèmes de modélisation, cette difficulté est rencontrée : quelle solution choisir ? Pour trancher cette question, il faut alors introduire des outils de sélection de la solution qui soient compatibles avec les principes de base de la physique. Le plus souvent, nous appliquerons les principes de la thermodynamique, ce qui nous amènera à nous poser des questions sur la notion d'entropie d'un système. Ajouter ces notions à des modèles est souvent la brique essentielle permettant de vérifier le deuxième point de la notion de problème au sens d'Hadamard. Le troisième point est bien plus délicat et souvent difficile à vérifier, mais essentiel pour la simulation. En effet, imaginons un problème dépendant de conditions initiales. Si ce problème ne bénéficie pas de la propriété de stabilité du troisième point précédent, cela signifie que la plus petite variation de l'état initial entraînera des variations considérables de la solution du problème. En particulier, estimer la solution du problème en utilisant une approximation de cette condition initiale risque de donner un résultat dont on ne peut en aucun cas assurer la pertinence. Un exemple célèbre d'un tel système est donné par le météorologue Edward Lorenz , qui fut l'un des premiers à mettre en évidence à travers un modèle mathématique des phénomènes chaotiques intervenant dans sa discipline. Le problème principal de ces systèmes est donc la fiabilité des simulations qui, trop sensibles aux conditions initiales, ne constituent pas des prédictions au sens propre du terme mais dégagent des scénarios possibles a priori totalement différents.

Le choix de la discrétisation peut être multiple, il dépend bien entendu de la nature du problème mais aussi des habitudes du mathématicien la traitant ou encore de la complexité de la méthode comparée aux moyens que l'on a à disposition. De nombreuses méthodes ont été introduites au cours des années, de plus en plus complexes au fur et à mesure que la puissance de traitement des plateformes de calcul augmentait.

La dynamique de la banquise

Ce problème[4] a pour objectif de comprendre le lien entre la disparition de la banquise et les modifications climatiques. En effet, la banquise agit comme un miroir qui renvoie vers l'atmosphère l'énergie solaire. Deux phénomènes s'affrontent donc : le réchauffement de la mer mais aussi le refroidissement de l'atmosphère quand la glace fond, ce qui induit a priori une diminution de la température au dessus du pôle et d'un autre coté, quand la glace est présente, le refroidissement de la mer et le réchauffement de l'atmosphère ! La difficulté majeure est ici de comprendre l'interaction entre les phénomènes météorologiques et l'évolution de la glace de mer. La première solution pour comprendre cette synergie serait de s'attaquer au problème global, ce qui, on s'en doute, n'est pas particulièrement viable. De plus, il existe déjà de nombreux modèles de prédiction climatique qui ont été efficacement testés, qui ont fait leurs preuves.

Alors, pour la première étape de la modélisation, celle de la construction du modèle formel, les premiers choix vont devoir être effectués :

1. on se concentre sur la glace de mer et sa dynamique, il faut pour cela comprendre l'influence des courants marins et des courants aériens au dessus de

[4] Travail réalisé en collaboration avec J. Weiss (LGGE / UJF) et M. Rabatel (LJK / UJF)

la banquise ;
2. la glace de mer peut être perçue comme un ensemble de plaques qui entrent en contact, s’entrechoquent, il faudra donc comprendre ce qu’est un choc ;
3. la banquise se casse mais aussi se ressoude avec le gel, comment prendre en compte cette évolution ? Comment détecter l’apparition d’une fissure ?
4. La glace gèle et dégèle en fonction de la température de la mer et de l’atmosphère : comment prendre en compte cette évolution ?

Il s’engage alors avec les glaciologues une discussion sur les paramètres importants qu’il est nécessaire de prendre en compte dans le modèle mais surtout sur l’ordre avec lequel ces paramètres seront introduits pour comprendre la dynamique. La complexification du système doit être effectuée en fonction de points de comparaison avec la réalité que nous pourrons introduire au fur et à mesure du processus de modélisation. Dans cet exemple, nous ferons nécessairement plusieurs boucles du cycle de modélisation pour affiner et complexifier le modèle en introduisant progressivement les mécanismes essentiels afin de les tester soigneusement et les valider avant d’entamer un nouveau cycle.

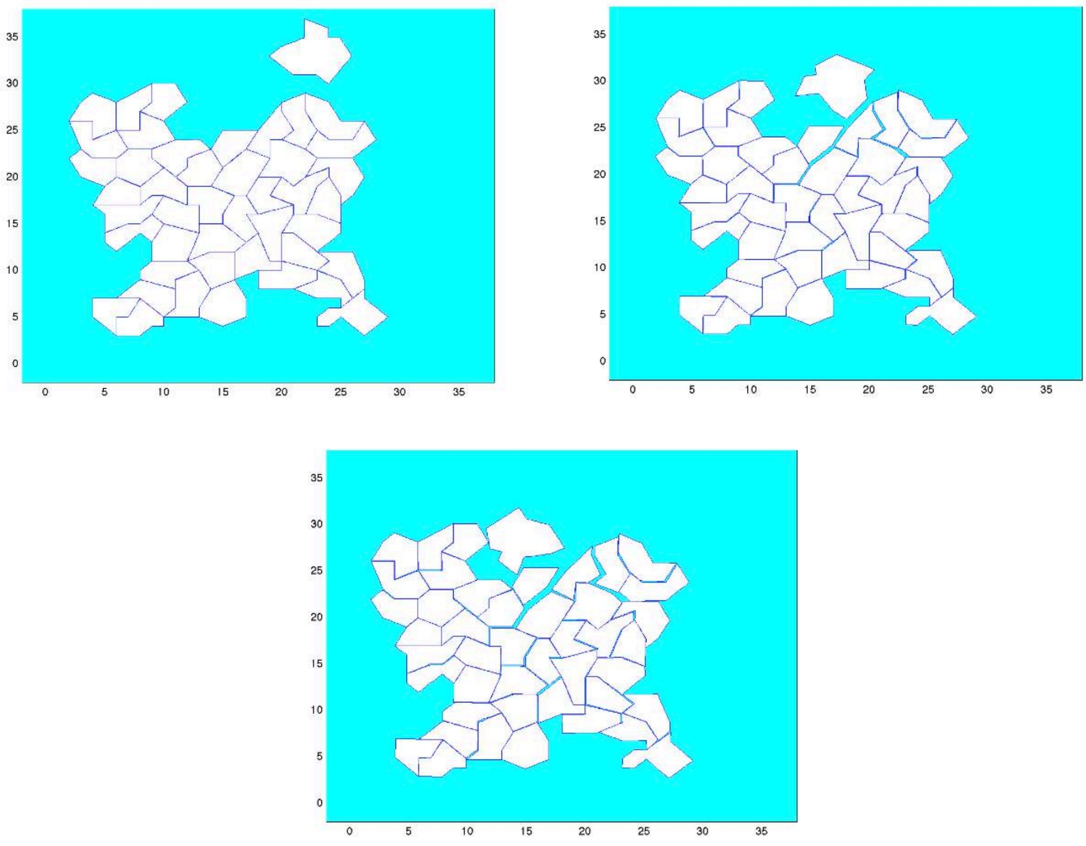


Figure 2 – Simulation d’un pack de floes, Calculs réalisés par M. Rabatel (LJK/UJF)

Dans l’étude de la glace de mer, il a été choisi de mettre en place en premier lieu les chocs entre des blocs totalement indéformables, solides. Cette première étape pourrait, aux yeux des adeptes de jeux vidéo, paraître simple et classique, mais elle ne l’est pas du tout. En effet, l’objectif ici n’est pas d’obtenir des images réalistes, mais des processus physiquement compatibles avec la réalité, sans les approximations nécessaires aux logiciels d’effets spéciaux par exemple. Les deux processus sont très différents, complexes et nécessitent beaucoup de technique, mais ont des objectifs très différents : pour les effets spéciaux, nous sommes intéressés par l'obtention d'un effet visuel réaliste, pour des systèmes excessivement complexes, des scènes de grandes dimensions, mais dont les calculs doivent tout de même être effectués rapidement, pour les simulations à des fins de prédiction, les systèmes à simuler sont bien moins inhomogènes mais le soin apporté au réalisme des processus microscopiques et leur lien avec les processus macroscopiques entraînent une grande complexité des équations et par conséquent des systèmes coûteux en temps de calcul. Dans notre cas, pour la glace de mer, un soin particulier est apporté aux contacts entre surfaces, qui doivent respecter des règles mécaniques locales particulièrement complexes, tandis que ce soin est inutile pour des objets en interactions quand l'objectif est le réalisme visuel. Deux filtres sont donc opposés : le filtre de la perception humaine qui permet au cerveau de rectifier les images ou ignorer une erreur de réalisme pour conserver l'impression globale et celui des mesures physiques qui contient énormément plus d'informations, non perceptibles par le filtre humain. Pour chacun de ces filtres, l'enjeu est différent mais tout aussi complexe à réaliser dans les deux cas. L'un demande le traitement rapide d'une multitude d'objets, l'autre demande le traitement d'une grande complexité physique.

Pour ce premier cycle de modélisation, des choix sont à effectuer : comment prendre en compte la forme des morceaux de banquise (floes), quel modèle physique appliquer aux contacts ? Pour la première question, les floes sont divisés en un nombre fini de petits triangles, méthode classique de triangulation de domaine, ensuite ils sont plongés dans un univers dans lequel le maillage ainsi créé reste fixe mais la position des floes est repérée. Pour les contacts, des lois de frottement et de contact (par exemple les lois de Coulomb) sont choisies. Le système obtenu demande donc, à chaque instant, de connaître la position de chaque floe et de déterminer s'ils entrent en contact. Ensuite, les contacts sont gérés en résolvant des systèmes de grande taille, complexes. Le nombre d'inconnues est égal à plusieurs fois le nombre de contacts…

Une fois le modèle numérique établi et codé, le troisième sommet du cycle de modélisation consiste en la comparaison avec des expériences. Dans le cas de cette étude, les calculs ont été confrontés avec des expériences en bassin effectuées sur des plaques de bois de un mètre de diamètre ! Une fois démontrée la concordance des résultats de simulation et des observations, nous pouvons entamer un nouveau cycle de modélisation qui aura pour objectif d'enrichir le modèle pour arriver, après plusieurs de ces cycles, à un modèle de floes prenant en compte les nombreux paramètres identifiés au début : fracture des floes, gel des floes et bien entendu dégel.

L'effet Leidenfrost

Dans ce deuxième exemple[5], nous nous intéressons à la modélisation de gouttes de liquide sur un support chauffé. L'expérience de référence est la suivante : chauffez un support (environ 200°), posez-y une goutte d'eau (pas trop grande), celle-ci commencera à courir dans tous les sens, pendant un temps avoisinant quelques minutes avant de disparaître. Recommencez la même expérience mais avec une température plus basse (100° par exemple), cette fois-ci la goutte disparaît presque instantanément ! Ce phénomène a potentiellement de nombreuses applications, comme par exemple le contrôle du mouvement de gouttes d'eau sur des processeurs pour analyser la composition du liquide ou encore le refroidissement de circuits.

Pour modéliser ce type de phénomènes, les points clefs à analyser sont les suivants :

---

[5] Étude réalisée en collaboration avec R. Denis, H. Kahlil et E. Maître (LJK, UJF).

1. le mouvement des fluides pour une température variable,
2. la transition de phase entre l'état gazeux et l'état liquide,
3. le suivi de la surface d'une goutte et donc la notion de surface pour cette goutte.

Le premier point est bien connu, les équations du mouvement des fluides, dont la plus connue est celle portant les noms de Navier et Stokes, sont étudiées depuis longtemps. Cette partie de la phase de modélisation ne demande donc qu'une solide recherche sur les modèles et techniques d'analyse en cours et au moins un choix : l'eau et l'air, à cette échelle et sous la gamme de contraintes que nous envisageons, sont incompressibles ; nous aurons beau appuyer dessus, un morceau homogène de fluide se déformera mais ne changera pas de volume. Cette phase est essentiellement bibliographique. Durant celle-ci, nous extrairons, en fonction du grain de réalité (ou de réalisme pour être exact) que nous voulons donner au modèle, les équations décrivant cette partie de la physique du phénomène.

Le deuxième point, que nous traitons en même temps que le troisième, est quant à lui particulièrement délicat. En effet, le changement de phase d'un liquide et surtout la localisation de sa surface libre, est une affaire complexe à analyser. Pour en venir à bout, après une longue étude des travaux existants sur le sujet, nous nous penchons sur l'analyse des échanges de matière entre les deux phases à une échelle très fine. Le problème est ici de mettre en place un modèle qui soit compatible avec les équations du mouvement des fluides que nous avons choisies précédemment. En effet, il ne faut pas oublier que nous voulons effectuer une analyse mathématique du modèle ; pour cela, les objets mathématiques doivent avoir une chance d'être mathématiquement viables.

Figure 3 – Simulation de goutte avec effet photo réaliste. Calculs réalisés par D. Roland (LJK / UJF).

Dans le modèle de goutte étudié dans ce projet, le point clef qui est le changement de phase est traité grâce à l'introduction de l'enthalpie[6] locale le long de la frontière entre liquide et eau. Cette frontière a une épaisseur ; dans un modèle exhaustif, nous devrions modéliser ce fait, mais l'objectif de l'étude ne demande pas que le modèle soit aussi précis dans notre cas : nous pouvons nous « contenter » ici d'une frontière, transition brutale entre l'eau et l'air mélangée à la vapeur. En construisant ce modèle, nous conservons à l'esprit que nous devrons transformer ce problème de dimension infinie en problème de dimension finie. Le problème va donc prendre une forme mathématique propice à la discrétisation que nous avons choisie. Cette formulation, nommée « level-

[6] L'enthalpie est l'une des grandeurs intervenant dans les bilans thermodynamiques.

set », permet de suivre les iso-valeurs[7] d'une grandeur, la clef étant ici de bien choisir la fonction dont on suit les iso-valeurs ! Dans l'écriture de la formulation « level-set » du problème, la fonction dont on traque l'iso-valeur est la distance à l'interface entre le liquide et le gaz. Dans la phase de discrétisation, la méthode sera construite pour respecter au mieux les propriétés des équations mais aussi pour être, dans la mesure du possible, peu consommatrice en ressources. Dernier point sur la méthode : comme précédemment, nous tentons d'avoir un coup d'avance. L'objectif suivant sera d'effectuer des simulations suffisamment réalistes pour être comparées à des résultats expérimentaux. Deux difficultés majeures se présentent : le calcul doit être effectué pour des objets de dimension trois, ce qui sera synonyme de calculs coûteux, le second point est que la goutte a une fâcheuse tendance à ne pas rester en place. Pour remédier à ces deux problèmes en même temps, nous avons donc opté pour une hypothèse forte : le problème est axi-symétrique, il existe donc un axe autour duquel les solutions peuvent tourner sans être pour autant modifiées. Cette hypothèse, qui n'est pas physiquement déraisonnable mais tout de même pas totalement réaliste, permet non seulement de transformer un problème tri-dimensionnel en problème bi-dimensionnel, mais aussi de fixer la goutte. En effet, une fois le choix de l'hypothèse d'axi-symétrie effectué, la goutte virtuelle est fixée et ne peut plus se déplacer si elle veut respecter cette hypothèse.

Fort de ce cadre strict, nous pouvons donc construire un premier code de calcul, la question nécessaire à boucler le cycle de modélisation est alors : quelle expérience reproduire. Dans notre cas, le choix s'est porté sur le temps de vie des gouttes d'eau observé physiquement. Le dernier travail, avant un nouveau cycle de modélisation pour améliorer la portée de l'étude, est donc de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Quels enjeux dans l'enseignement des mathématiques

Comment la modélisation peut-elle être utilisée dans le cadre de l'enseignement des mathématiques ? Bien entendu, je ne peux que rendre compte de ma propre expérience et vais sûrement exposer des propositions et méthodes que déjà, beaucoup de professeurs mettent en place dans leur classe, éventuellement sous une forme différente.

L'enjeu principal est ici de motiver les élèves à s'intéresser aux mathématiques, d'éveiller leur attention. Les mathématiques désignent dans ce contexte les méthodologies d'analyse des problèmes ainsi que la recherche de solutions adéquates non dans le cadre de l'application de raisonnements pré-construits mais de réflexions originales. Ceci est, je pense, l'un des objectifs principaux des cours de mathématiques en collège et lycée. Les élèves ne vont pas apprendre des mathématiques techniques au sens propre du terme mais apprendre à raisonner et faire preuve d'intuition sur un problème. Pour cela, la première étape semble donc être bien l'éveil de l'intérêt. Je suis conscient que la méthode n'est pas toujours applicable, qu'elle dépend fortement de la classe et demande un investissement lourd, mais je l'ai vu fonctionner dans des contextes très différents, dans des établissements accueillant un pourcentage plus ou moins important d'élèves en difficulté : à chaque fois, des résultats ont été obtenus. Les expériences qui sont décrites dans la suite de ce texte ont été principalement réalisées

[7] Zones de l'espace sur lesquelles la fonction a une valeur constante prescrite. Pour une fonction suffisamment régulière et pas trop « plate », ces zones seront des surfaces.

dans le cadre de projets MATh.en.JEANS[8], qui ont lieu dans les établissements et sont encadrés par les professeurs, pour des groupes d'élèves qui ne sont pas nécessairement de la même classe. Par ailleurs, dans la mesure du possible, j'applique ce principe pendant les cours et travaux dirigés sachant que souvent, à l'Université, le public est plus réceptif qu'au lycée et collège car plus mature.

La modélisation devient alors, dans le contexte de l'apprentissage, un outil pour développer des exemples permettant d'introduire des notions complexes et surtout de les motiver auprès des élèves. Par exemple, pour les sensibiliser à l'algèbre linéaire et aux notions d'espaces vectoriels, je fixe un objectif de compréhension des principes de mouvement dans l'espace et de déplacement des objets appliqués aux jeux vidéo. Chaque rappel des épisodes précédents effectué en début de cours contient alors un aperçu du chemin déjà parcouru vers l'objectif fixé initialement.

Manipulation des objets et appropriation des concepts

Afin de fixer l'attention de l'élève mais aussi de lui donner des images sur lesquelles accrocher des concepts et ainsi mieux les visualiser, les objets ont pour objectif d'être des modèles analogiques des concepts mathématiques. Dans les trois exemples suivants, nous exposons donc des processus de modélisation nécessitant l'introduction de concepts mathématiques bien définis. Leur mise en œuvre et surtout leur construction, permettent à l'élève de s'approprier les notions mathématiques. Bien entendu, un élève ne va pas réécrire en cours ou lors d'une activité les théories mathématiques, mais guidé, il sentira la nécessité d'assimiler, de construire des outils, pour arriver à ses fins. Dans le cadre des cours à l'Université, les étudiants auxquels cette approche a été proposée ont en général semblé réceptifs et je pense qu'une réelle étude systématique, si elle n'a pas déjà été réalisée, serait intéressante.

Un point important dans l'appropriation que j'ai pu remarquer dans ma propre expérience est que les élèves sont prêts à faire des efforts conceptuels bien motivés pour comprendre un concept et ses ressorts. Le retour des groupes d'étudiants souligne qu'ils ont préféré comprendre les mécanismes de base, les briques élémentaires, plutôt que d'appliquer des formules. Même si les étudiants en questions ne sont pas du tout destinés à faire des études en mathématiques, ils sentent que l'important est ici de comprendre la démarche pour devenir agiles selon l'expression, en vogue en informatique, introduite en 2001.

Trois exemples traitables en classe

Ces trois exemples ont été traités dans le cadre de l'activité MATh.en.JEANS. Des élèves de classes différentes se réunissaient une fois par semaine en moyenne pour travailler, avec un professeur encadrant l'activité, sur un sujet présenté en début d'année. Les élèves travaillent en général en groupes de deux à quatre personnes sur un sujet qu'ils ont choisi parmi ceux exposés lors de la première séance.

Le chercheur a pour rôle de proposer les sujets et d'assurer un suivi des travaux afin de guider les groupes vers la production d'un document, d'une expérience ou autre jeu. Les rencontres avec le chercheur ont en général lieu tous les mois. À la fin de l'année, les élèves présentent leurs travaux à l'occasion d'un congrès.

---

[8] http://mathenjeans.fr

Cartographie

Niveau

Collège (toutes classes).

Question

Peut-on tracer une carte d'un lieu sans arpenter ce lieu ?

Plan d'expérience

- Depuis la classe, tracer le plan de la cour en regardant depuis la fenêtre,
- trouver comment construire le plan avec les outils fournis,
- comparaison avec des mesures directes, évaluation des erreurs commises.

L'objectif de ce projet est d'introduire les concepts d'angle et de proportionnalité. L'enjeu pour les élèves est de trouver une méthode pour cartographier un territoire, avec les objets qu'il contient, sans mesurer les objets directement. L'application proposée, par exemple, sera de cartographier la cour depuis une fenêtre de la classe ou encore de cartographier la classe sans bouger de sa chaise.

Les outils physiques mis à la disposition des groupes sont :

- un compas,
- un rapporteur,
- un bâton d'un mètre.

Deux outils mathématiques seront utilisés :

- le théorème de Pythagore,
- le théorème de Thalès.

Phase d'observation

Pendant cette phase, les élèves peuvent parcourir la classe pour faire des expériences de mesures d'objets à distance. L'objectif premier sera donc de tracer des triangles et d'étudier la dépendance de l'angle au sommet en fonction de sa position par rapport à la base (en considérant une base qui soit de longueur constante). Cette partie peut être affinée sur une feuille bien entendu. La première application pourra être de mesurer la largeur et la hauteur de la porte en ne s'en approchant pas de plus de deux mètres.

Les questions que les élèves se posent sont alors :

- Peut-on le faire ?
- Si oui, que faut-il mesurer (sachant qu'ils n'ont qu'un bâton de un mètre et un rapporteur).

Ensuite, quand ils trouvent une méthode, il est intéressant de les pousser vers la notion de nombre de mesures minimum pour réaliser le programme.

Construction du modèle

Dans cette phase, le deuxième sommet du cycle, les élèves vont construire leur modèle en utilisant des outils mathématiques pour le justifier. Avec l'aide du professeur, ils verront comment appliquer les théorèmes de Thales et de Pythagore pour obtenir une justification rigoureuse de leur résultat. Il faut alors passer à la phase des simulations.

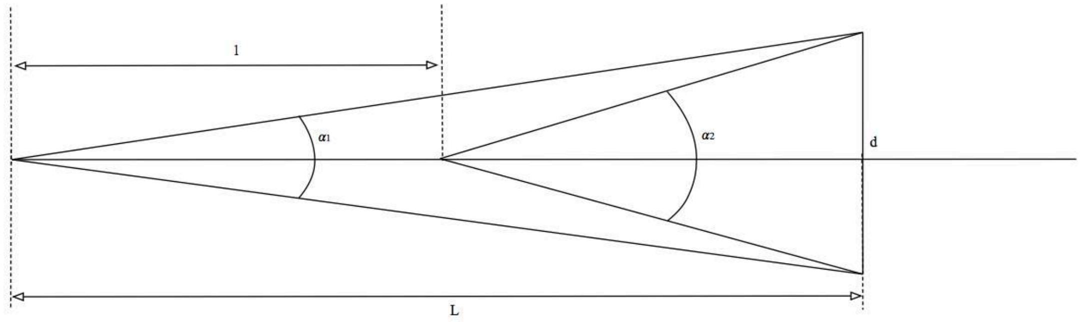


Figure 4

Dans cette phase, l'un des enjeux est de leur fournir les deux outils mathématiques quand ils deviennent indispensables. Ils tenteront de trouver les solutions par eux-mêmes dans un premier temps et sentiront ainsi le besoin d'avoir en main un outil puissant.

L'idée principale est ici de les amener à faire le dessin suivant et calculer la grandeur L en fonction des angles mesurés puis d'en déduire la longueur *d*.

Les notions d'angles pourront être introduites en étudiant la dépendance de la longueur adjacente à un angle droit dans un triangle rectangle en fonction de l'angle opposé. Soit le travail pourra alors être effectué avec des tables construites à la main dans un premier temps, soit directement avec les formules liant la longueur au sinus de l'angle.

Les élèves peuvent bien entendu explorer d'autres pistes, en particulier, si la direction du regard n'est pas perpendiculaire au segment, que faut-il faire ?

Le second point intéressant à aborder est celui des erreurs. L'objectif est de faire sentir aux élèves la différence existant entre des relevés théoriques et des relevés effectifs. En particulier, leur faire sentir qu'à partir d'une certaine taille d'objet et d'éloignement, il devient impossible de discriminer les objets. En reprenant le raisonnement précédent, il sera par exemple possible de tracer des courbes d'erreur en fonction de la distance à l'objet et de la taille de l'objet. Cette erreur sera celle commise entre les mesures au rapporteur puis les calculs et les données effectives du dessin.

Modèle numérique

> Les élèves peuvent construire un petit programme, par exemple sous un tableur, pour systématiser leurs formules. La phase de tracé de la carte peut être mise en œuvre. Cette partie est une synthèse de mise en œuvre qui sera ensuite comparée avec un arpentage effectif du territoire.

Il pourra, en fonction des possibilités, être aussi intéressant d'effectuer ce travail en pleine nature pour des objets très lointains. Dans ce cas, la technique de rapprochement ne fonctionnant plus, il faudra effectuer des relevés multiples depuis des points très différents très éloignés. Cette partie comprendra alors la notion d'intersection de droite et de secteurs angulaires.

Mirages

Niveau

Collège (toutes classes).

Question

Comment expliquer le phénomène des mirages et le reproduire mathématiquement ?

Plan d'expérience

- construire un modèle numérique rendant compte du phénomène,
- effectuer des calculs sur ordinateur pour vérifier le fonctionnement du modèle,
- monter une expérience de physique à la lumière des résultats précédents.

Dans ce projet, les concepts visés sont les notions de géométrie et de trigonométrie élémentaire, les concepts de sommes et de limites de suites et les notions de taux de variation et de dérivées. Cette activité peut être divisée en deux niveaux : dans le premier les élèves peuvent s'intéresser au modèle analogique des matériaux multicouches, voire bi-couches, dans le second l'accent pourra être mis sur les notions de limites et le lien avec les dérivées via le taux de variation.

Les outils physiques à la disposition du groupe :

- de l'eau,
- du gros sel,
- éventuellement un laser (se trouve dans les salles de physique de collège),
- règle graduée.

Les outils mathématiques à la disposition du groupe :

- notion d'angle et trigonométrie,
- géométrie euclidienne,
- suites,
- taux de variation et dérivées.

Phase d'observation

La phase d'observation pour cet atelier peut être assez délicate et dans l'idéal sera effectuée avec l'enseignant de physique. La première observation à effectuer est celle d'une image de mirages pour essayer de faire comprendre aux élèves la nature du phénomène, en particulier, leur faire comprendre que le sol agit comme un miroir. La question se focalisera alors sur la notion de vision : voir un point sur un objet est équivalent à tracer un trajet lumineux entre l'œil de l'observateur et l'objet. C'est à partir de ces observations qu'il faut les amener à se rendre compte que dans le cas qui nous intéresse, les rayons ne rebondissent pas sur le sol mais sont déviés près du sol. Ainsi, dans un premier temps, ils devront se focaliser sur les raisons physiques élémentaires de la déviation d'un rayon. Des observations pourront être effectuées des phénomènes de diffraction et les lois de la réfraction de Descartes seront alors mises à leur disposition.

Deux points importants seront mis en relief pour construire la base du modèle :

- l'utilisation des lois de Descartes pour estimer la diffraction d'un rayon lumineux,
- Un comportement limite : si le rayon est trop rasant, il est réfléchi.

Ceci permettra de construire un modèle simplifié de miroir.

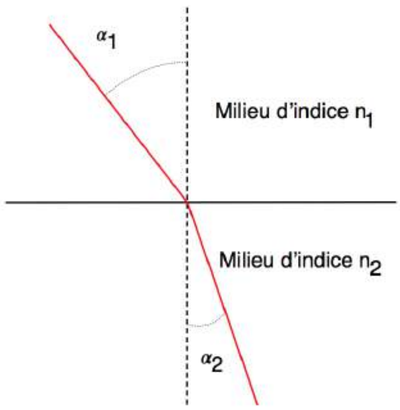


Figure 5

Forts de l'observation de l'effet du changement d'indice sur la trajectoire des rayons, il faut alors amener les élèves à faire le lien avec l'effet miroir des mirages et le fait que l'indice de réfraction de l'air sera modifié avec la température. Le sol est bouillant et réchauffe l'air au dessus de lui, mais il n'arrive pas à réchauffer toute l'atmosphère ! Un "dégradé" de température se forme donc et ainsi un dégradé d'indices de réfraction.

Pour modéliser ce phénomène, dans un premier temps, on considèrera que le domaine est stratifié, c'est-à-dire un empilement de domaines compris entre deux plans horizontaux d'indices de réfractions différents. Dans les faits, on s'intéressera d'abord à une plaque puis deux et ainsi de suite.

Par la suite, la question suivante pourra être posée :

> Un explorateur sur une lointaine planète regarde une mer de glace, sa fusée se reflète-t-elle dedans quand il se trouve au loin ?

Construction du modèle

> Le modèle sera construit sur l'hypothèse du milieu stratifié. Le premier travail est donc de déterminer le point de sortie ainsi que l'angle de sortie d'un rayon en fonction de son point d'entrée et de son angle d'entrée. Le schéma précédent (réfraction) illustre la relation : $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$,

Ensuite, le même travail est effectué sur plusieurs couches de matériaux (voir dessin suivant).

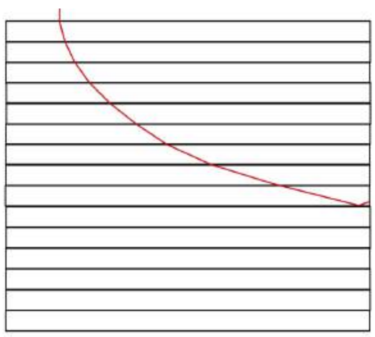


Figure 6

Pour aller plus loin, on peut écrire la suite des abscisses des points d'impact. On voit alors apparaître des taux de variations qu'il est possible de relier, quand la taille des plaque tend vers zéro et leur nombre vers l'infini, à des dérivées. On construit ainsi une équation différentielle ordinaire dont la solution donnera la forme du rayon lumineux.

Modèle numérique

Pour la partie numérique, il est possible d'effectuer les calculs facilement sous un tableur. L'objectif est ici de diminuer la taille des plaques et d'en augmenter le nombre pour voir remonter le rayon lumineux.

La partie expérimentale de cette étude est un peu plus lourde à mettre en place que celle des deux autres exemples de ce texte. Si l'on met une grosse quantité de gros sel dans de l'eau douce et que l'on pointe un laser sur le mélange formé ensuite par le sel fondu, l'indice de diffraction dépendra de la concentration de sel et entraînera une inflexion visible du rayon. Je vous avoue que la réussite de l'expérience n'est pas toujours garantie…

Boussoles

Niveau

Collège, Lycée (toutes classes). Le sujet est adaptable au programme de chaque classe.

Question

Construire et expliquer un modèle mathématique rendant compte du mouvement des boussoles.

Plan d'expérience :

- effectuer des observations sur des boussoles en jouant avec l'aide d'aimants,
- décider des phénomènes que l'on désire modéliser,
- mise en place du modèle,
- tester le modèle en comparant son comportement aux expériences de début de projet.

L'objectif de ce projet est de sensibiliser aux notions de fonctions trigonométriques, de géométrie et d'extrema de fonctions à valeurs réelles.

Les outils physiques à la disposition du groupe :

- des boussoles,
- des aimants.

Les outils mathématiques à la disposition du groupe :

- la notion d'angle et de produit scalaire,
- la notion de maximum d'une fonction.

Phase d'observation

Dans cette phase, pour cette activité qui peut être effectuée en classe en un cours (après test) pour sa version la plus rapide, il faut distribuer des boussoles aux élèves ainsi que des aimants. L'objectif est de leur faire observer quelles sont les positions de la boussole en fonction de la position de l'aimant.

Deux observations principales :

- la boussole s'aligne sur l'aimant et reste stable,
- si l'on approche l'aimant pour le faire arriver dans la direction opposée, la boussole semble rester sur place, mais le moindre choc la fait se retourner et rejoindre la position alignée, plus stable, de la ligne précédente.

Alors, afin de faire comprendre la notion de système physique, il est possible de prendre un exemple intermédiaire : celui des montagnes russes.

Un chariot sur des montagnes russes a trois types de positions :

- le chariot est en pleine pente, s'il est lâché, il dévale vers le fond de la vallée,
- le chariot est sur un sommet, il ne bouge pas, mais la moindre perturbation le fera dévaler d'un côté ou de l'autre,
- le chariot est au fond d'un creux, on aura beau le secouer, il restera au fond du creux.

Cet exemple montre que le système physique peut être hors équilibre (en mouvement potentiel), en équilibre stable (au fond du creux) ou alors en équilibre instable (sur un sommet). Pour la boussole, on observe aussi ces trois états.

Construction du modèle

L'enjeu de cette partie est de leur faire construire une fonction d'énergie, à l'image des montagnes russes, en plaçant les points d'intérêt que sont les équilibres stables et instables.

La fonction dépendra de l'angle de la boussole avec le champ extérieur (axe de l'aimant) et variera entre deux valeurs maximales. De plus, il est possible de la tracer sans lever le crayon (pas d'à-coups dans le comportement de la boussole quand on fait tourner l'aimant autour de la boussole) et le dessin se répète à chaque fois que l'on a fait un tour (remarque sur la périodicité).

Une possible complexification du modèle serait de prendre en compte deux boussoles en interaction. Dans ce cas, la difficulté résidera non seulement dans la construction des champs magnétiques émis par les boussoles mais aussi dans la mise en place de l'expérience qui nécessite de manipuler de petites boussoles fortement aimantées.

Modèle numérique

Pour cette partie, il est possible de tracer la fonction sinus pour vérifier qu'elle colle effectivement au modèle que l'on cherche à construire. Pour des élèves avancés (terminale ou licence) il serait possible de mettre en place une simulation pour les deux boussoles.

MODELISER DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES : POURQUOI ET COMMENT ? QUELLES RELATIONS ENTRE MATHEMATIQUES ET PHYSQUE ?

Marc Rogalski
Professeur émérite à l'Université de Lille 1, collaborateur bénévole à l'université Paris 6 et chercheur associé au laboratoire LDAR

Résumé – Nous avançons des arguments (d'ordres social, historique et épistémologique) pour l'idée qu'il faut, au moins à partir du lycée, développer des activités de modélisation en classe de mathématiques. Nous donnons des exemples de telles madélisations, en particulier en physique. Nous mettons en évidence leurs difficultés et leurs avantages, en particulier pour la compréhension des modes de raisonnement de l'analyse mathématique. Enfin, nous évoquons sommairement les problèmes de formation des maîtres.

Quelques constats et principes

Les fondements des mathématiques élémentaires modélisent le réel

L'enseignement du comptage, de l'addition, du produit de nombres entiers : il s'agit clairement de modélisation d'opérations sur le réel. Il en est de même pour les fractions, les décimaux,… La géométrie enseignée au primaire modélise l'espace physique et ce qui y est invariant dans les mouvements, par des figures, matérielles au début (mesures, instruments), et par des relations entre elles. D'ailleurs, personne n'imagine d'enseigner au primaire en partant des axiomes de Peano de l'arithmétique, ni à partir des axiomes d'Euclide !

Collèges, lycées, le supérieur : les mathématiques pour elles-mêmes ? Comme le jeu d'échec ?

Le processus de mathématisation : abstraction, définitions, démonstrations, problèmes internes aux mathématiques… tout cela devient nécessaire à partir d'un certain niveau de l'étude des mathématiques. L'essence des mathématiques, ce qui les rend utilisables dans toutes les disciplines scientifiques, c'est leur caractère de grande généralité et leur absolue fiabilité, grâce à la rigueur apportée par la pratique de la démonstration.

Cela peut devenir un jeu passionnant en lui-même, les mathématiciens le savent bien.

Le jeu d'échec aussi !

Une grande complexité, des stratégies variées, des découvertes empiriques, des raisonnements rigoureux, des évolutions historiques, un vif plaisir à jouer, à résoudre des problèmes : le jeu d'échec ressemble par bien des côtés aux mathématiques !

Pourtant, aucune des sociétés développées n'impose l'enseignement obligatoire du jeu d'échec, alors qu'elles le font toutes pour les mathématiques. Il y a donc des raisons, incompatibles avec l'idée des « mathématiques seulement pour elles-mêmes », qui expliquent que leur enseignement soit obligatoire. Il s'agit, bien sûr, de leur utilité sociale et scientifique, en particulier de leurs liens avec la physique.

De plus, seule une toute petite minorité de nos élèves, et même de nos étudiants, sont destinés à se consacrer aux « mathématiques pures ». De nombreuses professions n'utilisent pas de mathématiques autres qu'élémentaires. Dans d'autres professions, elles ne serviront que d'outil technique. Seules les professions scientifiques (au sens large) exigent des mathématiques bien dominées, qui en particulier seront utiles dans des activités de modélisation.

Anticipant les arguments que nous développerons plus loin, notre thèse est ainsi *qu'il faut équilibrer dans l'enseignement, à partir du lycée, les mathématiques pour elles-mêmes et les mathématiques pour modéliser le réel* : les unes sont nécessaires à la société, les autres sont essentielles pour le fonctionnement même des mathématiques.

Que nous dit l'histoire ?

L'histoire des mathématiques est étroitement liée à celle des autres disciplines et à divers problèmes intéressant la société.

Donnons quelques exemples bien connus :

- l'invention des nombres purs et le développement du commerce chez les babyloniens (le passage de deux signes différents pour « cinq chameaux » et « cinq ânes » au nombre « pur » cinq) ;
- les besoins de l'astronomie et de l'établissement du calendrier ont motivé l'invention de la trigonométrie, et les calculs pénibles de celle-ci ont poussé à l'usage des logarithmes ;
- les covariations de grandeurs, dès l'époque d'Oresme, ont motivé l'introduction des graphes, et les fonctions, chez Leibniz et Newton, étaient systématiquement associées à des courbes parcourues en fonction du temps ;
- les problèmes d'optimisation (Fermat), puis de variation de grandeurs, ont motivé l'introduction des dérivées, associées aux vitesses, débits, etc ;
- la mécanique, mais aussi l'étude des épidémies, aboutissant à des systèmes d'équations compliquées sur des suites récurrentes, ont conduit aux équations différentielles ;
- l'étude par Euler des mouvements des fluides a fortement motivé l'introduction et le développement des fonctions de variables complexes ;
- le rôle joué par les jeux et les assurances dans le développement des probabilités est bien connu ;
- plus récemment (fin 19$^{\text{ème}}$-début 20ème siècle), l'étude des équations de la physique, en particulier les équations intégrales et aux dérivées partielles, a été la motivation principale du développement de l'analyse fonctionnelle…

Il ne s'agit pas, bien souvent, d'applications de mathématiques constituées, déjà là, mais de « double émergence » (selon la formule de (Robert et Treiner 2004)). D'ailleurs, bon nombre de mathématiciens ont été aussi physiciens, astronomes, ont travaillé pour la marine, l'artillerie…

Cela n'exclut pas un fort développement des mathématiques à partir de problèmes internes (arithmétique, équations, algèbre, topologie…). C'est d'ailleurs l'interaction entre les aspects internes et externes qui semble le moteur le plus puissant dans les progrès des mathématiques.

Cet aspect s'est très accentué depuis 50 ans, les relations entre mathématiques et physique sont désormais omniprésentes. Mais aussi avec la biologie, l'informatique, l'économie…

Dans la suite, nous allons regarder de plus près la manière dont les mathématiques interviennent dans les sciences, et en particulier en physique.

Les mathématiques contribuent aux autres sciences et à la vie sociale

Il suffit d'ouvrir un manuel de physique, de chimie, de biologie, d'économie pour se rendre compte à quel point les mathématiques, à la fois, interviennent comme outil, et sont constitutives de concepts de ces disciplines (nous reviendrons sur ce point par des exemples).

Il est d'ailleurs impossible ici de ne pas relever la profonde stupidité épistémologique des nouveaux programmes de sciences des lycées ! Par exemple, le programme de physique s'y donne explicitement comme objectif d'y éliminer l'usage des mathématiques ! Le plus sûr moyen de remplacer la physique rationnelle par une vague vulgarisation…

Par ailleurs, de nombreuses activités sociales, ne se présentant pas *a priori* comme relevant d'une discipline scientifique précise, demandent néanmoins des mathématiques : pensons aux pourcentages, aux modes électoraux, aux intérêts d'emprunts, à l'usage social et politique des statistiques, aux liens entre probabilités et évaluations de risques, aux taux de croissance, d'imposition…

Sur tous ces aspects, il faut à la fois que les citoyens soient capables de mettre en œuvre certaines mathématisations, au risque de ne pas comprendre bien des aspects de leur vie politique et sociale, et d'avoir une attitude critique sur les « modèles » dont on leur assure qu'ils sont « vrais et incontournables » sans jamais leur en donner les hypothèses implicites.

Au-delà de la vie politique et sociale, la vie de tous les jours, dans ses aspects technologiques, fait appel aux mathématiques, mais implicitement. De plus en plus de mathématiques sont cachées dans la complexité des objets technologiques (images numériques, codes cryptographiques, musique…). Est-ce prudent que les citoyens ignorent complètement ces usages des mathématiques ? Que les élèves en aient une idée dans des cas où c'est possible, qu'ils puissent dominer l'usage des mathématiques dans la vie sociale, savoir comment elles interviennent dans les autres disciplines : c'est un objectif de la culture citoyenne que l'école doit donner, c'est l'un des enjeux de la vie démocratique de la société.

Mais cela doit se faire dans le respect du mode de pensée propre aux mathématiques, qu'il faut donc confronter à d'autres modes de pensée.

Interactions et modélisation

Quels apports des mathématiques aux autres sciences ?

Nous nous proposons de donner plusieurs exemples de ces apports.

Nous commençons par des exemples où les mathématiques sont constitutives des concepts de la physique.

- Le concept de proportionnalité est au cœur de la définition de bien des grandeurs physiques, il est inséparable de notions comme vitesse, débit, taux d'accroissement, pente d'une droite décrivant un phénomène physique.
- La mesure de grandeurs est constituée par et constitue la notion de nombre réel.
- Vitesse instantanée, débit non constant, équations de phénomènes évolutifs sont fondés par la notion de dérivée et par le calcul différentiel.
- Mesurer une grandeur produit, c'est la même chose que définir l'intégrale (nous y reviendrons).
- Des vecteurs mathématiques ou des forces physiques, lesquels fondent les autres ?

Mais on constate en fait de subtiles différences de points de vue, quand mathématiciens et physiciens utilisent ce qui semble être la même notion. Cela concerne la nature des raisonnements faits, les types de « preuves », l'existence des objets définis ou calculés (nous reviendrons plus loin sur cette question).

On peut alors, soit essayer de réduire ces différences quand c'est possible, soit les analyser comme représentatives des différences de paradigmes entre disciplines, et expliciter ces différences aux élèves. Nous y reviendrons.

Bien sûr, les apports des mathématiques à d'autres sciences que la physique se sont développés il y a déjà longtemps. Par exemple, c'est Daniel Bernoulli qui a le premier, en utilisant des suites récurrentes puis en les remplaçant par des équations différentielles, montré l'efficacité sociale de la vaccination pour réduire les méfaits des épidémies de variole. Plus récemment, l'économie mathématique s'est beaucoup développée, ainsi que les aspects mathématiques de la sociologie. Que l'on pense par exemple à l'indice de Gini (notant l'importance des inégalités de revenus dans une société) entièrement fondé sur une approche intégrale.

Au-delà de la contribution à des concepts d'autres disciplines, les mathématiques y servent aussi comme outils.

Des résultats (énoncés, techniques) sont utilisés comme outils dans des activités sociales, ou par d'autres disciplines, en particulier dans leurs activités de mathématisation de leurs propres modèles, à des fins de calculs, de prévisions, de simulations, de vérifications, d'adaptations, etc.

Faire cela avec les élèves, y compris avec des moyens informatiques, peut être un moyen de motiver autrement des résultats mathématiques, d'avoir sur eux un autre point de vue, et de faire sentir le potentiel universel des mathématiques dans les sciences et les activités sociales.

Apport d'autres sciences ou de problèmes de la vie courante aux mathématiques. Exemples dans la classe

(a) L'histoire du concept de fonction montre le grand rôle qu'y a joué la covariation de grandeurs (physiques, géométriques…)

Or l'introduction de la notion de fonction en $3^{\text{ème}}$ par la notion de graphe ne va pas du tout de soi pour les élèves : pourquoi une courbe tracée dans le plan, uniquement numérique, les ferait-elle penser à la notion de fonction ? Une étude sur des élèves de 3ème et seconde a montré que cela ne passe pas du tout.

Il faut amener les élèves à penser eux-mêmes à quelque chose qui soit du type graphe pour représenter un phénomène où des grandeurs varient.

Voici deux exemples.

Exemple 1

Vous vous promenez sur les bords d'un square carré, qui a une statue en son centre (figure 1). Pouvez-vous décrire comment varie la distance entre la statue et vous lors de votre promenade sur le bord du square ? Essayez de le faire d'abord oralement, puis de transmettre un dessin pour expliquer cette variation à un camarade qui ne peut vous entendre. Que deviendrait votre dessin si la statue était à un coin du square ? (F. Hitt)

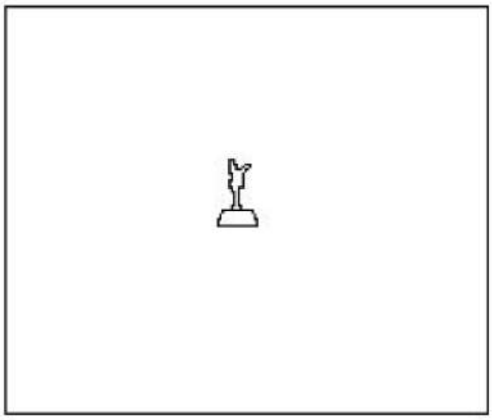


Figure 1– Vous vous promenez sur les bords d'un square carré, qui a une statue en son centre

Voici des dessins successivement proposés par les élèves, travaillant en petits groupes. On voit clairement une évolution depuis une figuration « matérielle » où les grandeurs à mesurer sont présentées dans leurs positions réelles jusqu'à un véritable graphe, avec deux étapes cruciales : étaler le bord du carré pour représenter la distance parcourue, représenter verticalement les distances à la statue.

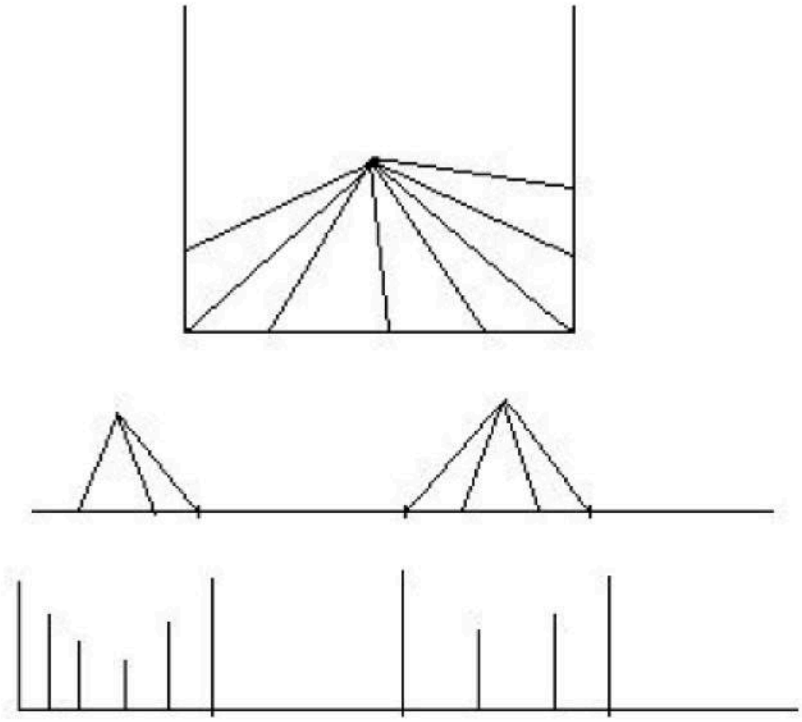


Figure 2 – Dessins proposés par les élèves

Exemple 2

Dans un récipient de forme cylindrique, un robinet débite régulièrement de l'eau (1 litre par seconde). Représentez par un dessin la variation du niveau de l'eau dans le récipient, quand le temps s'écoule à partir du moment où on ouvre le robinet.

On suppose maintenant que le récipient est formé de trois cylindres superposés (voir figure 3). Décrivez encore par un dessin la variation du niveau de l'eau.

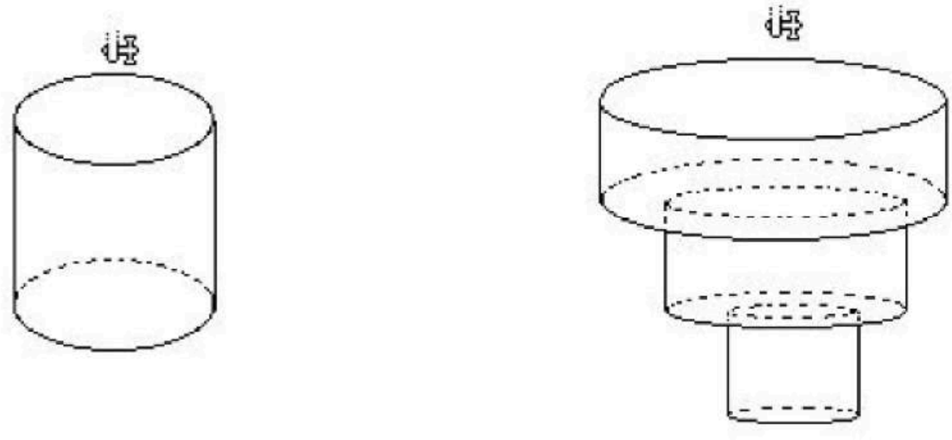


Figure 3 – Un récipient de forme cylindrique, puis un récipient formé de trois cylindres superposés

On a donc une approche d'abord qualitative. En troisième, on peut passer au modèle linéaire pour l'eau dans le cylindre, puis dans la deuxième forme de récipient. En première ou terminale, le cas d'un récipient en forme de tronc de cône la pointe en bas va fournir un graphe en racine cubique du temps, en réinvestissant la dérivée et la primitive pour calculer le volume (on y reviendra).

De façon générale, il est essentiel de lier l'étude des graphes associés aux fonctions affines $y = a\,x + b$ à la description de variations de grandeurs à accroissements proportionnels. Cela donne en particulier un point de vue plus opérationnel pour associer la pente d'une droite à une vitesse, un débit, une intensité, etc.

(b) La notion d'intégrale enseignée en terminale S ou en première année d'université est très mal comprise par les élèves ou les étudiants.

Une étude faite à Lille a montré qu'à peine 12% des étudiants en fin de L1 savaient réinvestir l'intégrale pour mesurer une grandeur produit, quand l'un des facteurs est variable (une fonction non constante). L'idée d'une *procédure intégrale* très générale (commune aux mathématiques et à la physique) :

découper, encadrer, sommer, passer à la limite

n'est absolument pas comprise, or elle est essentielle pour comprendre l'intégrale et savoir l'utiliser dans les sciences, concurremment avec une procédure dérivée-primitive dite aussi *procédure de l'accroissement différentiel*

$$F(x + h) - F(x) = f(x)\,\Delta x + o(\Delta x).$$

Voici une situation (due à D. Grenier, M. Legrand, F. Richard) qui est destinée à construire à la fois les intégrales des physiciens et celles des mathématiciens (situation très robuste souvent utilisée). Pour des précisions, voir (Legrand 1990) et (Rogalski 2001).

Quelle est la force d'attraction F entre une barre fine de 18 kg et 6 m de long et une masse ponctuelle de 2 kg située dans le prolongement de la barre, à 3 m ? On rappelle la loi de l’attraction universelle entre deux masses ponctuelles m et m', à distance r : $F = G\, m\, m' / r^2$.

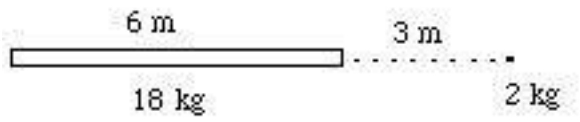


Figure 4 – Une barre fine de 18 kg et 6 m de long et une masse ponctuelle de 2 kg, située à 3 m.

Pour peu qu’on laisse travailler et interagir les étudiants, débattre du problème, on voit apparaître les étapes suivantes (avec plus ou moins d’interventions de l’enseignant selon l’organisation didactique du travail) :

- Principe du centre de gravité ⇒ $F = G$ (on concentre toute la masse au centre) ;
- Découpage de la barre en 2 et même principe, addition ⇒ $F \approx 1{,}21G$, résultat différent ;
- Découpage en 6 ⇒ $F \approx 1{,}32G$;
- Principe d’encadrement : concentrer la masse d’un segment de la barre à l’un et à l’autre de ses bouts ⇒ $4/9\, G < F < 4\, G$, puis $0{,}72\, G < F < 2{,}5\, G$, puis (pour 6 morceaux) $1{,}07\, G < F < 1{,}66\, G$…

Donc, par *découpage*, *sommation* et *encadrement*, on voit des résultats successifs, qu’on peut mener bien plus loin par un petit algorithme et un tableur.

L’idée de passage à la limite s’impose alors… c’est la *procédure intégrale*.

On peut alors décontextualiser la procédure utilisée dans le cas de la barre par la situation générale en physique, la mesure des grandeurs-produits. Dans des situations simples, des grandeurs-produits (ou quotients selon le point de vue) sont définies ainsi (voir Rogalski 2001) :

- densité constante × volume = masse ;
- hauteur constante × longueur de la base = aire ;
- hauteur constante × aire de la base = volume ;
- vitesse constante × temps = distance parcourue ;
- force constante × déplacement (colinéaire) = travail ;
- pression constante × surface = force ;
- (distance constante à un axe)^2× masse ponctuelle = moment d'inertie ;
- (inverse de la distance constante)^2 × produit des masses ponctuelles = attraction.

Généralisons maintenant ces situations. Les deuxièmes facteurs sont associés à des domaines » Ω sur lesquels sont définis les premiers facteurs, supposés maintenant être des fonctions f non constantes : densité en un point d’un volume Ω, hauteur au-dessus d'un point de la base Ω, pression en un point d'une surface Ω, distance d'un point de Ω à l'axe, etc.

De plus on peut définir la mesure $m(A)$ d'une partie A de Ω, ou du moins d'une classe de parties de Ω : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de Ω.

A quelles conditions peut-on mesurer, ou même définir, une grandeur $I(\Omega, f, m)$ ou $\int_\Omega fdm$ attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω, la fonction *f* définie sur ce domaine et la mesure *m* ?

On est amené à dégager les trois principes suivants, dont les sens sont clairs dès qu'on pense aux problèmes physiques associés :

(1) Si $f = C$ (constante), $I(\Omega, f, m) = C \times m(\Omega)$.

(2) L'additivité par rapport au domaine (la relation de Chasles).

(3) La croissance : si $f \leq g$, $I(\Omega, f, m) \leq I(\Omega, g, m)$.

Pour mesurer une grandeur de la forme $I(\Omega, f, m)$vérifiant ces trois principes, on fait comme avec la barre : on découpe Ω en morceaux Ω_i , on encadre *f* sur chaque morceau entre m_i et M_i , puis par sommation on encadre la mesure cherchée par des sommes inférieures et supérieures $\sum m_i\, m(\Omega_i)$ et $\sum M_i\, m(\Omega_i)$, et enfin on essaye de passer à la limite.

On aboutit ainsi à une notion physique d'intégrale, utilisable pour mesurer des grandeurs, et qui va pouvoir servir de support de sens pour définir l'intégrale en mathématiques.

On a en fait intégré les « fonctions en escalier » $\sum \lambda_i 1_{\Omega_i}$ par $\sum \lambda_i m(\Omega_i)$. Et pour d'autres fonctions *f* ?

Il reste à définir la mesure $A \to m(A)$ de parties de Ω, puis à définir en quel sens on passe à la limite.

Deux choix sont naturels pour la première question :

(a1) Ω est un intervalle, les Ω_i aussi, et leur mesure est leur longueur (cas de la barre).

(a2) Les Ω_i sont les éléments d'une tribu, leur mesure est la mesure de Lebesgue.

Deux choix aussi s'imposent comme simples pour la deuxième question :

(b1) on approche *f* uniformément par des fonctions en escalier ;

(b2) l'approximation se fait au moyen de l'intégrale : on dit que l'intégrale d'une certaine fonction en escalier est petite.

Si on recoupe, cela donne *quatre théories mathématiques différentes de l'intégrale*.
Seules les combinaisons (a1b1) [intégrale des fonctions réglées] et (a1b2) [intégrale de Darboux-Riemann] sont raisonnables en L1-L2 (les deux autres combinaisons donnent l'intégrale de Lebesgue des fonctions bornées et l'intégrale de Lebesgue générale).

Reste à voir comment cela se raccroche à l'intégrale de terminale S [aire sous la courbe].

Voici deux autres situations de modélisation aptes à faire ce lien.

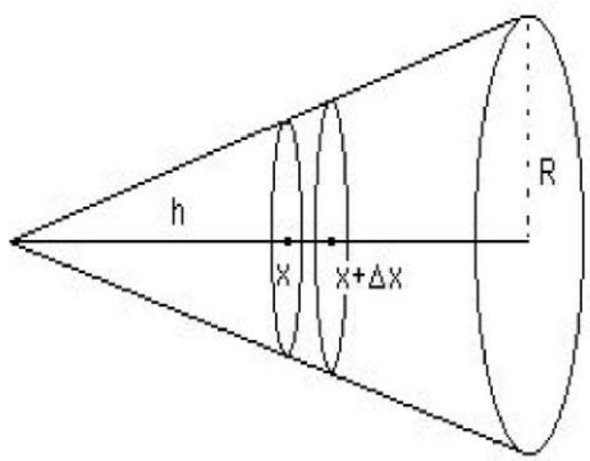


Figure 5 – Volume d'un tronc de cône de révolution

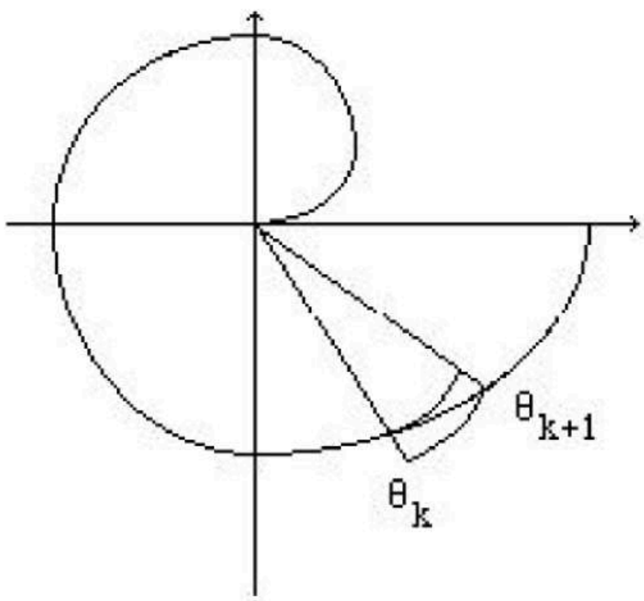


Figure 6 – Aire de la spirale d'Archimède $\rho = C\,\theta$ en coordonnées polaires

Dans les deux cas la procédure intégrale fait intervenir les sommes $\sum_{1\le i\le n} k^2$ et cela amène à l'aire sous le graphe de la fonction $x \to x^2$.

De même, si on note $V(x)$ le volume du tronc de cône entre les abscisses 0 et x, l'encadrement montre que $V(x + \Delta x) - V(x) = \mu x^2 \Delta x + o(\Delta x)$, et le calcul de V se ramène à une *recherche de primitive*. Ceci marche aussi pour la spirale.

Cette méthode de *l'accroissement différentiel* peut se faire dans de nombreuses situations, voici par exemple, résumée par un dessin, celle du calcul de la force exercée sur un barrage vertical plan par l'eau qu'il retient, dans (Rogalski 2001).

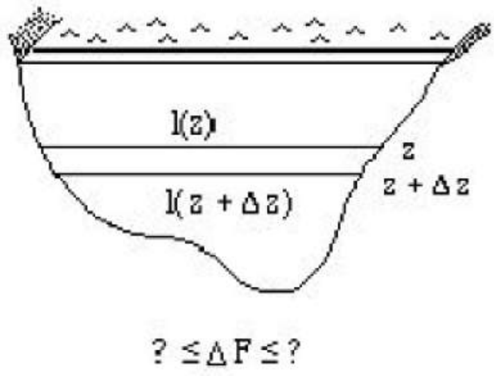


Figure 7 – Calcul de la force exercée sur un barrage vertical plan par l’eau qu’il retient

En tout cas, ce type de modélisation introduit à une double émergence de l’intégrale, à la fois en physique et en mathématiques.

Ainsi, dès qu’on pratique une modélisation à un certain niveau, on est loin des diagrammes circulaires qu’on présente souvent dans les textes décrivant ce type d’actions, avec des modélisations séparées dans les deux disciplines et des allers-retours entre les deux (voir par exemple (Kuzniak et Vivier 2011)).

En fait, les scientifiques font déjà des mathématiques dans leurs modélisations intradisciplinaires, et la mathématisation utilise à plein des concepts de la discipline d’où provient le problème à modéliser, surtout quand il s’agit de physique.

De plus, l’étude du côté mathématique peut éclairer les lois physiques cherchées, de façon constitutive, pas seulement pour calculer. Nous y reviendrons.

Quelques difficultés de la modélisation de phénomènes physiques : exemples, modélisation et modes de pensée

(a) D’abord, la physique est difficile

Il s’y présente beaucoup d’obstacles épistémologiques dus au fait que la pensée quotidienne se forge au contact d’un monde réel simplifié par rapport à la physique, mais est souvent quand même efficace [force et mouvement, par exemple…]. Les didacticiens de la physique ont particulièrement étudié ce phénomène et ses implications didactiques. Les dessins qui suivent (figure 8) illustrent ces difficultés par quelques situations.

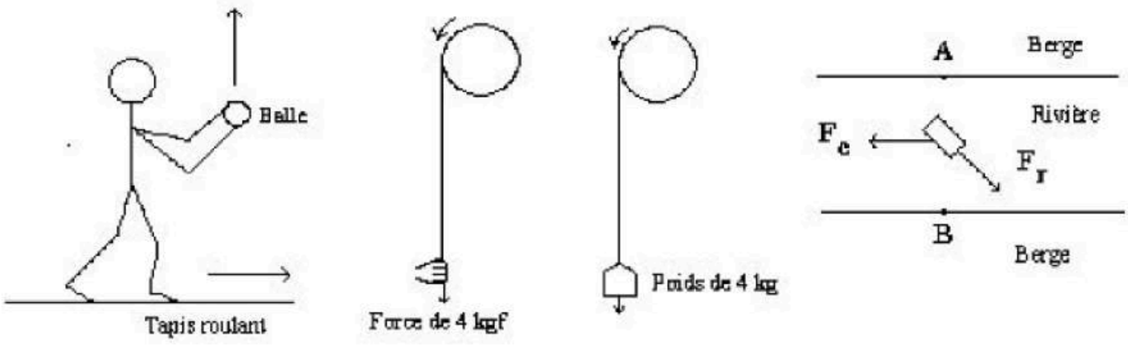


Figure 8

La première figure illustre la difficulté du concept d’inertie : nombreuses sont les personnes qui pensent que la balle jetée en l’air retombe derrière le lanceur (même si on est sur la lune !).

La deuxième figure, accompagnée de la question « si on débloque les deux poulies au même instant, quelle est celle qui tourne le plus vite au bout de quelques secondes ? », illustre les difficultés de la mécanique (la réponse « même vitesse » est fréquente).

La troisième figure est tirée d’un manuel de mathématiques dont les auteurs ont voulu appliquer les recommandations des programmes de 2002 de « faire de l’interdisciplinaire », à l’occasion de la somme de vecteurs (question : « dans quel sens ramer pour que, malgré le courant, on aille de A en B ? ») ; malheureusement ils ont confondu composition des vitesses et addition des forces, en oubliant de plus la résistance de l’eau (sinon le mouvement est uniformément accéléré !).

Un autre exemple classique est, ayant dessiné la trajectoire parabolique d’une pierre jetée en l’air, de demander de dessiner en divers points de la parabole la force s’exerçant sur la pierre. Des réponses fréquentes la représentent colinéaire à la vitesse !

(b) Puis il y a parfois dans les manuels de physique des modélisations parachutées… et contradictoires.

Par exemple, on trouve dans un même manuel, à deux pages de distance, d’une part une modélisation de la chute des corps dans l’air avec une *résistance proportionnelle à la vitesse* : $R = kV$, et d’autre part une modélisation de la course d’un bateau sur son erre avec une *résistance proportionnelle au carré de la vitesse* : $R = k V^2$. Et dans ce dernier cas le bateau va à l’infini ! On ne trouve dans ce manuel aucune discussion sur les hypothèses de validité de ces deux modélisations, contradictoires et, pour la dernière, contraire à la réalité (un bateau sur son erre finit par s’arrêter).

Et si on essayait le rasoir d’Ockham ? Courbe concave (freinage) à asymptote horizontale (le bateau s’arrête), passant par (0,0). La plus simple est : $y = a\, t / (t + b)$. Après des calculs simples du niveau terminale, ceci donne $R = k\, V^{3/2}$! Donc une loi physique inconnue peut être fournie par la modélisation mathématique.

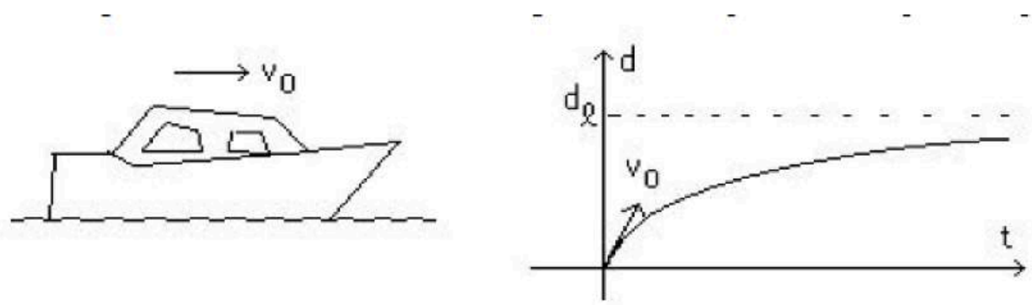


Figure 9

En fait, le problème est plus complexe, les hypothèses sur la nature de la résistance sont différentes en vitesse faible ou forte (et c'est parce que V^2 est très petit quand V est petit que le bateau ne s'arrête pas). Mais, surtout, *modéliser sans discuter ces hypothèses est absurde*.

(c) Voici un autre exemple où les mathématiques semblent faire découvrir un phénomène imprévu : le pendule en rotation

En écrivant l'équation de l'équilibre, et en remarquant que x doit être inférieur à sa longueur l, on voit que le pendule ne s'écarte que si la vitesse de rotation ω est supérieure à un seuil de valeur $\omega_0 = (g\,/\,l\,)^{1/2}$. D'où une courbe décrivant la variation de x en fonction de ω.

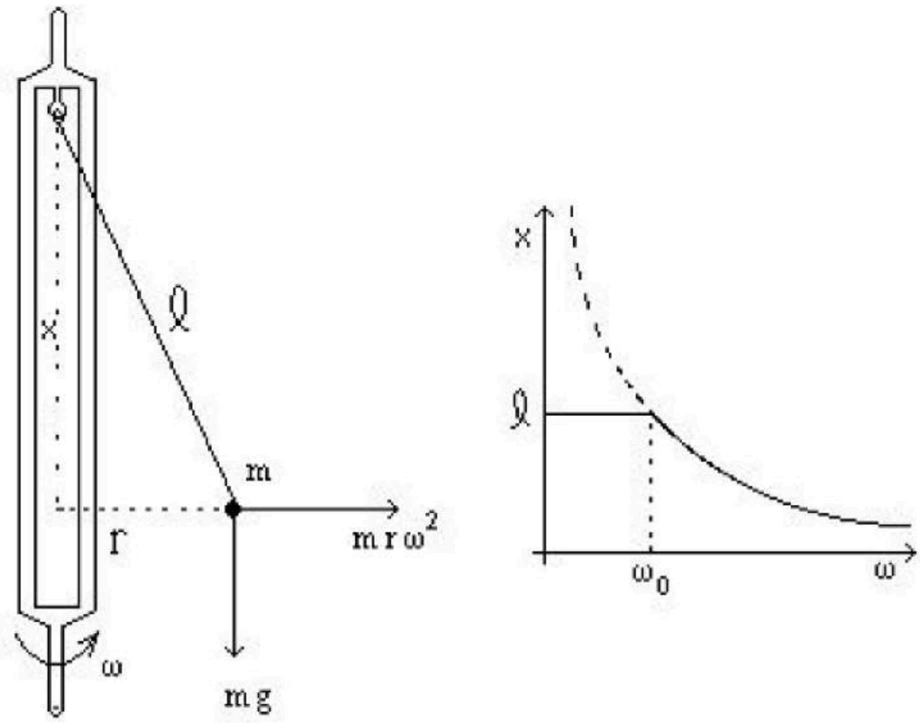


Figure 10 – Le pendule en rotation

Mais il s'agit d'une « vue de l'esprit mathématique », coupée de la réalité ! D'abord, si la situation de départ était bien symétrique, l'immobilité serait théoriquement possible, quelle que soit la vitesse de rotation, et seule l'instabilité de cette position d'équilibre peut expliquer que le pendule s'écarte d'un certain côté, par un infime décentrage. Mais il y a plus : si effectivement on suppose un décentrage du point d'attache de $\varepsilon > 0$ par rapport à l'axe de rotation, le calcul montre que l'effet « seuil » de la modélisation précédente est inexistant : quel que soit ω aussi petit qu'on veut, le pendule s'écarte de la position verticale !

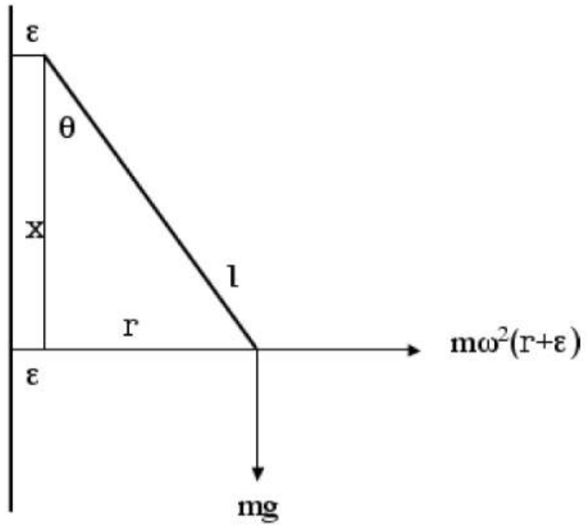


Figure 11

On obtient, en prenant comme variable l'angle θ du pendule avec la verticale, la relation $\omega^2 = g\, tan\theta\, /(\varepsilon + l\, sin\theta)$.

Pour $\omega = \omega_0$, on trouve $\theta = 7{,}3$ degrés environ (en prenant, pour la longueur du pendule $l = 1$m, pour le décentrage $\varepsilon = 1$mm, et pour l'accélération de la pesanteur $g = 10$ m/s^2), ce qui n'est pas négligeable : il n'y a pas de seuil !

(d) Et si les mathématiques donnent apparemment une absurdité ?

Si un vase se vide par un petit trou… La vitesse de sortie est $v = (2\, g\, h)^{1/2}$ (énergies cinétique et potentielle), d'où l'équation différentielle $h' = -\, k\, h^{1/2}$, qui peut se résoudre en terminale par une primitive de $h'/2h^{1/2}$. On trouve une parabole, et le vase se remplit tout seul après s'être vidé !!

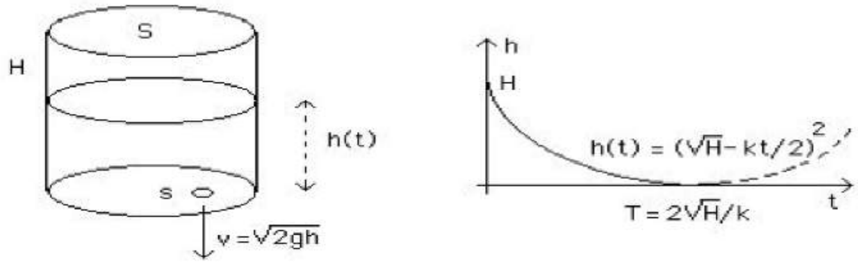


Figure 12 – Si un vase se vide par un petit trou…

Il est donc *indispensable de réfléchir à la concordance des solutions mathématiques et des solutions physiques,* ce qui ne va pas toujours de soi, et qui demande parfois certains raffinements mathématiques, ici : pour $h = 0$, l'équation différentielle n'est plus localement lipschitzienne, et la demi-parabole décroissante continuée par 0 est une solution mathématique, et c'est la solution physique. Cela demande d'avoir en tête la condition de Cauchy-Lipschitz sur l'unicité des solutions des équations différentielles…

(e) Mathématiques et physiques : deux modes de pensée parfois différents

Voici un exercice proposé parfois par des étudiants préparant le CAPES : « retrouver l'aire du disque en intégrant l'aire d'une mince couronne ».

Mais… quand on écrit $\Delta S \approx 2\,\pi\, r\, \Delta r$, que signifie ce signe d'approximation ? Quelle est l'erreur ? Pour conclure que $dS\,/\,dr = 2\,\pi\, r$, que doit-on supposer sur l'approximation ? Que l'erreur soit négligeable devant Δr (erreur relative et non seulement absolue).

Les physiciens vérifient rarement ce point, ils font confiance à leur intuition et leur expérience.

Du point de vue mathématique, cela signifie qu'on fait une hypothèse, qu'on en déduit un résultat ($\pi\, r^2$) et qu'il conforte l'hypothèse faite : $\pi\,(r + \Delta r)^2 - \pi\, r^2 = 2\,\pi\, r\,\Delta r + \pi\,(\Delta r)^2$, ce dernier terme est bien $o(\Delta r)$.

Un tel raisonnement est irrecevable pour les mathématiques ! Mais il est très courant et très efficace en physique, dans la procédure de l'accroissement différentiel : si une grandeur y dépend d'une autre x, on essaye d'évaluer Δy quand x varie de Δx. Les physiciens trouvent $\Delta y \approx f(x,y)\,\Delta x$ et en déduisent l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ [si f ne dépend que de x, ils trouvent $y' = f(x)$ et intègrent].

Les mathématiciens veulent démontrer, eux, que l'on a $\Delta y = f(x,y)\,\Delta x + o(\Delta x)$, ou directement que $\Delta y\,/\,\Delta x$ a une limite $f(x,y)$ quand $\Delta x \to 0$.

Dans le cas du disque, c'est difficile : cela utilise des majorations et minorations, et la limite en 0 de $\sin x\,/\,x$.

Le concept mathématique en jeu ici est celui d'approximation affine locale, ou de dérivée : $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + r(x, \Delta x)$ où le reste r est négligeable devant Δx : $r = o(\Delta x)$.

Cela signifie que c'est l'erreur relative (de méthode) commise en supposant *f* affine (et non seulement l'erreur absolue) qui tend vers 0 avec Δx.

Voici un problème qu'on peut donner pour convaincre les élèves : calculer *sin*(46°) « à la main ». Un amphi unanime peut affirmer que dire que $sinx \approx x$ au voisinage de 0 signifie que $sinx = x + \varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$ quand $x \to 0$. Convaincre les élèves que ce n'est pas cela la bonne formulation n'est pas simple, mais on y arrive en leur soumettant diverses valeurs à discuter pour ε : $3x$, $x^{1/2}$, $x / 7$, x^2…etc.

Reste qu'il est inutile de chercher des exemples réels où les modes de raisonnement de la physique utilisant des hypothèses *a priori* non prouvées donneraient des résultats catastrophiques : il semble bien que ces raisonnements sont trop efficaces au niveau de la physique élémentaire (macroscopique et continue) pour être mis en défaut expérimentalement. C'est donc seulement leur confrontation avec les canons des mathématiques qu'il faut discuter avec les élèves ou les étudiants.

(f) Pourquoi, comment donc modéliser en classe ?

Plusieurs points semblent se dégager au vu des exemples étudiés, et de nombreux autres.

(1) Mettre le plus possible en évidence les hypothèses physiques (ou d'autres disciplines) faites dans la modélisation, et avoir une attitude critique devant des modèles parachutés sans explicitation des hypothèses faites ni des domaines de validité.

(2) Introduire à une co-construction de concepts dans quelques cas. Nous avons vu l'exemple de l'intégrale, il y en a d'autres, par exemple pour introduire la fonction exponentielle en terminale S, on peut étudier le problème suivant de « dilution du sel » :

« Un récipient contient 100 litres d'eau dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Un robinet débite dans le récipient 10 litres d'eau pure à la minute, tandis qu'une vidange du mélange de 10 litres par minute à lieu. Au bout d'une heure, combien de sel reste-t-il dans le récipient ? ». (figure 13)

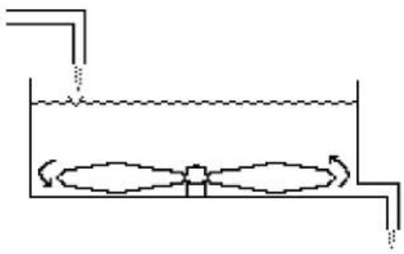


Figure 13

Pour des détails, voir (Magnin et Rogalski 2011).

(3) Expliciter auprès des élèves ou des étudiants les différences de paradigmes entre mathématiques et physique.

(4) Exploiter ces différences pour mettre en valeur les concepts mathématiques utiles et les procédures mathématiques permettant de prouver (quand c'est possible) des arguments implicites de la physique (valorisant ainsi des activités essentielles de

l’analyse mathématique : encadrements, continuité, raisonnement à ε près, dérivée, concept de négligeabilité, intégrale…). Voir à ce propos (Rogalski 2006).

(5) Analyser et expliquer des phénomènes de la réalité sociale, pour développer l’aptitude des élèves à utiliser leur sens critique et leurs capacités à voir quand une utilisation des mathématiques est nécessaire pour aider à la décision dans certaines questions. Par exemple, les questions de risque sont difficiles, souvent le bon sens n’y suffit pas. Un exemple intéressant est la question de savoir si, lors de la crise de la vache folle, il fallait ou pas tester l’ensemble du cheptel bovin et abattre tous les animaux détectés atteints (questions de fiabilité des tests, de l’importance ou non du « massacre » que cela aurait engendré, etc… toutes questions ne pouvant se régler que par un calcul des probabilités un peu subtil mais faisable en terminale).

(6) *Ne pas « apprendre à modéliser » en soi*. C’est là une question importante. Autant il nous semble qu’il faut absolument développer des activités de modélisation en classe de mathématiques (à la fois pour leur objectif social et pour mieux comprendre certaines parties des mathématiques), autant le but (et le temps et les moyens ne le permettraient d’ailleurs pas) ne peut être de transformer nos élèves en « petits modélisateurs », dominant les techniques et les méthodes générales de modélisation. Cela sera nécessaire dans certaines études menant à certaines professions scientifiques, mais ce serait prématuré et impossible avant le niveau universitaire.

Modélisation et formation des maîtres

Sur ce point, pourtant essentiel, nous serons assez bref, en énumérant seulement quelques points.

(1) Le principal problème est l’*inculture physique des étudiants de mathématiques arrivant en M1*. Il semble nécessaire de leur apporter des compléments portant sur quelques concepts physiques essentiels, en particulier en mécanique. Notons que le problème semble aussi grave pour les enseignants de physique, au point de mettre en cause l’injonction d’enseigner la physique par des activités dites « d’enquête ».

(2) Le deuxième problème est *l’inadéquation des nouveaux programmes du lycée, en mathématiques et surtout en physique, à l’établissement de liens didactiques entre les deux disciplines*. Alors que les programmes de 2002 insistaient sur la coordination des concepts des deux disciplines, en particulier au moyen des modes de description de phénomènes évolutifs (Radioactivité 2002), les nouveaux programmes de physique se révèlent être qualitatifs, relevant de la vulgarisation, et les programmes de mathématiques se voient amputés des parties qui anciennement permettaient d’étudier des problèmes physiques : équations différentielles, techniques élémentaires de calcul intégral, certaines fonctions élémentaires, transformations de base utiles à l’étude des mouvements en physique (telle que la rotation).

(3) Supposant ces problèmes réglés un jour (!), on peut imaginer de *faire traiter* par les enseignants en formation de *nombreuses activités de modélisation*, sous la forme de travail en petits groupes ou de séminaire (voir par exemple ce qui est organisé dans le cadre du « master pro » de l’université Paris 7, destiné aux formateurs ; voir aussi, (Artigue 1989) et (Greco 1989)). Ce type d’activité est, bien sûr, à coordonner avec le premier point, et avec l’approfondissement des méthodes de l’analyse mathématique.

PETITE BIBLIOGRAPHIE

Artigue M., 1989, *Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, vol 2, 173-190.

CNP, 2002, *Radioactivité*, Accompagnement des programmes, physique, mathématiques, sciences de la vie et de la Terre (terminale S).

Greco,1989, *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*, Rapport du GRECO du CNRS : "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques", groupe mathématiques et physique-enseignement supérieur ; document IREM Paris 7 et LDPES.

Kuzniak A. et Vivier L., coord., 2011, La modélisation dans l'enseignement des mathématiques - Mise en perspective critique. Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz (recherche), n° 3.

Legrand M., 1990, *Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale*, dans "Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année", brochure de la Com¬mission Inter-IREM Université, Irem de Paris - Diderot.

Robert C. et Treiner J., *Une double émergence*, bulletin de l'APMEP n° 453, octobre 2004.

Magnin N. et Rogalski M., 2011, *Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S, mise en œuvre dans la classe*, bulletin de l'APMEP n°492 , p. 17-29.

Rogalski M. et *al*., 2001, Carrefours entre analyse algèbre géométrie, Ellipses.

Rogalski M. 2006, *Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique*, Repères IREM n° 64.

PROBLEMES D'OPTIMISATION (*MATH & MANIPS*)

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Sylvie Vansimpsen, Patricia Van Geet, Isabelle Wettendorff

Résumé – L'atelier présente une séquence d'introduction à l'optimisation intégrant des manipulations de courte durée qui visent à améliorer la perception des enjeux des problèmes posés. Différents aspects de l'optimisation sont abordés progressivement : choix des variables, expression des contraintes puis recherche de la valeur optimale à l'aide de différents outils (tableaux de valeurs, graphiques, dérivées). La phase de modélisation sera mise en exergue lors de chacune des activités.

Introduction

Le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique) finalise actuellement une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par le recours à des manipulations effectuées par les élèves. Nous appelons *Math & Manips* les séquences d'apprentissage conçues, expérimentées et mises au point au cours de ce travail. Plusieurs d'entre elles ont déjà été présentées lors des précédents colloques de la CORFEM (2011 et 2012). Nous présentons ici des *Math & Manips* pour les élèves de lycée sur l'optimisation, en rendant compte des réactions d'élèves les plus significatives.

Cet atelier propose quatre problèmes d'optimisation de difficultés croissantes. Pour chacun d'eux, une manipulation de courte durée permet de mieux percevoir quels sont les enjeux d'un tel type de problème. À chaque fois, le contexte est géométrique, il s'agit de construire un solide de volume maximum, à partir d'une feuille de papier, en tenant compte de certaines contraintes. Chacun de ces problèmes a été choisi pour faire apparaître une difficulté spécifique, faire naître une réflexion, susciter une discussion. Dans une séquence sur l'optimisation, l'idéal serait de les incorporer entre d'autres exercices issus de contextes complètement différents.

Dans les trois premiers problèmes, accessibles aux élèves de toutes les sections, il s'agit de construire une boîte parallélépipédique de volume maximum à partir d'un développement particulier découpé dans une feuille de papier de format A4. Le dernier problème est plutôt destiné aux élèves des sections scientifiques. Il a pour objet la construction d'un cône de volume maximum à partir d'une feuille circulaire dont on retire un secteur.

Discuter de ces problèmes, de la spécificité de chacun d'eux, des difficultés propres à la modélisation ainsi que des facteurs qui influencent l'activité des élèves nous semble tout à fait indiqué en formation initiale.

Lors de l'atelier, vu le temps consacré aux discussions sur l'aspect modélisation du premier problème, il n'a pas été possible de présenter les quatre activités dans leur intégralité. Pour en savoir davantage, nous vous invitons à consulter le rapport de la recherche *Math & Manips*, accessible sur le site du CREM (www.crem.be) dès octobre 2013.

La boîte sans couvercle

Cette première séquence ne s'adresse pas nécessairement à des élèves qui maîtrisent l'outil dérivée mais peut servir à l'introduire et à en montrer la pertinence. Elle commence par une phase exploratoire qui permet de découvrir le contexte du problème d'optimisation visé. À partir de feuilles de papier de format A4, il est demandé de découper un carré dans chacun des coins pour construire une boîte parallélépipédique sans couvercle et d'en calculer le volume. La phase suivante permettra de découvrir comment construire la boîte dont le volume est le plus grand possible.

Ce problème, très classique, se trouve dans de nombreux manuels, assorti d'un schéma, voire d'un dessin en perspective de la boîte et, bien souvent, la longueur du côté du carré découpé est déjà notée x sur la figure. La question est du type « Quelle est la longueur du côté du carré qu'il faut découper pour obtenir la boîte de volume maximal ? ». Ainsi formulé, le problème élude complètement la phase de modélisation, de nombreux élèves ne voient pas comment la boîte est construite, n'imaginent pas la diversité des boîtes qu'on peut obtenir et n'ont pas idée de l'allure de la fonction qui donne le volume. Pour ces élèves, la question de trouver la boîte de volume maximal est vide de sens. C'est pourquoi nous avons choisi de recourir à la manipulation car elle replace le problème dans le monde sensible et oblige à modéliser pour le résoudre.

Lors de la première phase d'exploration, les élèves remarquent facilement que la longueur du côté du carré découpé correspond à la hauteur de la boîte. Pour calculer le volume, certains procèdent d'abord à la mesure des grandeurs nécessaires, d'autres les déduisent de la longueur du côté du carré découpé.

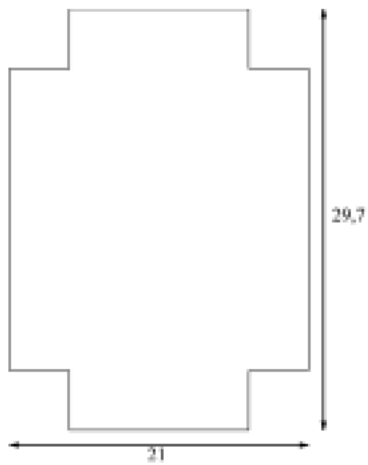


Figure 1– Schéma

Le schéma de la situation (figure 1), réalisé collectivement si nécessaire, sera utile aux élèves qui n'auraient pas remarqué que la largeur et la longueur de cette boîte valent respectivement 21 cm et 29,7 cm diminués du double de la hauteur.

Suite à la découverte de boîtes très diverses et de leurs différents volumes, une première idée est de classer les résultats obtenus dans un tableau.

La longueur du côté du carré découpé s'impose assez naturellement comme la variable, notée x, en fonction de laquelle les élèves expriment les dimensions de la boîte et son volume (figure 2).

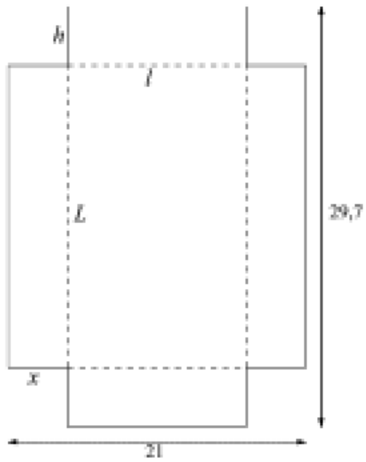


Figure 2 – Modélisation

On obtient alors les relations $h = x$, $\ell = 21 - 2x$, $L = 29{,}7 - 2x$ qui fournissent respectivement les expressions de la hauteur, de la largeur et de la longueur ; le volume V est alors donné par la formule $V = h \cdot \ell \cdot L$.

Dans les classes, certains élèves ont commencé par découper un carré de 1 cm de côté, ont noté le volume de la boîte, puis dans la même feuille ont découpé un carré de 2 cm de côté et ainsi de suite. Ils augmentent ainsi le nombre de boîtes examinées sans consommer plus de papier.

Le tableau 1 se construit en répertoriant les résultats des élèves par ordre croissant de la longueur du côté du carré découpé.

Après avoir entendu les quatre premiers résultats, une élève a pensé qu'elle s'était trompée dans le calcul du volume de la boîte qu'elle avait construite en découpant un carré de 6 cm de côté. Elle avait obtenu 955,8 cm³ et était persuadée que les mesures de volume allaient en augmentant. Dans une autre classe, une élève – également persuadée que le volume était fonction croissante de x – voulait découper un carré de 10,5 cm de côté. Il a fallu lui demander de construire la boîte pour qu'elle se rende compte de ce qui se passait.

L'impression que le volume augmente sans cesse reste souvent très prégnante, ce qui entrave généralement une vraie compréhension du principe de l'optimisation au profit de l'application de techniques calculatoires. Dès qu'on regarde ce qu'il advient lorsqu'on découpe un carré plus grand, cette impression est mise en défaut.

côté du carré en cm x	hauteur en cm $h = x$	largeur en cm $\ell = 21 - 2x$	longueur en cm $L = 29{,}7 - 2x$	volume en cm³ $V = h \cdot \ell \cdot L$
1	1	19	27,7	526,3
2	2	17	25,7	873,8
3	3	15	23,7	1066,5
4	4	13	21,7	1128,4
5	5	11	19,7	1083,5
6	6	9	17,7	955,8
7	7	7	15,7	769,3
8	8	5	13,7	548
9	9	3	11,7	315,9
10	10	1	9,7	97

Tableau 1 – Relevés des dimensions et du volume des boîtes des élèves

À la lecture du tableau, les élèves peuvent être tentés de conclure que la solution consiste à découper un carré de 4 cm de côté.

Si des élèves cherchent à regarder de plus près ce qui se passe entre $x = 3$ et $x = 5$, l'usage d'un tableur permet d'examiner sans trop de peine les valeurs du volume pour x variant entre 3 et 5 par pas de 1 mm. Là encore, c'est pour $x = 4$ cm qu'on obtient le plus grand volume.

Les élèves pourraient également se tourner vers une représentation graphique des résultats. Celle-ci permet de se rendre compte que l'optimum demandé est maximum d'une fonction $V(x) = x\,(21 - 2x)\,(29{,}7 - 2x)$ dont voici le graphique réalisé avec un logiciel de dessin après un changement d'unité sur l'axe Oy (figure 3).

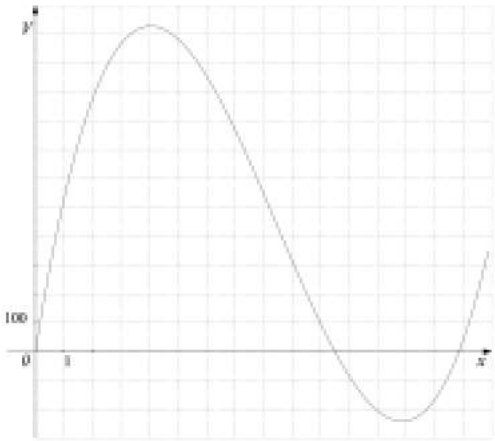


Figure 3 – Graphique de V(x)

Remarquons que ce changement d'unités masque les différences d'ordonnées près du point d'abscisse 4 et que la lecture du graphique semble encore donner raison aux élèves qui pensent que la solution consiste à découper un carré de 4 cm de côté, solution très satisfaisante en pratique. Remarquons également que, pour le problème qui nous occupe, seules les valeurs d'abscisses comprises entre 0 et 10,5 cm sont prises en compte.

Le professeur invite alors les élèves à regarder de plus près ce qui se passe en $x = 4$ grâce à un zoom sur le graphique de la fonction dans un voisinage de cette valeur (figure 4).

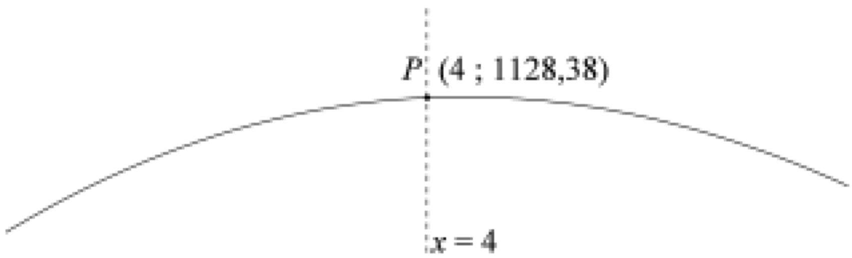


Figure 4 – Allure de V(x) au voisinage du point d'abscisse 4

Même si les différences d'ordonnées entre les points de la fonction dans un voisinage de $x = 4$ sont imperceptibles, l'examen de cette figure suggère que la valeur maximale se trouve sur l'« axe de symétrie » approximatif de cette portion de courbe, donc un peu à droite de $x = 4$.

L'enseignant propose alors de tracer en plus la tangente en P et d'afficher son équation. La tangente, en un point d'une courbe, est introduite comme la droite passant par ce point et qui, localement, épouse au mieux la courbe.

La tangente en $x = 4$ a pour équation $y = 4{,}54\, x + 1110{,}23$ (ces calculs, ainsi que les suivants, sont effectués en arrondissant à deux décimales). Le fait qu'elle est croissante indique que le volume n'a pas fini d'augmenter quand on est en $x = 4$. Les élèves comprennent rapidement que la valeur maximum sera atteinte quand la tangente sera horizontale. Cela se produit au point de coordonnées (4,04 ; 1128,49), ce qui montre que, pour des valeurs arrondies à deux décimales, c'est en découpant un carré de 4,04 cm de côté qu'on obtiendra la boîte de volume maximum.

Si on revient au graphique global (figure 5), on perçoit très nettement la variation de la pente de la tangente entre $x = 4$ et $x = 4{,}04$ alors que la différence des ordonnées de ces deux points est imperceptible.

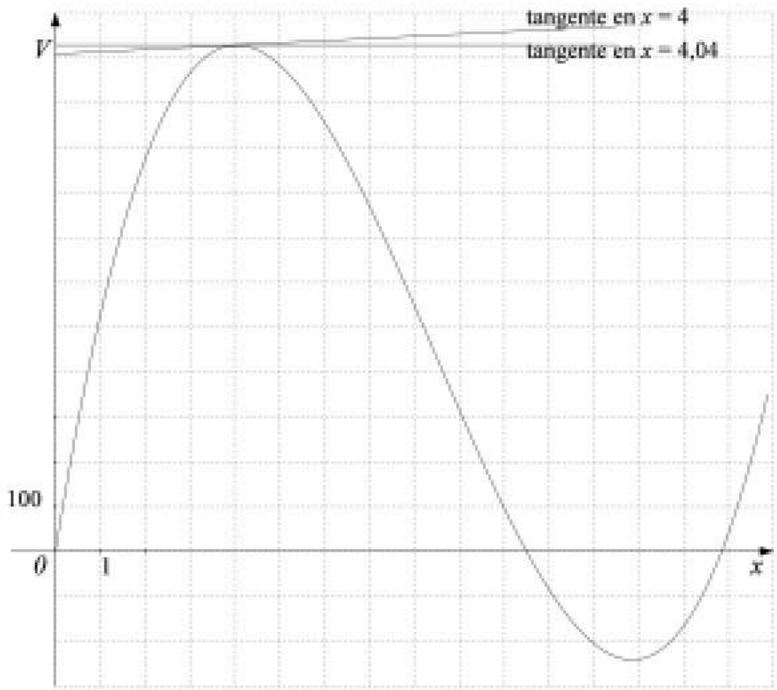


Figure 5 – Visualisation des tangentes

Les observations sur les tangentes dans ce dernier graphique donnent à l'enseignant un argument vraiment convaincant pour motiver l'intérêt d'étudier la pente de la tangente au graphique d'une fonction en chacun de ses points.

On crée ainsi à partir de cette pente un nouvel outil d'analyse de la croissance et de la décroissance d'une fonction, et donc un outil pour la recherche des extrema.

Si les élèves connaissent déjà la notion de dérivée, le passage par l'observation du graphique et de la pente de la tangente devrait faire le lien et renforcer l'idée que la dérivée en un point est la pente de la tangente à la courbe en ce point.

Le problème peut dès lors être résolu. La fonction $V(x)$ est une cubique dont l'expression analytique est $V(x) = 4\,x^3 - 101{,}4\,x^2 + 623{,}7\,x$. Sa dérivée $V'(x) = 12\,x^2 - 202{,}8\,x + 623{,}7$ s'annule en $x = 12{,}73$ et $x = 4{,}04$ (valeurs approchées à deux décimales). La valeur $x = 4{,}04$ fournit la valeur de x pour laquelle la fonction est maximum et correspond à la solution du problème tandis que la valeur $x = 12{,}73$, pour laquelle la fonction est minimum, n'a aucun sens dans le cadre du problème qui nous occupe.

Au cours de l'atelier, l'importance de l'étude de la fonction théorique par rapport au raffinement du tableau de valeurs a été soulignée à l'attention des futurs enseignants. Dans des situations « pathologiques », de grandes variations de la fonction étudiée pourraient être masquées au sein d'un tableau de valeurs particulières. Dans le même ordre d'idée, un zoom sur une partie du graphique de la fonction ne permet pas, dans certains cas de discontinuité ponctuelle de la fonction par exemple, de mieux situer un extremum s’il se trouve en dehors de la fenêtre du zoom. Notons cependant que, pour une fonction polynôme, ce genre de problème ne se produira pas.

Lors de l’atelier, il nous a également été suggéré d’examiner le cas de la « boîte du pâtissier » (Chappaz & Michon, 2003) qui nécessite le suivi d’un schéma de pliage sans découpe et la construction effective de la boîte pour en exprimer les dimensions à partir de la feuille rectangulaire dans laquelle elle est pliée. Si nous avons choisi le problème simple de la boîte sans couvercle pour introduire l’optimisation, c’est pour nous concentrer sur la nature de l’optimisation, sans éluder pour autant l’étape de modélisation.

La boîte parallélépipédique

En découpant symétriquement un rectangle de chaque côté d’une feuille carrée de 20 cm de côté, de façon à obtenir un T, comme le montre la figure 6, on peut obtenir le développement d’une boîte parallélépipédique fermée.

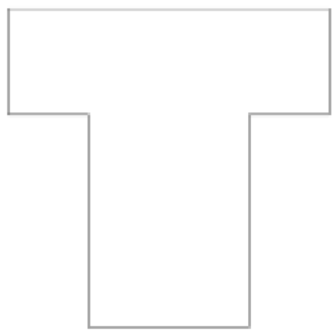


Figure 6 – Schéma du T

On demande de construire la boîte dont le volume est le plus grand possible.

Cette fois, il semble qu’il y ait deux longueurs à choisir au moment du découpage, que l’on peut appeler x et y dans un premier temps.

En fonction de la facilité à voir dans l’espace, notamment de la capacité à imaginer une boîte à partir de son développement, une discussion s’engage d’emblée sur la possibilité de construire une boîte parallélépipédique fermée pour n’importe quelle valeur de x et de y, avec $0 < x < 10$ et $0 < y < 20$ si x représente la largeur du rectangle découpé sur la figure 7 et y sa longueur.

Certains ont besoin de tester un découpage « au hasard » pour se convaincre qu’il n’est pas toujours possible de refermer la boîte exactement.

Pour de nombreux élèves, la phase de modélisation est difficile, surtout l’expression des contraintes pour que la boîte soit constructible.

Lors des essais de construction, les élèves obtiennent des boîtes qui ne se referment pas exactement. Ainsi, si la longueur y du rectangle découpé est trop grande par rapport à sa largeur x, il y a un excès de papier (figure 7). Dans le cas contraire, il y a au moins une face incomplète (figures 8 et 9). Il se peut encore que la longueur y du rectangle découpé soit beaucoup trop petite par rapport à la largeur x, à tel point qu’il manque toute une face et une partie d’une autre (figures 10 et 11).

Figure 7 – Boîte avec excès de papier

Figure 8 – Développement d'une boîte avec une face incomplète

Figure 9 – Construction d'une boîte avec une face incomplète

Figure 10 – Développement d'une boîte avec une face manquante et une face incomplète

Figure 11 – Construction d'une boîte avec une face manquante et une face incomplète

Figure 12 – Visualisation des contraintes

Un cas particulier que des élèves auraient pu découvrir est celui de la boîte dont les quatre faces latérales sont identiques, ce qui conduit à une boîte avec deux faces carrées de 5 cm de côté.

Pour résoudre le problème, il est donc nécessaire de dessiner le développement d'un parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont x, l et L (figure 13).

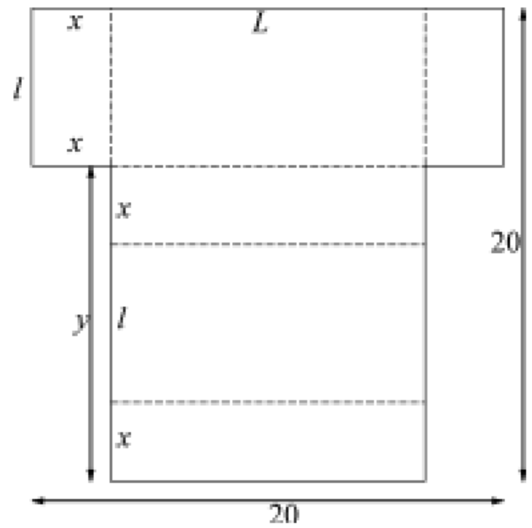


Figure 13 – Modélisation du développement en T

On voit alors clairement que

$$y = 2x + l$$

mais qu'il faut aussi exprimer que le développement est inscrit dans un carré de 20 cm de côté, ce qui donne

$$\begin{cases} 2x + 2l = 20 \\ 2x + L = 20. \end{cases}$$

En choisissant x comme variable indépendante, les dimensions de la boîte sont x pour la hauteur, $L = 20 - 2x$ et $l = 10 - x$ pour la longueur et la largeur de la base. On complète par $y = 10 + x$ pour obtenir les dimensions du rectangle à découper. La fonction volume qui vaut le produit des trois dimensions de la boîte est donnée par :

$$V(x) = x \cdot (10 - x) \cdot (20 - 2x) = 2x^3 - 40x^2 + 200x.$$

La fonction dérivée $V'(x) = 6x^2 - 80x + 200$ s'annule pour $x = 10$ ou $x = 10/3$. Il faut garder à l'esprit que, pour le problème traité, x doit être inférieur à 10 et restreindre l'étude de la fonction volume en conséquence. C'est la deuxième valeur de x qui donne la boîte de volume maximum (après vérification graphique par exemple). Le rectangle à découper est de dimensions $x = 10/3$ et $y = 40/3$. La solution $x = 10$, $y = 20$ fournit quant à elle la valeur minimum de la fonction $V(x)$, qui correspond à une boîte de volume nul puisqu'il n'y a plus de papier pour la construire.

D'autres façons de modéliser sont possibles. Par exemple, si les noms des deux variables retenues pour le problème sont souvent notées x et y, elles ne désignent pas toujours les mêmes grandeurs. Plutôt que de choisir comme variables les dimensions du rectangle découpé, certains préfèrent prendre deux dimensions de la boîte à construire.

Quel que soit le choix de la modélisation et de la variable indépendante, l'étude de la fonction volume à optimiser ne pose pas de difficulté dans ce problème. Dans le cas où différentes options ont été prises, les élèves pourront constater qu'elles mènent à la même solution optimale.

Le cube

Le but de cette activité est de réaliser, à partir d'une feuille de papier de format A4, le développement d'un cube de volume maximal. Les découpes doivent être parallèles au bord de la feuille et le développement doit être d'un seul tenant avec des faces du cube entières.

Les développements généralement proposés sont les modèles en T et en croix latine comme l'illustre la figure 14.

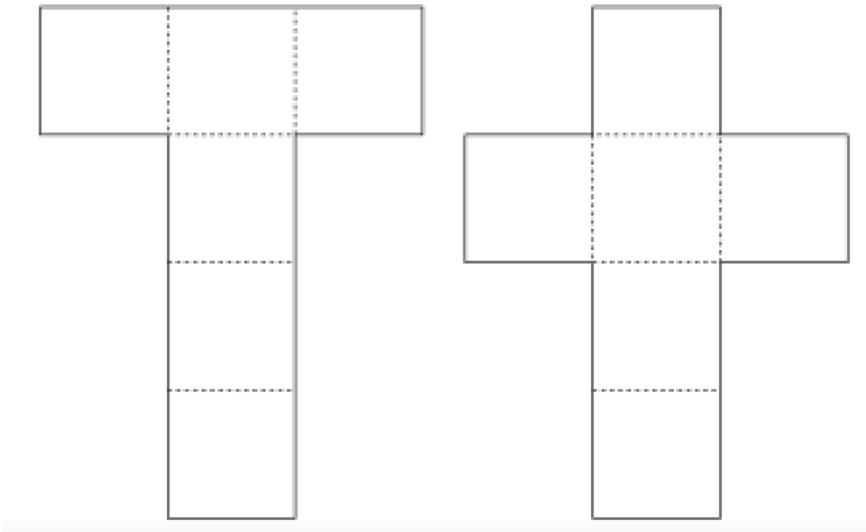


Figure 14 – Développements du cube proposés

La variable s'impose d'elle-même, c'est la longueur de l'arête du cube, on la note *x*. La fonction à maximiser est celle qui exprime le volume du cube : $V(x) = x^3$.

La méthode mise en place précédemment, en utilisant la dérivée, risque fort de désarçonner les élèves. En effet, $V'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$, la tangente au graphique de la fonction est donc horizontale en $x = 0$ mais il est clair que cette valeur ne fournit pas la solution au problème proposé.

Comme la fonction x^3 est toujours croissante, il s'agit ici de trouver la valeur de *x* maximale pour laquelle il est possible de construire un développement sur la feuille A4 tout en respectant les consignes. Il ne s'agira pas d'un point où la dérivée de la fonction s'annule, mais d'un point au « bord » de l'intervalle définissant les valeurs admissibles.

Il y a donc lieu d'exprimer les contraintes sur cette variable *x*. En se référant à l'un ou l'autre des développements de la figure 14, on obtient le système de contraintes suivant.

$$\begin{cases} 3x \leq 21 \\ 4x \leq 29{,}7 \end{cases}$$

qui admet pour valeur maximale de *x* la valeur 7 cm. Le volume maximum est ici atteint pour la valeur maximum admissible de *x*.

Si tous les élèves en sont convaincus (il s'agit effectivement de la solution optimale), la preuve n'en a pas encore été établie, et il n'est pas certain que des idées surgissent pour élaborer une justification complète, ni même que sa nécessité s'impose aux élèves, à ce stade.

La suite de l'activité a donc pour double objectif de faire percevoir la nécessité d'une preuve et de donner des pistes pour l'établir.

Pour cela, le même exercice est proposé à partir d'une feuille A4 coupée en deux dans le sens de la longueur (10,5 cm de large et 29,7 cm de long).

Si les élèves sont convaincus que des contraintes similaires permettent de trouver la solution, ils construiront un cube de 3,5 cm d'arête (de volume égal à 42,875 cm³) or il est possible d'en construire un de volume supérieur à partir du développement du cube de la figure 15.

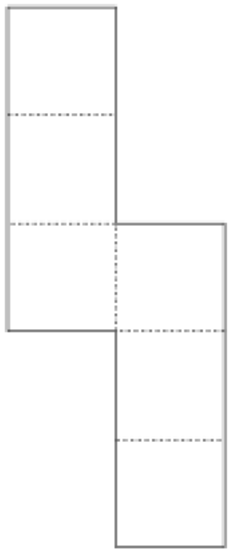


Figure 15 – Autre développement

Dans ce cas, les contraintes sont $\begin{cases} 2x \leq 10{,}5 \\ 5x \leq 29{,}7 \end{cases}$

ce qui donne une solution de 5,25 pour l'arête du cube et un volume de 144,7 cm³.

Pour vérifier qu'il n'est pas possible de trouver un cube de volume plus grand, il devient nécessaire de recenser les onze développements du cube (ce travail peut notamment être réalisé à partir d'un inventaire des différents hexaminos).

Les développements du cube peuvent être classés suivant le nombre de carrés disposés dans les deux directions. Selon les dimensions de la feuille rectangulaire, l'un ou l'autre des deux systèmes de contraintes établis précédemment permet de trouver l'arête du cube de volume maximal.

Il est alors possible d'aborder avec les élèves la généralisation du problème à une feuille rectangulaire de dimensions quelconques.

Le cône

Un intérêt majeur de ce nouveau problème réside dans la grande variété des méthodes de résolution et dans les discussions que ces différentes approches peuvent susciter.

L'activité est présentée comme suit. Après avoir distribué un disque de papier de 10 cm de rayon, on demande de construire, en découpant un secteur du disque, un cône dont le volume est le plus grand possible.

Dès le départ, on fait remarquer que, pour visualiser de manière continue les différents cônes sans découper de secteur dans le disque, on peut faire glisser l'une sur l'autre les deux parties du disque situées de part et d'autre de la fente.

La manipulation a pour but d'aider à percevoir les différentes variables qui interviennent dans ce problème ainsi que la façon dont elles interagissent. Lorsque l'angle α du secteur découpé augmente, le rayon de la base du cône diminue puisque la circonférence de la base diminue ; simultanément la hauteur du cône augmente. Au contraire, lorsque α diminue, le rayon r de la base du cône augmente et sa hauteur h diminue. Il y a donc lieu de chercher les liens qui unissent ces variables.

Le lien entre r et h apparaît sans trop de peine dès qu'on représente la situation par un schéma comme celui de la figure 16. Par contre, le lien avec α est plus difficile à percevoir.

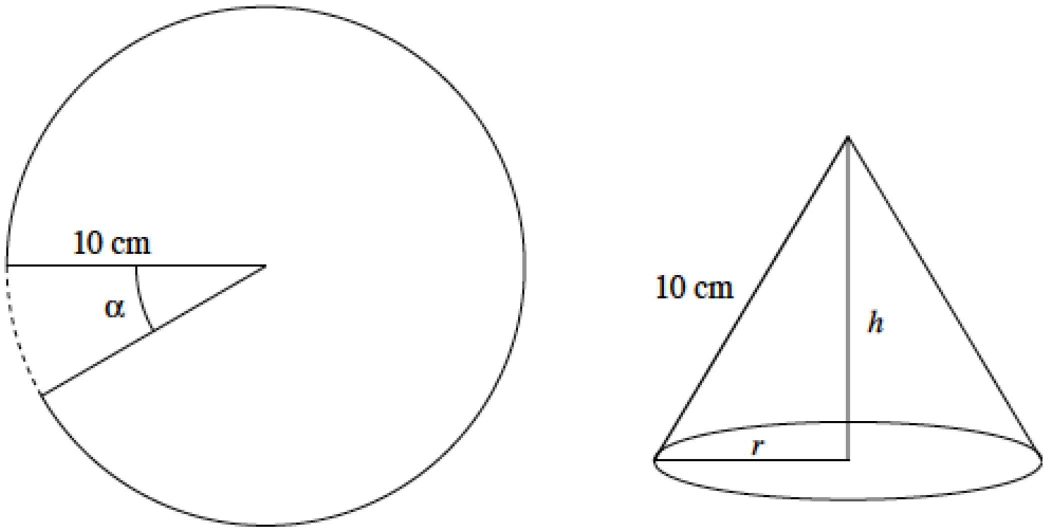


Figure 16 – Modélisation du cône

Cependant, à partir de l'expression du volume du cône $V = \pi r^2 h/3$ et de la relation $h^2 + r^2 = 10^2$, les élèves peuvent choisir l'une des deux grandeurs r ou h comme variable indépendante et en calculer la valeur, dite optimale, correspondant au cône de volume maximal. Le choix devrait se porter assez naturellement sur h, qui évite une racine carrée dans l'expression de la fonction volume.

Après avoir déterminé les solutions de l'équation $V'(h) = 0$, les élèves démontrent que la hauteur du cône optimal, notée h_{opt}, vaut $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm ≈ 5,77 cm. Ils en déduisent alors que le rayon du cône optimal est $r_{opt} = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm ≈ 8,165 cm.

Il faudra alors rappeler la consigne qui consiste à construire le cône en découpant un secteur angulaire dans la feuille de papier. Le problème du lien entre r et α qui avait éventuellement été laissé en suspens devra finalement être traité à ce moment. L'enseignant qui ne souhaite pas donner directement aux élèves la formule qu'ils attendent pourrait évoquer la définition du radian pour qu'ils se rappellent que, tout comme $2\pi R$ est la longueur de la circonférence, αR est la longueur de l'arc de cercle de rayon R et d'angle au centre α. Il pourrait également leur demander d'examiner des valeurs particulières de l'angle au centre du cercle et de la longueur de l'arc intercepté correspondant, les amenant ainsi à reconnaître que ces grandeurs sont proportionnelles. La valeur de l'angle optimal du secteur à retirer est déterminée par la relation $\alpha_{opt} = 2\pi\,(1 - \sqrt{6}/3)$ rad et vaut approximativement 1,15 rad ou 66,06°.

Dans ce problème, la façon de poser la question de départ est primordiale et influence notablement l'activité des élèves lors de la résolution. Telle qu'elle est formulée ici, la consigne ne mentionne pas explicitement l'angle du secteur angulaire à découper. Mais si on demande plutôt de déterminer l'amplitude de l'angle du secteur angulaire qu'il faut découper dans un disque de papier pour obtenir un cône de volume maximal, on attire l'attention sur la variable α de telle manière que des élèves pourraient penser qu'il est obligatoire de la choisir comme variable indépendante, ce qui les pousserait dans une direction où ils se trouveraient confrontés à des calculs fastidieux.

On peut laisser des élèves s'engager dans les différentes approches. Une comparaison des fonctions dont il convient de chercher le maximum

$$V\,(h) \;=\; \frac{\pi\,(100h - h^3)}{3}$$

$$V\,(r) = \frac{\pi\, r^2\sqrt{100 - r^2}}{3}$$

$$V(\alpha) = \frac{125\,(2\pi - \alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{3\pi^2}$$

permettra alors de mettre en évidence qu'un choix judicieux de la variable donne lieu à des calculs plus simples où les risques d'erreurs sont moindres.

Prendre conscience qu'un même problème peut induire des démarches différentes, suivant la façon dont il est formulé, nous semble être pour de futurs enseignants une aide à la conception de séquences d'apprentissage.

Pour le développement complet de l'activité, nous vous proposons de consulter le rapport de la recherche sur le site du CREM (www.crem.be).

En guise de conclusion

Pour chacune des *Math & Manips* présentées dans cet article, nous pouvons souligner quelques caractéristiques qui font leur spécificité et qui justifient notre choix de les placer dans une séquence consacrée aux problèmes d'optimisation.

Le problème de la boîte sans couvercle, très classique, ne présente aucune difficulté, ni dans le choix de la variable, ni dans la construction de la fonction. Il offre la possibilité de l'utiliser comme introduction à la dérivée. Son objectif essentiel est d'aider l'élève à comprendre l'essence de l'optimisation et ensuite, à percevoir l'efficacité de l'outil dérivée.

Le problème de la boîte parallélépipédique (développement en T) présente une première difficulté car deux variables s'introduisent naturellement au départ, tout en étant liées par une contrainte imposée par la construction.

Quant au problème du cube, il montre que le recours à la dérivée ne fournit pas toujours la solution attendue et attire l'attention sur la nécessité d'une preuve.

L'enjeu du problème du cône est pour sa part de faire voir à quel point un choix judicieux de la variable indépendante peut simplifier les calculs.

À partir de l'examen de ces quatre *Math & Manips*, nous pouvons mettre en évidence des facteurs qui nous semblent influer particulièrement sur l'activité des élèves.

Le premier est l'importance de la formulation de la question ou de la consigne, qui peut susciter des entrées assez différentes dans un même problème, par exemple induire ou non le choix de certaines variables pour la modélisation. Dans certains cas, la phase de modélisation est complètement absente car des schémas pertinents sont fournis aux élèves avec l'énoncé. Lors de la mise en situations des élèves devant des problèmes dits complexes, faisant appel à plusieurs registres, la phase de modélisation ne pourra pas être éludée. Le contexte de l'optimisation est une opportunité à saisir pour développer chez les élèves des compétences en cette matière difficile.

Un deuxième facteur est celui de la variété et du type des problèmes abordés aux cours des différentes séquences consacrées à cette matière car ils influencent fortement l'approche que les élèves ont d'un nouveau problème à traiter. Par exemple, l'ordre dans lequel les exercices sont proposés conduit les élèves à réinvestir une méthode qui a donné de bons résultats dans un problème précédent. Cependant, les outils théoriques qu'il est possible de mettre en œuvre afin de trouver la solution au problème posé, une fois qu'il est modélisé, ne se limitent pas à la seule recherche de zéros d'une fonction dérivée. De plus, la validation du résultat obtenu, quelle que soit la méthode retenue pour l'établir, doit être effectuée rigoureusement.

Des réflexions sur ces facteurs ont été menées tout au long des activités car il nous semble important d'y réfléchir, surtout avec de futurs enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Borel É. (1904). *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*. Musée Pédagogique, Paris. Conférence prononcée le 3 mars.

Chappaz J., Michon F. (2003). Il était une fois. . . la boîte du pâtissier, *Grand N*, 72, 19-32.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères-IREM*, 60, 61-78.

Dias T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques, *Grand N*, 83, 63-84.

Guissard M.-F., Henry V., Agie S., Lambrecht P. (2010). Math & Manips, *Losanges*, 7, 39-46.

Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P., Van Geet P., Vansimpsen S. (2013). *Math & Manips* ou comment intégrer des manipulations dans les classes pour favoriser l'apprentissage des grandeurs et de la proportionnalité. *Actes des 18ème et 19ème colloques de la CORFEM : juin 2011 & juin 2012*, 109-120.

Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P., Van Geet P., Vansimpsen S. (2013). *Math & Manip* avec Apprenti Géomètre - aires et agrandissements au collège avec un logiciel de géométrie dynamique. *Actes des 17ème et 18ème colloques de la CORFEM : juin 2011 & juin 2012*, 249-263.

MODELISATION ET CO-DISCIPLINARITE
SUR LE THEME « SCIENCES ET VISION DU MONDE »

Dominique Baroux, Rita Khanfour-Armalé,
Groupe IREM-Modélisation, Université Paris Diderot, Paris 7

Résumé – Cet atelier vise à présenter les temps forts du stage de formation continue, animé et organisé par le groupe Modélisation de l'IREM de Paris 7 durant l'année 2012, sur le thème du nouvel enseignement MPS «Méthodes et Pratiques Scientifiques » : la présentation par Cécile de Hosson sur l'analyse didactique des difficultés des élèves concernant le rôle de la lumière dans la vision, le déroulement d'un scénario « MPS » que les formateurs ont fait vivre aux stagiaires, et la synthèse qui présente le cycle de modélisation mis en jeu dans ce scénario. Celui-ci, conçu pour aider les enseignants de lycée à s'engager dans des pratiques co-disciplinaires, montre comment on peut aller au-delà d'une seule juxtaposition des disciplines et faire que les mathématiques ne soient pas artificiellement parachutées.

Présentation du groupe IREM-Modélisation

Voici les membres actuels du groupe :
Michèle Artigue : Professeur en didactique des mathématiques à l'Université Paris Diderot-Paris7 rattachée au laboratoire de didactique André Revuz
Dominique Baroux : Enseignante de mathématiques
Robin Bosdeveix : PRAG à l'université Paris Diderot-Paris 7, doctorant en didactique des SVT.
Rita Khanfour-Armale : Maitre de conférences en didactique de la chimie à l'université de Cergy Pontoise rattachée au Laboratoire de Didactique André Revuz.
Alain Kuzniak : Professeur en didactique des mathématiques à l'Université Paris Diderot-Paris7 rattachée au laboratoire de didactique andré Revuz
Guy Rumelhard : Enseignant de biologie et chercheur en didactique de la biologie.

Ce groupe, qui comporte à la fois des enseignants de mathématiques, de sciences physiques et de biologie, travaille sur les relations entre mathématiques et les autres disciplines scientifiques, à partir des questions de modélisation. Le groupe IREM Paris 7 « Modélisation» a été créé à l'origine pour accompagner la mise en place des TPE. Il s'est progressivement orienté vers une réflexion plus générale sur la modélisation et c'est sur ses travaux que s'appuie l'enseignement de modélisation mis en place depuis 2004-2005 dans le master professionnel de didactique de l'université Paris Diderot – Paris 7. Il assure également des stages de formation continue dans le cadre du PAF pour les académies de la région parisienne. Ce groupe a organisé et animé un stage de formation continue de trois jours (en novembre et décembre 2012) pour les enseignants des académies de Paris, Créteil et Versailles sur le thème du nouvel enseignement MPS mis en place en 2010 en classe de seconde.

Présentation de l'enseignement MPS

Depuis septembre 2010, l'enseignement d'exploration (MPS) « Méthodes et Pratiques Scientifiques », a été mis en place en classe de seconde. Il vise notamment à montrer aux élèves « l'apport et la synergie entre les disciplines scientifiques… » et à les initier « à la démarche scientifique dans le cadre d'un projet » (BOEN spécial n°4 du 29 avril 2010).

Voici présentées sous forme de tableau (tableau 1) les principales préconisations du texte officiel précédemment cité, précisées et complétées par les recommandations de l'Inspection Générale de Mathématiques parues le 25 août 2010.

	L'enseignement Méthodes et pratiques scientifiques MPS
Interdisciplinarité	« La relation entre les champs disciplinaires ne doit pas rester au stade d'une simple juxtaposition de plusieurs disciplines sur une même thématique, mais au contraire de faire apparaître tout l'intérêt d'apports croisés »
Objectifs	Découvrir des métiers Développer des compétences : s'informer, extraire, organiser de l'information, Développer l'intérêt des élèves pour la science
Travail des élèves	Recherche Travail personnel ou d'équipe Autonomie accompagnée Pratiquer une démarche scientifique Communication scientifique, Production
Organisation	Seconde, projet collectif, plusieurs disciplines scientifiques.
Thèmes	Science et aliments, cosmétologie, investigation policière, vision du monde, prévention des risques d'origines humaines, œuvre d'art.
Enseignant	Encadrement des élèves, co-animation, interventions disciplinaires, bilans d'étape et bilan final.
Evaluation	Pas de forme définie pour l'évaluation mais l'approche par compétences est conseillée Evaluation formative conseillée

Tableau 1

Le stage

Objectifs

Notre groupe de travail IREM a questionné sur le plan épistémologique le singulier utilisé dans « démarche scientifique » dans ces injonctions officielles. Nous nous sommes interrogés sur les similarités et les différences existant à ce niveau entre les disciplines. Cette réflexion préalable nous a paru indispensable à la mise en œuvre de l'objectif « montrer l'apport et la synergie entre les disciplines scientifiques… ». En effet, nous avions pu constater à travers différents témoignages que l'articulation des différents champs disciplinaires se réduit la plupart du temps à une juxtaposition d'activités.

Le stage que nous avons animé en novembre et décembre 2012 visait donc d'une part, à clarifier la nature et les spécificités des démarches scientifiques en mathématiques, sciences-physiques et SVT, et d'autre part à aider les enseignants de lycée à s'engager dans des pratiques interdisciplinaires dans le cadre des MPS et TPE.

C'est dans cette optique que notre stage s'est articulé autour des points suivants :

- Réfléchir et échanger sur les questions de démarche scientifique et d'interdisciplinarité, sur ce que sont les pratiques scientifiques en mathématiques, sciences physiques et SVT, ce qui les rapproche et les différencie.
- Réfléchir et échanger sur les potentialités et les limites des dispositifs institutionnels introduits pour favoriser la transposition de ces démarches dans l'enseignement, sur les difficultés rencontrées et les moyens de les surmonter.
- Travailler sur des expériences vécues, notamment au sein du groupe Modélisation de l'IREM, les analyser et en tirer des leçons et des idées.
- Faire l'expérience collectivement d'une activité pluridisciplinaire sur un des thèmes MPS : la vision.

Déroulement

Le stage a débuté par une présentation de l'enseignement scientifique et de l'interdisciplinarité, d'abord dans un contexte global international, et ensuite au travers des dispositifs divers mis progressivement en place dans l'enseignement français. Ces informations ont été complétées par une comparaison entre les dispositifs TPE et MPS. Cette première journée s'est poursuivie par une étude de cas sur le thème « police scientifique » : analyse a priori du scénario proposé par le document ressource Eduscol et discussion sur le potentiel et les limites d'un tel scénario au regard des préconisations officielles, en particulier celles concernant la méthodologie scientifique et la pluridisciplinarité. Certains stagiaires ayant eux-mêmes participé à un travail MPS sur ce thème ont pu aussi nourrir la discussion en témoignant de leurs pratiques.

Cette réflexion a été enrichie la deuxième journée par un exposé sur les sciences : leur objectif, la nature des savoirs, l'unité et la diversité des démarches scientifiques. Cette journée a ensuite été consacrée à l'étude d'un autre thème « science et vision du monde ». Le témoignage d'une enseignante de mathématiques du groupe, a permis une analyse du potentiel scientifique et co-disciplinaire de ce thème. Il a été suivi d'un exposé de Cécile de Hosson sur le rôle de la lumière. Elle a présenté une analyse didactique des difficultés des élèves et une mise en perspective historique sur ce sujet. L'après-midi a été consacrée à la présentation d'un scénario élaboré par les membres du groupe sur le thème « science et vision de monde ». Les formateurs ont fait vivre aux stagiaires ce scénario en leur faisant effectuer des expériences sur l'œil (dissection d'un œil de bœuf et mise en évidence d'une image sur la rétine), une étude sur les analogies entre l'œil et l'appareil photo, des expérimentations avec le logiciel GeoGebra permettant de dégager certaines lois de l'optique géométrique.

Le troisième jour a commencé par une synthèse présentant le cycle de modélisation mis en jeu dans le scénario proposé le deuxième jour. L'étude de ce scénario s'est terminée par une étude collective de son potentiel et de ses limites. Les stagiaires ont ensuite présenté quelques travaux effectués dans leurs classes, et notamment un travail très intéressant sur le thème de la vigne. Un exposé d'un professeur de mathématiques, Rémy Coste, a clos de ce stage. Il nous a proposé un compte rendu et un bilan de son travail en seconde dans le cadre de l'enseignement MPS sur l'accélération d'un mobile et la datation par la méthode du carbone 14.

Scénario sur la vision : temps fort du stage

Notre intention est de présenter aux participants de l'atelier deux temps forts de ce stage : l'intervention de Cécile de Hosson et la présentation de notre scénario sur le thème « science et vision du monde ».

Cécile de Hosson a évoqué les difficultés des élèves concernant le rôle de la lumière dans la vision. Nous pensons qu'il est important de prendre en compte, dans l'élaboration de la séquence MPS, les résultats des recherches en didactique afin de s'attaquer à des conceptions largement répandues[9]. La présentation de Cécile de Hosson sera détaillée dans le paragraphe suivant.

C'est le travail mené par Dominique Baroux durant l'année 2010-2011 en MPS qui nous a orientés sur le thème « Science et vision du monde ». Nous pouvons remarquer que les ressources qui figurent dans les documents d'accompagnement sur ce thème sont réduites si l'on compare à ce qui est fourni pour d'autres thèmes (cf. par exemple le thème « Investigation policière »). Les sujets abordés par les élèves de Dominique tels que, la vision en relief, les illusions d'optique, la vision des animaux, les maladies et défauts visuels, le dessin animé nous ont convaincus du potentiel de ce thème. Il nous a semblé susceptible de nourrir un travail interdisciplinaire intéressant qui ne se limite pas à une juxtaposition de travaux menés dans différentes disciplines. Nous avons bâti ce scénario en mettant l'accent sur deux points essentiels : la façon dont peut s'y engager le dialogue entre mathématiques, sciences physiques et SVT et la façon dont l'autonomie de l'élève peut y être accompagnée de façon productive, en prenant en compte notamment l'état des connaissances scientifiques et didactiques sur ce thème.

Il a fallu cependant surmonter pour sa présentation un certain nombre de difficultés inhérentes à ce type de scénario :

- Comment présenter une ressource à des enseignants issus de trois disciplines différentes en prenant en compte la distance entre les cultures disciplinaires qui existe dans l'enseignement français (plusieurs années de travail au sein de notre équipe nous l'ont montré) ?
- Comment créer les conditions pour que ces enseignants des trois disciplines scientifiques puissent s'emparer de cette ressource afin de pouvoir la réinvestir dans leurs pratiques après le stage ?
- Comment présenter une ressource qui se décline sur un semestre ?

[9] Ces conceptions sont en lien avec le mécanisme optique de la vision (de Hosson, 2011), la propagation rectiligne de la lumière (Kaminski, 1989) et la formation des images optiques (Viennot & Kaminski, 2006). Ces recherches ont montré que la lentille n'est pas vue par les élèves comme un système de formation de l'image mais comme un système de déformation de l'image. La plupart des élèves ont tendance à considérer que l'image optique est formée dès le départ et qu'elle se promène d'un bloc « image voyageuse» (Kaminski & Mistrioti, 2000). De plus, Viennot & Kaminski (2006) ont étudié les effets du schéma en optique et ont montré qu'un schéma inventé par opposition au schéma rituel permet de mettre en valeur le principe de conjugaison, éviter une surinterprétation du rôle des rayons de construction et aider à surmonter l'obstacle de l'image voyageuse.

Une réponse à ces questions a été de faire vivre collectivement, en accéléré et dans ses grandes lignes le scénario qui est prévu à l'origine pour les élèves. C'est ce que nous allons reproduire dans notre atelier, en mettant l'accent sur la partie mathématique.

L'intervention de Cécile sur les obstacles épistémologiques

Dans cette intervention il a été question des difficultés des élèves concernant le rôle de la lumière dans la vision et la façon dont en histoire s'est précisé et construit ce rôle. Dans ces travaux, de Hosson a constaté deux tendances antagonistes de raisonnements : le sens Œil – Objet et le sens Objet – Œil (figure 1 ci dessous).

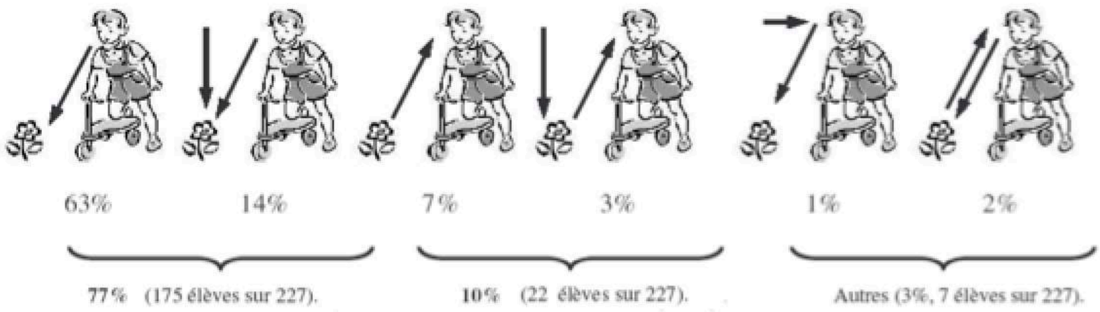
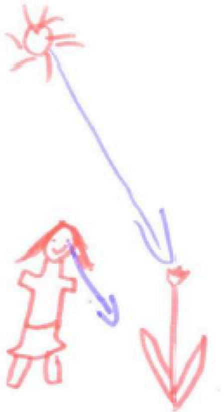


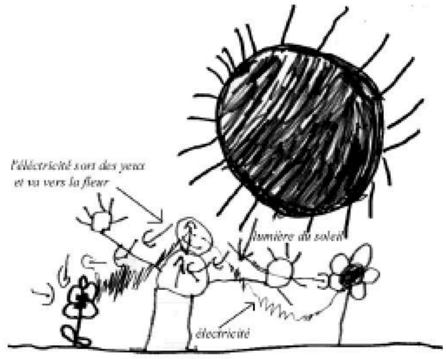
Figure 1

Globalement, très peu d'élèves expliquent la vision par la réception dans l'œil de quelque chose issu de l'objet. Et lorsque c'est le cas, leurs raisonnements semblent obéir à des principes proches du raisonnement en « image voyageuse ». En fait, pour la plupart des élèves interrogés, l'œil est actif, et la vision résulte de l'envoi par l'œil de quelque chose vers l'objet à regarder. Ce type de raisonnement vient du fait que pour voir un objet il est nécessaire de diriger son regard vers l'objet. Dans la figure 2 nous pourrons lire ce que disent la majorité des plus petits. Les élèves de 4ème parlent de la vue comme le résultat d'une émission à partir de l'œil de quelque chose, qui n'est jamais de la lumière, mais qui semble posséder parfois des propriétés tactiles.



« Ah ben c'est facile ! Le Soleil, là tu vois, il éclaire la fleur, et après, hop, le bonhomme il voit. Il envoie des trucs, des rayons de 'voit' sur la fleur et ça lui permet de voir. »

Antoine, 5 ans.



« La lumière, elle rentre dans les yeux // et ça / ça permet aux yeux d'envoyer un truc // de l'électricité peut-être, vers les choses // et après / après ça prend la forme, la couleur, et comme ça on sait ce que c'est ».

Stanislas, 5 ans.

Figure 2 – Les raisonnements des élèves de maternelle concernant le rôle de la lumière

De Hosson continue sur comment s'est construit le rôle de la lumière qui est le stimulus de la vue puisque le levier historique pourrait servir comme levier d'apprentissage. L'idée est de revenir aux textes de première main. Elle montre les similitudes entre les idées des élèves et celles des penseurs de la Grèce antique (extra et intro-missionistes) à propos du « sens » de la vue, vers ou depuis l'œil. La lumière, autrement dit le lien entre l'objet et l'œil n'existait pas en tant qu'objet à l'époque, mais plus tard avec Al Hazen.

Déroulement succinct du scénario sur la vision

La notion de modèle n'a pas une définition unique, cette définition varie suivant la discipline scientifique et le terme de modèle est utilisé par de nombreux auteurs avec des contenus forts divers (Johsua et Dupin 1993, p.15). Pour établir le lien entre mathématiques et sciences expérimentales, nous mettons au travail dans ce scénario le processus de modélisation (Blum & Leiss, 2005) qui prend la forme d'un cercle de résolution de problèmes (figure 3 ci-dessous) ; partant d'une situation du monde réel, épurée et précisée, tout en formulant un modèle physique ou biologique, passant par l'élaboration d'un modèle mathématique, pour effectuer un traitement mathématique avec production de résultats, interprétation de ces résultats en fonction de la situation réelle d'origine et enfin validation du modèle par la pertinence des résultats.

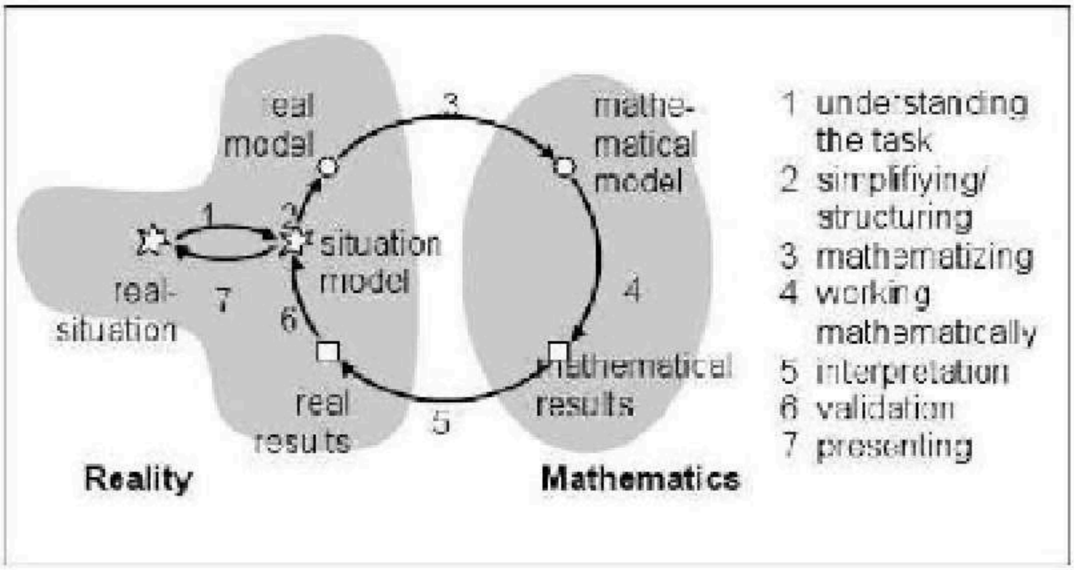


Figure 3

Nous montrerons à travers la présentation de ce scénario comment les différentes étapes de ce processus de modélisation ont été mises en œuvre. Ce scénario est largement ouvert et permet diverses adaptations et réalisations. Nous avons cependant mis au point une hypothèse de réalisation très précise dans laquelle notre scénario se déroule en 18 séances (annexe1).

Emergence d'un questionnement spécifique autour de la vision

Il s'agit, dans ce thème large de la vision, de susciter un questionnement qui conduise à s'interroger sur la formation des images dans l'œil. L'analyse menée à partir des travaux des élèves de Dominique Baroux sur ce thème montre que ce questionnement n'est pas forcément spontanément associé par les élèves au mot vision. D'autres questionnements surgissent plus spontanément, certains très généraux en termes de vision du monde, d'autres sur les illusions d'optique, les défauts de la vision ou sur les processus de représentation 3D… Même si un questionnement émerge sur les défauts de la vision, il ne sera pas forcément relié à la question de la formation des images dans l'œil. Il y a à cela des raisons que l'histoire des sciences et la didactique aident à comprendre (cf. « l'intervention de Cécile sur les difficultés des élèves »). L'émergence d'un tel questionnement nécessitera donc sans doute une orientation de l'enseignant.

Lorsque la question a émergé en revanche, on peut s'attendre à ce que les élèves proposent des explications, des analogies, suggèrent des expériences qui pourraient être menées pour conforter ou tester leurs propositions.

Nous explorons dans ce qui suit deux pistes probables :

- L'analogie avec l'appareil photo,
- La proposition de dissection de l'œil.

Analogie avec l'appareil photo et dissection de l'œil

Comment fonctionne un appareil photo et comment s'y forment les images ? Des réponses à ces questions peuvent être recherchées par un travail de documentation (ouvrages ou internet) mais aussi, lorsque possible, en démontant un appareil photo (non numérique). Avec l'émergence de ce questionnement et la compréhension de la tâche nous nous situons dans la relation 1 du cycle de modélisation.

Sur internet, on trouve aisément des schémas et textes comme ceux reproduits dans la figure 4 :

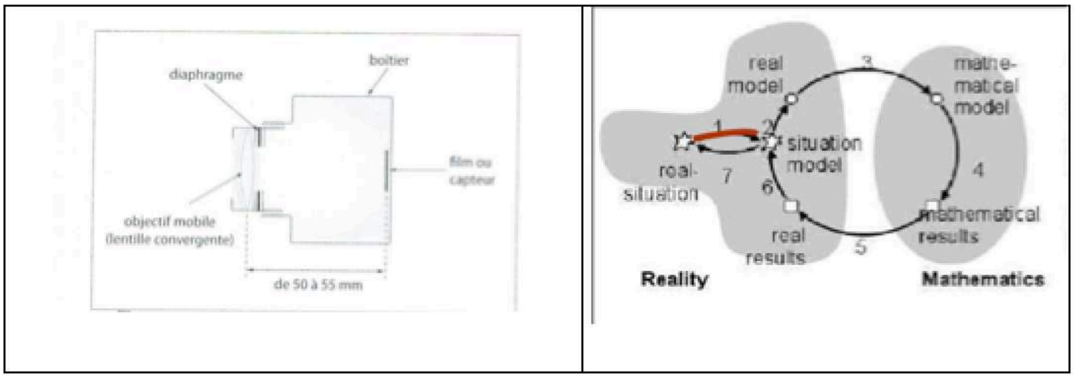


Figure 4 – La coupe schématique d'un appareil photographique, étape 1 du cycle de modélisation

En démontant un appareil photo, et en utilisant un papier calque en guise de pellicule, on peut identifier les différents éléments du dispositif et mettre en évidence la formation d'une image réelle et inversée (par exemple en déplaçant un objet de haut en bas et de droite à gauche devant la source lumineuse, voir la figure 5).

Figure 5 – Guy Rumelhard en train de réaliser l'expérience du papier calque devant les stagiaires

La dissection de l'œil[10] (voir la figure 6, figure 7) amène à se demander sur quoi se base l'analogie avec l'appareil photo.

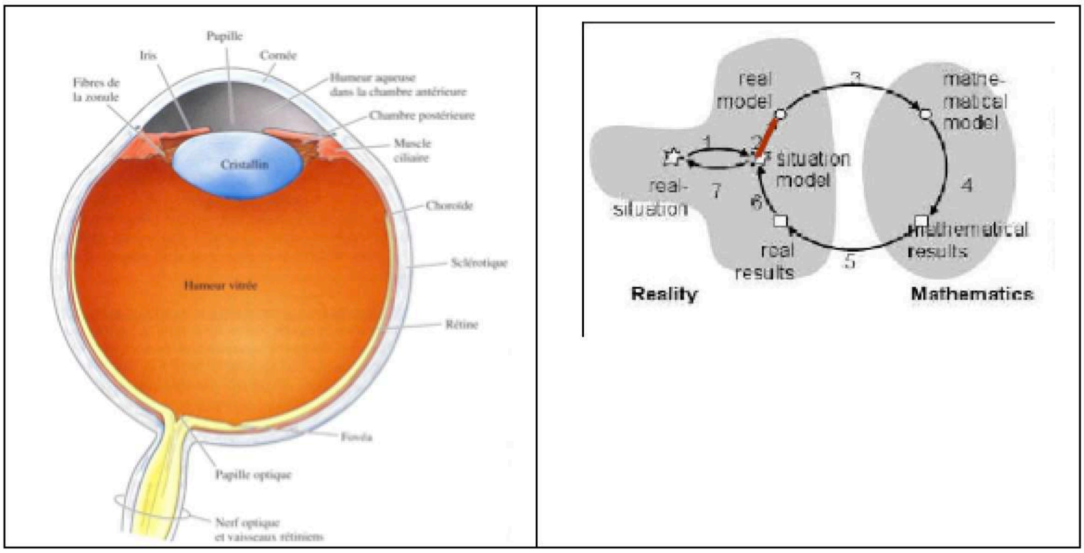


Figure 7– L'anatomie de l'œil à gauche et à droite l'étape 2 dans le processus de modélisation

---

[10] Un protocole est proposé sur les liens suivants http://www.snv.jussieu.fr/bmedia/ATP/oeil.htm et http://www.youtube.com/watch?v=yPVkCCidbRQ.

Figure 8 – Dominique Baroux est en train de disséquer un œil de bœuf avec une des stagiaires

La dissection de l'œil (ou une recherche documentaire), qui permet de passer à l'étape 2 dans le cycle de modélisation (voir figure 7), apporte des connaissances sur l'anatomie de l'œil qui seront nécessaires au processus d'analogie physique : l'œil contient un liquide (humeurs), une cornée, un cristallin, le fond de l'œil est constitué par la rétine. L'anatomie révèle certaines structures oculaires, pouvant jouer un rôle optique dans la formation des images. Cette dissection nous amène à essayer de mettre en rapport les différents constituants de l'œil avec ceux de l'appareil photo (similarités mais aussi différences) : cornée (membrane qui laisse passer les rayons lumineux), cristallin (lentille convexe mais pas mince du tout), espace entre le cristallin et la rétine (chambre noire), rétine (pellicule où se forme l'image), iris/pupille commandé par les process ciliaires (diaphragme qui ouvre ou ferme l'accès au cristallin/lentille), corps vitré, humeur aqueuse (sans analogue). Voir tableaux 1 et 2.

Tableau 1 – Comparaison appareil photo et œil lors du stage

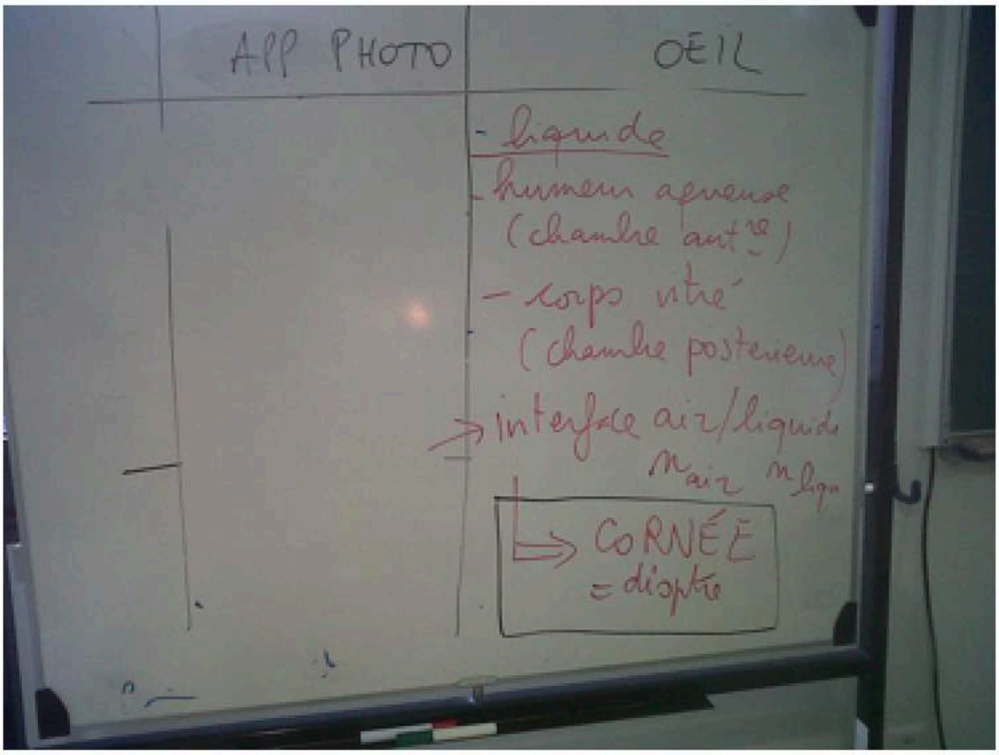


Tableau 2 – D'après les discussions avec les stagiaires : les spécificités de l'œil

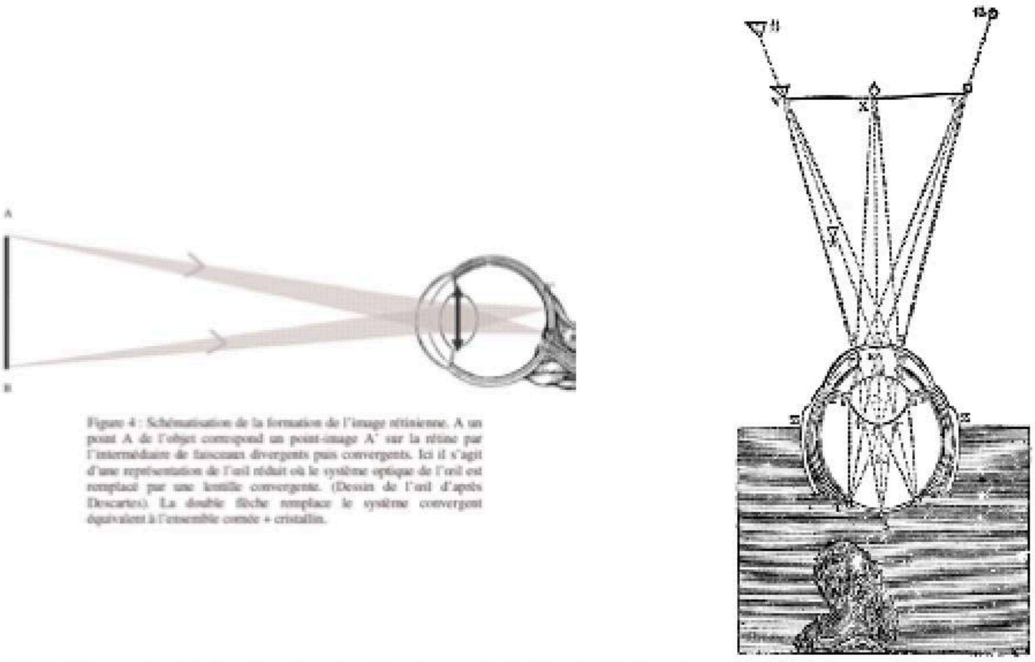
En revanche, force est de constater que cette dissection ne montre rien sur la formation de l'image. Pour ce faire, il faut construire une expérience (figure 9) et une telle expérience ne peut être suggérée par les élèves. Il existe une expérience historique mais de fait délicate à réaliser (elle nécessite en particulier des yeux non congelés). Elle consiste à dégager l'arrière de la membrane rétinienne et à mettre une source lumineuse devant l'œil placé sur le socle. Une image inversée de la source devrait apparaître sur la rétine.

Figure 9 – Sciences 1re L-ES SVT, Physique-chimie, manuel scolaire, 2011, édition Bordas

Une autre expérience, plus simple à réaliser, consiste à extraire le cristallin de l'œil et mettre en évidence qu'il possède certaines propriétés optiques. En le posant sur un document imprimé, on peut aisément observer que le cristallin agrandit les caractères d'imprimerie telle une loupe (figure 10).

Figure 10 – Photo prise lors du stage qui montre les propriétés optiques du cristallin

Mais si cette analogie semble pertinente, elle ne donne pas les clefs du fonctionnement d’une lentille convexe. Pour cela, un passage à la physique et à l’optique géométrique est nécessaire.



HOSSON C. (de) 2004 Contribution à l'analyse des interactions entre histoire et didactique des sciences, thèse Paris7
Descartes, R. (1637). La dioptrique. Paris : Fayard. P.174.

Figure 11 – Schématisation de la formation de l'image rétinienne

Par ailleurs le biologiste peut évoquer la courbure du cristallin et sa position dans l'œil qui varient légèrement grâce à des muscles longitudinaux et rayonnants qui peuvent l'actionner.

La démarche nous conduit, comme le montre la figure de gauche (figure 11), dans un premier temps à remplacer la totalité de l'œil par une lentille mince convergente de 15 mm de distance focale qui serait positionnée sur le cristallin ce qui permettra par la suite de poser la question de la formation d'une image réelle au fond de l'œil. Le physicien montre que la construction réelle des images dans l'œil est très complexe et doit prendre en compte que la cornée est convexe vers l'avant, et son indice de réfraction est plus élevé que celui de l'air. L'indice de l'humeur aqueuse est sensiblement égal à celui de la cornée. Donc, l'ensemble cornée-humeur aqueuse forme un système optique réfringent dont l'indice de réfraction est environ égal à 1,33 (par rapport à l'air). Quant au cristallin, il peut être assimilé à un système optique biconvexe dont l'indice de réfraction est égal à 1,43. Par conséquent, lorsque les rayons de lumière divergents provenant de l'objet VXY, plus précisément du point objet V, pénètrent l'œil, tout se passe comme s'ils rencontraient deux systèmes optiques convergents. Ils sont tout d'abord déviés par le dioptre cornée-humeur aqueuse BCD, puis par le cristallin 123 et à nouveau par l'humeur vitrée 456. Ils terminent ensuite leur course sur la rétine. Pour simplifier la marche des rayons de lumière, l'ensemble du système optique de l'œil est équivalent, pour son action sur la réfraction globale, à un système convergent unique œil réduit.

Optique géométrique et fonctionnement des lentilles

En physique l'utilisation d'un banc optique est possible. Il peut être intéressant parallèlement de mener une recherche historique pour répondre à la question de savoir quand les lentilles sont apparues (http://fr.wikipedia.org/wiki/Lentille_optique). Nous envisageons dans le scénario, une expérimentation de nature mathématique complémentaire à l'utilisation du banc d'optique. Le système physique est transformé en un système géométrique. Les travaux, en didactique de la physique, de Viennot (2011) dans son livre « en physique pour comprendre » concernant l'analyse des dépendances fonctionnelles nous ont permis de concevoir une simulation qui permet des explorations qualitatives et quantitatives de la construction géométrique de l'image d'une source lumineuse par une lentille convexe à l'aide du logiciel GeoGebra. A partir de cette simulation (passage à l'étape 3 et 4 dans le processus de modélisation), de nombreuses questions peuvent émerger et on peut mener un travail qui illustre différentes facettes de la démarche expérimentale en mathématiques, dans une approche d'abord qualitative puis quantitative des dépendances aboutissant aux lois de Descartes. L'exploitation de cette simulation montre également comment, une fois un modèle mathématique construit, le travail dans le modèle mathématique peut s'affranchir des contraintes de la situation physique, comment les régularités, les variations observées, les objets mathématiques introduits peuvent être sources de questions nouvelles au sein du modèle, dont certaines peuvent rebondir sur la situation physique ou biologique initiale.

Figure 12 – Etapes 3 et 4 du cycle de modélisation

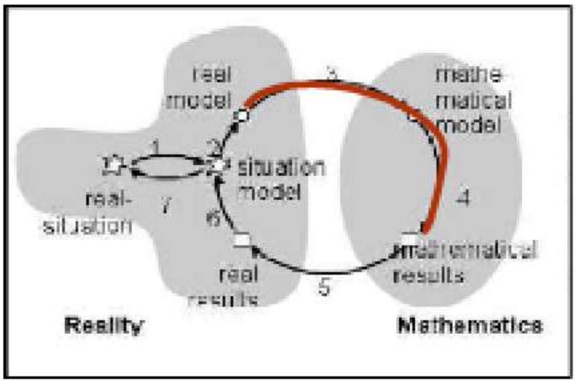


Figure 12 – Etapes 3 et 4 du cycle de modélisation

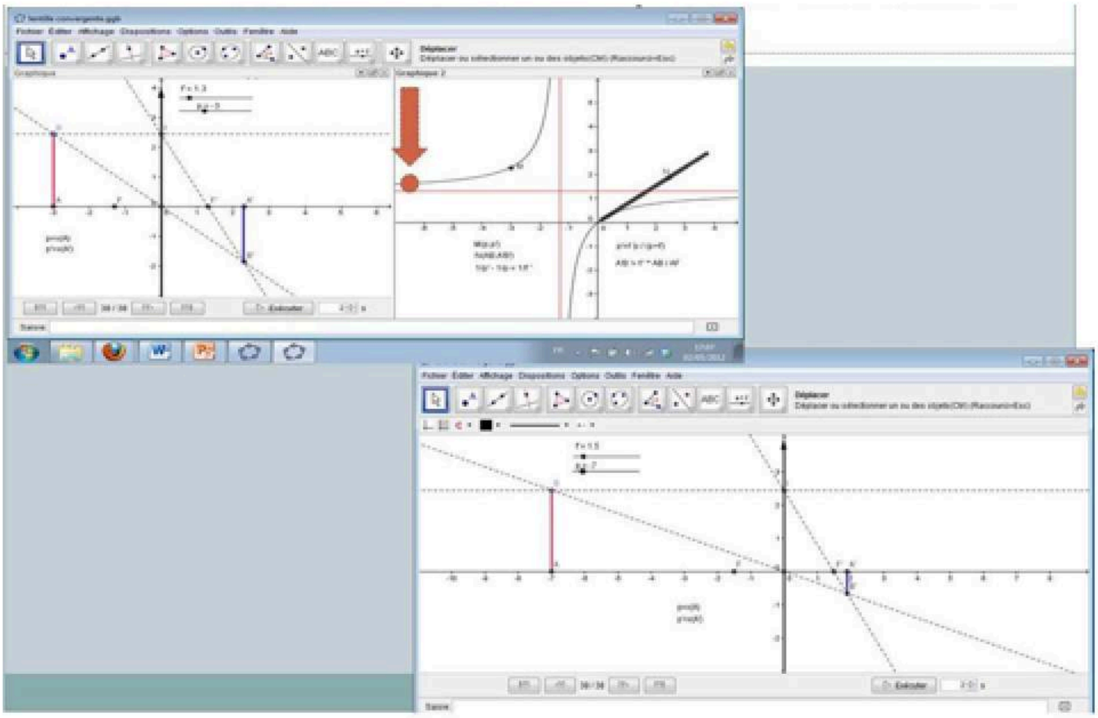


Figure 13 – Deux fichiers GeoGebra

Dans la fiche jointe (annexe 2) construite pour le stage, on notera la différence entre l'exploitation des deux fichiers GeoGebra. Le premier est le support d'une démarche expérimentale basée sur une exploration très ouverte ; le second qui vise à conjecturer les lois de Descartes suppose une exploration plus guidée, amenant à s'interroger sur les dépendances entre taille de l'image et taille de l'objet, position de l'image et position de l'objet.

Nous avons proposé aux participants de l'atelier de travailler sur ces deux fichiers.

Retour à la biologie

Ce déplacement de la position de l'image en fonction de la position de l'objet peut donner naissance à un rebondissement du questionnement et un renvoi à l'étude du système biologique : comment l'image est-elle maintenue sur la rétine, constituant à la fois la couche photoréceptrice et le premier centre nerveux permettant le traitement biologique de l'information ? Comment voit-on à l'endroit ? La rétine étant fixe que se passe-t-il dans le cas de l'œil ? Un mécanisme à rechercher doit la faire avancer ou reculer. A priori l'optique géométrique suggère de faire l'hypothèse d'une variation de la distance focale, donc d'une modification du cristallin qui est l'analogue de la lentille. Est-ce ceci qui est en jeu lorsque l'on parle d'accommodation ? En fait, la situation réelle est un peu plus compliquée et plusieurs mécanismes entrent simultanément en jeu. Le travail au sein du modèle conduit donc à une hypothèse raisonnable mais qui n'épuise pas la réalité du phénomène. On peut aussi souligner à cette occasion que la modélisation de l'œil par une lentille est une modélisation simpliste (ce qui ne l'empêche pas d'être utile) : le cristallin n'est pas une lentille mince ; de l'extérieur à l'intérieur de l'œil il y a un changement de milieu (air externe / humeur aqueuse située entre la cornée et le cristallin) donc d'indice... Le sujet est donc loin d'être épuisé. Voici une fonction importante du modèle de l'œil issu du croisement entre physique (optique) et mathématiques (géométrie) : faire naître des questions dans l'autre système qui n'avaient pas été initialement posées. De plus, ce modèle peut être réinvesti dans le champ de la biologie afin de comprendre l'origine de certains défauts de la vision (presbytie, hypermétropie, myopie). Il permet également de prévoir comment corriger ces troubles visuels et calculer les caractéristiques d'un nouveau dioptre correctif. On touche alors à la dimension prédictive du modèle scientifique construit. Nous nous situons avec cette partie à l'étape 5 et 6 du processus de modélisation (voir figure 14).

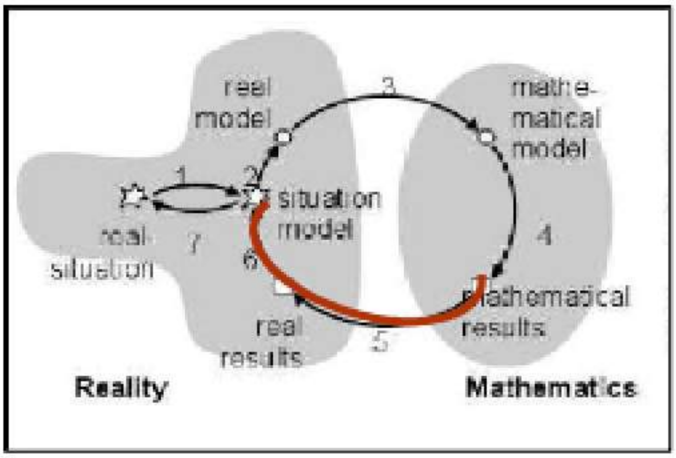


Figure 14

Le modèle construit peut être exploité pour répondre à des questions portant sur l'acuité visuelle, par exemple que signifie réellement l'expression « avoir dix dixièmes à un œil ? » (annexe 3). Et le travail mené débouche par ailleurs naturellement sur des questions concernant les défauts de l'œil et leur correction pour lesquels le modèle peut être réexploité. Soulignons en revanche dans ce dialogue entre SVT, physique et mathématiques, que le mécanisme de la vision n'a été que très partiellement exploré puisque l'on s'est arrêté à l'œil et à la formation d'une image sur la rétine sans jamais faire intervenir le traitement tout aussi essentiel de cette image par le cerveau.

Conclusion

Les travaux de notre équipe se concentrent maintenant sur la conception de situations de modélisation et de pratiques scientifiques au lycée sans se limiter au cadre des MPS et TPE. C'est sur cette base qu'un nouveau stage est proposé pour 2013-2014 incluant notamment les spécialités mathématiques de ES et S.

Outre la préparation de formations, une des fonctions de notre groupe est d'intervenir dans l'UE modélisation du master professionnel de didactique de l'université Paris Diderot Paris 7. Il s'agit dans cet enseignement d'aborder les problèmes de modélisation et mathématisation de phénomènes de nature diverse et, à travers eux, la question des rapports entre disciplines scientifiques, entre mathématiques et société. L'enseignement vise d'abord à faire rencontrer aux étudiants différentes expériences de modélisation et à les faire réfléchir sur les transpositions possibles de ces expériences dans le cadre de l'enseignement secondaire ou en formation d'enseignants. Une partie importante de l'enseignement est consacrée à l'accompagnement d'un projet réalisé en petits groupes. Ces projets contribuent à la constitution d'une banque de ressources dans le domaine de la modélisation par le réseau des IREM. Cette banque devrait aider les enseignants des disciplines scientifiques, et notamment les enseignants de mathématiques, à faire vivre plus efficacement dans leur enseignement les connexions possibles entre disciplines, que ce soit dans le quotidien de la classe ou dans la gestion des dispositifs spécifiques prévus pour susciter des collaborations entre disciplines. Durant l'année 2011-2012, cet enseignement a été dispensé auprès d'un public mixte : enseignants en formation dans le cadre du master professionnel de didactique et étudiants de Master 1. Les étudiants ont été très satisfaits à la fois de l'expérience de modélisation vécue à travers leur projet et du travail collaboratif avec des enseignants chevronnés. Un projet est à l'étude à l'université Paris Diderot pour le renouvellement de cette formation mixte l'année prochaine auprès des étudiants du master 2.

Les articles publiés par les membres du groupe et les projets réalisés par les étudiants-enseignants du master peuvent être consultés ou téléchargés sur le site http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/groupe_modelisation/.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

De Hosson, C. (2011). *L'histoire des sciences, un laboratoire pour la recherche en didactique et l'enseignement et la physique*. Habilitation à diriger des thèses, soutenue le 12 décembre 2011. Université Paris Diderot-Paris 7.

Grangeat, M. (2011). La diffusion des démarches d'investigation : une dynamique en devenir. *In M. Grangeat, les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique - Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*. Lyon : INRP, 14-21.

Prieur, M., Sanchez, E. & Aldon, G. (2011). Enseignement scientifique co-disciplinaire en classe de seconde : éléments à prendre en compte pour sa mise en œuvre. *In M. Grangeat, les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique - Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*. Lyon : INRP, 100-112.

Kaminski, W. (1989). Conceptions des enfants (et des autres) sur la lumière, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n°716, 973-996.

Kaminski, W. & Mistrioti, Y. (2000) Optique au collège : le rôle de la lumière dans la formation d'image par une lentille convergente. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 94, n°823, 757-784.

Khanfour-Armalé, R., Bosdeveix, R., Baroux D., et Rumelhard, G. (2012). La co-disciplinarité autour du thème de la vision. *La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michèle Artigue*, Université Paris Diderot- Paris 7, Paris, France 31 mai, 1er et 2 juin 2012.

Annexe 1

Programmation du scénario "vision"

Hypothèses de travail : 3 disciplines (maths, SPC, SVT)
1h30 par semaine pour les élèves

	Thème	Forme de la séance	Discipline (s)	objectif	Communication ou production
Séance 1	Introduction MPS & Brainstorming sur le thème "vision du monde"	Classe entière	3	Permet de clarifier le thème polysémique, de trier entre sujets scientifiques ou non, d'écarter les sujets irréalistes (pas à leur portée). Différencier ce qui relève de la vision comme processus biologique et de la vision instrumentée	
Séance 2	Recentrage sur le thème vision biologique et formation des images par l'œil Analogie supposée œil / instrument d'optique. Choix de comparer avec l'app photo Dégager les différents éléments essentiels et leurs rôles dans le fonctionnement de l'app photo. Bilan de la recherche documentaire durant la dernière demi heure. Mise en accord sur un schéma commun. Point sur les questions dont certaines seront laissées ouvertes volontairement.	Recherche documentaire sur le fonctionnement de l'app photo en salle info ou CDI.Consignes données par l'enseignant pour la recherche documentaire.	1 SPC	Réduction de l'œil à un instrument d'optique en occultant la dimension nerveuse	Produire un schéma légendé précisant des hypothèses sur les fonctions et les questions qu'ils se posent
Séance 3	L'analogie entre l'œil et l'app photo est-elle pertinente? Dégager les points communs et différences entre œil et app photo. L'enseignant circule, pilote un bilan collectif. Les élèves complètent leur tableau d'une autre couleur pour voir l'évolution de leurs idées.	Travail expérimental Dissection de l'œil avec éléments de protocole Manipulation de l'app photo avec calque (image inversée)	1 SVT		Les élèves doivent en autonomie faire des hypothèses sur les correspondances et remplir le tableau (dans leur cahier de bord).
Séance 4	Séance "métiers" Recenser les différents métiers en lien avec le thème	Classe entière puis Travail de groupe par métier : recherche documentaire, prise de contact pour une rencontre avec un professionnel.	1 (n'importe quelle matière)		Préparer une liste de questions pour un entretien.
Séance 5	Lentille dans l'app photo, cristallin / loupe : pose des questions sur la formation d'une image en physique. =>Etude des propriétés d'une lentille convergente (règles d'incidence, notion de foyer, de stigmatisme...) Ne pas aborder les formules qui seront construites ensuite en maths	Travail expérimental (banc d'optique...)	1 SPC		
Séance 6	Exploration GeoGebra 1		1 Maths		
Séance 7	Exploration GeoGebra 2		1 Maths		
Séance 8	Histoire des sciences sur différents thèmes (Voir logiciel, textes historiques fournis)	Logiciel	1 SPC		
Séance 9	Exploration GeoGebra 3		1 Maths		
Séance 10	Exploration GeoGebra 4		1 Maths		
Séance 11	Retour sur l'histoire des sciences (2)		1 SPC		Exposés
Séance 12	Accommodation		1 Maths		Simulation avec Géogebra
Séance 13	Défauts de la vision (Bio)	Recherche documentaire Intervention du médecin ou infirmière scolaire	1 SVT		
Séance 14	Défauts de la vision (maths)		1 Maths		Exploitation de la simulation avec GeoGebra par rapport aux corrections à apporter
Séance 15	Retour sur les métiers		3		Poster ou brochure métier, qu'ils présentent
Séance 16	Séance de préparation du bilan final		1 (n'importe quelle matière)		
Séance 17	Visite (entreprise d'instruments optiques...)		1 (n'importe quelle matière)	A placer à un n'importe quel moment selon les contraintes de l'entreprise	
Séance 18	Bilan général du semestre :		3		Diaporama de présentation de la démarche générale

Possibilité de permuter certaines séances, mais certains ordres sont nécessaires
Ex. La séance de maths est nécessairement après celle de physique (pour disposer de certaines règles qui contraignent la modélisation)

Annexe 2 Optique géométrique : lentilles convergentes minces

1. MODELE GEOMETRIQUE

Ouvrir le fichier GeoGebra « lentilles convergentes 1 ».

- Le plan est rapporté à un repère orthonormé de centre O
- Le point O représente le centre optique de la lentille.
- L'axe des abscisses représente l'axe optique.
- L'axe des ordonnées représente la lentille.
- Le point F représente le foyer objet de la lentille et la mesure algébrique $\overline{OF}$ (ou l'abscisse du point F) est la distance focale objet. Notation $f = \overline{OF}$
- Le point F' représente le foyer image de la lentille et la mesure algébrique $\overline{OF'}$ (ou l'abscisse du point F') est la distance focale image**. Notation** $f' = \overline{OF'}$
- **Dans le cas d'une lentille convergente** $f < 0$ **et** $f' > 0$**.**

2. TROIS REGLES

Règle 1 : tous les rayons lumineux issus d'un point A et qui rencontrent la lentille convergent en un. Point A' appelé l'image de A.

Règle 2 : tout rayon incident passant par le centre optique d'une lentille n'est pas dévié par la lentille.

Règle 3 : tout rayon incident parallèle à l'axe optique émerge en passant par le foyer image. (tout rayon incident passant par le foyer objet émerge parallèlement à l'axe optique).

3. PREMIERE EXPLORATION

a. Ouvrir le fichier GeoGebra « lentilles convergentes 1 ».
L'abscisse du point F' est représentée par le curseur f'. En faisant bouger le curseur on modifie la position du point F' sur l'axe des abscisses.
b. Créer un point A et construire son image A' en appliquant les règles ci-dessus. Deux rayons issus de A suffisent pour déterminer la position de A'.
c. Bouger le point A et noter vos observations sur la position de A'.
d. Créer un segment $[BC]$. Lier le point A à ce segment. Activer la trace du point A'. Quelle est l'image du segment $[BC]$?
e. Recommencer avec d'autres figures géométriques.
f. Bouger le segment $[BC]$ et noter vos observations sur la taille et la position de son image.

4. DEUXIEME EXPLORATION : ETUDE DES DEPENDANCES, VERS LES LOIS DE DESCARTES.

L'objet de cette exploration est d'étudier,

- d'une part le lien entre la taille d'un objet et celle de son image
- d'autre part le lien entre la position d'un objet et celle de son image

Ouvrir le fichier GeoGebra « lentilles convergentes 2 ».

On note p l'abscisse de A et p' l'abscisse de son image A'.
L'abscisse du point A est représentée par le curseur p.
On a représenté en rouge un segment $[AB]$ perpendiculaire à l'axe optique et en bleu son image $[A'B']$. $[A'B']$ existe lorsque **p** $\neq -f'$.

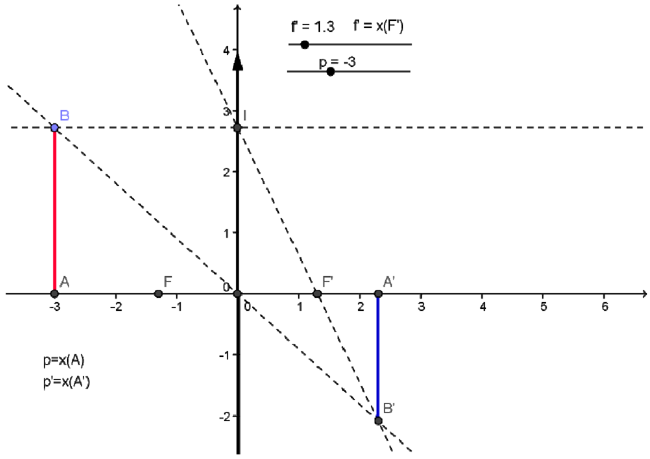
Dans le deuxième graphique on a créé le point N de coordonnées respectives les distances AB et A'B' et le point M de coordonnées p et p'.

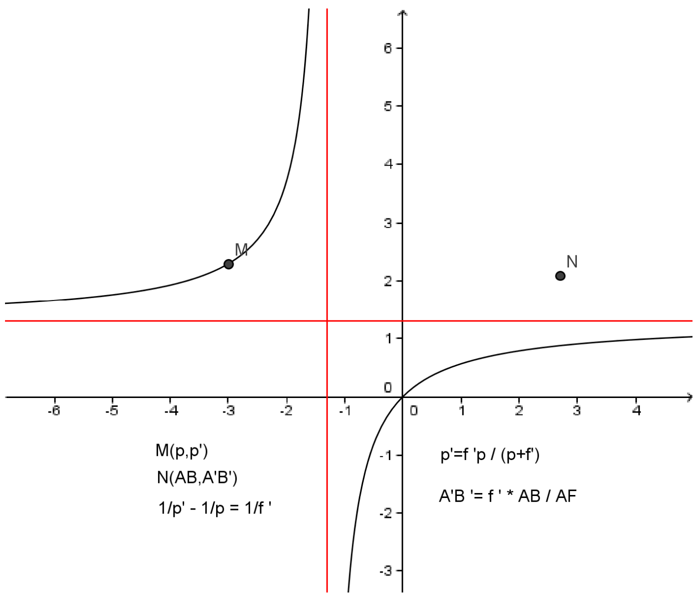
a. Faire bouger uniquement le point B (les nombres f' et p restent constants) et observer la trace du point N. Quelle conjecture peut-on faire ?

b. On garde constant f' et on fait varier p en bougeant le curseur. Désactiver la trace de N et noter vos observations sur le déplacement du point M.

Annexe 3 Optique géométrique : lentille convergente mince

Schéma usuel pour un cas particulier.





1. On crée 2 curseur, f'>0 et p, représentant respectivement les abscisses des points F' et A.

2. On crée le point N de coordonnées AB et A'B'. En faisant bouger le point B et en gardant constants f' et p, le point N décrit une droite qui passe par l'origine, ce qui met en évidence une relation de proportionnalité qui lie A'B' et AB. On montre que $A'B' = \frac{OA'}{OA} * AB$ car les triangles OA'B' et OAB sont semblables (ou théorème de Thalès).

3. On crée le point M de coordonnées p et p', respectivement l'abscisse de A et l'abscisse de A'. On garde constant f' et on fait varier p. On s'aperçoit que le point M décrit une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équation $x = -f' \text{ et } y = f'$.

4. On démontre la relation de Descartes $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ dans le cas particulier où p < 0 et p < - f'.
   Les triangles F'A'B' et F'OI sont semblables donc : $\frac{F'A'}{F'O} = \frac{A'B'}{OI}$
   D'où $\frac{OA' - OF'}{F'O} = \frac{A'B'}{AB}$ et $\frac{OA'}{F'O} - 1 = \frac{OA'}{OA}$ et $\frac{1}{OF'} = \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA}$
   ce qui est la relation cherchée.

5. La relation de Descartes est équivalente à $p' = \frac{f'p}{p + f'}$ donc l'hyperbole décrite par le point M a pour équation $y = \frac{f'x}{x + f'}$. On la trace. On constate alors que le point M se déplace sur cette courbe.
   Sachant que $A'B' = \frac{OA'}{OA} * AB$ et que $OA' = |p'| = \frac{f'|p|}{|p + f'|} \text{ et } OA = |p|$, on en déduit que $OA' = \frac{f'}{|p + f'|} * AB$ c'est-à-dire $A'B' = \frac{OF'}{FA} * AB$.

6. Application :
   Lorsqu'on a une vision de 10 (ce qui signifie la possibilité de séparer deux traits distants de 0,1mm au point le plus proche de vision nette (environ 15 cm), quelle est approximativement la distance entre deux cellules visuelles voisines ?
   Cela revient à calculer la taille de l'image d'un objet de 0,1mm sachant que la distance focale est de 15mm.
   On obtient : 0,1*15/135 mm en utilisant la formule ci-dessus, ce qui est approximativement la valeur connue de 10 micromètres

METHODES ET PRATIQUES SCIENTIFIQUES : DES SITUATIONS DE RECHERCHE EN ASTRONOMIE POUR LA CLASSE DE SECONDE

Dominique Spehner, Michèle Gandit, Christine Kazantsev, Hubert Proal,
IREM de Grenoble

Résumé – Nous présentons deux exemples d'activités liées à l'astronomie et destinées aux élèves de classe de seconde dans le cadre de l'option « Méthodes et pratiques scientifiques ». Il s'agit d'engager une réflexion sur la modélisation, mais aussi sur les acquisitions des élèves amenés à effectuer une démarche scientifique en mathématiques et en physique.

L'option « Méthodes et pratiques scientifiques » (MPS) existe depuis 2010 en classe de seconde. Son but est d'initier les élèves à la démarche scientifique. Elle s'articule autour de cours ou d'activités proposés en commun par des professeurs de mathématiques, de physique-chimie, de sciences de la vie et de la terre (SVT) et/ou de sciences de l'ingénieur (SI).

Elle vise à développer chez les élèves les compétences suivantes :

- utiliser et compléter ses connaissances ;
- rechercher de l'information et l'organiser ;
- pratiquer une démarche scientifique, raisonner, démontrer ;
- communiquer ses connaissances (par exemple à l'aide de comptes-rendus ou d'affiches).

L'atelier que nous avons proposé au colloque de la CORFEM à Grenoble du 13 et 14 juin 2013 a consisté à présenter deux exemples de sujets de recherche en classe en rapport avec l'astronomie, susceptibles d'être utilisés dans l'option MPS. Nous nous sommes concentrés sur le point 3 de la liste de compétences ci-dessus, qui nous semble le plus difficile et le plus ambitieux. La démarche générale consiste à imaginer des méthodes indirectes pour déterminer des grandeurs astronomiques à partir d'observations depuis la Terre, sans utiliser les moyens techniques actuels (mesures effectuées par des satellites, etc...). Le seul outil moderne mis à disposition est le logiciel *Stellarium* de simulation des trajectoires des objets célestes. Ce logiciel libre est facilement accessible (il existe même une version fonctionnant sur les téléphones portables de type « smartphone » !). Il permet de s'affranchir de devoir effectuer des observations nocturnes directes du ciel. Ceci mis à part, il s'agit de se mettre à la place d'un astronome du XVII$^{\text{ième}}$ siècle, par exemple Galilée. Depuis l'antiquité jusqu'au XX$^{\text{ième}}$ siècle, les astronomes ont en effet dû imaginer des manières indirectes pour déterminer certaines grandeurs astronomiques telles la distance entre la Terre et le Soleil, les rayons et périodes de rotation des planètes et de leurs satellites, etc..., à partir de l'observation du ciel à l'œil nu ou avec des lunettes astronomiques.

Nous décrivons ci-dessous deux activités de recherche en classe. La première traite du phénomène de rétrogradation de Mars et de son explication dans les modèles héliocentriques et géocentriques. La seconde traite de l'observation des quatre satellites de Jupiter et de la troisième loi de Kepler.

Nous insisterons plus particulièrement sur les aspects suivants :

- la démarche scientifique effectuée par les élèves. Par exemple. la seconde activité consiste en une expérimentation assistée par ordinateur. Elle rentre bien dans les recommandations du programme de Physique-Chimie (B.O., 2010), à savoir, « Elaborer et mettre en œuvre un protocole comportant des expériences, [...] faire des schématisations et les observations correspondantes » ;
- apporter aux élèves une mise en perspective historique. En effet, « La science n'est pas faite de vérités révélées intangibles, mais de questionnements, de recherches et de réponses qui évoluent et s'enrichissent avec le temps. » (Extrait du Programme de Physique-Chimie, B.O., 2010) ;
- s'interroger sur ce qu'est un modèle mathématique.

Confrontation des modèles héliocentriques et géocentriques

Notre vision actuelle du mouvement de la Terre et des astres date du XVII$^{\text{ième}}$ siècle. Pourtant, l'humanité s'est intéressée à l'astronomie depuis la haute antiquité. Les grecs avaient une description du mouvement des planètes qui marchait plutôt bien, partant de l'hypothèse que celles-ci et le soleil tournaient autour de la Terre (hypothèse géocentrique). L'hypothèse héliocentrique (la Terre et toutes les planètes tournent autour du Soleil) de Copernic a été défendue par Kepler et Galilée au XVII$^{\text{ième}}$ siècle. Galileo Galilei a développé la lunette astronomique, qu'il a utilisée pour observer la lune, les satellites de Jupiter et les phases de Vénus. Sa condamnation par l'église romaine a suscité de nombreux débats sur la méthode scientifique et le rôle de la science dans la société.

Nous allons nous intéresser au phénomène de rétrogradation de la planète Mars, qui peut être décrit de la manière suivante : à certaines époques de l'année, la trajectoire de Mars par rapport aux étoiles lointaines revient en arrière. Pour expliquer cette rétrogradation dans le modèle héliocentrique, on fait appel au mouvement relatif de Mars par rapport à la Terre.

Nous utiliserons ici un modèle simplifié, dans lequel on suppose que :

- la Terre et Mars décrivent des cercles de centre le Soleil, situés dans un même plan ;
- la distance Mars-Soleil est 1,5 fois plus grande que la distance Terre-Soleil ;
- l'année martienne est deux fois plus grande que l'année terrestre.

Soient (x_T, y_T) et (x_M, y_M) les coordonnées de la Terre et de Mars dans un repère du plan Terre-Mars-Soleil d´origine le Soleil. La position relative de Mars par rapport à la Terre est obtenue en retranchant ces coordonnées (voir figure 1).

$$\begin{cases} x_M(t) &= 3\cos(\pi t) \\ y_M(t) &= 3\sin(\pi t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_T(t) &= 2\cos(2\pi t) \\ y_T(t) &= 2\sin(2\pi t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M(t) - x_T(t) &= 3\cos(\pi t) - 2\cos(2\pi t) \\ y_M(t) - y_T(t) &= 3\sin(\pi t) - 2\sin(2\pi t) \end{cases}$$

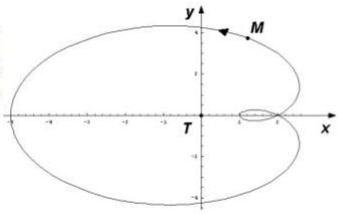


Figure 1

Examinons à présent ce qui se passe dans le modèle géocentrique. Pour comprendre les mouvements des planètes, du Soleil et de la Lune, les grecs Hipparque et Ptolémée introduisent les *épicycles* (figure 2) :

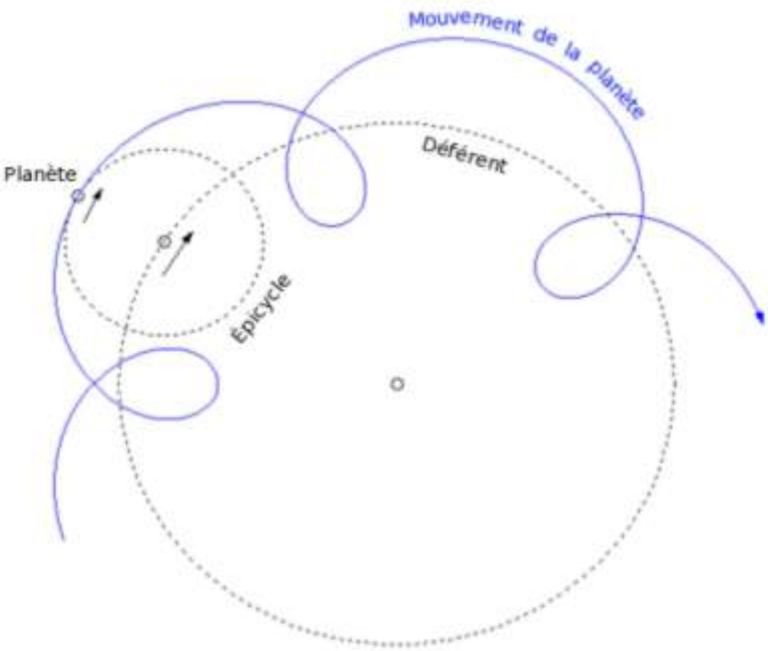


Figure 2

Selon Ptolémée, Mars se déplace à vitesse constante sur un cercle de rayon r dont le centre C tourne lui-même autour de la Terre immobile. Le point C se déplace donc à vitesse constante sur un cercle de rayon r' et de centre la Terre.

On note τ la période de rotation de C autour de la Terre et τ' la période de rotation de Mars autour de C. On choisit un système de coordonnées $(x\ T\ y)$ d'origine la Terre et d'axe $(T\ x)$ tel que Mars et le point C soient situés sur $(T\ x)$ quand Mars est le plus proche de la terre. On suppose que cela arrive à $t = 0$. Les coordonnées de Mars à l'instant $t > 0$ sont (voir figure 3) :

$$\begin{cases} \widetilde{x}_M(t) &= r' \cos(\frac{2\pi t}{\tau'}) - r \cos(\frac{2\pi t}{\tau}) \\ \widetilde{y}_M(t) &= r' \sin(\frac{2\pi t}{\tau'}) - r \sin(\frac{2\pi t}{\tau}) \end{cases}$$

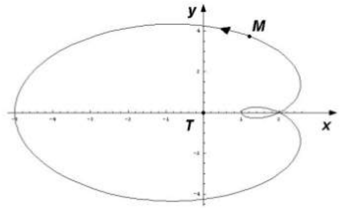


Figure 3

Pour $r' = 3$, $r = 2$, et $\tau' = 2$ et $\tau = 1$, nous retrouvons exactement les mêmes équations que dans le modèle héliocentrique !

La question est donc la suivante : comment peut-on se convaincre que la Terre et les planètes tournent autour du Soleil, et donc invalider le modèle géocentrique de Ptolémée ?

Nous avons vu ci-dessus que le mouvement de Mars peut être expliqué aussi bien dans les deux modèles héliocentrique et géocentrique. Dans ces conditions, quel modèle doit-on choisir ? Il est à noter que du point de vue historique, l'invalidation du modèle de Ptolémée ne viendra finalement qu'en 1725-1729, grâce aux mesures de la parallaxe de l'étoile gamma Draconis par l'astronome anglais James Bradley.

Nous avons engagé un débat avec les autres participants du colloque sur ces questions. Pour l'alimenter, nous avons commenté des extraits du livre *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (Dialogue sur les deux grands systèmes du monde) de Galilée (1632).

Nous nous sommes ensuite interrogés sur le bilan pédagogique de l'activité.

Nous pensons qu'il devrait être possible d'utiliser cet exemple de coexistence de deux modèles décrivant aussi bien l'un que l'autre les phénomènes observés à un moment donné de l'histoire pour engager une réflexion avec les élèves sur :

- la notion de modèle mathématique (sa validation expérimentale, le fait qu'il soit presque toujours une simplification de la réalité, le désir qu'il soit le plus universel possible) ;
- la pratique et la rigueur scientifique ;
- le rôle de la science dans la société.

Observation des satellites de Jupiter et troisième loi de Kepler

Il s'agit ici de modéliser les mouvements des satellites de Jupiter observés sur *Stellarium* et d'établir un lien empirique entre les périodes et les rayons de ces satellites.

Cette activité a pour but d'apprendre à acquérir des données avec le logiciel *Stellarium*, de se familiariser avec la notion de période, de visualiser la projection dans un plan perpendiculaire d'un mouvement de rotation circulaire dans l'espace, de rechercher une relation algébrique entre deux séries de nombres, et de découvrir la troisième loi de Kepler.

Nous avons fourni à chaque participant à l'atelier un ordinateur portable sur lequel le logiciel *Stellarium* était installé. Ceux-ci ont dû d'abord se familiariser avec le logiciel et apprendre à changer l'heure et le lieu (barre d'icônes verticale), à changer d'angle de vue (souris), à afficher le nom des planètes (barre horizontale), à supprimer le sol (barre horizontale), à centrer sur un objet céleste sélectionné avec la souris (barre horizontale), à agrandir ou rapetisser un objet sélectionné (touches '\textbackslash' et '/'). Il a fallu ensuite trouver la planète Jupiter et utiliser la fonction d'agrandissement (qui joue le rôle de la lunette de Galilée) pour observer ses satellites.

Les questions posées aux participants étaient les suivantes :

- Décrire le mouvement des quatre satellites de Jupiter (Io, Europe, Ganymède, Callisto) par rapport à Jupiter, vu depuis la terre (trajectoire vue depuis la terre, périodicité).
- Reconstituer les trajectoires circulaires à partir des mouvements rectilignes (segments de droite) observés depuis la Terre. On peut aussi représenter la position de chaque satellite en fonction du temps (courbe sinusoïdale), comme le faisait l'astronome Peiresc du temps de Galilée.
- Déterminer les périodes de rotation T des quatre satellites, puis les rayons R des trajectoires circulaires à un multiple près (qui dépend de la taille de l'écran et de l'agrandissement utilisé).
- Trouver une relation entre les deux séries de quatre nombres T et R mesurés.

Le but recherché est d'établir empiriquement la troisième loi de Kepler, $\frac{R^3}{T^2}$ = constante, à partir des données déterminées sur *Stellarium*, en faisant des hypothèses (par exemple, R et T sont-ils proportionnels ?) que l'on cherchera ensuite à valider ou à invalider.

Autres activités de classe autour de l'astronomie

Nous décrivons brièvement ici deux autres activités qui n'ont pas pu être abordées lors du colloque par manque de temps.

Dans la première, il s'agit d'élaborer des protocoles expérimentaux (en faisant des « observations » grâce à *Stellarium*) pour estimer la période de rotation de la Lune autour de la Terre, et de confronter les résultats obtenus par deux méthodes : (1) les phases de la Lune (qui donnent la période de lunaison et non la période de rotation) et (2) le mouvement de la Lune par rapport à des étoiles fixes (qui donne la vraie période de rotation).

La seconde activité consiste à déterminer le rayon de la Lune grâce à une éclipse lunaire. Pour cela, on mesure les temps d'entrée et de sortie de la Lune dans l'ombre de la Terre, ainsi que le temps mis par la Lune pour entrer complètement dans l'ombre. On peut ensuite utiliser des arguments géométriques pour trouver une relation entre les rayons r de la Lune et R de la Terre, en supposant dans un premier temps que le Soleil est à l'infini (dans ce cas on obtient le résultat d'Aristarque $r = R/3$), puis dans un second temps que la distance Terre-Soleil est finie mais beaucoup plus grande que la distance Terre-Lune (dans ce cas on obtient $r = R/4$). Cette activité serait plus adaptée à des élèves de classe de première ou de terminale.

BIBLIOGRAPHIE & SITOGRAPHIE

Brémond, A. (2010) Les planètes médicéennes de Jupiter : de la « découverte » aux calculs astronomiques de Galilée, *Cahiers Clairaut*, 130, 11-18.

Galileo Galilei (1632) *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*.

Ripert, J. (2003) Peiresc, *Cahiers Clairaut*, 101, 25-27.

Ripert, J. (2003) Peiresc, *Cahiers Clairaut*, 102, 18-26.

B.O. spécial n° 4 du 29 avril 2010, programme de l'option Méthodes et Pratiques scientifiques.

Stellarium, logiciel de planétarium, open source et gratuit, http://www.stellarium.org/fr/, consulté le 14 juin 2015.

THEME 2

RESSOURCES POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ET POUR LA FORMATION

Le thème des ressources pour le travail des enseignants peut paraître assez contemporain, notamment dans le champ de la didactique des mathématiques. Des recherches récentes se centrent effectivement sur les usages de ressources diverses. On constate une potentialité d'outillages de plus en plus variés : ressources traditionnelles (manuels...) mais également davantage liées aux TICE (exerciseurs en ligne, manuels numériques, espace de mutualisation de ressources, etc). Mais qu'en est-il de l'activité du professeur ? Celle-ci se modifie-t-elle du fait de la disponibilité de nouvelles ressources ou de nouveaux modes de production d'outils ? Il nous est ainsi apparu important d'interroger des résultats de recherches qui pourraient éclairer sur l'utilisation de ces ressources dans les pratiques enseignantes (par exemple dans la préparation et la conception de séances, de séquences, etc).

Mais la question peut aussi se poser à un autre niveau, peut-être moins travaillée par la recherche à ce jour : celui des ressources pour la formation des professeurs de mathématiques. Quelles ressources ou quels types de ressources utilisent les formateurs d'enseignants ? Pour quels usages en formation initiale ou continue ? Par exemple, nous souhaiterions aborder la question spécifique de l'utilisation d'articles liés aux recherches.

LES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES ET LEURS RESSOURCES PROFESSIONNELLES

Ghislaine GUEUDET,
CREAD, IUFM Bretagne UBO

Résumé – Le foisonnement de ressources disponibles pour les professeurs de mathématiques, dû en particulier aux ressources numériques, amène la recherche en didactique à examiner le travail des professeurs avec ces ressources. Nous faisons ici un panorama des questions qui se posent, et des résultats de recherche déjà obtenus. Nous abordons de plus des questions directement liées au lien entre ressources et formation des professeurs.

I. Introduction à l'étude des ressources

Pourquoi s'intéresser aux ressources des professeurs de mathématiques ? A cette question, on peut apporter une multitude de réponses ; nous retenons ici certains aspects spécifiques. Premièrement, les ressources sont présentes dans tous les aspects du travail des professeurs, elle sont présentes dans leur travail hors classe et en classe. Ensuite, une des ressources centrales est sans conteste le manuel scolaire. Or, jusqu'à présent en France peu de travaux de recherche ont considéré le manuel. Ceci est paradoxal, sachant que la France est

> « [la] première nation à avoir confié à son corps enseignant le droit de choisir librement ses outils, c'est, encore aujourd'hui, l'un des rares pays du monde où s'exerce dans le domaine du livre d'enseignement une triple liberté : liberté de la production, liberté du choix, liberté de l'utilisation » (Choppin 2005)

Autre raison, apparue plus récemment : le développement massif de l'offre de ressources en ligne à destination des professeurs de mathématiques (Artigue & Gueudet 2008). Ces ressources peuvent être conçues individuellement par des professeurs, ou collectivement par des associations ; elles peuvent émaner de l'institution, ministère ou académie. Elles sont parfois directement associées au manuel scolaire ; le manuel numérique (figure 1) relève d'ailleurs à la fois de la catégorie « ressources en ligne » et « manuel scolaire ». Dernière motivation, pour une recherche en didactique centrée sur les ressources : toute diffusion aux professeurs des résultats de recherche passe par la conception de supports spécifiques.

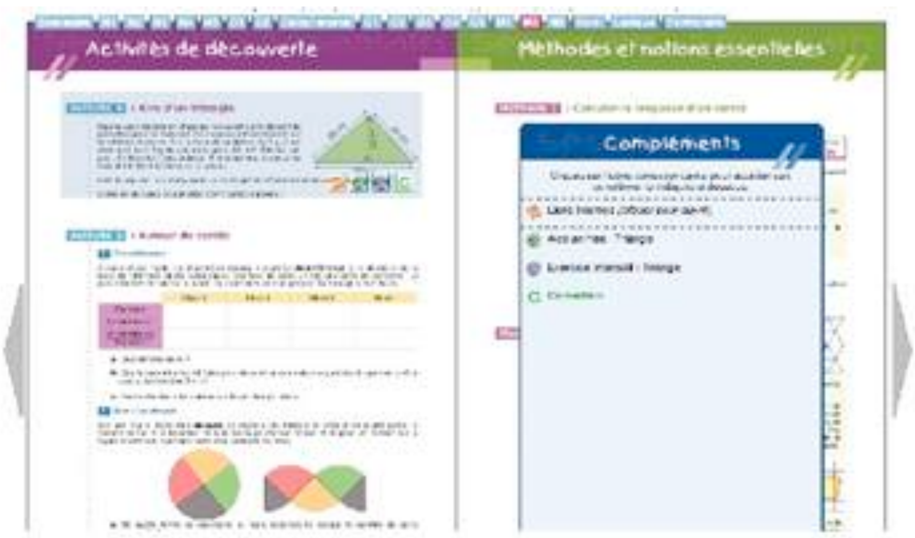


Figure 1 – Extrait du manuel numérique Sésamath

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord présenter brièvement les cas de deux professeurs, sur lesquels nous nous appuierons pour illustrer notre propos. Nous exposerons ensuite les différents types de questions que l'on peut étudier, à propos des ressources. Nous introduirons la perspective de l'approche documentaire, que nous proposons de mobiliser pour apporter des éléments de réponse à ces questions. Nous présenterons certains de ces éléments de réponses, issus de recherches menées depuis plusieurs années (Gueudet & Trouche 2008 ; Gueudet, Pepin & Trouche 2012). Enfin, nous discuterons la question des liens entre ressources et formation des professeurs.

Pertinence d'une page web : un enseignement en Spécialité, TS

Anne est professeur en Terminale S Spécialité, elle a une classe de 20 élèves d'un bon niveau. En 2012-2013, a été mis en place un nouveau programme, portant pour moitié sur les matrices. Ce contexte est particulier : en effet, il n'y a aucun sujet de baccalauréat encore disponible, l'institution n'a pas fourni de « sujets zéro ». De plus, le programme ne fixe pas d'objectifs très précis, en termes de contenus mathématiques. Il insiste sur l'aspect « résolution de problèmes », les matrices devant être introduites comme outil, et sur l'usage de logiciels. Un document « Matrices » disponible sur le site Eduscol (MEN/DGESCO 2012) présente de nombreux exemples de tels problèmes.

Anne a choisi en début d'année que le manuel de sa classe serait *Math'x*. En effet, c'est aussi le manuel employé pour la partie obligatoire de l'enseignement de mathématiques en TS. Pour préparer ses cours sur le thème des matrices, elle utilise en outre 2 ou 3 autres manuels ; un livre d'annales de baccalauréat (qui comporte des « sujets zéro » sur les matrices ; des logiciels (*Scilab*, *Geogebra*, *OpenOffice*) et sa calculatrice ; le programme officiel et le document « Matrices ». En début d'année elle avait commencé à travailler avec une collègue, mais celle-ci s'est trouvée être en arrêt maladie pour une partie importante de l'année.

Parvenue en fin d'année scolaire, elle souhaite consacrer 1h30 à une activité visant à introduire l'étude de suites de matrices de la forme $U_{n+1} = U_n\ T + B$. Elle retient le thème « pertinence d'une page web », qu'elle a repéré dans le manuel *Math'x*. Elle consulte le document « Matrices » ; cependant, dans celui-ci, le thème « pertinence » fait l'objet de six pages denses et complexes. Il est difficilement utilisable, pour une séance de 1h30. Ainsi Anne retourne à la source de *Math'x*, qu'elle compare avec d'autres manuels, *Odyssée* en particulier. Elle lit également un article, dans le bulletin de l'APMEP.

En appui sur ces différentes sources, elle élabore une activité qui se rapproche de celle du *Math'x*, mais avec plusieurs modifications :

- celle-ci est plus courte, en particulier la notion même de pertinence est d'emblée modélisée par un surfeur aléatoire, qui peut à la fois suivre des liens et « sauter » d'une page à l'autre ;
- le graphe support de l'étude a été complexifié, pour que la pertinence ne puisse pas être perçue intuitivement ;
- certaines questions intermédiaires ont été supprimées, et un enjeu : « montrer que l'état final est le même, quelle que soit la page de départ » a été ajouté.

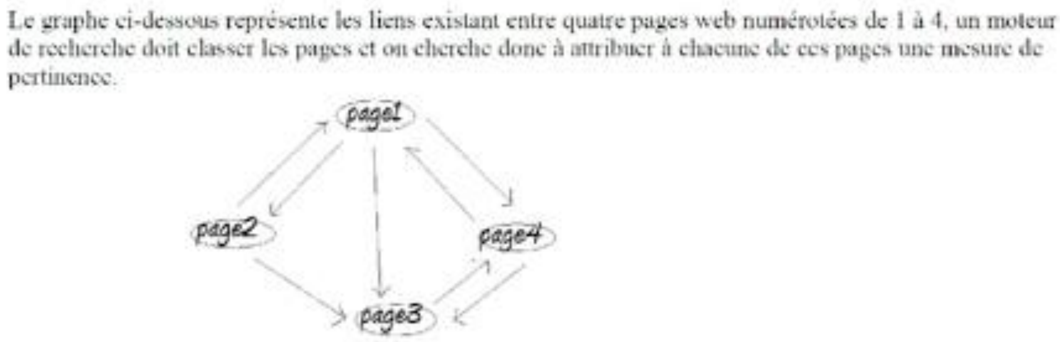


Figure 2 – Le début de l'activité « pertinence d'une page web »

Les élèves ont eu des difficultés à comprendre la modélisation proposée. Une fois cet obstacle surmonté, ils ont aisément effectué des calculs matriciels avec leur calculatrice, et sont parvenus à identifier la limite de la suite de matrices. Ainsi Anne a retenu des modifications à effectuer l'année suivante, surtout pour la partie de modélisation initiale. (Pour plus de détails sur l'activité « pertinence d'une page web » et le thème des matrices en TS spécialité, on pourra consulter Balliot & Gueudet, 2013).

*L'alignement du XXIe siècle : une démarche d'investigation, en 3^e^*

Carole enseigne au collège, et est membre d'un groupe IREM travaillant sur le thème des démarches d'investigation. Avec ses élèves, elle travaille usuellement beaucoup sur la construction de solides. Elle utilise aussi couramment de nombreux logiciels, avec ses élèves ou pour son travail personnel. Elle développe un site web personnel[11], sur lequel on peut notamment trouver des patrons, et des procédures permettant de réaliser un grand nombre de solides. Certains de ces solides sont liés à des illusions d'optique, et à des œuvres d'art comme celles de Vasarely.

Dans sa salle de classe, elle a des vitrines dans lesquelles sont conservés des solides produits par les élèves : fractale de l'étoile de Képler, grand dodécaèdre étoilé etc. Cependant ces productions ne sont pas a priori réalisées avec une démarche d'investigation pour les élèves. Dans le groupe IREM, Carole a réfléchi à ce que

[11] http://mathactivite.free.fr/

pouvait être une démarche d'investigation ; de plus elle a suivi une formation sur ce thème à l'institut français de l'éducation (IFé) qui a fait évoluer ses idées sur l'investigation en classe. Elle en a retenu, en particulier, qu'il fallait autant que possible partir de questions effectivement posées par les élèves.

Figure 3 – L'alignement du XXIème siècle

L'alignement du XXIème siècle est une sculpture monumentale de Aurélie Nemours, formée de 72 colonnes de granit parallélépipédiques. Carole avait, en 2010-2011, fait réaliser une maquette de cet alignement à une classe de sixième. En 2011-2012, elle choisit de poser à sa classe de 3e la question : « qu'est-ce que l'alignement du XXIème siècle ? », de collecter les réponses après un temps de recherche à la maison, puis de demander aux élèves de formuler des questions sur cet alignement. Les questions mathématiques sont retenues, et fournissent le point de départ pour une investigation qui amène les élèves à manipuler des notions de proportionnalité, de trigonométrie, de géométrie dans l'espace ; à utiliser *GeoGebra*, mais aussi *Google Sketchup* (ceci de la propre initiative des élèves, qui ont rencontré ce logiciel en cours de technologie). Plusieurs élèves choisissent, à la suite de cette séquence (d'une durée d'environ 10 heures), le thème de l'alignement du XXIème siècle pour l'épreuve d'histoire de l'art. Tous obtiennent de bons ou très bons résultats.

Les cas ci-dessus n'ont pas été choisis comme des cas exceptionnels, du point de vue des ressources ; pas non plus comme représentatifs de ce que seraient les pratiques de l'ensemble des professeurs. Nous les avons retenus essentiellement parce qu'ils permettent de montrer une diversité de ressources, et d'usages qui peuvent en être faits, ou de non-usage. Nous allons ci-dessous tout d'abord présenter les diverses directions de questionnement sur les ressources qu'il nous semble nécessaire de considérer ; puis une perspective que nous nous proposons d'adopter pour apporter des éléments de réponse à ces questions. Nous reviendrons alors sur ces cas, et sur les interprétations que nous en faisons.

II. Questionnements concernant les ressources des professeurs de mathématiques

Nous présentons ci-dessous des questions qui nous semblent nécessiter des recherches, concernant les ressources des professeurs. Ces questions sont toutes fortement connectées ; cependant, à des fins de clarification, nous les répartissons en plusieurs catégories. Dans tous les cas, nous nous intéressons à un questionnement transversal à ces catégories : quelles sont les évolutions apportées par les possibilités offertes par le numérique ; quels sont les processus collectifs, pour les professeurs, en lien avec les ressources ?

Quelles sont les ressources des professeurs de mathématiques ?

Il est naturellement essentiel de répondre à cette question avant toute étude concernant ces ressources. S'il est évident que le manuel scolaire, les programmes officiels, les logiciels et sites web conçus spécifiquement à cet usage sont de telles ressources, nous notons également qu'il est complexe de déterminer les contours de ce qui est ou n'est pas une ressource.

Ainsi certains objets qui n'ont pas été conçus à des fins d'enseignement peuvent se constituer en ressources sous certaines conditions : nous l'avons vu ci-dessus avec le deuxième exemple, l'alignement du XXI^{ème} siècle s'est constitué en ressource pour Carole. Dans le même temps, certains supports conçus pour l'enseignement peuvent ne pas être utilisables, là encore selon des conditions particulières : le document « Matrices » n'a pas pu se constituer en ressource pour Anne dans le premier exemple que nous avons considéré. De plus, ce qui fait ressource pour le professeur n'est pas forcément un élément matériel facilement identifiable : de même qu'un mail envoyé par un collègue qui relate une séance de classe peut constituer une ressource, une simple discussion en salle des professeurs peut être une telle ressource.

Analyser les ressources et leurs modes de conception

Naturellement, même si les ressources des professeurs peuvent être de natures très diverses, on s'intéresse principalement à analyser les ressources spécifiquement conçues pour l'enseignement : manuels scolaires, ressources en ligne etc. Les processus de conception des ressources évoluent, notamment avec les possibilités de collaboration distante, et de publication de ressources sur le web par chaque professeur. De plus des ressources en ligne peuvent être aisément modifiées, par différentes personnes, ce qui pose la question de la notion même d'auteur, pour ces ressources. Comment sont conçues les ressources pour l'enseignement : par qui, avec quels objectifs, quel public visé, quelles contraintes ? Ces possibilités de création et de diffusion par de multiples auteurs, non reconnus comme experts, peuvent faire craindre le développement de nombreuses ressources de qualité médiocre. Mais comment peut-on définir, et évaluer, la qualité d'une ressource pour l'enseignement ?

Analyser les usages de ressources, et leurs conséquences sur les pratiques des professeurs

Le choix d'une ressource en ligne, au sein d'une offre pléthorique, peut être guidé par de multiples facteurs, sur lesquels on ne sait jusqu'à présent que très peu de choses. Sans s'intéresser à des questions aussi complexes, le processus de choix d'un manuel par une équipe de professeurs de mathématiques dans un établissement est un processus qui n'a encore pas fait l'objet de recherches.

Une fois une ressource sélectionnée, celle-ci est modifiée, associée à d'autres, complétée… Ce processus de transformation doit être étudié. Pourquoi un professeur apporte-t-il des modifications à une ressource, quelles sont ces modifications ? Comment sont associées, organisées, les différentes ressources mobilisées par un professeur ?

Par ailleurs les usages de ressources ne sont pas neutres, ils sont susceptibles de modifier les pratiques des professeurs. Analyser précisément comment une ressource, ou un ensemble de ressources, modifie les pratiques d'un professeur, est un autre objectif de recherche essentiel, si on souhaite concevoir des ressources avec un objectif de modification des pratiques. Ceci amène, plus généralement, à poser des questions sur le lien entre ressources et formation des professeurs. Peut-on utiliser certaines ressources à des fins de formation des professeurs ? La réponse à cette question est sans aucun doute positive ; il est en revanche plus complexe de déterminer si certaines ressources sont particulièrement propices à la formation, et si il est possible également de concevoir des ressources pour les formateurs d'enseignants. Enfin, en renversant la question, « quelles ressources pour la formation ? / Quelle formation pour les ressources ? », on en vient également à poser la question de la formation, initiale et continue, des professeurs en ce qui concerne le choix, et les usages de ressources pour l'enseignement. L'analyse et la comparaison d'extraits de manuels est certainement présente dans de nombreuses formations initiales. Mais la question des critères à prendre en compte, lorsque l'on choisit un manuel, n'est pas toujours abordée, pas plus que celle des usages à faire en classe.

III. Une approche didactique : la documentation des professeurs

L'approche documentaire, présentation

En se plaçant du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques, on peut observer que les questions évoquées ci-dessus ont été d'une part abordées par les spécialistes des manuels scolaires et plus largement du « curriculum material » (Haggerty & Pepin 2002, Remillard, Herbel-Eisenmann, & Lloyd 2008), et d'autre part par les spécialistes des technologies éducatives (Hoyles & Lagrange 2010). Ces deux champs de recherche, jusqu'à présent, n'ont pas réellement communiqué : les chercheurs spécialisés sur l'un ou l'autre thème ne sont pas les mêmes ; des revues spécifiques existent, pour chaque thème, des regroupements se font en parallèle dans des conférences internationales etc. Les questions posées dans ces deux champs de recherche ne sont pas exactement les mêmes. Par exemple, en ce qui concerne le manuel, on va plutôt examiner ce qui amène les professeurs à choisir un manuel plutôt qu'un autre (ceci étant naturellement sous-tendu par d'importants enjeux commerciaux, pour les maisons d'édition ; mais également des enjeux de politique éducative, de nombreuses études ont eu lieu aux Etats-Unis en lien avec l'implémentation d'une importante réforme). Pour les technologies, on part d'un constat généralisé d'intégration insuffisante, et on se demande d'où viennent les résistances et comment surmonter celles-ci. Des enjeux commerciaux peuvent également être présents, même si le nombre de logiciels gratuits tend à augmenter.

Au-delà de ces caractéristiques financières, certains traits apparaissent communs dans les études des deux types. D'une part, le recours à ces ressources est reconnu comme étant susceptible d'influencer les pratiques des professeurs, et donc de contribuer à leur développement professionnel. Ainsi, dans les contextes de réforme, dans de nombreux pays un manuel peut être produit par les autorités nationales, et imposé aux professeurs, dans le but de faire évoluer les pratiques par ce moyen. D'autre part, les professeurs s'emparent de ces ressources de différentes manières, en fonction de leurs convictions professionnelles, et de leurs pratiques habituelles. Ceci est en particulier modélisé, à propos des technologies, par la perspective de l'approche instrumentale (Guin & Trouche 2002). Cette approche distingue un artefact, produit de l'activité humaine, dans un objectif précis ; et un instrument, développé par un sujet utilisant cet artefact au cours de son activité avec celui-ci. L'instrument comporte une partie de l'artefact, mais aussi un ensemble de règles d'actions, de connaissances développées par le sujet.

En nous inspirant de cette approche, nous avons proposé de développer une perspective similaire, mais plus large, en considérant l'ensemble des ressources des professeurs. Nous nous référons au travail mené par Adler (2000), qui propose de considérer comme ressource tout ce qui est susceptible d'aider le travail des professeurs de mathématiques : un manuel, mais aussi une copie d'élève, une discussion avec un collègue sur un forum etc.

Les professeurs choisissent des ressources, les modifient, les mettent en œuvre en classe : nous nommons ceci leur travail documentaire. Ce travail est essentiel, dans leur activité professionnelle. Au cours de ce travail, ils développent à partir d'un certain ensemble de ressources un document, qui comporte une partie de ressources, et une partie de connaissances professionnelles (Gueudet & Trouche 2008). Au fil de son activité professionnelle, un professeur développe un système structuré de documents ; et ce système comporte en particulier un système de ressources. L'analyse et la description de ces systèmes de ressources fournissent des éléments de réponses à certaines des questions présentées dans la partie précédente. Cette analyse est difficile à réaliser ; elle nécessite une méthodologie de recherche spécifique, que nous avons nommée investigation réflexive (Gueudet & Trouche 2010). Dans cette méthodologie, le professeur est fortement associé à la collecte de données, puisque lui seul a un accès à l'ensemble de ses ressources et de l'activité qu'il mène avec ces ressources, dans différents lieux, à différents moments.

L'approche documentaire est un cadre théorique, qui permet d'entreprendre des recherches sur les ressources. C'est aussi une perspective sur le travail des professeurs, et les évolutions de ce travail qui sont engendrées par le numérique en particulier. Il s'agit en effet de voir le professeur comme concepteur de ses propres ressources. A partir d'un ensemble de ressources disponibles, le professeur conçoit le matériau de son propre enseignement. Ceci est particulièrement mis en évidence par les possibilités offertes par le numérique, chaque professeur ayant la possibilité de diffuser à ses collègues des ressources qu'il a initialement produites pour ses élèves. Cependant, ce phénomène existe indépendamment du numérique, qui amène seulement à y prêter une attention particulière. Par ailleurs, ce travail documentaire n'est pas seulement le fait d'individus, il peut aussi être effectué par des groupes de professeurs, à l'échelle d'un établissement, d'un groupe IREM, ou d'une association.

Retour sur les exemples

Revenons aux exemples évoqués ci-dessus, afin d'illustrer comment cette perspective amène à les interpréter.

Dans le cas de Carole, nous retenons que son système de ressources laisse une grande place à la production de solides par les élèves : elle travaille avec toutes ses classes à faire des patrons, conserve certaines productions d'élèves dans ses vitrines etc. De plus, son système de ressources inclut déjà un certain nombre d'œuvres d'art en lien avec les mathématiques. Ce sont ces caractéristiques de son système de ressources qui ont permis que l'alignement du XXI^{ème} siècle se constitue en ressource pour son enseignement de géométrie. Dans un premier temps, il s'est simplement agi de faire une maquette avec une classe de sixième : une activité très proche de ses pratiques usuelles. Ensuite, dans le contexte du groupe IREM sur les démarches d'investigation, elle s'est appuyée sur ce qu'elle avait appris à propos de l'alignement pour le choisir comme point de départ d'une séquence d'investigation avec ses 3ème. L'investigation ne fait pas partie de ses pratiques habituelles ; cet objectif est venu du groupe IREM, des discussions menées au sein de ce groupe, et d'une formation suivie à l'IFé. Ces échanges avec d'autres collègues, avec des chercheurs en didactique, ont amené Carole à se représenter ce que pouvait être une investigation en classe : elle a retenu en particulier qu'il était essentiel de partir de questions des élèves. C'est l'ensemble de ces éléments qui a permis qu'elle conçoive cette séquence, en organisant les choses de manière à faire formuler aux élèves en début de séquence un ensemble de questions, qui guideront le déroulement de la séquence. Ajoutons que Carole a un degré d'intégration des TICE (Assude 2007) très important, qui lui permet d'envisager sans inquiétude d'accepter la proposition des élèves d'utiliser *Google Sketchup*, alors même qu'en début de séquence elle ne maîtrise pas elle-même ce logiciel qu'elle n'a pas encore utilisé pour son enseignement de mathématiques.

Nous retenons également que Carole diffuse ce qu'elle conçoit sur un site web personnel ; ceci est directement en lien avec la perspective introduite par l'approche documentaire, qui amène à considérer les enseignants comme des concepteurs.

Dans le cas de Anne, nous retenons tout d'abord la spécificité du contexte : un nouveau programme, très ouvert, qui rend impossible le recours à des supports créés lors des années précédentes – supports qui constituent certainement, en dehors de ce type de contexte particulier, le cœur des ressources mobilisées par les professeurs.

Pour son enseignement de matrices en TS, au centre du système de ressources de Anne se situe un ensemble de manuels scolaires. Le manuel de la classe est utilisé pour donner aux élèves des exercices à faire à la maison ou du travail technique en classe ; Anne leur conseille aussi d'employer chez eux les parties d'auto-évaluation du manuel. Pour les sujets de devoir, elle utilise plutôt les autres manuels ; et pour les activités à mener en classe, elle conçoit ses propres sujets, en adaptant de manière plus ou moins importante les propositions de l'un ou l'autre manuel. Elle trouve notamment que ces activités sont en général trop guidées, et supprime des questions intermédiaires.

Autour de cet ensemble de manuels, et en lien avec celui-ci, son système de ressources intègre plusieurs autres éléments : le programme officiel, qui contient les principaux objectifs en termes de connaissances mathématiques ; certains logiciels et la calculatrice (dont l'usage est largement recommandé par les manuels) ; un livre d'annales de baccalauréat, qui fournit des exercices complémentaires (dans le cours de l'année, le sujet de baccalauréat de Pondichéry lui a fourni une nouvelle référence, sur ce qui pouvait être attendu des élèves), et dans une moindre mesure, le document « Matrices » du ministère. Dans le document « Matrices », Anne retient plutôt des intitulés de thèmes possibles, qu'elle retrouve ensuite dans les manuels. D'une certaine manière, ce document « Matrices » n'est pas directement pour Anne une ressource ; il semble en revanche avoir été largement utilisé par les auteurs de manuels, et c'est de cette manière que les choix faits dans ce document vont influencer les choix de Anne. Ainsi le document « Matrices » ne comporte que très peu de géométrie. Bien qu'il soit présenté comme un ensemble d'exemples, qui peuvent être complétés, la plupart des manuels n'ont pas fait le choix de proposer plus de problèmes de géométrie que ce qui apparaît dans ce document. Ce choix se retrouve dans l'enseignement de Anne, qui propose relativement peu de travail dans un contexte géométrique à ses élèves.

Nous retenons ici un processus de développement d'un système de ressources (processus qui est en cours), pour l'enseignement des matrices. Naturellement, l'an prochain, ce système sera enrichi d'une part de tous les supports conçus cette année ; et d'autre part des différents sujets de baccalauréat qui auront traité de matrices. A ce système de ressources, est associé un ensemble de connaissances professionnelles, développées cette année par Anne à propos de l'enseignement des matrices. Elle apprécie cet enseignement, où les matrices et les calculs matriciels apparaissent comme des outils dans la résolution de certains problèmes. Cette manière de procéder lui semble plus pertinente que la manière dont elle avait elle-même étudié les matrices à l'université, avec une présentation abstraite qui ne permettait pas selon elle de comprendre le sens des calculs effectués. Elle a d'une part réactualisé ses connaissances mathématiques sur les matrices ; acquis des connaissances mathématiques nouvelles, car elle n'avait pas étudié la notion de matrice de transition ; elle a aussi acquis des connaissances sur les difficultés possibles des élèves : notamment, tout ce qui est lié à la confusion entre matrice et nombre réel. Ces connaissances ont été développées au fil d'interactions avec diverses ressources, certaines conçues pour cet enseignement, d'autres rencontrées notamment au cours de sa mise en œuvre (c'est le cas en particulier des productions d'élèves).

Au-delà de ces deux cas illustratifs, nous présentons ci-dessous des résultats sur la documentation des professeurs de mathématiques qui ressortent d'un ensemble de recherches menées depuis plusieurs années.

IV. Résultats de recherche : un bilan provisoire

Nous revenons ici sur les questions posées ci-dessus ; nous proposons certains éléments de réponses, ainsi que des hypothèses, issues de l'étude d'un nombre significatif de cas de professeurs (une vingtaine de professeurs environ ont été suivis avec la méthodologie d'investigation réflexive, depuis le début de nos travaux).

A propos des modes de conception, et de l'évaluation de la qualité des ressources

Le recours au numérique amène de manière évidente, non seulement une profusion de ressources, mais des modifications significatives des modes de conception des ressources. Tout professeur peut diffuser les ressources qu'il a conçues ; par ailleurs, de larges collectifs de professeurs, comme dans le cas de l'association *Sésamath* (Sabra & Trouche 2011) peuvent élaborer des ressources complexes comme un manuel scolaire numérique. Ces évolutions renforcent la nécessité d'évaluation de la qualité des ressources. Mais définir la qualité d'une ressource, qu'il s'agisse d'un manuel scolaire ou d'une ressource en ligne, pose question. Il faut certainement prendre en compte plusieurs types de facteurs : l'ergonomie de la ressource ; son contenu mathématique : justesse, adéquation aux objectifs du programme etc. Mais la qualité d'une ressource doit se comprendre comme qualité pour un utilisateur donné, et donc adéquation avec les objectifs précis de cet utilisateur. Comme tous les objectifs ne peuvent être prévus, d'emblée, on voit ainsi que l'adaptabilité de la ressource va entrer en compte, dans la détermination de la qualité de celle-ci. Ainsi pour un manuel accessible sous forme numérique, la possibilité pour l'utilisateur de télécharger des parties du manuel sous un format aisément modifiable est essentielle. Dans le même temps, ceci pose question : si l'utilisateur peut tout modifier, comment sera conservée la cohérence initiale, construite par les auteurs du manuel ? Ce que l'intérêt porté au numérique met en évidence ici, c'est que la cohérence est, dans tous les cas, à la charge des utilisateurs qui composent leurs propres ressources. Un auteur de manuel, ou de ressources en ligne, ne peut pas soutenir ce processus, en envisageant toutes les modifications possibles ; il peut simplement faire le choix de supports, peut-être aussi de structurations, qui facilitent les adaptations.

Tenir compte des besoins spécifiques des utilisateurs, comme critère de qualité des ressources, amène à placer l'évaluation de la qualité sous la responsabilité des utilisateurs. C'est ce qui a été pratiqué dans le projet *Intergeo* (Trgalova et al. 2010), à propos de ressources concernant l'utilisation en classe de logiciels de géométrie dynamique. Un questionnaire est proposé aux utilisateurs pour l'évaluation des ressources qu'ils emploient. Ceci pose toutefois la question des modifications effectivement apportées aux ressources initiales, si une évaluation négative en est faite. Cette modification demande un travail significatif des concepteurs – et l'accord de ceux-ci, avec les modifications suggérées ! –, ce qui n'est pas forcément réaliste.

A propos des usages de ressources par les professeurs

En France, les professeurs de mathématiques utilisent largement les manuels scolaires. Tous les professeurs que nous avons suivis ont ainsi recours à un ensemble de trois ou quatre (parfois plus) manuels, pour chaque niveau de classe auquel ils enseignent.

Parmi ces manuels, le manuel de la classe joue un rôle spécifique, vecteur de communication avec les élèves, avant tout mobilisé pour donner des exercices à la maison. Les autres manuels servent à fournir des idées d'activités à faire en classe, des sujets de devoir à la maison, ou surtout sur table. A propos de ces activités, nous avons plusieurs fois entendu des professeurs déclarer qu'elles étaient trop détaillées, offrant trop de questions intermédiaires. Ceci concerne le texte d'activité à fournir aux élèves : en effet, ces questions intermédiaires sont en fait appréciées lorsqu'il s'agit de prendre connaissance du contenu de l'activité (et, dans le manuel numérique *Sésamath*, les professeurs utilisateurs ont massivement demandé l'accès à des corrigés des exercices). Parfois, nous avons également observé qu'un de ces manuels donnait la progression annuelle, dimension organisatrice essentielle du système de ressources des professeurs. En ce qui concerne cette progression annuelle, celle-ci peut aussi avoir d'autres sources (site académique par exemple) ; elle est généralement décidée en accord avec des collègues ayant le même niveau. Les manuels sont naturellement associés à d'autres ressources : notamment les ressources de type logiciel, qui sont maintenant largement mentionnées dans tous les manuels.

Les professeurs utilisent également le programme paru au Bulletin Officiel, qui donne les objectifs précis (et, pour le collège, les référentiels de compétences du socle commun). Ces objectifs pilotent les choix des auteurs de manuels, mais aussi les choix des professeurs dans les manuels. Quant aux documents « d'accompagnement des programmes », ceux-ci sont diversement appréciés et utilisés (selon les documents). Nous avons entendu des avis très positifs sur certains textes produits pour le collège ; et d'autres avis, très négatifs, notamment sur des textes produits pour le lycée. Les professeurs utilisent également d'autres types de ressources : ressources trouvées sur divers sites web. En collège, les ressources *Sésamath* sont très largement utilisées, les professeurs téléchargent des parties du manuel numérique et les adaptent pour leurs élèves – surtout les professeurs disposant dans leur salle de classe d'un Tableau Blanc Interactif.

Nous avons identifié de manière claire que les professeurs développent au cours de leur travail un système de ressources structuré ; et qu'une nouvelle ressource est facilement intégrée si elle s'articule naturellement avec les ressources déjà présentes dans ce système – voir le cas de Carole, avec l'alignement du XXI^{ème} siècle. Nous ne pouvons pas inférer de nos travaux des tendances plus globales : « il est important que le manuel propose un grand nombre d'exercices », « grâce à Internet je trouve des activités plus ouvertes » etc. Des études complémentaires sont donc indispensables.

Des études menées aux Etats-Unis sur des professeurs du premier et du second degré (Diekema & Olsen 2012), à propos du traitement de l'information par les professeurs dans le cadre de leur pratique professionnelle, ont montré que le critère essentiel pour déterminer la pertinence d'une ressource était son adaptation aux objectifs précis du professeur. A propos des pratiques de recherche de ressources, les chercheurs ont montré que la première source d'information était les collègues, auxquels on demande conseil : en effet ces collègues sont à même de connaître, ou au moins de comprendre, les objectifs précis dont il est question. En cohérence avec ces constats, les professeurs sont demandeurs, en particulier en ce qui concerne les ressources offertes sur des sites web, de recommandations personnalisées.

Les interactions entre les ressources et les professeurs

Les descriptions que nous avons données ci-dessus soulignent bien que le professeur est concepteur du matériau de son enseignement. Tout professeur, même s’il ne diffuse pas ses productions, combine, modifie des ressources. On entend parfois dire que les professeurs sont seulement à la recherche de ressources clef en main, qu'ils puissent appliquer directement en classe pour économiser du temps de préparation. Toutes nos observations vont à l'encontre d'une telle idée. Certes, les professeurs privilégient des ressources qui ne les obligent pas à un travail complexe de compréhension des intentions des auteurs, qui affichent clairement les objectifs poursuivis et les tâches proposées. Cependant, même lorsqu'un professeur déclare qu'il a « appliquée telle quelle » une fiche trouvée sur Internet, ou une leçon passée par un collègue, une observation précise identifie rapidement des adaptations substantielles, qui peuvent être liées au contexte d'enseignement, au profil des élèves, au temps disponible, ou aux connaissances du professeur.

Inversement, le contenu d'une ressource influence clairement la préparation du professeur et ce qui va se passer dans la classe. Le document « Matrices » annonce qu'il ne présente que des exemples, et que les professeurs peuvent faire d'autres choix de problèmes à traiter ; toutefois, ce sont ces mêmes exemples qui se retrouvent dans les manuels, et donc sans doute dans bien des cours de Spécialité. Ainsi, les transformations géométriques sont très peu abordées. Ce choix peut avoir plusieurs origines ; mais le contenu du document « Matrices » y contribue de manière certaine.

C'est pourquoi nous soulignons les interactions entre les professeurs et les ressources : il s'agit bien de relations à double sens, les ressources influençant les choix des professeurs, et les professeurs transformant les ressources qu'ils utilisent. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans : Gueudet & Trouche 2008, 2010 ; Gueudet, Pepin & Trouche 2012.

V. Formation des professeurs de mathématiques et ressources, des propositions

Former les professeurs aux usages de ressources

Nous espérons l'avoir mis en évidence ci-dessus : former les professeurs aux usages de ressources est essentiel, en particulier dans le contexte actuel de foisonnement de l'offre de ressources disponibles. Dans la formation initiale des professeurs de mathématiques, il semble que le manuel soit un objet d'étude assez répandu, et que soient pratiquées des analyses de manuels, à différentes échelles : progression choisie, contenu d'un chapitre, texte d'une activité, énoncé d'un exercice... Des activités sont proposées de comparaison de différents manuels, et de réflexion sur les choix effectués par les auteurs. En revanche, l'usage du manuel avec les élèves (quelles recommandations leur faire, quels usages leur proposer) semble nettement moins abordé dans ce contexte de formation – initiale ou continue – et pourrait utilement trouver sa place en formation.

En ce qui concerne les ressources en ligne, là encore leur analyse semble peu pratiquée en formation. Il serait possible de proposer des tâches d'analyse de ressources, utilisant une grille d'évaluation de la qualité ; ou même la construction d'une telle grille, avant de l'appliquer à l'analyse. Les travaux menés notamment dans le cadre du projet *Intergeo* (Trgalova et al. 2009) ont montré que l'analyse de ressources contribuait utilement à la formation des professeurs – formation aux usages de logiciels de géométrie dynamique, dans le cas d' *Intergeo*.

Dans le cas de la formation continue, un travail plus général sur les ressources pourrait également être envisagé. Les recherches menées dans le cade de l'approche documentaire, mobilisant la méthodologie d'investigation réflexive, ont eu – sans que cet objectif ait été retenu au départ – un impact significatif sur les pratiques des professeurs. En effet cette méthodologie demande au professeur d'identifier quelles sont ses ressources, comment celles-ci sont agencées, mobilisées etc. On demande notamment au professeur de fournir une représentation schématique de son système de ressources (RSSR, figure 4).

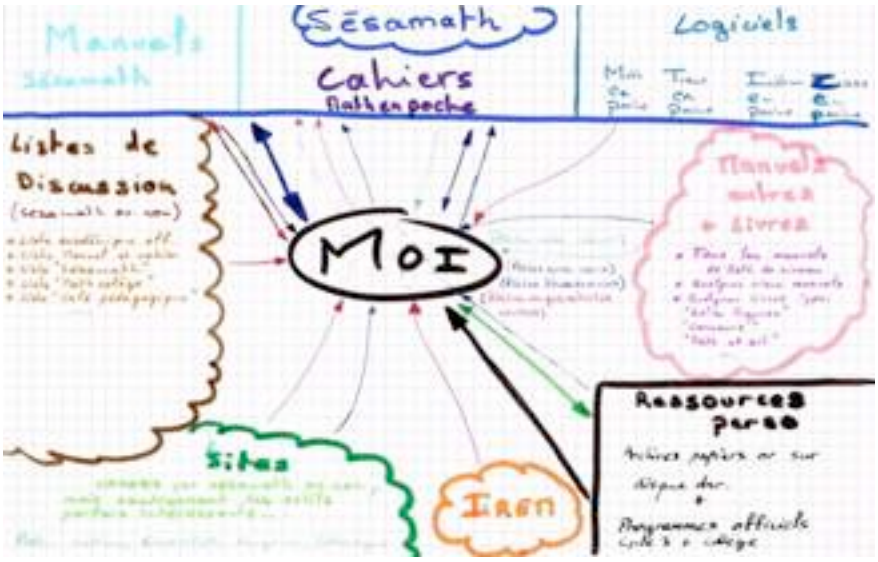


Figure 4 – Représentation schématique par un enseignant de son système de ressources

Cet auto-examen de ses ressources par le professeur peut en amener des restructurations significatives, et mettre au jour des possibilités qu'il/elle n'avait pas encore identifiées.

Travail documentaire collectif et modalités de formation continue

Quel que soit l'objectif d'une formation de professeurs de mathématiques, celle-ci met en jeu des ressources ; et par ailleurs, celle-ci implique un travail documentaire des stagiaires. Certaines modalités de formation, susceptibles d'amener des changements durables de pratiques des professeurs, ont été identifiées par des recherches en didactique des mathématiques. Au Japon, sont pratiquées depuis de nombreuses années des *Lesson Studies* (Fernandez et Yoshida 2004) : des équipes de professeurs préparent une leçon sur un thème, l'implémentent en classe, et l'améliorent suite aux observations réalisées en classe. De manière générale, le travail documentaire collectif des professeurs a été identifié comme une modalité de formation continue efficace, dans le sens où elle amène des modifications durables des pratiques (Jaworski 2008, Krainer & Wood 2008, Gueudet & Lebaud 2013). Le groupe IREM est une telle modalité de formation, dont on sait par expérience l'efficacité, sans que celle-ci ait fait l'objet de recherches spécifiques – une autre piste qu'il serait intéressant de poursuivre.

Les moyens numériques amènent sur ce point encore des modifications significatives, notamment grâce aux plate-formes qui permettent une collaboration distante. Nous avons mené des travaux en particulier sur le programme *Pairform@nce*, programme de formation continue visant l'intégration de logiciels pour toutes les disciplines et tous les niveaux scolaires (Soury-Lavergne, Gueudet, Loisy & Trouche 2011). Les formations *Pairform@nce* reposent sur un principe de conception collaborative, de mise en œuvre et d'analyse de séances ou séquences de classe, par des équipes de professeurs. Il s'agit de formations hybrides (donc en partie en présence et en partie à distance), utilisant une plate-forme distante, locale à la formation dispensée. Nous avons observé que pour de telles formations, une part de travail en présence des stagiaires était un prérequis essentiel, pour qu'une collaboration distante soit possible.

De plus, une formation *Pairform@nce* est issue d'un parcours de formation, qui donne une description générique de la formation, ainsi que des conseils pour les formateurs (figure 5). Ce parcours est disponible sur une plate-forme nationale, et est importé sur la plate-forme locale pour la construction d'une formation locale. Ainsi les parcours *Pairform@nce* constituent (ou devraient constituer) des ressources pour les formateurs.

Figure 5 – Des ressources pour les formateurs, dans un parcours Pairform@nce

Les recherches que nous avons menées sur le programme *Pairform@nce* montrent notamment, à propos des formateurs, (Gueudet, Sacristan, Soury-Lavergne, & Trouche 2012), la difficulté de l'appropriation d'un parcours de formation par des formateurs qui ne l'ont pas conçu. Là encore, des travaux complémentaires sont nécessaires, pour déterminer comment il serait possible de constituer un corpus de ressources à destination de formateurs, qui soit réellement utile pour la mise en œuvre de formations.

Conclusion

Nous avons tenté dans ce texte, à la fois de faire un bilan des résultats déjà obtenus sur les ressources des professeurs de mathématiques ; de souligner la perspective fondamentale du professeur comme concepteur de ses ressources ; et d'indiquer des directions de recherche et des pistes de formation. Ces travaux doivent naturellement être poursuivis ; de prochaines publications amèneront des éclairages sur les manuels scolaires (numéro spécial de ZDM, octobre 2013), et sur le travail collaboratif des professeurs avec différents types de ressources (numéro spécial de ZDM, décembre 2013). Peu de chercheurs français prennent part à ces travaux internationaux, souhaitons que cette situation évolue !

BIBLIOGRAPHIE

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education, J*ournal of Mathematics Teacher Education* 3, 205–224.

Artigue, M., & Gueudet, G. (2008). Ressources en ligne et enseignement des mathématiques. *Actes De l'Université d'Été De Mathématiques*, Saint-Flour.

Assude, T. (2007). Teachers' practices and degree of ICT integration, *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Larnaca, Chypre.

Balliot, A. & Gueudet, G. (2013). Matrices au lycée : de nouvelles possibilities, pour la transition secondaire-supérieur ? *Actes du colloque IREM "Transition lycée-post-bac"*, Lyon, Mai 2013.

Borba, M.C., & Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 44, 697-704.

Bruillard, É. (dir.) (2005). *Manuels scolaires, regards croisés*. CRDP de Basse-Normandie, Documents, actes et rapports sur l'éducation, Caen.

Choppin, A. (2005). L'édition scolaire française et ses contraintes : une perspective historique, in Bruillard, É., *Manuels scolaires, regards croisés.* CRDP de Basse-Normandie, Documents, actes et rapports sur l'éducation, Caen.

Diekema, A. R. & Olsen Whitney, M. (2012). The Notion of Relevance in Teacher Information Behavior. In *Proceedings of the American Society for Information Science and Technology*, Baltimore, MD.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Studies: a Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. London: Lawrence Arlbaum Associates.

Fischer G., Ostwald J. (2005), Knowledge communication in design communities, in R. Bromme, F. Hesse, H. Spada (eds.), *Barriers and Biases in computer-mediated knowledge communication – and how they may be overcome*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gueudet, G. & Lebaud, M.-P. (2013). Démarches d'investigation en sciences, collectifs dans la formation des enseignants : enquête sur un lien complexe. In Grangeat, M. (ed.) , *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation. Des formations et des pratiques de classe*, (pp. 95-114), Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.

Gueudet, G., Pepin, B., Trouche, L. (eds.) (2012). *From Text to 'Lived' Resources : Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*, New York, Springer.

Gueudet, G., Sacristan, A.I., Soury-Lavergne, S. & Trouche, L. (2012). Online paths in mathematics teacher training : new resources and new skills for teacher educators, *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 44 (6), 717- 731.

Gueudet, G. & Trouche, L. (dir.) (2010). *La documentation des professeurs en mathématiques, Ressources vives.* PUR, Rennes et INRP.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. le cas des mathématiques. *Education Et Didactique*, 2(3), 7-33.

Guin, D., Trouche, L. (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique.* Grenoble : La pensée sauvage.

Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal,* 28(4), 567-90.

Hoyles, C., & Lagrange, J.B. (Eds.) (2010). *Mathematical Education and Digital Technologies:*

Rethinking the terrain. New York: Springer.

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: teachers and didactitians in collaboration. In K. Krainer & T. Wood (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol. 3: Participants in mathematics teacher education* (pp. 309-330), Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

Krainer, K. & Wood, T. (eds.) (2008). *International Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol. 3: Participants in mathematics teacher education*, Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

MEN/DEGESCO (2012). Ressources pour la classe Terminale générale et technologique. Matrices.

ETUDE DE LA GENESE D'UNE RESSOURCE : APPORTS D'UNE FORGE DOCUMENTAIRE, L'EXEMPLE DE *MUTUAMATH*

Liouba Leroux,
Professeur au lycée L'Oiselet de Bourgoin Jallieu, membre de l'IREM de Grenoble et de l'association Sésamath

Résumé – La genèse d'une ressource pour l'enseignement relève le plus souvent de l'espace privé de son auteur ou de son collectif d'auteurs. Pourtant l'accès à cette genèse est d'un grand intérêt pour s'approprier une ressource (contexte d'enseignement) ou pour en discuter la construction (contexte de formation d'enseignants). Après un bref parcours de quelques espaces de mutualisation de ressources et/ou production de ressources collaboratives, nous nous attardons sur le site *Mutuamath* pour en dégager les potentiels et les limites.

Une ressource pour l'enseignement n'est pas une entité morte. Elle a une naissance (la première idée qui jaillit du cerveau de son concepteur), une enfance (sa fabrication proprement dite), sa majorité (où elle est utilisée en classe), une vie de maturation (où elle est retouchée, parfois en profondeur, d'après la confrontation avec la classe, ou lorsque d'autres que son auteur se l'approprient), et quelquefois, sa mort (lorsqu'un changement de programme la rend tellement caduque qu'il n'est plus possible de l'adapter).

Dans cet atelier, nous avons examiné l'outil qu'est la forge documentaire *Mutuamath*[12] afin de suivre la vie d'une ressource pour l'enseignement, sa genèse. Celle-ci relève le plus souvent de l'espace privé de son auteur ou de son collectif d'auteurs. Pourtant l'accès à cette genèse est d'un grand intérêt pour s'approprier une ressource (contexte d'enseignement) ou pour en discuter la construction (contexte de formation d'enseignants).

Mais avant d'aller plus loin, nous avons besoin de poser une distinction que nous reprendrons de (Gueudet & Trouche, 2008)[13], celle entre ressource et document :

- nous appellerons ressource ce qui est disponible pour faire classe (dans un article, un manuel, sur internet...) ;
- nous appellerons document ce qui est construit à partir d'une ressource, porteur d'une intention didactique et associé à des moyens didactiques ;
- on peut donc schématiquement résumer cette distinction dans l'identité « Document = Ressources + Schème d'utilisation ».

Cette distinction est essentielle, car elle permet de rappeler qu'une même ressource, sans la précision d'une intention didactique, d'un contrat didactique et d'une mise en œuvre, peut aboutir à de nombreuses activités d'élèves différentes. Deux questions viennent alors naturellement :

Comment faciliter la conversion d'une ressource en document ?

---

[12] http://mutuamath.sesamath.net

[13] Comme toute l'approche documentaire qui sous-tend cet atelier.

… c’est-à-dire qu’au-delà de la ressource, tout le document puisse être transmis une fois les intentions et les moyens didactiques définis.

Comment rendre des étudiants d’ESPE conscients de cette distinction et les initier à cette conversion nécessaire ?

Avec deux autres questions en arrière-plan : une forge documentaire est-elle un outil intéressant pour un enseignant ? Est-elle un outil intéressant pour la formation des enseignants ?

Cadre théorique

Nous utilisons le cadre de la genèse documentaire initiée par Ghislaine Gueudet et Luc Trouche[14]. Celui-ci montre comment la réponse à un problème d’enseignement n’est pas dans la seule ressource :

> « Rabardel distingue un artefact, disponible pour un utilisateur donné, et un instrument que cet utilisateur construit, à partir de cet artefact, dans le cours de son action située. […] Ces processus de développement, les genèses instrumentales, reposent, pour un individu donné, sur l’appropriation et la transformation de l’artefact, pour résoudre un problème donné, à travers une variété de contextes d’usage ».

Pour un artefact constitué d’une ressource, la genèse instrumentale est baptisée genèse documentaire et les auteurs soulignent :

> « Toute genèse documentaire, pour un professeur, est porteuse de développement professionnel ».

Reste donc à envisager comment il est possible de travailler sur cette genèse documentaire.

Pour devenir document, la ressource peut utiliser des « marqueurs de vie » : scénarios d’usage, comptes-rendus d’expérimentation, traces de travaux d’élèves. Dans le cadre du projet *Pairform@nce*, Gueudet, Trouche, & Soury-Lavergne (2008) identifient que

> « [...] la nécessité d’un « historique du parcours » nous semble essentielle.
> – Elle est essentielle pour les concepteurs eux-mêmes, les contraignant à un regard réflexif sur les ressources qu’ils proposent,
> – Elle est essentielle aussi pour des formateurs qui voudraient s’approprier un parcours qu’ils n’auraient pas conçu : l’appropriation est facilitée par la connaissance des intentions des concepteurs et de l’origine des ressources proposées,
> – L’historique du parcours pourrait ainsi devenir un CV d’un parcours, métaphore signifiant bien qu’un parcours doit être une ressource vivante, s’enrichissant des apports de chaque utilisateur ».

Ils ajoutent :

> « Nous avons donc choisi de faire un « historique » du parcours. Cet historique regroupe à la fois la genèse du parcours, avec les éléments cruciaux de l'expérience des concepteurs qui justifient les choix ainsi que les mises en œuvre successives. Actuellement, cet historique a la forme d’un document texte accessible dans l’étape 1 de nos parcours. »

[14] ibidem

Il y a donc recherche sur les « bons marqueurs » qui permettraient de faciliter l'appropriation d'une genèse documentaire. Avant de voir comment *Mutuamath* propose ce suivi, effectuons un historique rapide d'un panel de sites de création de ressources.

Bref historique

Nous nous limiterons volontairement à des sites de créations de ressources mis en place par *Sésamath*, pour comprendre leur évolution, ainsi que deux sites très liés à l'approche théorique utilisée, afin d'approfondir le contexte.

Mathadoc[15]

Ce site permettait de mutualiser des documents finis, parfois accompagnés d'une courte description. Pas de commentaires possibles, pas de mises à jour autres que celles demandées par l'auteur auprès des administrateurs. Après un succès important auprès des enseignants, particulièrement de collège, à partir de 2001, il est arrêté en 2005.

Mathenpoche[16] *(MEP)*

Lorsque *Mathenpoche* a été lancé, certains membres du groupe des auteurs (environ 15 personnes) se sont occupés de scénariser les exercices interactifs pendant que d'autres les programmaient. Pour avoir une idée claire des limites à imposer aux paramètres aléatoires intervenant dans les questions, des dialogues se créaient entre le scénariste et le programmeur d'un exercice, soit par mél direct, soit par la liste de diffusion dédiée au projet. À part dans la description en ligne des exercices faite *a posteriori* par d'autres membres, aucun élément de ces discussions n'a été accessible aux utilisateurs. *Mathenpoche* est lancé en 2002 pour le niveau 6^{e}, son développement se poursuit encore.

SfoDem[17]

Dispositif de formation d'enseignants du second degré, qui s'est déroulée de septembre 2000 à juin 2006 dans l'académie de Montpellier. La conception d'une ressource est alors initiée à partir de ce qui sera appelé un germe de ressource (par exemple, une animation géométrique trouvée sur Internet) et a pour but de construire, à partir de ce germe, une ressource exploitable en classe, de justifier les choix effectués, de rendre compte de l'expérience commune aux autres membres du groupe de formation.

Pairform@nce[18]

Continuateur du *SfoDem* dans un nouveau cadre,

> « *Pairform@nce* est un dispositif national qui permet de produire des parcours de formation et de mettre en œuvre des formations adaptées aux contextes locaux des

[15] http://mathadoc.sesamath.net

[16] http://mathenpoche.sesamath.net/

[17] Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques, http://sfodem.um2.fr/

[18] http://national.pairformance.education.fr/

établissements, des circonscriptions ou des académies. Dispositif hybride de formation continue, alternant travail en présence et à distance, synchrone et asynchrone, il privilégie le travail entre pairs. »

Manuels Sésamath[19]

Lancés pour la classe de 5e en 2005, les manuels *Sésamath*[20] sont rédigés à travers une liste de diffusion et une interface collaborative qui gère les différentes versions d'un fichier et son état de validation.

La liste et l'interface collaborative sont d'accès restreint aux seuls auteurs. Les tests, retours et choix didactiques et éditoriaux sont accessibles via les archives de la liste, mais uniquement par les auteurs. Sur certains manuels (6e 2009), des forums ont été organisés sur la plateforme réservée aux enseignants *Sésaprof*[21] où les relectures, une fois le contenu plus ou moins stabilisé, étaient publiques.

Mutuamath

En partant du fonctionnement d'une forge logicielle, hors du cadre théorique précédemment cité, Daniel Caillibaud lance en 2007 le site www.edulibre.org, auquel il donne le nom de « forge documentaire ». Il rencontre des membres de *Sésamath*[22] qui souhaitent relancer un site de mutualisation et de travail collaboratif ouvert, hors d'un projet précis piloté par une ligne éditoriale comme celui des *Manuels Sésamath*. Lancé en version beta en 2009, il s'appellera *Mutuamath*. En juin 2013, une phase de finition de développement et de débats internes sur la notion de validation de ressource et de qualité de ressource était en cours. Aucune information massive n'avait été diffusée à propos de *Mutuamath*, afin d'atteindre une masse critique, en quantité et en qualité de ressources, propres à rendre intéressante les premiers contacts de visiteurs non membres de *Sésamath*.

À la mise en place du site, dans un triple souci de cohérence graphique, d'utilisation des principaux apports de la didactique et de facilité d'indexation, les contributeurs étaient encouragés à proposer leurs ressources en utilisant un modèle de document « complet », comportant pour les activités de classe : le texte élève, un scénario d'usage, une correction et une fiche d'identification avec objectifs, prérequis, mots clés, compétences du programme et/ou du socle mises en jeu, thème de convergence éventuellement abordés, outils TICE éventuellement utilisés, intentions de l'auteur, description en détail du déroulement de l'activité et prolongements possibles. L'expérience a montré que ce modèle, même pensé par ses concepteurs comme à adapter et à aménager au cas par cas, produisait un effet repoussoir important pour les enseignants qui déclaraient vouloir partager une de leurs créations.

Les modèles ont donc été conservés (ils restent disponibles à la page http://mutuamath.sesamath.net/modeles) mais relégués au second plan de façon à encourager la création d'ébauches, quitte à ce qu'un travail de mise au modèle soit fait par la suite[23].

[19] http://manuel.sesamath.net/

[20] Ils ont été précédés en 2004 des *Cahiers Mathenpoche 6e*, développés avec les mêmes outils.

[21] Cf note 14.

[22] En particulier Noël Debarle, responsable du projet.

[23] Comme ce sera le cas dans l'activité détaillée dans cet article.

Présentation de *Mutuamath*

Mutuamath est accessible à l'adresse http://mutuamath.sesamath.net/. Pour avoir accès à tout le site, y compris les ressources sous forme d'ébauches, il est nécessaire d'avoir un compte *Sésaprof*[24].

Une fois connecté, il devient possible d'ajouter des ressources et les ébauches deviennent accessibles.

Sur la page d'accueil, des flux informent le visiteur des derniers commentaires, des dernières ébauches modifiées et des dernières ressources publiées.

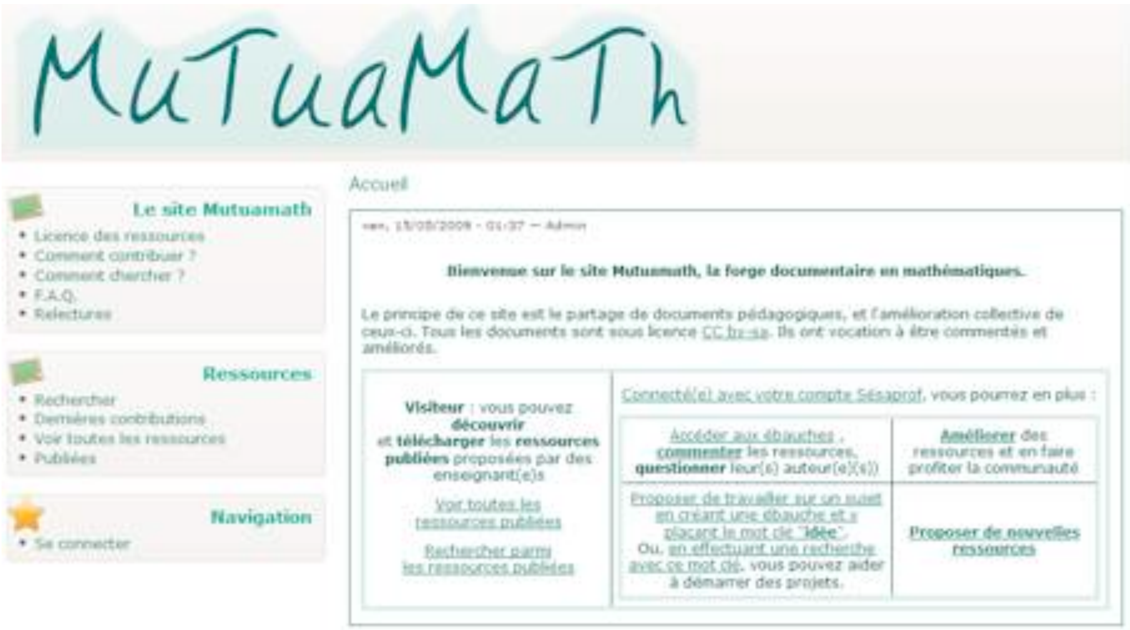


Figure 1 – L'écran d'accueil de Mutuamath, en mode non identifié, au 14 février 2014

Lors de l'atelier, les participants ont disposé de temps pour explorer les possibilités de Mutuamath à travers les ressources sélectionnées sur la page http://mutuamath.sesamath.net/corfem2013.

Le questionnement proposé pour orienter l'exploration était le suivant :

- En termes de genèse, qu'apporte une ressource *Mutuamath* ? Est-ce cohérent avec les attentes issues du cadre théorique ?
- En termes de formation initiale ou continue : 1) Est-ce de nature à permettre aux étudiants de percevoir la distinction entre ressource et document ? 2) À quels apports didactiques théoriques cela peut-il faire référence et être une introduction ou une mise en pratique ?

Dans ce compte rendu, nous nous focaliserons sur la ressource « Un nouveau type de figure » dont l'adresse est http://mutuamath.sesamath.net/node/9.

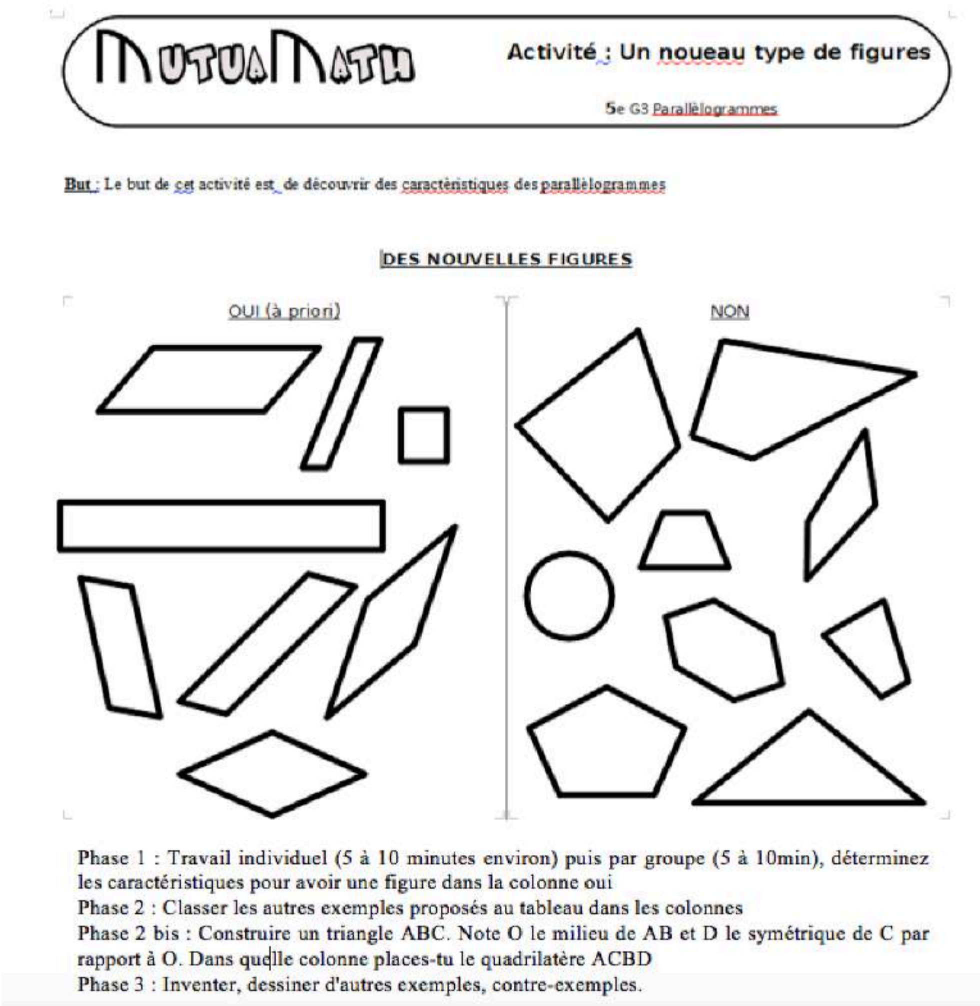
[24] L'inscription à l'espace de *Sésamath* dédié aux professeurs : « *Sésaprof* » est gratuit et les données recueillies ne sont pas diffusées autrement que sous forme de résumés statistiques. *Sésaprof* est un espace sans publicité réservé aux titulaires d'un compte courriel académique (pour les inscriptions hors de France, une procédure dérogatoire est disponible).

Un exemple de ressource : l'activité « Un nouveau type de figure »

En suivant le lien de cette ressource, vous découvrirez la dernière version de la description et des fichiers, accompagnés des commentaires dans l'ordre chronologique. Dans cette synthèse, nous proposons, grâce à la conservation de toutes les versions accessibles dans l'onglet « Révisions » de chaque ressource, de commencer par présenter la version du 29 mai 2009. Celle-ci consiste en un simple fichier texte accompagné de la description suivante :

Figure 2 – Version du 29 mai 2009

Le document texte est reproduit ci-dessous (figures 3 et 4).



MutuaMath — Activité : Un noueau type de figures

5e G3 Parallèlogrammes

But : Le but de cet activité est de découvrir des caractèristiques des parallèlogrammes

DES NOUVELLES FIGURES

OUI (à priori)	NON

Phase 1 : Travail individuel (5 à 10 minutes environ) puis par groupe (5 à 10min), déterminez les caractéristiques pour avoir une figure dans la colonne oui

Phase 2 : Classer les autres exemples proposés au tableau dans les colonnes

Phase 2 bis : Construire un triangle ABC. Note O le milieu de AB et D le symétrique de C par rapport à O. Dans quelle colonne places-tu le quadrilatère ACBD

Phase 3 : Inventer, dessiner d'autres exemples, contre-exemples.

Figure 3 – Document texte, première page

Puis, sur une seconde page :

Objectifs : Mettre en avant les caractéristiques des parallélogrammes sur un travail purement visuel.
Il n'y a pas de codage dans cette activité d'approche (d'où le a priori) ce qui n'empêche de sensibiliser les élèves à ce sujet.
Description : Le principe de l'activité est basé sur la notion de conceptualisation.
Le but de la première phase est de déterminer le plus de critères possibles justifiant le classement. Pour avoir testé l'activité, tous les élèves s'investissent. Même les plus faibles visualisent par exemple que pour être dans la colonne oui, il est nécessaire d'avoir un quadrilatère. A ce niveau, peu d'élèves perçoivent l'utilisation d'un centre de symétrie comme argument de classement.
Le but de la seconde phase est de réinvestir les critères proposés. L'enseignant donne au tableau (ou transparent, ou vidéo si possible!) différentes figures à classer.
La deuxième partie est la pour faire le lien avec la symétrie centrale si cela n'a pas été perçu.
La troisième partie consiste à construire (à main levée) des figures.

Figure 4 – Document texte, seconde page

Les commentaires laissés par les utilisateurs de *Mutuamath* sont : figures 5 à 8.

1ère impression

ndebarle - 29/05/2009 - 13:30

Salut.
Je viens de regarder l'activité sur les parallélogrammes proposée par Denis il y a bien longtemps.
Je trouve le principe très intéressant. Je pense que la prochaine fois que j'aurais des 5ème, je tenterai cela.
Quelques questions :
Si j'ai bien compris, la première page est la fiche élève.
Le mot parallélogramme est cité dans le but de l'activité, tu le donnes donc dès le début ?
Je me demande alors pourquoi tu ne l'utilise pas plus franchement dans le reste de l'activité.
A choisir, je préfère l'option de ne pas donner le nom au début, pour ne pas induire la notion de parallélisme.
Remarque qui me parait plus importante :
Est ce que tu gère, dans cette activité, la question des propriétés suffisantes ?
Le fait que tu mettes des quadrilatères qui ne sont pas des parallélogrammes me laissent à penser que oui.
Si c'est le cas, j'ajouterais dans les contre-exemples un cerf-volant, pour montrer aux élèves que la condition : deux paires de côtés de même longueur n'est pas suffisante.
Ca vaudrait le coup, je pense, de compléter l'activité pour préciser quelles figures vont être mises au tableau par le professeur.
Tu mets en évidence l'aspect symétrie parce que tu dis que les élèves n'y pensent pas.
Mais est ce que certains élèvent pensent aux diagonales qui se coupent en leur milieu ?
Ou est ce que cette propriété est mise en évidence au moment où on fait apparaître la symétrie ?

>Si j'ai bien compris, la

lauret - 29/05/2009 - 13:39

>Si j'ai bien compris, la première page est la fiche élève.
oui avec les différentes figures.
> A choisir, je préfère l'option de ne pas donner le nom au début, pour ne
>pas induire la notion de parallélisme.
je ne me souviens plus si j'ai évoqué le nom du parallélogramme ? Je pense
que non, car sinon il pense au mot parallèle et cela fausse un peu
certaines pistes de recherches.
>Est ce que tu gère, dans cette activité, la question des propriétés
>suffisantes ?
>Le fait que tu mettes des quadrilatères qui ne sont pas des
>parallélogrammes me laissent à penser que oui.
oui mais j'institutionnalise cela par petite dose ensuite. C'est donc
seulement évoqué dans cette activité.
>Si c'est le cas, j'ajouterais dans les contre-exemples un cerf-volant,
>pour montrer aux élèves que la condition : deux paires de côtés de même
>longueur n'est pas suffisante.
C'est effectivement un bon complément. Mais si j'ai bien lu les programmes,
le cerf volant doit disparaître des programmes de sixièmes, il me semble.
>Ca vaudrait le coup, je pense, de compléter l'activité pour préciser
>quelles figures vont être mises au tableau par le professeur.
oui j'essaye de trouver un moment entre mes enfants et le reste du boulot,
pour le faire. L'idée est surtout de faire varier la "forme du
parallélogramme, son "inclinaison" sur le tableau et de compléter avec
d'autres figures. Je peux peut-être prévoir un diaporama ?

Figure 5

>Tu mets en évidence l'aspect symétrie parce que tu dis que les élèves
>n'y pensent pas.
J'ai proposé cette activité dans deux classes l'an dernier. Dans une classe, un groupe a pensé à la symétrie. Dans l'autre classe aucune piste liée à la symétrie, d'où la phase 2bis si nécessaire.
>Mais est ce que certains élèvent pensent aux diagonales qui se coupent
>en leur milieu ?
>Ou est ce que cette propriété est mise en évidence au moment où on fait
>apparaître la symétrie ?
Cette propriété est mise en évidence au moment où on fait apparaître la symétrie.
Quelques remarques supplémentaires : Certains groupes d'élèves n'arrivent qu' à repérer qu'il y a 4 côtés dans la colonne de gauche. Ils ne pensent pas à vérifier si ce critère suffit pour classer les figures ! D'autres, au contraire perçoivent le parallélisme, les égalités de longueurs (une seule élève a pensé aux diagonales !) avant de parler de la symétrie.

> oui mais j'institionnalise

Liouba.Leroux - 29/05/2009 - 13:43

> Oui mais j'institionnalise cela par petite dose ensuite. C'est donc
> seulement évoqué dans cette activité.
Lorsqu’on cherche une règle permettant de catégoriser, naturellement on aura si les exemples/contre-exemples sont suffisamment riches une notion de condition nécessaire et de condition suffisante, même si on n'en parle pas.
Mais si j'ai bien lu les programmes, le cerf volant doit disparaître des programmes de sixièmes, il me semble.
Le trapèze a disparu de tous les programmes, et pourtant tu en mets... et c'est normal.
Effectivement, il faudrait un cerf-volant (voir deux pour le fer de flèche si on met des polygones concaves)
> L'idée est surtout de faire varier la "forme du parallélogramme, son
> "inclinaison" sur le tableau et de compléter avec
> d'autres figures. Je peux peut-être prévoir un diaporama?
Oui. En fait, l'idéal serait de préparer des arguments d'élèves et des figures à leur proposer pour les pousser dans leurs retranchements suivant les arguments donnés.
> Cette propriété est mise en évidence au moment où on fait apparaître la
> symétrie.
Je pense que c'est un point important : Il serait bien de dégager que tous ces parallélogrammes ont qqch en commun d'utile. Quoi, il nous faut le trouver. En effet, quel intérêt de caractériser une nouvelle classe de polygone si celle-ci n'a pas d'intérêt propre. Je ne dis pas qu'il faut obligatoirement un alibi "technologique" par exemple, mais au moins une raison de classer.
Je ne sais pas si je suis clair, mais en bref, il me semble que la raison "le programme le dit" ou "çà sera à l'interro" est trop pauvre. Quel est l'intérêt de se casser la tête avec les parallélogrammes ? Que nous apportent-ils ?
En quelque sorte, si on a un critère compliqué pour savoir si une figure convient ou pas, il est raisonnable de chercher des critères plus simples qui aboutiront au même choix. On alors un but de modélisation, et on peut en parler aux élèves. Les critères simples sont les propriétés caractéristiques des parallélogrammes. Quel critère complexe pourrait-on imaginer qui donne aussi ce tri ?
Je pense à un critère de type mécanique : une pièce qui ferait ceci ou cela, mais ce n'est peut-être pas la bonne voie.
En tout cas l'activité sera plus forte si elle s'inscrit dans une telle démarche.
En tout cas cela me semble prometteur !

Figure 6

Elargir l'activité vers les prismes

Guigui - 07/06/2009 - 15:42

Bonjour,

On nous encourage de plus en plus, dans le cadre des progressions spiralées, à faire des passerelles entre différents chapitres. Je me demandais si cette activité ne pouvait pas comprendre une question qui porterait sur les faces "avant", "arrière" ou "latérales" de différents prismes droits. Ces faces entrent-elles dans la catégorie demandée ? Sans être envahissante, cela permet de faire une première approche ou une piqure de rappel sur l'espace dans le cadre des parallélogrammes.
C'est une idée à prendre ou à laisser.

Elargir l'activité vers les prismes

ndebarle - 14/06/2009 - 10:07

Salut.
Dans la mesure où c'est vraiment une activité d'introduction sur les parallélogrammes, probablement la première sur le sujet, j'ai le sentiment qu'il serait délicat de mélanger des figures ayant des statuts différents (figures du plan et perspectives cavalières).
Je pense que ça peut plutôt faire l'objet d'une autre activité. Qu'en penses-tu ?

Avant reprise pour ce week-end ;-)

Liouba.Leroux - 13/06/2009 - 18:00

Salut !

Bon, je reprends ici un peu pêle-mêle les choses qui me semblent à reprendre dans cette activité, tant sur la forme que sur le fond.

L'idée de base est intéressante, les figures assez riches.

- Prendre comme base le modèle actuellement sur le site :-)
- Pour la fiche élève :
    - enlever le mot parallélogramme
    - enlever le déroulement de l'activité
    - ajouter un cerf-volant.
    - éventuellement ajouter en bas de la feuille les exemples qui seront affichés au tableau dans la partie 2, avec une ligne de découpe, de façon à ce que le prof puisse photocopier une seule feuille, massicoter, et distribuer en 2 parties. Sauf si tu pousses le vice jusqu'à suivre l'idée que j'avais évoquée dans mon premier commentaire et à préparer une figure pour chaque type d'argument des élèves.
- Pour le scénario : déjà pas mal
- Pour la fiche d'identification, déjà pas mal
- Tu peux éventuellement mettre soit dans la fiche d'identification soit dans la partie "correction" une proposition d'institutionnalisation.

quelques remarques une idée

gbougon - 15/06/2009 - 11:58

Je trouve intéressante l'activité. Je n'ai pas eu de 5eme depuis plusieurs années, je la suggérerai à mes collègues.
Il ne faudrait pas introduire le mot parallélogramme dans la fiche élève.
Dans la colonne non, j'ajouterais un cerf volant

Figure 7

les figures supplémentaires à classer sont projetées, ce serait peut être intéressant de le faire en GD. Cela permettrait d'observer les diagonales et s'approcher de la notion de symétrie centrale avant la deuxième phase.

Oui à la GD

Liouba.Leroux - 15/06/2009 - 12:10

> les figures supplémentaires à classer sont projetées, ce serait peut être intéressant de le faire en
>GD. Cela permettrait d'observer les diagonales et s'approcher de la notion de symétrie centrale
>avant la deuxième phase.
Tout à fait d'accord.

J'ai repris cette

sebhache - 21/11/2009 - 14:24

J'ai repris cette activité.
Si cela convient, il reste à mettre des compléments pour le prof : figures à projeter et/ou scripts de figures avec Trancenpoche par exemple. Je suis preneur évidemment des propositions qui iraient dans ce sens !

Correctif

sabroberjot - 29/01/2011 - 21:32

Bonjour,
j'ai pas tout à fait compris comment le faire moi-même (surtout sur chacun des fichiers y compris diaporama).
A la question 2. Ajouter un S à "colorie celle"
Activité testée en classe: super !
Merci,

Super activité

acarret - 13/03/2011 - 12:33

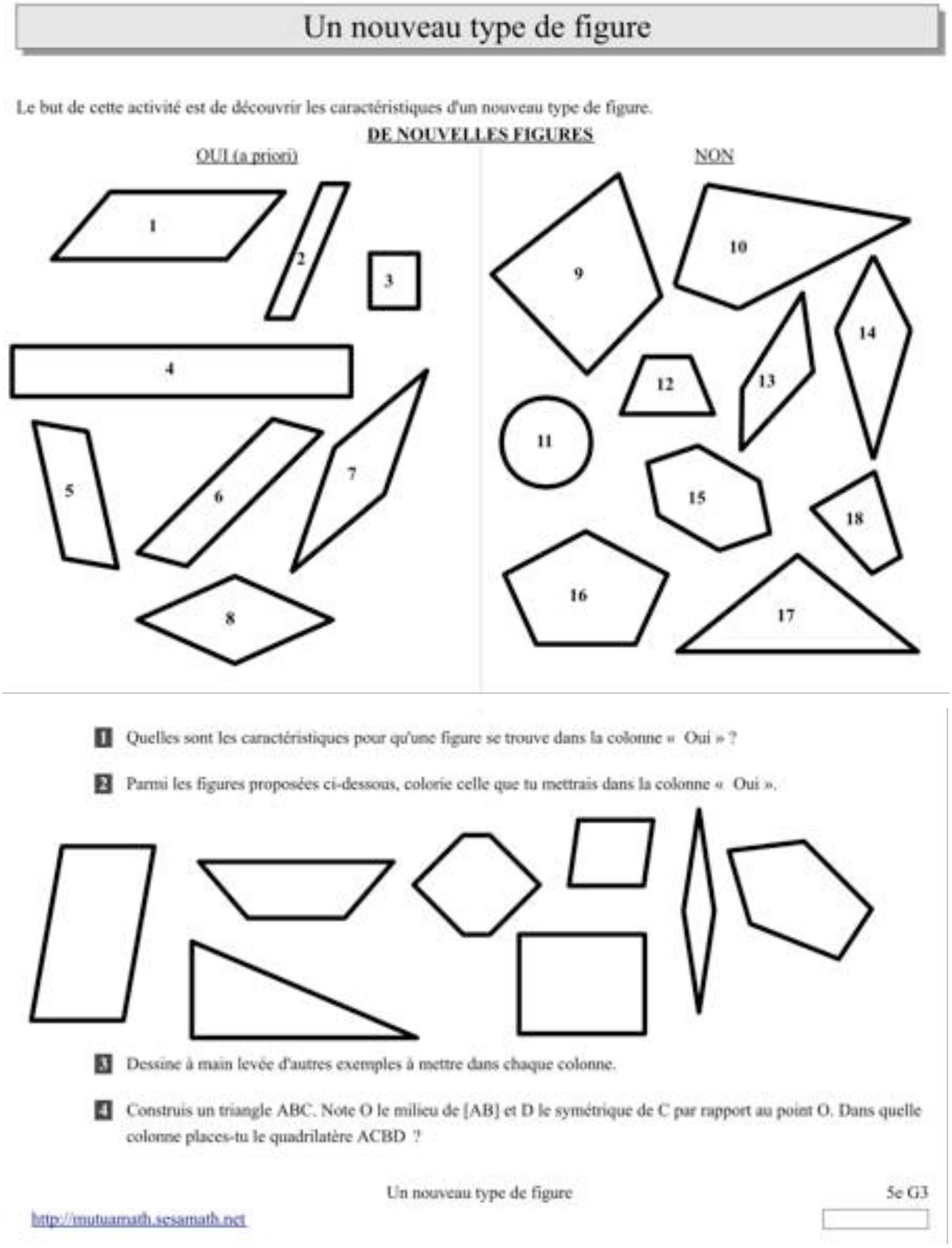
Testée avec deux classes assez faibles et approuvée à 100%.
Merci pour cette activité.
J'ai mis dans le descriptif le détail du déroulement de la séance.

Figure 8

Suite au commentaire de *sebhache du 21/11/2009*, l'activité a subi une refonte importante, la description et les mots clés ont été complétés (figure 9) :

Figure 9

Et surtout le document texte (figure 10) :



Un nouveau type de figure

Le but de cette activité est de découvrir les caractéristiques d'un nouveau type de figure.

DE NOUVELLES FIGURES

OUI (a priori) — NON

1 Quelles sont les caractéristiques pour qu'une figure se trouve dans la colonne « Oui » ?

2 Parmi les figures proposées ci-dessous, colorie celle que tu mettrais dans la colonne « Oui ».

3 Dessine à main levée d'autres exemples à mettre dans chaque colonne.

4 Construis un triangle ABC. Note O le milieu de [AB] et D le symétrique de C par rapport au point O. Dans quelle colonne places-tu le quadrilatère ACBD ?

Un nouveau type de figure — 5e G3

http://mutuamath.sesamath.net

Figure 10

Scénario d'usage

Phase	Rôle du professeur	Tâche de l'élève	durée
individuelle	Mettre les élèves au travail. Aider individuellement les élèves à formuler une conjecture.	Répondre à la question 1	5 à 10 min
en groupe	Vérifier que les groupes fonctionnent correctement et préparent une synthèse de leur travail.	Répondre à la question 1 en échangeant avec les autres élèves du groupe	5 à 10 min
collective	Écrire au tableau une synthèse des réponses de chaque groupe.		5 min
collective	Indiquer la question n°2 pour que tout le monde s'y plonge (éventuellement, on peut projeter les figures : au format OpenOffice : http://mutuamath.sesamath.net/sites/mutuamath.sesamath.net/files/figures.odp au format pdf : http://mutuamath.sesamath.net/sites/mutuamath.sesamath.net/files/figures.pdf	Répondre à la question 2.	5 à 10 min
individuelle	Repérer des erreurs types ou des dessins intéressants d'élèves dans la classe.	Répondre à la question 3.	5 min
collective	Montrer certains dessins à toute la classe et discussion		5 min
individuelle		Répondre à la question 4	5 min
collective	Institutionnalisation du centre de symétrie.		5 min

Figure 11

Puis, *acarret* a modifié la description de la ressource pour y inclure une narration de comment la séance peut se dérouler :

Activité de découverte des caractéristiques des parallélogrammes par classement de figures.
Le professeur a classé dix-huit figures en deux familles (les parallélogrammes et les autres).
La discussion en classe doit permettre de comprendre le choix fait par l'enseignant et ainsi dégager les propriétés caractéristiques des parallélogrammes.
l'activité en détail :
J'ai attrapé à la volée toutes les remarques sur les figures.
En premier, il y a eu : les carrés, c'est oui ! les rectangles et les losanges aussi !
Du coup, une des premières choses que j'ai mis dans le cours a été : "Les carrés, les losanges et les rectangles sont des parallélogrammes."
Non pas sous la forme : "Si c'est un carré alors c'est un parallélogramme" mais réellement comme ils l'ont compris à travers cette activité : "Dans l'ensemble appelé "parallélogrammes", il y a les carrés, les losanges et les rectangles et aussi d'autres quadrilatères dont on a du mal à fixer toutes les propriétés".
Ensuite, il y a eu : les OUI sont des quadrilatères (mais pas tous les quadrilatères).
Puis sont sortis assez rapidement les côtés égaux :
- deux côtés égaux suffisent ?
- Oui.
- Dans la colonne NON, n'y a-t-il pas de figure ayant deux côtés égaux ?
- Ah si ! La 15 mais ce n'est pas un quadrilatère. Et la 12 qui est un quadrilatère !
Dans toute la suite, j'ai été un peu embêté par les non-quadrilatères de la colonne NON car presqu'à chaque fois, le premier contre-exemple à une proposition d'élève était un non-quadrilatère : par exemple : l'hexagone a ses côtés opposés parallèles.
Je pense que, la prochaine fois, j'éliminerai à cette étape tous les non-quadrilatères en disant :
- Effectivement, la 15 est un contre-exemple mais puisqu'on a compris que les figures étudiées sont toutes des quadrilatères, on va éliminer au crayon toutes les autres figures (le cercle ; le triangle ; le pentagone ; ...)
Je leur ai fait coder les deux côtés égaux de la figure 12 et j'ai effacé "deux côtés égaux" du tableau.
- Quatre côtés égaux !!
- Quatre côtés égaux, c'est un losange, ça ! On l'a déjà noté !
- Non, deux côtés égaux et deux autres égaux !
- Comme dans la figure 14 ??
J'ai fait coder la figure 14 et les ai aiguillés un peu.
- Allez ! Il manque juste un adjectif. Comment sont les côtés égaux dans les OUI ?
- En face l'un de l'autre.
- Oui, ou "opposés" en vocabulaire géométrique standard.
J'ai écrit au tableau : les côtés opposés sont égaux (en longueur).
Puis sont venus les côtés opposés parallèles et je leur ai fait remarquer le trapèze de la colonne NON pour insister sur "deux côtés parallèles et les deux autres aussi". J'ai fait remarquer qu'ici, l'adjectif "opposé" n'est pas absolument nécessaire dans la mesure où un quadrilatère qui aurait deux côtés consécutifs parallèles serait un pur dégénéré.
Dans une classe, plus rien n'est venu mais dans l'autre, un élève a évoqué un axe de symétrie : il est venu le tracer à main levée sur un parallélogramme que j'ai tracé au tableau mais qu'on choisisse une médiane ou une diagonale, ce fut un échec.
J'ai insisté : - Bon, la symétrie **AXIALE** n'a pas l'air de convenir.
- Ben, la symétrie centrale, alors ?
- Quelle bonne idée. Voyons ! Où pourrait se trouver ce centre de symétrie ?
- Là, au milieu !
- Mais encore !
- Là, si on trace les ... trucs, là !
Une élève est venue au tableau tracer les diagonales. Ca avait l'air de marcher et les diagonales avaient l'air de se couper en leur milieu.

Figure 12

Activité de découverte des caractéristiques des parallélogrammes par classement de figures.
Le professeur a classé dix-huit figures en deux familles (les parallélogrammes et les autres).
La discussion en classe doit permettre de comprendre le choix fait par l'enseignant et ainsi dégager les propriétés caractéristiques des parallélogrammes.
l'activité en détail :
J'ai attrapé à la volée toutes les remarques sur les figures.
En premier, il y a eu : les carrés, c'est oui ! les rectangles et les losanges aussi !
Du coup, une des premières choses que j'ai mis dans le cours a été : "Les carrés, les losanges et les rectangles sont des parallélogrammes."
Non pas sous la forme : "Si c'est un carré alors c'est un parallélogramme" mais réellement comme ils l'ont compris à travers cette activité : "Dans l'ensemble appelé "parallélogrammes", il y a les carrés, les losanges et les rectangles et aussi d'autres quadrilatères dont on a du mal à fixer toutes les propriétés".
Ensuite, il y a eu : les OUI sont des quadrilatères (mais pas tous les quadrilatères).
Puis sont sortis assez rapidement les côtés égaux :
- deux côtés égaux suffisent ?
- Oui.
- Dans la colonne NON, n'y a-t-il pas de figure ayant deux côtés égaux ?
- Ah si ! La 15 mais ce n'est pas un quadrilatère. Et la 12 qui est un quadrilatère !

Dans toute la suite, j'ai été un peu embêté par les non-quadrilatères de la colonne NON car presqu'à chaque fois, le premier contre-exemple à une proposition d'élève était un non-quadrilatère : par exemple : l'hexagone a ses côtés opposés parallèles.
Je pense que, la prochaine fois, j'éliminerai à cette étape tous les non-quadrilatères en disant :
- Effectivement, la 15 est un contre-exemple mais puisqu'on a compris que les figures étudiées sont toutes des quadrilatères, on va éliminer au crayon toutes les autres figures (le cercle ; le triangle ; le pentagone ; ...)
Je leur ai fait coder les deux côtés égaux de la figure 12 et j'ai effacé "deux côtés égaux" du tableau.
- Quatre côtés égaux !!
- Quatre côtés égaux, c'est un losange, ça ! On l'a déjà noté !
- Non, deux côtés égaux et deux autres égaux !
- Comme dans la figure 14 ??

J'ai fait coder la figure 14 et les ai aiguillés un peu.
- Allez ! Il manque juste un adjectif. Comment sont les côtés égaux dans les OUI ?
- En face l'un de l'autre.
- Oui, ou "opposés" en vocabulaire géométrique standard.

J'ai écrit au tableau : les côtés opposés sont égaux (en longueur).
Puis sont venus les côtés opposés parallèles et je leur ai fait remarquer le trapèze de la colonne NON pour insister sur "deux côtés parallèles et les deux autres aussi". J'ai fait remarquer qu'ici, l'adjectif "opposé" n'est pas absolument nécessaire dans la mesure où un quadrilatère qui aurait deux côtés consécutifs parallèles serait un pur dégénéré.
Dans une classe, plus rien n'est venu mais dans l'autre, un élève a évoqué un axe de symétrie : il est venu le tracer à main levée sur un parallélogramme que j'ai tracé au tableau mais qu'on choisisse une médiane ou une diagonale, ce fut un échec.
J'ai insisté : - Bon, la symétrie **AXIALE** n'a pas l'air de convenir.
- Ben, la symétrie centrale, alors ?
- Quelle bonne idée. Voyons ! Où pourrait se trouver ce centre de symétrie ?
- Là, au milieu !
- Mais encore !
- Là, si on trace les ... trucs, là !

Une élève est venue au tableau tracer les diagonales. Ca avait l'air de marcher et les diagonales avaient l'air de se couper en leur milieu.

Figure 13

Enfin, le visiteur peut en cliquant sur l'onglet « Révisions » accéder à l'historique des changements apportés à la ressource :

Révision	Actions	
13/03/2011 - 12:31 par acarret	version en cours	
30/01/2011 - 20:28 par sabroberjot	rétablir	supprimer
29/01/2011 - 18:44 par acarret	rétablir	supprimer
28/10/2010 - 15:28 par acarret	rétablir	supprimer
création d'une banque de figures pour compléter la question n°2. Cette banque se trouve sur l'énoncé et sous forme de diaporama à télécharger.		
28/10/2010 - 15:12 par acarret	rétablir	supprimer
21/11/2009 - 14:23 par sebhache	rétablir	supprimer
Cette activité est reprise du travail de Lauret (Merci !!) avec le bon modèle pour les activités Mutuamath et en tenant compte des commentaires des utilisateurs. J'ai en particulier rajouté un cerf-volant, mis des numéros pour identifier plus facilement les figures (en particulier pour les phases de mise en commun) et proposé un scenario d'usage.		
29/05/2009 - 13:29 par lauret	rétablir	supprimer

Figure 14

Analyse de cette ressource

Nous ne nous pencherons pas ici sur l'analyse didactique de cette ressource, mais tenterons d'observer en quoi les éléments de genèse disponibles pourraient permettre à un enseignant de construire un document à partir de la ressource.

La ressource initialement mise en ligne est succincte : la fiche élève et un court descriptif des objectifs poursuivis par l'auteur.

Les commentaires peuvent permettre de pointer des éléments importants de l'analyse *a priori* et des choix de variables didactiques qui seront à faire par l'enseignant (le rôle du mot parallélogramme ; la place des exemples pour le « non » dans la définition d'une condition nécessaire et suffisante ; l'utilisation du trapèze, du cerf-volant, du fer de lance, des prismes ; intérêt de la géométrie dynamique ; intérêt d'une activité où toutes les figures sont données d'un coup ou bien où le professeur les propose en réponse à des questionnements d'élève…).

La ressource finalement accessible a profité de ces discussions, mais en effectuant un certain nombre de choix parmi ces variables didactiques, qui peuvent ne pas convenir au visiteur de *Mutuamath*. L'accès à toutes les versions permet de choisir celle qui correspond le mieux au choix de chacun.

On peut remarquer, et cela est une constante assez généralisée, que les premières descriptions d'une ressource sont maigres, et souvent la marque d'une implication faible de l'auteur pour expliquer ses intentions et sa gestion de l'activité.

Il est possible de faire plusieurs hypothèses pour expliquer ce fait :

- le temps nécessaire à cette écriture, car bien souvent l'auteur sait lui-même dans quel esprit et avec quels ressorts il a créé la ressource, le communiquer à autrui est donc un effort supplémentaire à réaliser ;
- la pudeur de dévoiler ses intentions, voire le sentiment qu'en les expliquant, l'auteur va « forcer » ses collègues à faire comme lui et à renoncer à leur liberté pédagogique ;
- le sentiment qu'il n'est pas nécessaire de s'expliquer, soit parce que « tout le monde fait pareil », soit parce que les autres enseignants sont supposés parfaitement capables de faire ce travail seuls.

Il est bien sûr impossible, hors d'un travail rigoureux, de déterminer la véracité de ces hypothèses, mais la ressource étudiée est un très bon exemple de genèse pendant laquelle les intentions sont progressivement dévoilées au fur et à mesure des commentaires et de leurs réponses.

Au cours d'un débat interne à l'équipe de *Mutuamath*, un des membres fait remarquer le rôle possible des commentaires prévus pour recevoir des retours d'expérience et ainsi construire une analyse *a priori* née de l'expérience :

> « […] avec la même ressource, chaque professeur mène une séance unique et s'il rapporte les questions soulevées par la classe, il permet au prochain de se préparer à toutes les pistes que pourrait suivre la classe. Pour moi, cette improvisation préparée me semble être un des meilleurs modèles parce qu'autour d'une ressource, la séance rebondit sur des questions de la classe, donc susceptibles de la mobiliser, sans partir dans tous les sens car le professeur aura anticipé un certain nombre de scenarii décrits dans les retours des collègues. (pour l'instant, c'est peu ou pas employé). Sur la ressource (http://mutuamath.sesamath.net/node/81 Mon tour d'Europe en une semaine en périphrases), le commentaire : "J'ai eu droit aux mêmes questions "est-ce que maintenant la fonction *f* sera toujours la fonction "double" etc ?"" qui signale une question récurrente des élèves à laquelle on peut se préparer, envisager une réponse complète parce qu'anticipée voire imaginer une nouvelle ressource qui réponde au mieux à cette interrogation ».

On peut également faire l'hypothèse qu'un tel accès à des marques de la genèse d'une ressource peut permettre à des enseignants en formation initiale :

- de ne plus s'appuyer exclusivement sur leurs réflexions propres ou celles de leurs formateurs mais d'enrichir leurs débats et leurs arguments à partir de commentaires réalisés par des collègues en exercice, permettant donc une familiarisation avec un mode de pensée pratique et concret qu'ils auront à côtoyer rapidement ;
- faire jouer les apports de la didactique sur ces commentaires, propositions d'améliorations et ressources, s'apercevoir « sur pièces » que certaines notions didactiques peuvent s'incarner dans le discours quotidien des enseignants, mais également que ces apports peuvent permettre d'aller plus loin ;
- initier à la construction collaborative de ressources, et à la production d'une genèse des ressources ainsi forgées.

Apports de l'atelier

Lors de l'atelier, les participants ont fait les remarques suivantes :

- Il serait intéressant de séparer le champ description en deux : un champ *Intentions* et un champ *Description*, de façon à ce qu'il doit plus facile pour le lecteur de percevoir l'idée à la naissance de la ressource, et pour l'auteur, l'inciter à un début d'attitude réflexive sur son travail. Après débat dans l'équipe de *Mutuamath*, il a été décidé de ne pas réaliser cette modification, car elle semble de nature à relever le seuil de difficulté ressenti par les visiteurs pour contribuer. Cependant, conscients de l'intérêt de cette écriture, les administrateurs ont pris la charge d'accompagner les créations de ressources et d'inciter, par leurs commentaires, à ce que les descriptions aillent dans ce sens.

- Le champ *tag* n'a pas été naturellement identifié comme porteur de classification des ressources et aide à la recherche. Sur la page de création de ressources, un commentaire a été ajouté immédiatement à proximité du champ de saisie pour donner quelques exemples parlants de *tag*, marquant là que c'est par les *tags* que l'on va décrire soit la notion mathématique liée, soit d'autres caractéristiques de la ressource.
- L'intérêt pour la formation initiale a été davantage vu comme outil de construction collaborative de ressources que comme matériau de réflexion didactique.

En guise de conclusion

Edulibre, en tant que logiciel libre, peut être installé sur tout serveur indépendant. Il est hautement paramétrable. *Mutuamath* après un travail de stabilisation de presque un an, est entré en mars 2014 en phase de production, avec plus de 200 ressources de tous niveaux disponibles sous licence *Creative Commons Attribution - Partage dans les mêmes conditions*[25], en augmentation et en amélioration permanente. Via les *tags*, il est possible d'y construire des *écosystèmes* de ressources liées par un thème commun, un auteur ou un collectif d'auteurs commun, une méthodologie commune… L'équipe de *Mutuamath* est ouverte à toute remarque et toute demande d'aide quant à l'utilisation du site à des fins de formation.

BIBLIOGRAPHIE

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. *Éducation et didactique*, *2*(3), 7-33. doi:10.4000/educationdidactique.342

Gueudet, G., Trouche, L., & Soury-Lavergne, S. (2008). *Parcours de formation en ligne, quels assistants méthodologiques ?* (p. 143). INRP. Consulté à l'adresse http://eductice.ens-lyon.fr/EducTice/recherche/developpement-professionnel/pairformance/Rapport-PRF-2009.pdf

Guin D., Trouche L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SfoDem. *Repères-IREM* 72.

[25] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/

CREER DES RESSOURCES POUR LA FORMATION INITIALE PROFESSIONNELLE DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES A PARTIR DE SUJETS D'ORAL DU CAPES

Brigitte Benzekry, Marc Guignard, Marie-Christine Lévi et Laurent Vivier,
IREM de Paris 7

Résumé – Des énoncés d'exercices mathématiques que l'on trouve dans les sujets de l'oral sur « dossier » du CAPES ont été proposés à des élèves. Des vidéos de classes et des productions écrites ont été recueillies. L'objet de cet atelier est d'élaborer des scénarios de formation initiale ayant une dimension professionnelle.

I Introduction

Le groupe *CORFEM-IDF* de l'IREM de Paris 7 a travaillé cette année sur la production de ressources pour la formation initiale des enseignants de mathématiques du second degré, et notamment dans le contexte nouveau de la *masterisation*. C'est ce travail fructueux, intéressant et novateur que nous désirons partager avec la communauté des formateurs d'enseignants de mathématiques.

Dans les masters *enseignement*, il semble que la formation professionnelle et la préparation au CAPES soient deux composantes déconnectées. Or, l'oral 2 sur dossier du CAPES de Mathématiques a des objectifs de type professionnels en proposant un exercice de niveau secondaire (et éventuellement BTS), des productions d'élèves (réelles ou fictives) et des questions qui peuvent permettre de faire un demi-pas dans la classe. Il nous semble que l'on peut produire des ressources intéressantes pour la formation initiale professionnelle en s'appuyant sur les exercices posés à l'oral 2. Il nous est ainsi apparu que l'épreuve d'oral 2 du CAPES pouvait être l'occasion de travailler avec les étudiants au-delà de la simple préparation au concours, un certain nombre de dimensions professionnelles et didactiques.

La plupart des sujets d'oral 2 comporte des extraits de productions d'élèves. Malgré les termes employés on peut se demander de quels élèves il s'agit. En effet, ces productions sont souvent élaborées avec des erreurs sophistiquées, difficiles à déceler et à analyser. Ces productions sont-elles de *vraies* productions d'élèves ? Avec un peu d'expérience de terrain, on peut en effet douter que ces écrits soient représentatifs de l'enseignement secondaire. D'autre part, côté formation, il nous est apparu rapidement que répondre aux questions du jury sans avoir vu les élèves travailler était difficile pour un étudiant qui, lui, n'a pas ou peu d'expérience. Nous pensons ainsi que ces sujets d'oral 2 participent à une certaine représentation lors de l'entrée dans le métier de ce que peuvent faire les élèves en classe. Or, comme nous le verrons, ce qui se passe en classe peut être bien différent de ce que l'on pourrait inférer de ces seuls[26] sujets d'oral 2.

[26] Bien entendu, et heureusement, cela n'est qu'une partie de ce qui participe à cette représentation du métier d'enseignant.

L'idée de notre groupe IREM est de proposer ces exercices de l'oral 2 dans des classes, de filmer la séance et de relever les productions des élèves (des vraies !). Puis, avec ce matériel, d'élaborer de courts scénarios de formation qui puissent s'insérer facilement en formation initiale, pour participer à la fois à la préparation à l'oral et à la formation professionnelle, tout en travaillant la distance existante entre l'oral 2 et une vraie situation de classe. Notre objectif de renforcer les liens entre la préparation au CAPES et la formation professionnelle semble être tout à fait en phase avec les toutes nouvelles dispositions institutionnelles concernant la formation des enseignants, nous y reviendrons en conclusion.

Un de nos premiers travaux fut de nous constituer une « banque » de sujets d'oral 2 extraits des annales du CAPES[27]. Un tri des sujets a été effectué pour extraire les exercices, proposés à l'oral 2, qui pourraient faire l'objet d'un travail effectif en classe en prenant en compte une contrainte essentielle : ils doivent pouvoir s'insérer dans les progressions des enseignants. Néanmoins, le fait de devoir choisir un exercice dans une liste restreinte s'est avéré contraignant pour les collègues (notamment pour leurs progressions) . Nous avons donc donné un peu de souplesse dans le choix de l'exercice, l'important étant d'avoir au final un exercice avec les productions écrites des élèves et la vidéo et que ce soit, si possible, un exercice qui puisse faire l'objet d'un oral 2 du CAPES.

C'est ainsi que notre premier travail s'est focalisé sur la correction d'une évaluation de statistique, qui n'est pas extraite d'un sujet du CAPES, avec les copies de cinq élèves. Malheureusement un élève a arrêté la vidéo et nous ne disposons que de quelques minutes, non exploitables. Cela a permis de mettre en place un dossier de type 2 pour la formation à l'oral avec la certitude que ce soit de véritables copies d'élèves. Par la suite nous avons obtenu le matériel recherché concernant deux exercices posés au CAPES 2012 (niveaux 3^{e} et 2nde). Après un exposé rapide de notre travail sur l'exercice du *camion*, l'atelier se propose d'étudier principalement l'exercice *pyramide* proposé au 3^{e} concours 2012 dans le thème *grandeurs et mesures*.

L'atelier proposé au XX^{ème} colloque CORFEM reprend à peu près les éléments de ce texte dans l'ordre. Une introduction reprenant cette présente introduction et nos travaux sur l'énoncé du *camion*, puis un travail sur l'exercice de la pyramide. Celui-ci se décompose en 4 quatre phases : (1) un travail sur l'énoncé dont nous donnons ici une analyse ; (2) un travail sur une sélection de productions d'élèves ; (3) un travail sur la vidéo, une douzaine de minutes sont visionnées ; (4) un exposé de deux utilisations de ce matériel en formation initiale.

II L'exercice du camion (CAPES 2012)

> Sur l'autoroute, une voiture se trouve juste derrière un camion au moment où elle décide de s'arrêter sur une aire de repos. Le conducteur prend une pause de 10 minutes puis repart et règle son régulateur de vitesse sur 110 km/h. Le camion, quant à lui, roule à une vitesse constante de 90 km/h tout au long de son trajet. Au bout de combien de temps (et de combien de kilomètres) la voiture rattrapera-t-elle le camion ?

Disons-le tout de suite, cet exercice nous a donné du fil à retordre ! L'analyse n'est en effet pas aisée, les approches sont multiples, les méthodes de résolution variées. Il s'agit

[27] Voir les rapports du jury du CAPES de mathématiques : http://capes-math.org/index.php?id=archives. Les exercices du camion et de la pyramide ci-dessous sont extraits du CAPES 2012 (3^{e} concours pour la pyramide).

pourtant d'un exercice classique que l'on pourrait placer dans un imaginaire de l'enseignement des mathématiques. On le retrouve par exemple dans un manuel de 1923 et on reconnaît une forte proximité avec la situation d'un des paradoxes de Zénon d'Élée.

Concernant les vidéos, nous en avons deux : une séance de travail en groupe et une séance de bilan dans la même classe de seconde[28] . Les vidéos sont de faible qualité, notamment la qualité du son, mais exploitables et surtout au plus près des groupes : enregistrée avec le téléphone portable de l'enseignant, on suit le professeur dans ses *tours des groupes*. Nous disposons en outre des productions de la plupart des groupes que l'on peut alors croiser avec la vidéo.

Ce matériel est intéressant à plus d'un titre. On peut voir la difficulté des élèves à trouver une procédure de résolution[29] et à la mener jusqu'au bout ainsi que le rôle de l'enseignant pour les aider dans leurs travaux. Vu la difficulté de l'exercice, l'enseignant doit s'adapter et comprendre rapidement, *sur le champ*, l'approche pas toujours explicite proposée par chaque groupe visité. Dans le bilan il est exposé une procédure correcte algébriquement mais dont la justification n'est pas correcte ce qui, bien qu'il en soit gêné, échappe à l'enseignant. Il faut dire que c'est précisément ce point qui est particulièrement troublant et qui nous a demandé du temps pour sa compréhension.

Ainsi on remarque que si l'on donne cet énoncé aux élèves avec une liberté de procédure, la gestion par l'enseignant n'est pas simple. Dans cette perspective, il paraît nécessaire de faire une analyse fine et complète de cet exercice et des différentes possibilités – toujours importante, cette analyse *a priori* apparaît critique dans cette situation. Mais cela doit-il être du ressort de l'enseignant ? Et surtout, a-t-il le temps matériel de produire une telle analyse ?

Nous en sommes donc venus à nous interroger pour savoir s'il était pertinent de présenter, dans le cadre de la préparation à l'*oral 2*, à des étudiants-professeurs qui auront en charge une classe l'année suivante un exercice qui paraît simple, avec trois productions d'élèves qui semblent renforcer cette impression ? En effet, si l'on pense que, malgré sa bonne expérience, l'enseignant de la vidéo a eu des difficultés de gestion de sa classe du point de vue du contenu, que dire d'un enseignant novice ? Il nous semble dès lors très important de proposer ce type de situation en formation initiale mais surtout afin d'avertir les futurs professeurs de la différence entre l'*oral 2* du concours et ce qui se passe dans la réalité de la classe. On remarque en particulier que la gestion de l'enseignant est invisible dans le sujet de CAPES. Or, c'est une des difficultés que nous avons pointée.

Malgré cela, ce matériel semble peu aisé à utiliser. Bien entendu, la qualité de la vidéo est un problème mais surtout il est nécessaire de visionner presqu'une heure de vidéo (une sélection de plusieurs groupes et une partie du bilan) pour que cela soit exploitable pleinement. Or, dans les formations initiales actuelles, nous ne disposons malheureusement pas d'une telle latitude temporelle. Ce matériel riche fait l'objet d'un

[28] Ainsi qu'une en troisième que nous n'avons pas encore exploitée.

[29] Hormis une procédure rapidement trouvée par un groupe qui consiste à dire qu'au bout de 1h la voiture à parcouru 110 km et le camion 90 km, soit 20 km de différence alors que la voiture doit combler 90 km/h × 10 min = 15 km. Et comme 15 km = 3/4 × 20 km, alors, par une proportionnalité implicite, il faut que la voiture roule pendant 3/4 × 1h, soit 45 min.

travail dans un article en préparation où l'on présente, notamment, l'analyse de l'énoncé.

III L'exercice de la pyramide (CAPES 2012, 3ème concours)

> La pyramide du Louvre schématisée ci-dessous (figure 1) est une pyramide régulière de 21 mètres de hauteur et de base carrée de 35 mètres de côté.
> 1) Calculer le volume de cette pyramide.
> 2) Calculer la superficie de verre nécessaire pour construire les faces latérales de cette pyramide (on convient que les faces sont totalement recouvertes de verre).

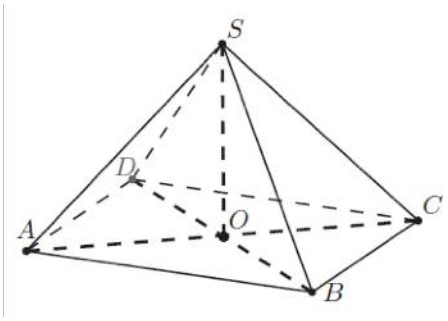


Figure 1

Si cet énoncé semble moins emblématique de l'enseignement des mathématiques que l'exercice du *camion*, il n'en reste pas moins que l'on en trouve de nombreuses variantes (voir par exemple le sujet du BNC 2000 en annexe 3).

III-1) Analyse de l'énoncé

Dans la question 1, il semble que seule l'application de la formule du volume soit requise. Bien entendu, on peut s'attendre à des erreurs sur cette formule comme l'oubli du 1/3, une confusion avec la formule de l'aire du triangle avec un facteur 1/2.

On remarque aussi une polysémie des termes *base* et *hauteur*. On peut ainsi s'attendre à des confusions liées aux grandeurs sur le sens du terme *base*, la *base* est ici une aire, contrairement à la base intervenant dans la formule de l'aire d'un triangle. Le terme *hauteur* peut aussi mener à des confusions dans l'exercice puisque le même terme désigne la hauteur de la pyramide, pour l'aire dans la question 1, et la hauteur d'un triangle, pour l'aire d'une face en question 2.

Dans la question 2, plusieurs procédures sont possibles. Parmi les correctes, on peut mentionner les deux suivantes :

- P1 : calcul de *SA* (ou de la longueur d'une autre arête) par le théorème de Pythagore dans le triangle *SAO* qui est tracé. Cela nécessite donc également de calculer la demi-diagonale *AO* du carré de base par le théorème de Pythagore (à moins de connaître le résultat). Le triangle *SAB* est isocèle car la pyramide est régulière et on peut alors calculer la hauteur *SH* issue de *S* par le théorème de Pythagore. On en déduit l'aire de *SAB* en utilisant la formule de l'aire d'un triangle puis, par une multiplication par 4, on obtient le résultat.
- P2 : calcul de *SH* par le théorème de Pythagore dans le triangle *SOH* où *H* peut être le milieu de n'importe quel côté du carré de base. Cela nécessite de calculer

OH, mais on peut penser que les connaissances sur le carré permettent de l'obtenir sans difficulté. Le calcul de l'aire de *SAB* puis l'aire totale cherchée s'obtient comme dans P1 puisque que *H* est aussi le pied de la hauteur issue de *S* d'une face qui est un triangle isocèle.

A ce niveau d'enseignement, la classe de troisième, il n'est pas attendu de justification de l'utilisation du théorème de Pythagore car cela demande des connaissances qui relèvent de la classe de seconde.

Dans ces deux procédures (avec possiblement un choix de procédure), on reconnaît des étapes, des intermédiaires (dont le calcul de l'aire d'une face), un choix de la face où l'on travaille et la reconnaissance d'une modalité d'application du théorème de Pythagore. Il s'agit d'une connaissance de la classe de quatrième, retravaillée en troisième et cette reconnaissance est attendue de la part des élèves, sans intervention de l'enseignant. Néanmoins, le choix du triangle et surtout le passage 3D → 2D est une adaptation qu'il ne s'agit pas de minorer.

Ces deux procédures sont guidées par un même objectif qui consiste à calculer l'aire d'une face pour en déduire l'aire totale par multiplication par 4. Cette aire nécessite de calculer la hauteur. On peut remarquer que chacune de ces procédures utilise deux connaissances différentes sur les pyramides régulières, mais de manière légèrement différente, et sous deux formes différentes. Dans P1, on utilise d'abord la perpendicularité de (*SO*) avec le plan contenant de base pour le calcul de *SA* puis, dans un deuxième temps, le fait que le triangle est isocèle, donc uniquement en 2D, pour le calcul de la hauteur *SH*. Dans P2, on désire calculer la hauteur *SH* directement avec une présence des deux connaissances dans un même pas de la procédure : H est le milieu de [*AB*] car le triangle est isocèle et *SOH* est rectangle car (*SO*) est perpendiculaire au plan de base.

On pourrait penser que P1 sera majoritaire car le triangle *SAO* est déjà tracé ce qui n'est pas le cas de *SOH*. Cependant, cela est à modérer car, sans mésestimer la difficulté cognitive de considérer une sur-figure (un triangle non tracé ici), la procédure P1 nécessite plusieurs pas (calcul de *OA*, calcul de *SA*, calcul de *SH*) avant de pouvoir calculer l'aire s'une face alors que P2 ne nécessite qu'un pas (calcul de *SH*) avant le calcul d'aire. Bien entendu, le pas de P2 pour le calcul de *SH* fait intervenir deux connaissances sur les pyramides régulières alors que dans P1 les connaissances sont en quelque sorte découplées.

Ainsi il est difficile de se prononcer *a priori* sur la fréquence de ces deux procédures. Il est à noter que la procédure 1 est celle que l'on trouve dans le dossier du CAPES. On peut alors se poser le statut de cette production présentée : est-elle représentative de ce que peut faire un élève de troisième ? Même si l'on s'attend à ce que les candidats produisent la procédure P2, cette présentation ne met-elle pas en avant la procédure P1 ?

Enfin, on peut penser à beaucoup de procédures erronées comme, par exemple, celle consistant à considérer que les faces sont des triangles équilatéraux (problème de connaissance sur les pyramides régulières).

III-2) Les productions écrites des élèves

Parmi les productions écrites des 18 élèves, 16 sont, de manière très surprenante, très homogènes. En particulier il semble que tous les élèves réussissent la question 1 et la procédure 1 n'est utilisée que par un seul élève (E1, il ne finit pas ses calculs) alors que la procédure 2 est développée avec succès pour 16 élèves (hormis E1 et E15). Il n'y a qu'un seul élève qui utilise une procédure erronée (E15).

On note quatre dessins de patron (E2, E7, E8 et E11) et une vue de dessus (E14). On relève également de nombreuses figures extraites dénotant un passage 3D → 2D : 7 triangles *SOH*, 6 triangles *SAB* et un triangle *SOA*.

Comme on pouvait s'y attendre, on note effectivement très peu de tentatives de justification (une tentative pour un triangle rectangle et 3 pour le calcul de *OH*).

Du côté de l'application du théorème de Pythagore, E1 l'utilise parfaitement avec uniquement des calculs formels de racines carrées, correctes et sans valeur approchée, et E15 ne répond pas à la question 2. On relève une fois de plus une grande homogénéité des valeurs approchées pour *SH* sur les 16 copies restantes avec notamment 10 fois la valeur approchée 27,3. Pour ces questions sur les racines carrées et les valeurs approchées, voir l'annexe 4.

Toutefois, à côté de cette homogénéité, on remarque que E11 et E18 donne $SH \approx 27{,}3$ mais sans aucun calcul relatif au théorème de Pythagore et E17 produit les calculs après avoir écrit cette valeur approchée. Cela laisse perplexe et il semble que les seules productions écrites ne puissent suffire pour avoir une idée de l'activité des élèves. L'analyse des productions écrites montre ainsi leur insuffisance pour comprendre ce qui s'est joué en classe et le recours à la vidéo se justifie naturellement afin d'avoir un complément d'information nécessaire.

III-3) La vidéo

Cette vidéo de cours a été filmée au mois de Mars 2013 dans un établissement *ECLAIR* de la banlieue nord de Paris. Le collègue filmé y est enseignant depuis de nombreuses années. Il a accepté d'être filmé avec une classe de troisième de 18 élèves dont il nous dit qu'elle est particulièrement intéressée par les problèmes de recherche et d'un niveau correct pour ce type d'établissement. Il a décidé de consacrer une séance d'une heure à la mise en recherche de la classe sur la situation de la *pyramide* et ce en dehors de toute volonté d'inscription dans sa progression. La géométrie dans l'espace et la géométrie plane pour ce qui concerne le triangle ont déjà été abordées depuis longtemps. Il n'y a pas d'enjeu de synthèse pour institutionnaliser des résultats dans le cours et ce travail ne débouche sur aucune évaluation. Il s'agit donc en quelque sorte d'une séance hors du temps didactique avec tous les avantages et inconvénients que cela peut comporter.

Avant de tirer des conclusions de la vidéo, nous donnons ci-dessous une chronologie.

0' – Installation : distribution du premier sujet, travail anonyme, pas un contrôle ni une évaluation. 1'42 lecture de l'énoncé par des élèves ; 2'15 : question sur la différence entre superficie et aire ; question sur les faces latérales avec un élève qui donne SBC comme exemple.

2'51 – recherche individuelle : pas de livre (pour les formules), faire des erreurs n'est pas grave (on cherche des « erreurs authentiques ») ; 4'12 on a le droit à la calculatrice ; l'enseignant passe voir les élèves.

12'58 – reprise, bilan par l'enseignant : le volume de la pyramide et ce qui pose problème dans la 2$^{\text{ème}}$ question.

15'03 – l'enseignant parle d'erreur sur le volume, notamment en insistant sur *l'aire* de la base, sur la différence avec l'aire d'un triangle.

15’43 – l’enseignant demande l’unité et écrit m^3.

16’05 – la *deuxième question*

16’05 – l’enseignant demande : « Qu’est-ce qu’on vous demande ? » : recouvrir les 4 triangles qui forment la pyramide ; l’enseignant trace un triangle (la face *SAB*) au tableau.

17’07 – l’enseignant demande quels sont les besoins : aire d’un triangle (rappel de la formule par un élève), base 35 m et hauteur 21 m.

18’21 – A partir d’une « bonne remarque » d’un élève, l’enseignant demande « pourquoi *SO* n’est pas la hauteur d’un triangle ? » […] « si je mettais un point *H*, sur [*BC*] ou sur [*AB*] ? », *H* est au milieu car le triangle est isocèle ; *H* est placé par l’enseignant au milieu de [*AB*] sur le triangle extrait *SAB* et sur la pyramide.

19’12 – l’enseignant signale qu’« on ne sait pas si 35-35-35, mais isocèle car pyramide régulière, ça peut-être équilatéral ».

20’07 – l’enseignant déclare « j’en dis pas plus […] voir d’autres mesures que vous allez pouvoir utiliser » et trace [*SH*]sur le tableau, sur la pyramide vidéo-projetée.

20’38 – nouvelle recherche individuelle de la question 2 : l’enseignant donne beaucoup d’indices pendant ce moment.

21’56 – un élève, en parlant fort, déclare « on fait Pythagore ».

22’06 – l’ enseignant prononce « *SOA* » et demande « que doit-on calculer ? ». L’enseignant parle d’un triangle pour avoir *SH*, un élève répond *OSH*.

25’24 – un élève à l’enseignant : « *AO* c’est la moitié de… » avec quelques discussions sur la diagonale du carré.

26’28 – l’enseignant demande « avez-vous identifié dans quel triangle on va travailler ? » et il trace *SHO* sur la pyramide.

26’39 – l’enseignant demande à propos de *SHO* « qu’est-ce qu’on connaît dedans ? » élève répond « rectangle » et il extrait le triangle *OSH* et demande « pourquoi ? ». Un élève répond « hauteur de la pyramide », et l’enseignant répond « très bien, ça vient perpendiculairement » et il trace *HSO* en codant l’angle droit.

27’57 – un élève affirme que (*OH*) et (*CB*) parallèles, l’enseignant répond « oui, quelle propriété ? » un élève répond « Thalès »… l’enseignant parle de la droite des milieux.

29’02 – l’enseignant demande la « mesure de *HO* ? », *HR* = *BC* = *AD* et explication par l’enseignant de *OH* qui est la moitié de *BC*.

30’25 – l’enseignant complète *SOH* avec les mesures 21 m, 17,5 m et ? et parle de « droite des milieux ».

31’12 – l’enseignant écrit les calculs menant à *OH* = *BC* : 2 = 35 : 2 = 17,5 m.

31’27 – l’enseignant demande « pour le calcul de *SH*, on utilise quoi ? quel outil ? » et des élèves répondent « Pythagore ». L’enseignant déclare « je ne la réécris pas complètement » et il demande ce que les élèves ont trouvé « à peu près quel résultat », et des élèves disent « 27,3 ».

31’57 – l’enseignant précise « d’accord, on tombe pas sur une valeur exacte », et il écrit $SH \approx 27{,}3$ en demandant : « avec cette valeur approchée, faites un calcul de l’aire » « nous, on veut l’aire de *SAB* ».

32’26 – Nouvelle recherche individuelle, ceux qui ont terminé vont commencer l’exercice sur le camion, la transition n’est pas bien marquée ; on ne revient plus sur l’exercice de la pyramide.

Nous visionnons la séance de classe de 12’58 à 32’26. On comprend alors d’où provient cette grande homogénéité des productions écrites des élèves. En effet, on peut voir que l’enseignant oriente largement vers la procédure 2 (la seule qui est mentionnée par l’enseignant) à partir de 16’05. Par la suite, on constate que beaucoup d’élèves ont dû copier le tableau, d’où l’homogénéité, car on ne peut que remarquer la très grande proximité de ce qui est écrit au tableau avec ce qu’écrivent certains élèves. Le théorème de Pythagore est mentionné oralement (31’27), mais les calculs sont entièrement laissés à la charge des élèves (on peut alors déceler des élèves qui ont des activités *a minima* : E11 et E18). En particulier, l’enseignant ne donne pas l’aire à calculer.

On retrouve la confusion sur la hauteur (18’21) ainsi que l’erreur de considérer que les triangles sont équilatéraux (19’12) dans les discussions que l’enseignant engage à partir de ce qu’il a vu de ses élèves. Avec la correction de la question 1 au tableau, on comprend la grande homogénéité des réponses des élèves car il s’agit de fait d’une prise de note de ce qui est fait au tableau conforme à l’élève E15 (voir l’annexe 1 et plus spécifiquement la partie après « Co », sans doute pour « correction »).

III-4) Retour aux copies

Ainsi, en reprenant les productions des élèves, on ne peut considérer que seuls 7 élèves ont effectivement répondu correctement (en tout cas ce qu’ils écrivent n’est pas une reformulation superficielle de la trace écrite au tableau), 7 élèves produisent un écrit identique au tableau et 4 élèves ont une production très proche.

Cela permet alors de se pencher sur les erreurs dans cette première question et notamment sur les élèves E11, E12, E17 et E15 puisque la suite est uniquement la prise de note du tableau. On y retrouve les confusions annoncées (comme dans la figure 1) avec, ensuite, la correction (cela se voit de manière plus évidente encore avec E15, cf. annexe 1).

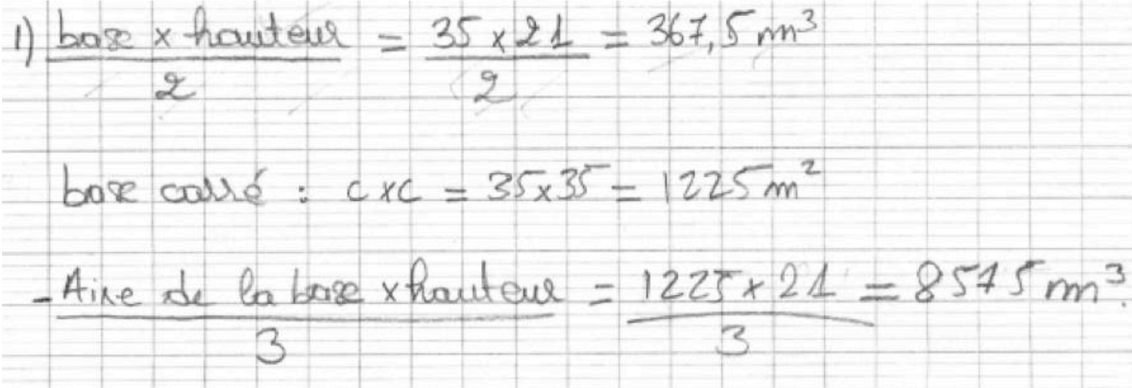


Figure 2 – Deux confusions de E11 : aire de triangle/volume de la pyramide et hauteur de la pyramide/hauteur d’un triangle

Finalement, et globalement pour tous les élèves, que reste-t-il à la charge des élèves ? Si l'on s'en tient aux aspects géométriques il est manifeste que l'enseignant prend en charge une grande partie du travail. Néanmoins, si l'utilisation du théorème de Pythagore dans *SOH* est indiquée comme étant la procédure à suivre (par défaut, puisqu'il n'y a aucune autre procédure de mentionnée collectivement) avec la mention de la valeur approchée 27,3 pour *SH*, les calculs intermédiaires sont à la charge des élèves. Dans ces calculs intermédiaires apparaissent des conceptions liées à l'objet racine carrée proche des modèles avancés par Bronner (voir l'annexe 4).

Ce que l'on soulève ici ce sont :

- l'importance de l'enseignant, de son discours, dans les activités des élèves (notamment sur l'orientation des procédures, la prise de note) ;
- dans ce qui n'est pas pris en charge par l'enseignant, on peut déceler des conceptions des élèves (donc, ici, uniquement du point de vue numérique).

Il est à noter que, pour ces deux points, c'est surtout l'association vidéo/productions écrites qui est intéressante.

IV- Deux utilisations en formation

Une présentation de deux exemples de séances de formation en Master 2 dans deux universités différentes effectuées par deux formatrices différentes au printemps 2013 mettra l'accent sur la question de l'élaboration d'un scénario ou d'une séance de formation à partir de ce matériel.

IV-1) Première formation

L'utilisation en formation se déroule durant une séance de 3h en M2 à l'UCP dédiée à la préparation à l'oral 2. 9 étudiants répartis en 3 groupes de 2 et un groupe de 3.

Au début on ne donne que l'énoncé de l'exercice. On leur dit qu'il s'agit d'un exercice de l'oral 2 du CAPES sans les productions d'élèves proposées par le jury, de vraies productions d'élèves de 3$^{\text{ème}}$ seront distribuées ensuite. Les étudiants ont tout d'abord à faire l'exercice et à chercher les différentes procédures possibles, analyser les difficultés et les erreurs envisageables. Le sujet de concours dans son intégralité est distribué à la fin.

Puis, pendant 20 min et à partir des productions E1 à E7, les étudiants doivent observer, anticiper sur les interventions de l'enseignant, trouver les points communs et les divergences.

Pendant 20 min, un étudiant présente une correction au tableau, les autres étudiants jouent les élèves. Beaucoup de discussions émergent, notamment sur la différence entre valeur exacte et valeur approchée.

Un extrait d'environ 20 min est visionné (de 12'58 à 32'26) où ils doivent prendre des notes. Une synthèse sur la vidéo est faite en 15 min.

Ce que les étudiants voient : le professeur parle trop ; il n'y a pas assez de traces écrites ; quelle est la nature de ce qui est au tableau ?

Le problème majeur reste les erreurs des étudiants. En particulier, pour beaucoup les faces d'une pyramide régulière sont des triangles équilatéraux et la difficulté de positionnement des étudiants (plus en posture élève qu'enseignant).

La séance a été très riche pour les étudiants, ils ont été très impliqués. Le travail par groupe a permis de faire émerger plusieurs procédures émanant des différents membres du groupe car souvent chaque étudiant n'en voit qu'une, la sienne.

Toutefois il aurait été préférable d'avoir deux séances car le travail sur la vidéo a été un peu court. Il semble que 2 séances de 2h30, voire de 2h, seraient idéales. A la suite, un travail pourrait être organisé autour d'exercices sur les grandeurs et mesures et les différentes représentations des racines carrées.

IV-2) Deuxième formation

Une séance prévue sur 2h, mais finalement il a fallu 2h30 avec 5 étudiants présents sur 12.

Il s'agit d'un choix de formation riche abordant la géométrie plane, la géométrie dans l'espace et le calcul. L'objectif est de faire un travail sur l'énoncé avec la production d'autres énoncés en prenant en compte l'ouverture et la fermeture des énoncés et de compléter avec une vidéo et des productions d'élèves.

Le sujet du CAPES est donné sans la copie de l'élève. Après un travail individuel, un étudiant corrige les questions du sujet au tableau. Suit une comparaison avec le sujet du BNC 2000 qui présente des questions bien plus détaillées.

Cinq productions écrites sont données (E1, E2, E3, E6 et E15) avec 25 min de lecture et 45 min de discussion. Puis un court extrait de la vidéo, environ 6 min, est visionné, de 12'58 à 19'12 : présentation et amorce de l'exercice, on arrête au moment où l'enseignant dit qu'une pyramide régulière a des faces latérales qui sont des triangles isocèles.

Si la discussion sur la vidéo a été assez pauvre, les discussions autours des énoncés et des copies ont permis de soulever plusieurs points : la distinction valeur exacte/valeur approchée, le problème des triangles équilatéraux dans une pyramide régulière, la difficulté d'extraire des sous-figures, la difficulté de calculer, le travail sur les racines carrées. En outre, les étudiants ne voient que la procédure P1 et pas du tout la P2 – cela tranche avec ce qu'ont fait les élèves et renforce le poids de l'enseignant.

Conclusion

Ces deux exemples montrent combien ce qui est esquissé dans l'oral 2 du CAPES est, malgré la volonté de rapprocher le concours du métier d'enseignant de mathématiques, éloigné de la réalité de la salle de classe. Il ne s'agit, au mieux, que d'un *demi-pas* dans la classe. Ainsi il est, à nos yeux, nécessaire d'accompagner cette préparation au concours d'une formation professionnelle. Bien entendu, il n'est pas question de dire que ce que l'on voit dans ces vidéos est *la* réalité de la classe, car cette réalité est multiple et complexe. En particulier, les choix de gestion des enseignants sont déterminants.

Notre objectif est de proposer des scénarios de formation qui redonnent de la cohérence à l'ensemble de la formation que suivent les étudiants. Nous pensons que des scénarios de formation élaborés à partir d'un sujet d'*oral 2* peut permettre de répondre à cet objectif. Ils permettraient en effet de travailler principalement une dimension professionnelle tout en accompagnant la préparation au concours. Notre position nous semble renforcée par la nouvelle formule du CAPES qui s'esquisse. En effet, à côté d'un *oral 2* qui paraît, pour l'essentiel, reconduit, l'écrit devrait donner lieu, aussi, à un travail sur les productions écrites d'élèves, ce que nos scénarios se proposent de travailler.

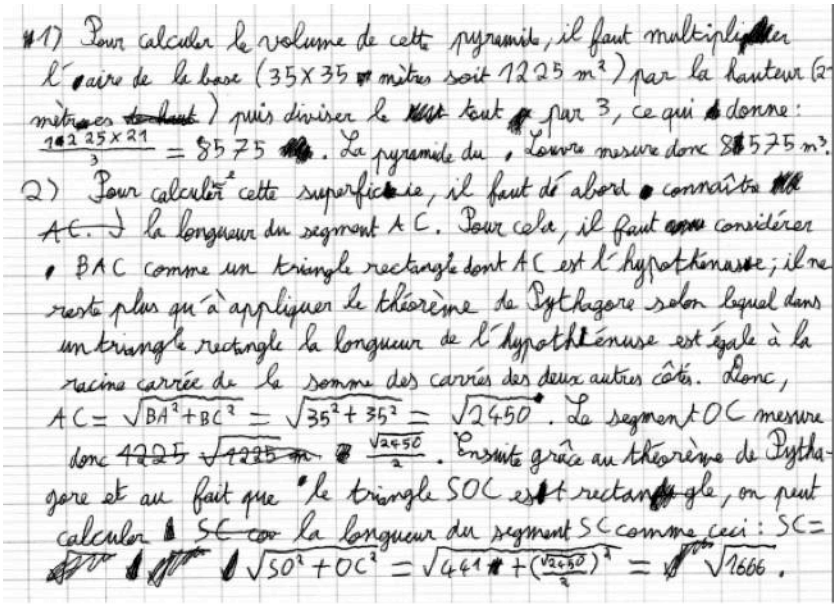
Cependant, il ne s'agit pas de faire des scénarios figés, mais plutôt de proposer du matériel en indiquant différentes pistes pour les exploiter en formation initiale en indiquant les caractéristiques qui nous paraissent intéressantes. On le voit d'ailleurs dans les deux scénarios qui ont été testés : ils n'utilisent pas tout à fait les mêmes productions écrites, ce n'est pas la même séquence vidéo qui est visionnée, ce ne sont pas les mêmes documents complémentaires qui sont proposés.

Dans la suite de notre travail nous désirons formaliser des scénarios *modulables,* c'est-à-dire au choix du formateur, tout en explorant d'autres thèmes mathématiques comme les probabilités.

BIBLIOGRAPHIE

Bronner A. (2005). Vers la recherche d'un milieu perdu pour l'apprentissage des nombres réels au collège : racine carrée et idécimalité, dans *Sur la théorie des situations didactiques,* Salin M.-H., Clanché P. et Sarrazy B. éditeurs, La Pensée Sauvage, pages 167-182.

Annexe 1 – Productions données à l'atelier : E1, E3, E6, E7 et E15



1) Pour calculer le volume de cette pyramide, il faut multiplier l'aire de la base (35X35 mètres soit 1225 m²) par la hauteur (21 mètres) puis diviser le tout par 3, ce qui donne : $\frac{1225 \times 21}{3} = 8575$. La pyramide du Louvre mesure donc 8575 m³.

2) Pour calculer cette superficie, il faut d'abord connaître la longueur du segment AC. Pour cela, il faut considérer BAC comme un triangle rectangle dont AC est l'hypothénuse ; il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Pythagore selon lequel dans un triangle rectangle la longueur de l'hypothénuse est égale à la racine carrée de la somme des carrés des deux autres côtés. Donc, $AC = \sqrt{BA^2+BC^2} = \sqrt{35^2+35^2} = \sqrt{2450}$. Le segment OC mesure donc $\frac{\sqrt{2450}}{2}$. Ensuite grâce au théorème de Pythagore et au fait que le triangle SOC est rectangle, on peut calculer la longueur du segment SC comme ceci : $SC = \sqrt{SO^2+OC^2} = \sqrt{441+\left(\frac{\sqrt{2450}}{2}\right)^2} = \sqrt{1666}$.

Figure 3 – Production de l'élève E1

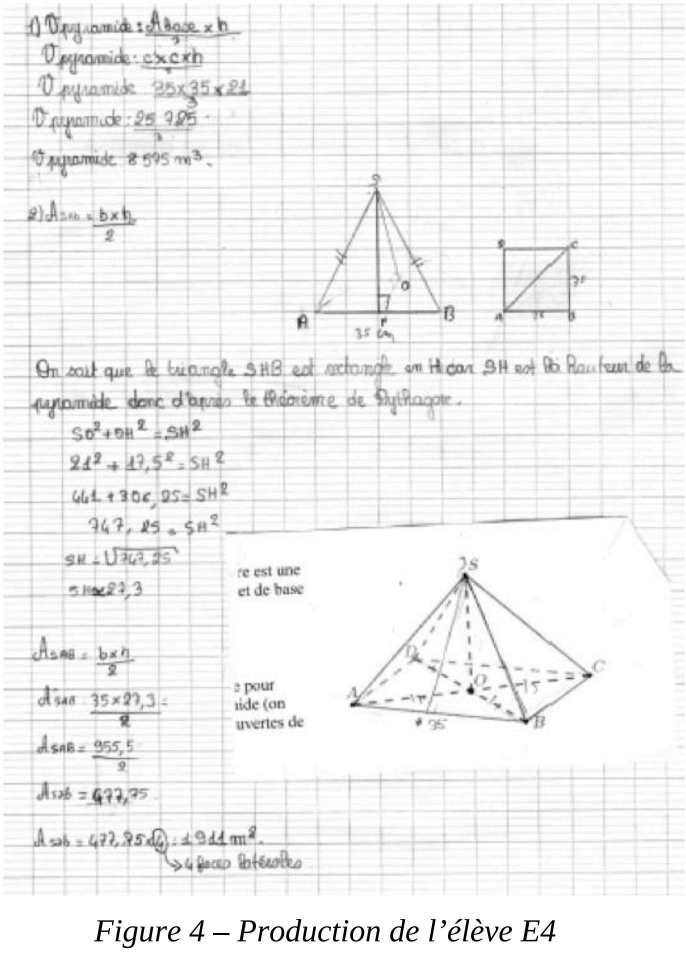
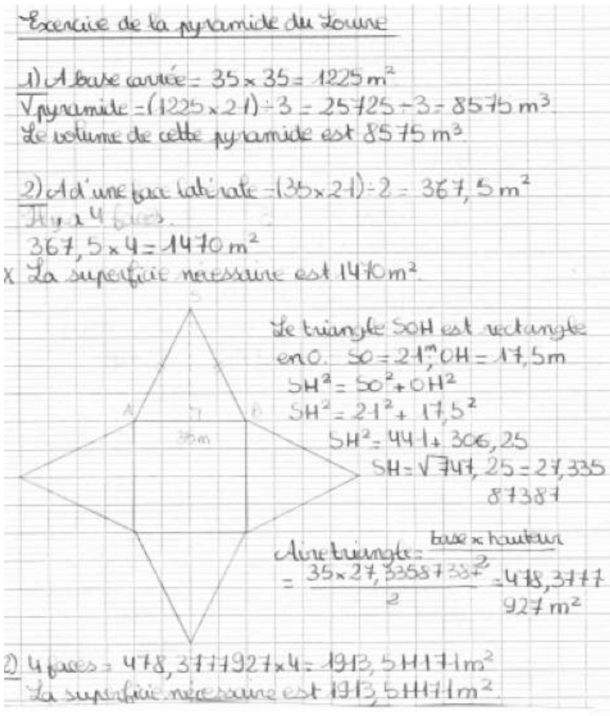


Figure 4 – Production de l'élève E4



Exercice de la pyramide du Louvre

1) A base carrée = 35 x 35 = 1225 m²
V pyramide = (1225 x 21) ÷ 3 = 25725 ÷ 3 = 8575 m³
Le volume de cette pyramide est 8575 m³

2) A d'une face latérale = (35 x 21) ÷ 2 = 367,5 m²
~~Il y a 4 faces.~~
367,5 x 4 = 1470 m²
x La superficie nécessaire est 1470 m²

Le triangle SOH est rectangle en O. SO = 21 m ; OH = 17,5 m
SH² = SO² + OH²
SH² = 21² + 17,5²
SH² = 441 + 306,25
SH = √747,25 = 27,335 87387

Aire triangle = base x hauteur / 2
= 35 x 27,33587387 / 2 = 478,3777 927 m²

2) 4 faces = 478,3777927 x 4 = 1913,511171 m²
La superficie nécessaire est 1913,511171 m²

Figure 5 – Production de l'élève E6

Exercice de mathématiques.

~~1/ V pyramide = Aire de base x hauteur / 2 = 1225 x 21 / 2 = 12862,5~~

-> Aire de la base = 35 x 35 = 1225 m²

1/ V pyramide = Aire de la base x hauteur / 3 = 1225 x 21 / 3 = 8575 m³

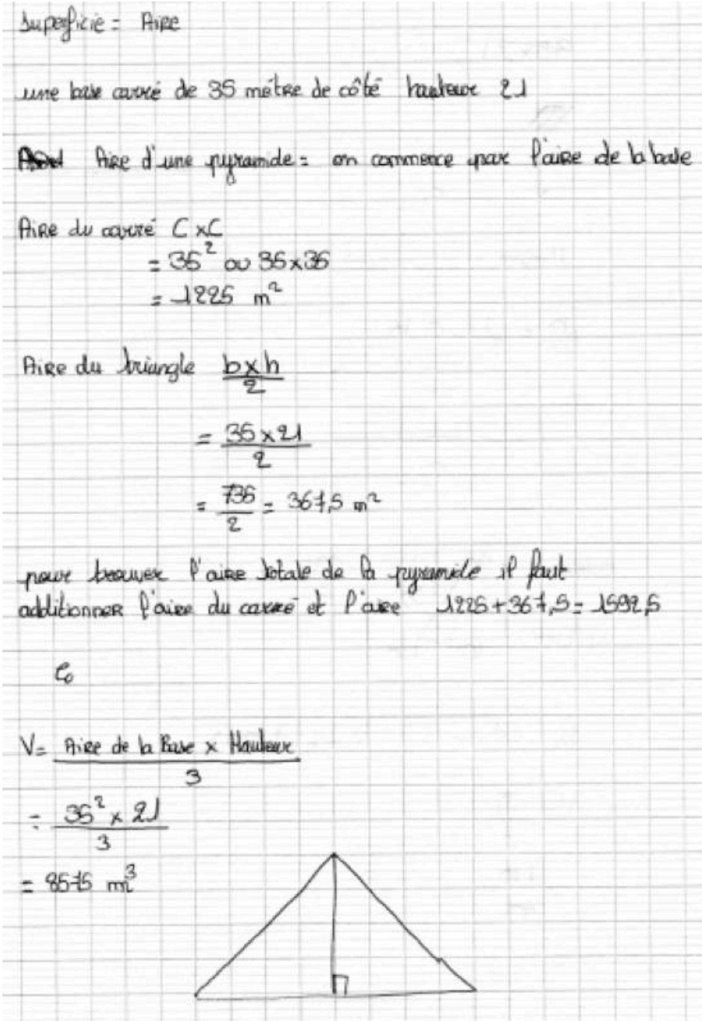
2/ Sachant que OH est la moitié de CB, elle mesure la moitié de 35 cm, soit 17,5 cm. Donc on peut calculer SH grâce au théorème de Pythagore. Le triangle SOH est rectangle en O. Or, d'après le théorème de pythagore, car OS est l'hauteur de la pyramide.
SH² = SO² + HO²
= SH² = 21² + 17,5²
= SH² = 441 + 306,25
= SH² = 747,25
= SH = √747,25 ≃ 27,34 m

Comme on connaît l'hauteur des triangles (27,34 m), on peut maintenant calculer l'aire d'une face latérale.
-> Aire du triangle = B x hauteur / 2 = 35 x 27,34 / 2 ≃ 478,37 m²

Aire des 4 triangles = 478,37 x 4 = 1913,48 m²

=> La superficie de verre nécessaire pour construire les faces latérales de cette pyramide est de 1913,48 m².

Figure 6 – Production de l'élève E7


Superficie = Aire

une base carré de 35 mètre de côté hauteur 21

~~Aire~~ Aire d'une pyramide : on commence par l'aire de la base

Aire du carré $C \times C$

$= 35^2$ ou 35×35

$= 1225\ m^2$

Aire du triangle $\frac{b \times h}{2}$

$= \frac{35 \times 21}{2}$

$= \frac{735}{2} = 367{,}5\ m^2$

pour trouver l'aire totale de la pyramide il faut additionner l'aire du carré et l'aire $1225 + 367{,}5 = 1592{,}5$

$V = \frac{\text{Aire de la Base} \times \text{Hauteur}}{3}$

$= \frac{35^2 \times 21}{3}$

$= 8575\ m^3$

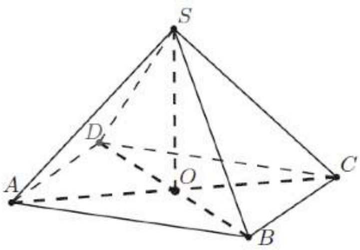
Figure 7 – Production de l'élève E15

Annexe 2 – Sujet d’oral 2 du CAPES 2012, exercice de la *pyramide*

Thème : Grandeurs et mesures

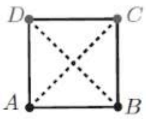
L’exercice

La pyramide du Louvre schématisée ci-contre est une pyramide régulière de 21 mètres de hauteur et de base carrée de 35 mètres de côté.

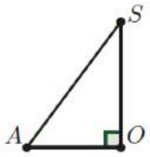


1) Calculer le volume de cette pyramide.
2) Calculer la superficie de verre nécessaire pour construire les faces latérales de cette pyramide (on convient que les faces sont totalement recouvertes de verre).

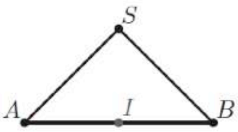
La réponse d’un élève à la question 2) :



On utilise Pythagore : $OA = \sqrt{17,5^2 + 17,5^2} = \sqrt{612,5}$



On utilise à nouveau Pythagore : $AS = \sqrt{612,5 + 21^2} = \sqrt{1053,5}$



On appelle I *le milieu de* $[AB]$: $IS^2 = AS^2 - AI^2$
donc $IS \approx 27,33$

On a quatre faces donc $4 \times \dfrac{35 \times 27,33}{2} \approx 1913,1\ m^2$

Le travail à exposer devant le jury

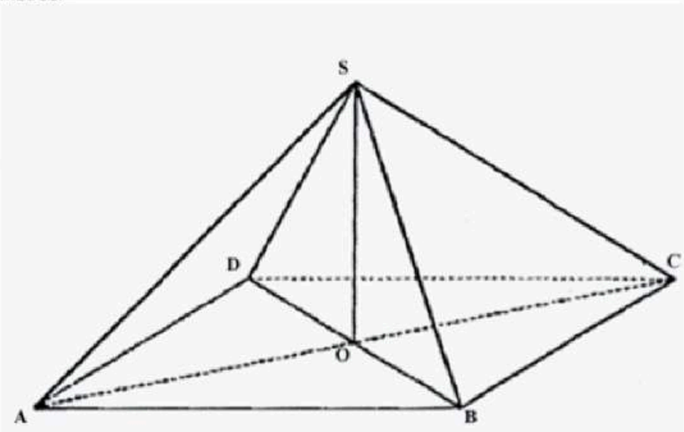
1- Analyser la production de l’élève, en particulier la prise d’initiative, la capacité à s’engager dans une démarche, à exposer un raisonnement et à mener les calculs.
2- Proposer une démonstration aboutie en complétant ou en modifiant la démarche de l’élève telle que vous la présenteriez devant une classe.
3- Proposer plusieurs exercices à différents niveaux (collège et lycée) sur le thème grandeurs et mesures.

Annexe 3 – Sujet du Brevet National des Collèges 2000

PARTIE A :

Paul en visite à Paris admire la Pyramide, réalisée en verre feuilleté au centre de la cour intérieure du Louvre

Cette pyramide régulière a une base carrée ABCD de côté 35 mètres et pour hauteur le segment [SO] de longueur 22 mètres.



1) Calculer la valeur arrondie au mètre près de la longueur de la diagonale du carré ABCD.

2) Calculer la longueur de l'arête [SA] ; en donner une valeur arrondie au mètre près.

3) Réaliser un patron de cette pyramide à l'échelle 1/1000.

Annexe 4 – Les modèles de Bronner

Ces cinq modèles sont, en *deux mots* :

- CF : le modèle « formel », $\sqrt{a}$ est une expression formelle et n'est pas considérée comme un nombre ;
- CP : le modèle carré parfait, $\sqrt{a}$ n'existe que si a est un carré parfait ;
- CA≈ : le modèle approximation, les nombres ne sont pas assimilés aux valeurs approchées décimales, il y a une différenciation valeur exacte-valeur approchée ;
- CA : le modèle approximation *dégénéré* du précédent, la racine carrée est assimilée à l'opérateur de la machine à calculer ;
- CN : le modèle nombre, les racines carrées sont considérées comme des nombres, il y a une différenciation valeur exacte-valeur approchée, les *idécimaux*[30] sont reconnus comme des nombres.

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E12	E13	E14	E16
CF	CA≈	CA≈	CN	CP CA	CA	CA≈	CA≈	CA≈	CP CA	CP CA	CA≈	CP CA	CP CA

On ne peut se prononcer sur E11, E15, E17 et E18 car ces élèves n'ont pas fait les calculs issus du théorème de Pythagore. Pour certains élèves, il est difficile de se prononcer, nous avons donc mis deux propositions.

[30] Un *idécimal* est un nombre qui s'écrit avec une infinité de décimales (par opposition aux décimaux).

OUTILS D’ANALYSE DE RESSOURCES NUMERIQUES

Jana Trgalová

Résumé – Cet atelier a proposé une réflexion sur l’exploitation possible, en formation initiale ou continue des enseignants de mathématiques, d’une grille d’analyse de ressources de géométrie dynamique, élaborée dans le cadre du projet européen Intergeo. Plutôt que livrer un compte-rendu de l’atelier, ce texte présente cette grille, son élaboration et son expérimentation dans divers dispositifs de formation visant à outiller les enseignants pour des tâches d’analyse et de conception de ressources pour la classe.

Introduction

La problématique abordée dans ce texte relève de celle de l’intégration des technologies numériques dans l’enseignement des mathématiques.

Selon Robert et Rogalski (2005), le choix et la conception de tâches pour la classe constituent une facette de l’activité professionnelle des enseignants. Si l’utilisation efficace d’un outil technologique demande à concevoir de nouvelles tâches qui donnent du sens aux concepts mathématiques (Monaghan 2004), la conception de tâches réellement nouvelles est plutôt rare (Laborde 2001, 2008). Les enseignants préfèrent modifier et adapter des tâches existantes, ce qui exige la capacité d’analyse de ces tâches et de leur résolution avec l’outil. Cependant, analyser une tâche qui intègre un outil technologique n’est pas simple. En effet, l’introduction de la composante technologique affecte toutes les autres dimensions – épistémologique, didactique et institutionnelle. Les enseignants doivent être capables de résoudre la tâche avec l’outil et d’analyser son rôle dans le processus de résolution et dans la définition même de la tâche. Ils doivent également être en mesure d’analyser la pertinence pour les apprentissages et la nécessité, ou le coût, d’introduction de nouvelles techniques instrumentées (ibid.). Pour la mise en œuvre de ces tâches en classe, les enseignants doivent avoir la capacité d’anticiper les techniques de résolution possibles, les apprentissages potentiels, ainsi que les orchestrations favorisant les apprentissages visés (Trouche & Drijvers 2010).

De nombreux dispositifs ont été mis en place pour soutenir les enseignants dans leurs efforts d’utilisation des technologies. Ces dispositifs varient en durée (de quelques jours en formation initiale ou continue, jusqu’à quelques années pour des dispositifs tels que SFODEM[31]), en modalités (en présence, à distance ou en mode mixte) et en contenu (de l’analyse de quelques ressources en formation continue par exemple, jusqu’à l’accompagnement du processus de conception collaborative de ressources, leur mise en œuvre et le retour réflexif sur les expériences dans SFODEM). Leur efficacité est tout aussi variable de par leur ponctualité et manque du suivi pour des formations courtes ou de par leur coût en temps et en ressources humaines pour des dispositifs tels que

[31] Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques (Guin & al. 2008).

SFODEM où un groupe de chercheurs et de formateurs a travaillé avec un petit groupe d'enseignants pendant 6 ans.

Un autre moyen de soutenir l'intégration des technologies est de mettre à la disposition des enseignants des ressources qui proposent des activités faisant appel à des outils technologiques, notamment via l'Internet. C'est le cas de banques de ressources éducatives, appelées aussi banques d'objets d'apprentissage. Cependant, l'accessibilité des ressources n'est pas suffisante, comme le souligne Robertson (2006) :

> Dénicher des ressources utiles, crédibles, des contenus éducatifs de qualité mis à jour régulièrement relève bien souvent de l'utopie. En effet, l'utilisateur est souvent confronté à l'absence d'assistance à la recherche (métadonnées vs mots-clefs), au manque d'assurance en ce qui a trait à la qualité des informations. De plus, il n'existe pas, actuellement, de « masse critique de contenu » […], c'est-à-dire qu'il n'existe pas un nombre suffisant d'objets d'apprentissage correctement métaréférencés, aisément accessibles en ligne pour que les enseignants et les apprenants en viennent à consulter toujours plus souvent les référentiels. […], nous avancerions que l'appropriation par les enseignants de matériel pédagogique et didactique complémentaire en soutien aux apprentissages des élèves et en complément aux ressources imprimées (manuels scolaires notamment) semble toujours difficile, même si les technologies sont disponibles à l'école depuis quelque vingt ans. (p. 13)

La dispersion de ressources sur de nombreux sites, le manque de métadonnées décrivant précisément leur contenu, l'absence d'indications sur leur qualité pédagogique et la difficulté d'appropriation de ces dernières sont soulevés comme des principaux obstacles à la réutilisation de ressources existantes et, par conséquent, à l'intégration des technologies dans les pratiques des enseignants.

Dans le cadre du projet européen Intergeo[32] (Kortenkamp *& al*. 2009), nous avons exploré l'idée d'impliquer les enseignants dans l'évaluation de la qualité de ressources de géométrie dynamique comme un moyen de pallier aux deux derniers obstacles cités. L'évaluation de la qualité des ressources a été cadrée par un questionnaire qui a été élaboré dans cet objectif. Ce questionnaire et son élaboration sont décrits dans la partie suivante. Nous présentons ensuite deux expérimentations de ce questionnaire et leurs principaux résultats.

Questionnaire d'évaluation de ressources de géométrie dynamique

La plateforme i2geo[33] (Fig. 1) développée dans le cadre du projet Intergeo mentionné plus haut a pour but de rassembler et de mettre à disposition des enseignants des ressources autour de l'usage de la géométrie dynamique dans les classes de mathématiques. La plateforme est fondée sur le principe communautaire : c'est un environnement ouvert où tout utilisateur peut déposer des ressources pour les mutualiser avec d'autres utilisateurs, il peut utiliser les ressources disponibles, les commenter, partager ses expériences avec l'usage de ces ressources dans sa classe.

Une démarche qualité (Trgalová *& al*. 2011) a été mise en place sur la plateforme dont l'objectif a été double :

- objectif « communautaire » : permettre le contrôle et l'amélioration de la qualité des ressources déposées par les utilisateurs ;

---

[32] Interoperable Interactive Geometry for Europe, 2007-2010,http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Main/About.

[33] i2geo.net

- objectif « individuel » : soutenir la pratique réflexive et les processus d'appropriation des ressources chez les enseignants utilisateurs des ressources.

Cette démarche qualité s'appuie sur un questionnaire (voir annexe 1) permettant d'analyser les dimensions de ressources de géométrie dynamique jugées pertinentes pour évaluer sa qualité mathématique, didactique, pédagogique, technique et ergonomique.

Figure 1 – Copie d'écran montrant la plateforme i2geo.net

Dans la suite, nous présentons brièvement comment le questionnaire a été conçu.

Méthodologie de l'élaboration du questionnaire

En accord avec Rabardel (1995) qui souligne l'importance de penser les usages d'un outil dès sa conception, le questionnaire a été élaboré dans un processus cyclique consistant en la conception de versions successives et leurs tests avec des enseignants, qui ont permis ses améliorations progressives. De plus, l'équipe de chercheurs en charge de l'élaboration du questionnaire a travaillé en étroite collaboration avec un groupe de sept enseignants de mathématiques[34] pour garantir l'accessibilité du questionnaire à ses principaux usagers, les enseignants.

Dans un premier temps, une liste des caractéristiques d'une ressource de géométrie dynamique considérée de bonne qualité a été établie donnant lieu à une soixantaine de critères. Ces critères ont été définis en référence à des cadres théoriques de didactique et des travaux de recherche sur les usages de la géométrie dynamique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ils ont ensuite été classés en neuf catégories permettant de décrire neuf dimensions d'une ressource, à savoir : (1) métadonnées, (2) aspect technique, (3) dimension mathématique du contenu, (4) dimension instrumentale du contenu, (5) valeur ajoutée de la géométrie dynamique, (6) implémentation didactique, (7) implémentation pédagogique, (8) intégration dans une progression et (9) aspect ergonomique.

Pour mieux comprendre la manière dont nous avons défini les critères de qualité d'une ressource de géométrie dynamique, nous décrivons brièvement, à titre d'exemple, l'élaboration des critères concernant la dimension « implémentation didactique » de la ressource. Pour plus de détails sur ce processus et les cadres théoriques sous-jacents, voir par exemple (Trgalová *& al*. 2011).

[34] Groupe « Géométrie dynamique » de l'IREM de Lyon.

Critères concernant la dimension « implémentation didactique » d'une ressource

La définition des critères concernant cette dimension de la ressource (Fig. 2) s'appuie plus particulièrement sur la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) qui propose des outils pour analyser l'activité de l'élève et le rôle de l'enseignant dans une situation d'apprentissage.

La notion de rétroaction du milieu est un élément clé pour envisager des situations a-didactiques. Grâce aux rétroactions du milieu l'élève doit pouvoir contrôler ses actions et être amené à les faire évoluer, sans intervention de l'enseignant. Ainsi, lorsqu'un enseignant cherche à utiliser dans sa classe une ressource qu'il n'a pas conçue, il devrait pouvoir comprendre quelles interactions sont prévues entre l'élève et le milieu dans la tâche proposée par la ressource. Ces considérations nous ont amené à définir les critères suivants : « Les rétroactions du logiciel essentielles pour l'activité sont décrites » ou « Les rétroactions du logiciel permettent aux élèves d'avancer dans la résolution du problème ». De même, les notions de dévolution et d'institutionnalisation sont à la base des critères « Des conseils sont donnés à l'enseignant pour lancer l'activité » et « Des conseils sur les interventions aux moments de synthèse sont donnés ».

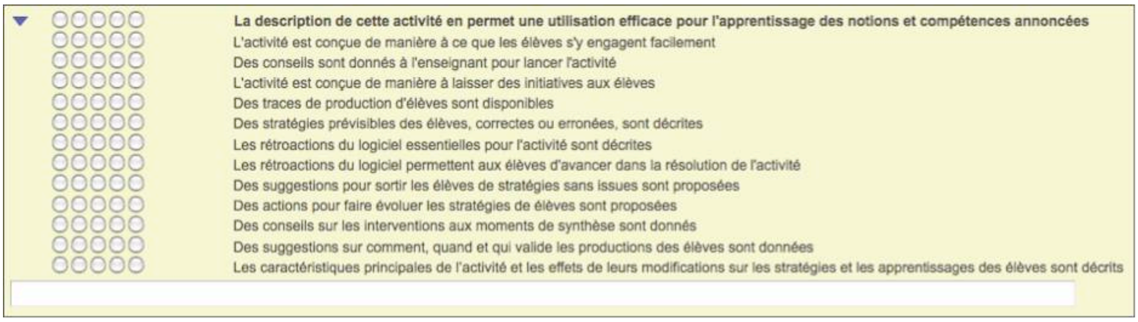

La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées
L'activité est conçue de manière à ce que les élèves s'y engagent facilement
Des conseils sont donnés à l'enseignant pour lancer l'activité
L'activité est conçue de manière à laisser des initiatives aux élèves
Des traces de production d'élèves sont disponibles
Des stratégies prévisibles des élèves, correctes ou erronées, sont décrites
Les rétroactions du logiciel essentielles pour l'activité sont décrites
Les rétroactions du logiciel permettent aux élèves d'avancer dans la résolution de l'activité
Des suggestions pour sortir les élèves de stratégies sans issues sont proposées
Des actions pour faire évoluer les stratégies de élèves sont proposées
Des conseils sur les interventions aux moments de synthèse sont donnés
Des suggestions sur comment, quand et qui valide les productions des élèves sont données
Les caractéristiques principales de l'activité et les effets de leurs modifications sur les stratégies et les apprentissages des élèves sont décrits

Figure 2 – Extrait du questionnaire relatif à la dimension « implémentation didactique » d'une ressource de géométrie dynamique

Le questionnaire ainsi conçu a été proposé au groupe des sept enseignants dans le but d'évaluer la pertinence des critères et leur accessibilité en termes de formulation. Ce travail a conduit à une nouvelle version du questionnaire qui a été ensuite expérimentée dans divers dispositifs de formation. Trois autres cycles de conception du questionnaire ont été conduits selon ce même schéma avant sa mise en ligne sur la plateforme.

Dans la partie suivante, nous présentons deux expérimentations faisant partie des cycles de conception, leurs objectifs et les principaux résultats.

Expérimentations du questionnaire

Première expérimentation : représentations des enseignants sur la qualité d'une ressource de géométrie dynamique et validation des choix des critères de qualité

La première expérimentation (Jahn & al. 2008) avait pour objectif d'une part d'identifier quelles caractéristiques les enseignants des mathématiques attribuent spontanément aux ressources jugées de « bonne » qualité afin de les comparer à celles que nous avions proposées dans le questionnaire. Nous avons souhaité d'autre part tester la pertinence et la clarté des critères proposés dans le questionnaire et enfin questionner l'intérêt et l'utilité de ce dernier pour l'analyse et l'appropriation des ressources de géométrie dynamique.

Une ressource a été spécialement conçue pour les besoins de l'expérimentation. Elle était composée d'une fiche élève qui proposait un problème du type boîte noire, une fiche pour le professeur qui proposait une organisation de la classe et des fichiers de géométrie dynamique permettant de valider les conjectures des élèves. Cette ressource a été soumise à 22 enseignants, tous débutant en géométrie dynamique, dans le cadre d'une formation continue. Les enseignants ont été invités à résoudre le problème et à faire une analyse *a priori* de la ressource sans le questionnaire, avant de l'analyser à l'aide de celui-ci.

L'analyse *a priori* de la ressource a permis de faire émerger les éléments de la ressource qui ont été appréciés par les enseignants ou au contraire, dont ils pointaient l'absence.

Par exemple, dans la fiche pour le professeur, les enseignants ont particulièrement apprécié la description brève de la séquence qui constitue pour eux une sorte de *carte de visite* de la ressource, ainsi que la description synthétique de l'organisation de la séquence. Pour une meilleure appropriation de la ressource, ils souhaiteraient trouver plus d'informations sur le rôle de l'enseignant : quelles interventions et à quel moment ?, quel accompagnement du travail des élèves ? La plupart des enseignants considèrent qu'un document contenant les solutions et les réponses attendues, ainsi que des difficultés prévisibles des élèves avec propositions des orientations didactiques (ex. *fiche élève commentée* à l'attention du professeur) contribuerait à une meilleure appropriation de la ressource. Ils trouvent important de partager, à l'issue de la mise en œuvre de la séquence en classe, les informations sur les difficultés rencontrées par les élèves avec des suggestions de pistes pour les dépasser, mais également sur les interventions de l'enseignant, notamment lors des phases d'institutionnalisation. Quant aux fichiers informatiques, les enseignants expriment le besoin de bien comprendre comment la macro-construction fournie a été construite et comment elle fonctionne (ces éléments n'ont pas été donnés dans la ressource). Enfin, pour tous les enseignants, l'apport de la géométrie dynamique paraît incontestable du fait de la possibilité de manipuler la figure et identifier ainsi ses propriétés, d'utiliser le déplacement et d'autres outils tels que mesures pour vérifier les propriétés des figures, de traiter plusieurs cas de la même figure, de réaliser plus aisément et avec plus de précision les constructions. Le déplacement est considéré comme un moyen favorisant l'exploration, la recherche et la formulation de conjectures, ainsi qu'un moyen de validation.

Les réponses des enseignants ont montré une grande convergence entre la vision qu'ont les enseignants des ressources de « bonne » qualité et la nôtre, notamment en ce qui concerne le contenu mathématique et instrumental de la ressource et son implémentation didactique. D'autre part, il est apparu que certaines dimensions qui nous paraissent les plus importantes ne sont pas spontanément considérées par les enseignants, comme l'apport de la géométrie dynamique et le rôle du déplacement dans la tâche par exemple. C'est dans ce fait que semble résider le principal intérêt du questionnaire selon les enseignants : il attire l'attention sur certains éléments de la ressource que les enseignants ne questionnent pas spontanément mais qu'ils jugent tout de même essentiels dans l'évaluation de la qualité de la ressource. Le questionnaire a été reconnu comme très utile pour réaliser une analyse fine et détaillée de la ressource.

Deuxième expérimentation : usages du questionnaire pour analyser des ressources

Avec cette expérimentation (Trgalova & Richard, 2012) nous cherchions à analyser la pertinence et la clarté des critères de qualité dans le questionnaire pour les enseignants, étudier les premiers usages du questionnaire pour l'analyse des ressources et identifier les aspects des ressources qui déterminent leur sélection pour une utilisation éventuelle en classe.

Trois ressources ont été proposées aux enseignants, toutes portant sur un même objet de savoir mathématique, les quadrilatères particuliers (niveau 5e de collège français, élèves de 12-13 ans). Les trois ressources étaient composées d'un fichier texte s'adressant soit à l'enseignant, soit aux élèves, soit aux deux, accompagné d'un fichier de géométrie dynamique. De plus, les modalités d'utilisation de la géométrie dynamique suggérées par les ressources ont été les mêmes, c'est-à-dire en salle informatique où les élèves manipulent eux-mêmes les figures.

Six enseignants ont participé à cette expérimentation. Ils avaient tous une expérience professionnelle d'enseignement des mathématiques plus ou moins longue, entre 5 et 15 ans, et un niveau d'intégration de technologies très hétérogène.

Le travail des enseignants a été cadré par le protocole suivant :

- Phase 1 : chaque enseignant devait prendre connaissance, individuellement, des contenus des trois ressources.
- Phase 2 : les enseignants analysaient ensuite les ressources en binômes en utilisant le questionnaire.
- Phase 3 : chaque enseignant devait décider individuellement laquelle (lesquelles) des trois ressources analysées il choisirait pour une utilisation dans sa classe, avec ou sans modifications, puis éventuellement suggérer des pistes d'amélioration des ressources.

Le choix de faire précéder l'analyse des ressources par une phase de prise de connaissance de leurs contenus avait pour but d'une part de permettre à ce que chaque enseignant puisse se faire sa propre opinion sur les ressources et d'autre part de gagner du temps pour leur analyse avec le questionnaire. Les enseignants ont ensuite été groupés par binômes afin de susciter des échanges et des confrontations de leurs points de vue sur les ressources. L'expérimentation, plus précisément les phases 2 et 3, a duré environ 3 heures. Un observateur a été présent lors du travail d'analyse des ressources pour aider les enseignants à lever d'éventuelles ambiguïtés dans les items du questionnaire ou pour demander davantage de précisions si cela s'avérait nécessaire.

L'analyse des données recueillies durant l'expérimentation a été basée sur la confrontation de l'analyse « experte » des ressources, réalisée par un chercheur en didactique des mathématiques, avec les analyses des ressources réalisées par les enseignants.

Les résultats montrent que certains binômes d'enseignants éprouvaient des difficultés à se concentrer sur le strict contenu des ressources dans leur analyse. En effet, leurs réponses à certains items ne correspondaient pas aux informations fournies par la ressource, mais elles reflétaient plutôt des efforts d'interprétation de ces informations à la lumière de leurs propres expériences. Par exemple, à la question « Les éléments permettant la prise en charge du problème par l'apprenant sont-ils explicites ? », deux binômes ont répondu « non pas du tout » (réponse attendue), tandis que le troisième a répondu « oui, tout à fait ». Cette question interroge la phase de dévolution dans l'activité proposée. Voici l'échange entre les enseignants du binôme :

> E1 : « c'est trop directif ; il n'y a pas de prise en charge du problème par l'apprenant »

> E2 : « oui mais en même temps du coup ils font le problème ; moi, je vois la question… imagine quelque chose de très, très ouvert où l'élève n'entre même pas dedans. Là, il n'y a pas de soucis, il sait ce qu'il a à faire ».

Cet échange laisse supposer que l'enseignant E2 interprète la question comme « Les élèves peuvent-ils facilement comprendre ce qu'il faut faire et s'engager dans la résolution du problème ? ». E2 anticipe donc la manière dont la dévolution pourrait se faire lors de la mise en place de l'activité en classe au lieu de chercher simplement la présence d'indications à ce sujet dans la ressource, ce qui est demandé dans la question. Selon l'approche instrumentale, il s'agit d'une catachrèse, un écart entre le prévu et le réel dans l'utilisation de l'artefact (Rabardel 1995, p. 99), ici de la question donnée du questionnaire. Cette catachrèse n'est cependant pas considérée comme un détournement de l'artefact par rapport aux fonctions prévues, mais plutôt comme un indice du processus d'attribution à l'artefact « de fonctions non anticipées ou prévues par les concepteurs » (*ibid.*, p. 101). Il s'agit d'un processus d'instrumentalisation de la question. D'autre part, cette interprétation particulière se traduit par la mise en œuvre de schèmes d'exploration nouveaux amenant l'enseignant à interroger le contenu de la ressource d'une certaine manière portant davantage sur son usage potentiel en classe que sur les informations fournies, ce qui témoigne d'un processus d'instrumentation.

Le questionnaire lui-même a été utilisé différemment par les binômes. Un binôme l'a utilisé dès le départ pour éliminer les ressources les moins pertinentes. Leur analyse avait ainsi pour but d'identifier les dimensions rédhibitoires des ressources. Une fois de telles dimensions déterminées pour une ressource donnée, les enseignants en ont arrêté l'analyse, sans essayer de vérifier si les autres aspects constituent ou non sa force. Par exemple, une des ressources comprenait un fichier de géométrie dynamique défaillant. Les enseignants de ce binôme considéraient inutile de poursuivre l'analyse de la ressource après avoir identifié la faiblesse de la ressource résidant dans le fichier de géométrie dynamique erroné, puisque pour eux, « la première des choses, c'est la figure ». Les deux autres binômes ont, en revanche, réalisé une analyse détaillée des toutes les dimensions de la ressource. A la question s'ils auraient choisi cette ressource pour une éventuelle utilisation dans leurs classes, certains enseignants de ces binômes ont pu envisager son utilisation, à condition d'y apporter des modifications permettant d'améliorer les aspects considérés comme faibles. Ils ont été capables de faire abstraction de la défaillance du fichier de géométrie dynamique associé à l'une des ressources, comme en témoigne l'affirmation de certains : « on fait comme si la figure était juste ». Ainsi, même si tous les binômes ont trouvé cette faiblesse inacceptable, celle-ci n'a pas empêché certains de continuer l'analyse et identifier des points forts de la ressource.

Ces résultats permettent d'anticiper différents usages possibles du questionnaire qui correspondent aux différentes genèses instrumentales conduisant au développement de différents schèmes d'utilisation et, par conséquent, de différents instruments d'analyse de ressources, comme les suivants :

- ne considérer que quelques dimensions essentielles d'une ressource qui seront analysées à l'aide de critères détaillés et analyser les autres seulement à l'aide de l'item général ;
- analyser en détail une dimension importante : si celle-ci est satisfaisante, en analyser une autre, si non, arrêter l'analyse et conclure que la ressource est de « mauvaise » qualité ;
- n'utiliser que les items généraux pour analyser toutes les dimensions de la ressource ;

- utiliser les critères détaillés pour réaliser une analyse approfondie de la ressource.

La manière dont le questionnaire est utilisé, ou, en termes de l'approche instrumentale, la nature du questionnaire comme instrument d'analyse de ressources, est façonnée par l'expérience de l'utilisateur. Cependant, la finalité de l'analyse de ressources joue également un rôle important dans la genèse instrumentale. Par exemple, si l'analyse doit permettre l'identification de points faibles de la ressource pour pouvoir l'améliorer, une analyse approfondie de la ressource à l'aide de critères détaillés du questionnaire serait pertinente. Si le but de l'analyse est de mieux comprendre le contenu de la ressource et les intentions didactiques de ses auteurs en vue de la mise en œuvre de la ressource ne classe, l'utilisateur pourra se concentrer sur les dimensions jugées importantes et laisser de côté les autres. Si le but de l'analyse est de faire le choix de la ressource la plus appropriée dans un ensemble de ressources, on pourra se concentrer sur les dimensions considérées comme importantes et rejeter les ressources pour lesquelles ces dimensions seraient jugées insatisfaisantes ou de mauvaise qualité.

Concernant les critères déterminant les choix de ressources pour une éventuelle utilisation en classe, il apparaît que le contenu mathématique valide est une condition nécessaire. Les enseignants accordent aussi une grande importance à la valeur ajoutée de la géométrie dynamique dans les activités proposées dans la ressource. D'autres dimensions sont considérées comme plus ou moins importantes en fonction de l'expérience des enseignants. Par exemple, les enseignants peu familiers avec l'usage des technologies jugent la dimension relative à l'implémentation didactique de la ressource, c'est-à-dire présence d'indications sur la gestion par l'enseignant des apprentissages des élèves, comme l'une des plus importantes.

Cette étude a également permis de reformuler certains critères afin de lever des ambiguïtés qui étaient parfois à l'origine de réponses contradictoires de la part des binômes.

Les résultats de cette expérimentation montrent enfin que les deux processus, genèse instrumentale portant sur le questionnaire et genèse documentaire (Gueudet & Trouche 2008) portant sur les ressources, s'entremêlent comme, d'une part, le questionnaire est supposé orienter l'analyse des ressources en pointant les dimensions sur lesquelles elle doit porter et, d'autre part, l'analyse des ressources façonne la manière dont le questionnaire est utilisé. L'analyse du travail documentaire des enseignants avec des ressources et des genèses instrumentales relatives à leur usage du questionnaire présentée dans ce texte tend à montrer un impact positif de l'implication des enseignants dans l'analyse des ressources sur le développement de leurs compétences professionnelles visant l'intégration de la géométrie dynamique dans leurs pratiques.

Conclusion

Les diverses expérimentations que nous avons menées auprès des enseignants de mathématiques sur l'utilisation du questionnaire pour analyser des ressources ont produit de nombreux résultats significatifs. Nous avons observé par exemple que l'analyse des ressources de géométrie dynamique passe par une vérification explicite de la valeur ajoutée de la géométrie dynamique en comparaison avec l'environnement traditionnel de papier - crayon et une attention particulière est accordée au rôle du déplacement. Il s'agit d'une compétence professionnelle nécessaire pour une analyse efficace des ressources de géométrie dynamique. Son développement a été évidemment visé dès la conception du questionnaire, et les résultats des expériences montrent que le questionnaire joue un rôle important dans l'atteinte de cet objectif.

Les résultats montrent aussi que les enseignants apprécient l'utilisation du questionnaire leur permettant de faire une analyse complète et détaillée des ressources et attirant leur attention sur des critères qui ne sont généralement pas considérés spontanément, bien que leur importance soit reconnue.

L'analyse approfondie de l'utilisation du questionnaire par les enseignants pour analyser des ressources montre une imbrication des genèses instrumentales et documentaires chez les enseignants. Le questionnaire a pour but d'aider les enseignants à analyser les ressources pour qu'ils puissent choisir celles qui leur conviennent pour une mise en œuvre en classe. De ce point de vue, la genèse instrumentale du questionnaire, c'est-à-dire la transformation de l'artefact « questionnaire » en un instrument d'analyse des ressources soutient la genèse documentaire des ressources analysées, c'est-à-dire leur transformation en documents utiles pour la pratique professionnelle des enseignants. Pourtant, le questionnaire a été utilisé de manière différente, ce qui a conduit au développement de différents instruments menant à de diverses analyses de ressources. Ainsi, l'analyse des ressources et ses différentes finalités ont façonné l'utilisation du questionnaire et, par conséquent, l'instrument qui en résulte pour l'analyse des ressources. De ce point de vue, la genèse documentaire influence à son tour la genèse instrumentale du questionnaire. Cette relation étroite entre les genèses documentaire et instrumentale est l'une des clés du développement professionnel, mais, en même temps, elle présente une grande complexité pour les enseignants.

Ainsi, bien que notre travail montre que l'évaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique peut soutenir le développement professionnel des enseignants, il apparaît également que la complexité d'une telle activité pour les enseignants nécessite un soutien spécifique et à long terme. De nouveaux moyens et outils d'accompagnement de genèses instrumentales et documentaires doivent donc être pensés, ce qui ouvre la voie à d'autres projets.

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998), *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Gueudet, G., Trouche, L. (2008), Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2(3), 7-33.

Guin, D., Joab, M., Trouche, L. (Dir.) (2008), *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006)*, cédérom, INRP et IREM (Université Montpellier 2).

Jahn, A. P., Trgalová, J., Soury-Lavergne, S. (2008), Analyse de ressources pédagogiques et amélioration de leur qualité : le cas de la géométrie dynamique. *Actes du 2° SIPEMAT*, 28 juillet-1 août, Recife (Brésil).

Kortenkamp, U., Blessing, A. M., Dohrmann, C., Kreis, Y., Libbrecht, P., Mercat, C. (2009), Interoperable interactive geometry for Europe – First technological and educational results and future challenges of the Intergeo project. In V. Durrand-Guerrier *et al*. (Eds.), *Proceedings of the Sixth CERME conference* (pp. 1150-1160), Jan 28 – Feb1 2009, Lyon, France.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. In A. P. Canavarro *et al*. (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 29-43). Lisboa: SEM/SPCE.

Monaghan, J. (2004). Teachers' activities in technology-based mathematics lessons. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 327-357.

Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Robert, A., Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 269-298.

Robertson, A. (2006). *Introduction aux banques d'objets d'apprentissage en français au Canada*, Rapport pour le Réseau d'enseignement francophone à distance du Canada. En ligne http://www.refad.ca/

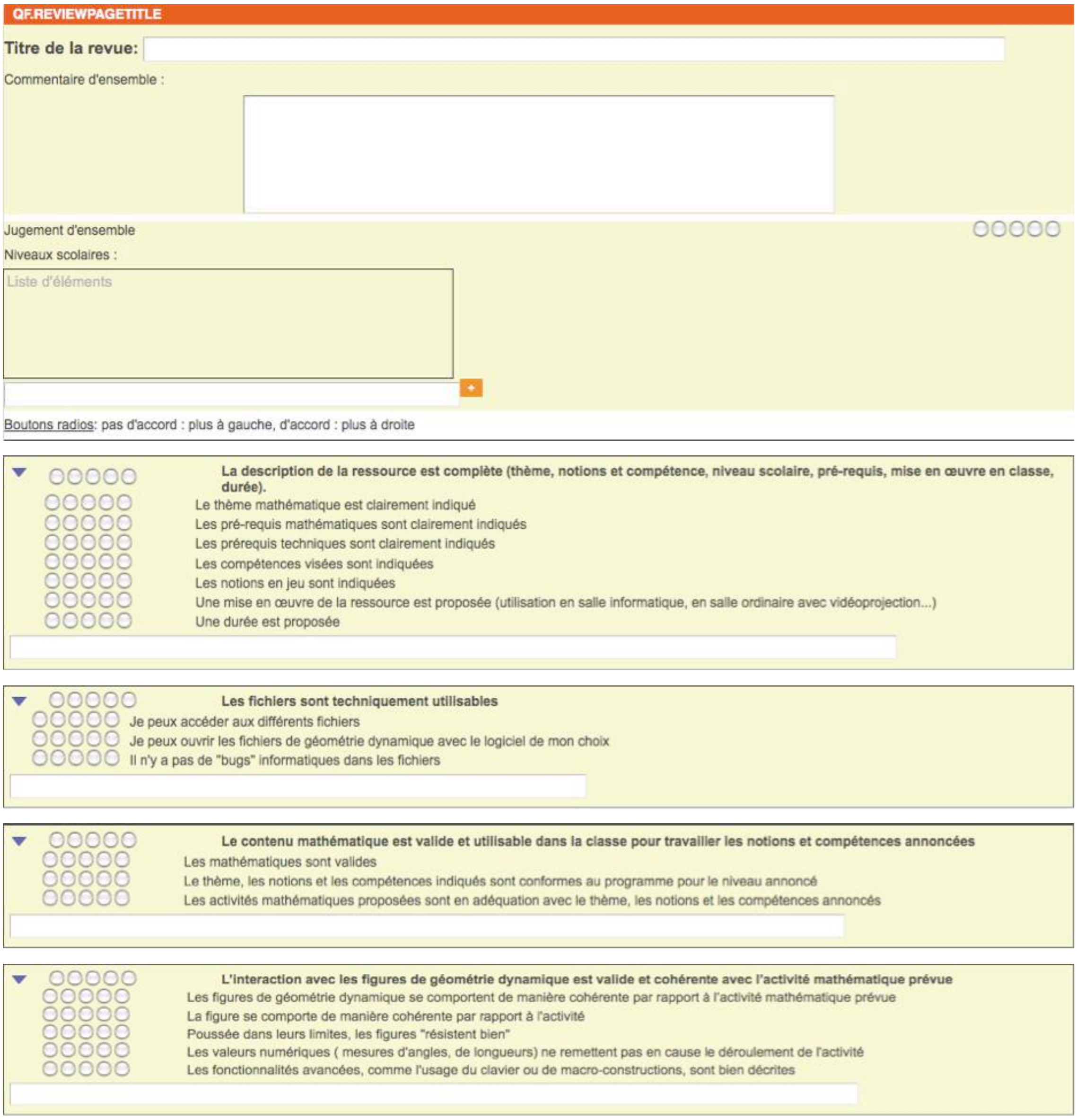
Trgalová J., Richard P. (2012) Analyse de ressources comme moyen de développement professionnel des enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 908-918).

Trgalová, J., Soury-Lavergne, S., Jahn, A. P. (2011), Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project: rationale and experiments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 337-351.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010), Handheld technology for mathematics education, flashback to the future, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 42, 667-681.

Annexe 1 – Questionnaire de qualité pour évaluer les ressources sur la plateforme i2geo

Le questionnaire propose des critères relatifs à neuf dimensions d'une ressource de géométrie dynamique. Chaque dimension peut être évaluée soit de manière générale, en exprimant le degré d'accord (ou de désaccord) à un item général (en gras dans la figure ci-dessous), ou bien de manière plus fine, en répondant à un ensemble de critères plus détaillés associés à chaque dimension. Un commentaire qualitatif peut compléter cette évaluation quantitative.



Les activités mathématiques proposées bénéficient des apports de la géométrie interactive, elles ne peuvent pas être transposées telles qu'elles en activités papier-crayon

Dans cette activité, les dessins sont clairs et précis
L'enjeu de cette activité est de produire différents cas de la même figure
Cette activité amène l'élève à explorer, expérimenter et conjecturer
Dans cette activité, l'élève peut valider visuellement des conjectures
Dans cette activité, différentes représentations (graphiques numériques, algébriques) sont en interaction
Cette activité amène l'élève à considérer des propriétés géométriques plutôt que des coïncidences numériques ou graphiques
L'activité ne peut pas être transposée telle qu'elle en une activité papier-crayon
La géométrie interactive aide à atteindre les buts pédagogiques
Le déplacement est utilisé pour illustrer une propriété ou une relation entre objets grâce à son invariance
Le déplacement est utilisé pour conjecturer ou valider une propriété ou une relation entre objets

La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées

L'activité est conçue de manière à ce que les élèves s'y engagent facilement
Des conseils sont donnés à l'enseignant pour lancer l'activité
L'activité est conçue de manière à laisser des initiatives aux élèves
Des traces de production d'élèves sont disponibles
Des stratégies prévisibles des élèves, correctes ou erronées, sont décrites
Les rétroactions du logiciel essentielles pour l'activité sont décrites
Les rétroactions du logiciel permettent aux élèves d'avancer dans la résolution de l'activité
Des suggestions pour sortir les élèves de stratégies sans issues sont proposées
Des actions pour faire évoluer les stratégies de élèves sont proposées
Des conseils sur les interventions aux moments de synthèse sont donnés
Des suggestions sur comment, quand et qui valide les productions des élèves sont données
Les caractéristiques principales de l'activité et les effets de leurs modifications sur les stratégies et les apprentissages des élèves sont décrits

La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées

L'activité est conçue de manière à ce que les élèves s'y engagent facilement
Des conseils sont donnés à l'enseignant pour lancer l'activité
L'activité est conçue de manière à laisser des initiatives aux élèves
Des traces de production d'élèves sont disponibles
Des stratégies prévisibles des élèves, correctes ou erronées, sont décrites
Les rétroactions du logiciel essentielles pour l'activité sont décrites
Les rétroactions du logiciel permettent aux élèves d'avancer dans la résolution de l'activité
Des suggestions pour sortir les élèves de stratégies sans issues sont proposées
Des actions pour faire évoluer les stratégies de élèves sont proposées
Des conseils sur les interventions aux moments de synthèse sont donnés
Des suggestions sur comment, quand et qui valide les productions des élèves sont données
Les caractéristiques principales de l'activité et les effets de leurs modifications sur les stratégies et les apprentissages des élèves sont décrits

La description de l'activité propose une mise en œuvre

Une configuration matérielle possible est décrite (un ordinateur par élève, ou classe entière avec vidéoprojecteur)
L'activité est décomposée en différents rôles et phases
Une gestion des mises en commun et de la conclusion de l'activité est proposée
Un déroulement temporel est proposé

L'activité s'inscrit facilement dans une progression pédagogique

Les apprentissages réalisés peuvent être réinvestis
Les notions et compétences pré-requises sont cohérentes avec l'activité
Cette activité contribue à l'avancement des apprentissages prévus dans la progression pédagogique
Leur réflexion lors de l'activité les introduit à la notion suivante dans ma progression

La ressource est facile à prendre en main et adaptable

La quantité d'information est satisfaisante
La présentation de l'information est claire
On peut modifier les éléments de la ressource pour l'adapter à ses besoins.

Commentaires:

LA FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES EN MASTER PREMIERE ANNEE A L'UNIVERSITE D'ARTOIS : QUELLE UTILISATION EN FORMATION DE RESSOURCES ISSUES DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ?

Carole Baheux[35], **Françoise Chenevotot**[36], **Marie-Pierre Galisson**[37], **Christine Mangiante**[38]

Résumé - Depuis septembre 2012, la formation en master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » se déroule en alternance. Dès la première année et chaque semaine, les étudiants reçoivent une formation théorique et une formation didactique tout en consacrant un jour entier à leur stage de pratique accompagnée.
Cette communication comporte deux volets.
Nous commencerons par présenter la nouvelle organisation de la formation puis nous centrerons notre propos sur le module de didactique des mathématiques dont nous préciserons les objectifs. Quelles sont les ressources utilisées au cours de cette formation ? Quel appui sur des articles liés aux recherches ? Pour quel(s) usage(s) et avec quelles intentions ?
Pour étudier plus précisément comment certaines notions issues de la didactique des mathématiques sont réinvesties ici à des fins de formation, nous retracerons ensuite les différentes étapes du travail du formateur. Nous illustrerons notre propos en décrivant comment, du choix des articles de recherche, à la conception de ressources pour la classe, puis à l'analyse a posteriori d'une séance en classe, le formateur cible quelques notions de didactique des mathématiques : « changement de cadres », « registres de représentation », « niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ». Enfin, nous analyserons en quoi ce dispositif lui permet d'atteindre (ou pas) les objectifs qu'il s'était fixés.

A l'Université d'Artois, la formation des futurs professeurs de mathématiques de lycée et de collège en Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » se déroule en alternance depuis le 1er septembre 2012.

Dans cette communication, après avoir décrit cette nouvelle organisation de la formation pour la première année du Master, notre intention est de présenter quelques ressources utilisées dans le dispositif de formation, les choix qui les ont motivées, les fonctions qu'elles sont censées remplir, la manière dont elles ont été utilisées en formation et quelques « effets » qu'elles ont pu produire en terme de pratiques chez les futurs professeurs.

[35] Université d'Artois, LML, France, carole.baheux@univ-artois.fr
[36] Université d'Artois, IUFM Nord/Pas de Calais – LDAR, France
[37] Université d'Artois, IUFM Nord/Pas de Calais – LDAR, France
[38] Université d'Artois, IUFM Nord/Pas de Calais – LML, France

1. Le contexte de la formation initiale en première année de Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » au sein de l'Université d'Artois

1.1. Un Master en alternance en 2012-2013

Le Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » se déroule par alternance à l'Université d'Artois. Ce dispositif, expérimental pour l'année 2012-2013, n'est proposé que par notre Université.

Dès la rentrée, les étudiants de première année ont effectué un stage d'observation et de pratique accompagnée. Ce stage s'est déroulé du 15 septembre 2012 au 15 mai 2013 à raison d'une journée par semaine dans un même établissement. Les étudiants ont été accueillis dans la classe d'un maître de stage pendant 4 heures par semaine, ce qui constitue 100 heures en immersion dans l'année.

Pendant le premier semestre, les étudiants ont observé les pratiques du maître de stage mais ont également dû se renseigner sur tous les intervenants d'un établissement scolaire.

Au cours du second semestre, les étudiants ont pu corriger des exercices, préparer et corriger des devoirs en classe et/ou à la maison et surtout préparer et conduire des séances devant les élèves. Le maitre de stage étant toujours au fond de la salle, les étudiants n'ont eu que peu de gestion de classe à faire et ainsi pu se consacrer entièrement à leur pratique professionnelle.

En plus du stage de 100 heures en immersion, les étudiants de première année ont eu la possibilité de faire, sur la base du volontariat, 50 heures d'accompagnement éducatif ou d'aide aux devoirs, ce qui leur a permis d'être seuls face à de petits groupes d'élèves tout en percevant une petite rémunération.

Les établissements scolaires potentiels ont été proposés par la Division de l'Organisation Scolaire du Rectorat et validés par les Inspecteurs d'Académie – Inspecteurs Pédagogiques Régionaux.

1.2. Caractérisation de la formation

Le préambule de la maquette du Master signale :

> « Cette formation professionnelle ne saurait se limiter à l'envoi des étudiants dans les classes, elle doit aussi s'articuler avec une réflexion didactique, pédagogique, disciplinaire et épistémologique qui suppose des allers retours réflexifs entre terrain et formation ».

La prise en compte d'un double cursus simultané nécessite de penser autrement l'articulation formation théorique / formation pratique et témoigne d'une volonté d'accorder de la place aux mises en situations professionnelles et à l'analyse de pratiques professionnelles.

La formation met en valeur une réelle progression durant les stages avec un stage d'observation puis de pratique accompagnée en première année et un stage en responsabilité de 4 à 5 heures par semaine de la prérentrée à la fin de l'année scolaire en deuxième année.

Un accent est aussi mis sur la dimension « métier de la communication » avec la place des compétences orales :

- Un rôle crucial dans l'exercice du métier : faire des cours de mathématiques à différents niveaux de l'enseignement secondaire avec le regard du professeur qui doit expliquer, plutôt qu'avec le regard de l'étudiant qui doit (seulement) apprendre ;
- Un objectif double : préparer à l'oral et à l'écrit du concours mais aussi à l'exercice du métier en ayant un regard critique sur les manuels, les programmes.

Une part importante est également octroyée aux enseignements de didactique des mathématiques tant dans leur dimension théorique (en amont des pratiques) que dans leur dimension pratique (analyse des pratiques).

1.3. Contenus et objectifs de la formation

La formation en première année de Master s'organise autour des quatre blocs suivants.

Les « savoirs disciplinaires » constituent un premier domaine :

- Renforcer la maîtrise des savoirs mathématiques à enseigner ;
- Initier les étudiants aux méthodes de la recherche, qu'elle soit disciplinaire ou qu'elle soit en lien avec la didactique des Mathématiques.

La « culture professionnelle disciplinaire » comprend des modules d'histoire et d'épistémologie des disciplines scientifiques, de didactique des mathématiques, les Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE).

Ses objectifs sont :

- Permettre aux étudiants de prendre du recul par rapport aux programmes scolaires et de comprendre l'évolution des objets enseignés ;
- S'approprier l'usage pédagogique des Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE)…

La « culture professionnelle générale » regroupe la connaissance du système éducatif, la connaissance des publics scolaires (adolescence, environnement social et économique, éthique et déontologie professionnelle…).

Les « stratégies d'intervention éducative » rassemblent des thèmes comme l'apprentissage scolaire, la gestion éducative de la classe, les types d'évaluation des élèves, le travail en équipe, l'innovation et la recherche…

2. Les intentions déclarées des formateurs en culture professionnelle et didactique en première année de Master en 2012-2013

Nous ne citons ici que les intentions des formateurs qui assurent des séances de formation professionnelle.

2.1. Formation pratique

Pour la préparation du stage d'observation au 1er semestre, l'enjeu principal est d'amener les étudiants à « voir tout ce qui peut être observé dans une séance ». La grille d'observation, élaborée collectivement avec les étudiants l'année dernière, est donnée directement par le formateur cette année car les étudiants sont en stage dès septembre.

La progression conçue en 2012-2013 s'articule autour de :

- La question de la gestion de la classe (perçue comme cruciale par les étudiants) est abordée essentiellement à partir du DVD diffusé par l'Académie de Créteil (sitographie) ;
- Un travail sur les contenus : comprendre comment enseigner à partir d'une vidéo (un énoncé ou sa solution proposés par l'étudiant dans une classe) et d'une analyse de productions d'élèves (des copies d'élèves de lycée) ;
- La rédaction d'un rapport de stage s'appuyant sur l'utilisation de la grille d'observation lors d'une séance complète prise en charge par l'étudiant et filmée.

Pour la préparation du stage de pratique accompagnée au second semestre, les étudiants sont amenés à travailler sur les transitions primaire-collège et collège-lycée à partir de documents institutionnels (les instructions officielles et les documents d'accompagnement) et d'articles de recherche. Ils ont également été confrontés aux enjeux de la correction des copies et de la notation à partir d'un échantillon de copies de Terminale S.

Ils doivent également produire un rapport de stage centré sur l'analyse d'une séance menée en classe. Comparativement au rapport de stage demandé au premier semestre, les étudiants doivent ici approfondir les aspects mathématiques et didactiques.

L'accompagnement à la rédaction du rapport est l'occasion de lire les instructions officielles et d'aborder leurs implicites, l'analyse a priori et a posteriori d'exercices et d'activités. Ces temps de travail permettent de mettre les étudiants en contact, sur des cas très précis, avec les enjeux didactiques de l'enseignement de l'algèbre, de la proportionnalité, de la démonstration, de la géométrie dans l'espace...

2.2. Formation théorique

Pour le module « Mathématiques, discipline scolaire » qui représente 60 heures au premier semestre, les objectifs sont triples :

- Connaître les programmes ;
- Réfléchir sur les enjeux de l'enseignement de l'analyse, de la géométrie (plane et dans l'espace) et des probabilités. Les modalités de travail sont l'examen des instructions officielles, de productions d'élèves, d'erreurs classiques. Une mise au point mathématique sur certains aspects nouveaux et délicats des programmes de lycée (probabilités, statistique) est effectuée.
- Préparer à l'épreuve d'oral 2 (EOD) à partir d'exemples de sujets.

Pour le module relevant de la didactique au second semestre, le contexte de la mastérisation, la mise en place de l'alternance, incitent les formateurs à s'inscrire dans les axes mis en exergue dans le préambule du texte de la maquette :

> « [une formation qui] doit s'articuler avec une réflexion didactique, pédagogique, disciplinaire et épistémologique qui suppose des allers retours réflexifs entre terrain et formation ».

La formation en didactique des mathématiques est limitée à une UE de 36 heures au second semestre en 2013 en raison de la préparation du concours exceptionnel. Conçue par les formateurs pour être en cohérence avec les préparations aux stages, elle traite de deux domaines travaillés au collège et au lycée : l'algèbre et la géométrie.

3. Les choix des formateurs pour la formation en didactique en première année de Master en 2012-2013

3.1. Contraintes de formation et marges de manœuvre

Les choix des formateurs sont soumis à certaines contraintes.

La maîtrise de l'oral et plus largement du langage (les exposés divers, les exposés de leçons, les oraux préparés, les présentations de séances, les discussions) constitue un premier axe fédérateur. La question des registres langagiers dans le domaine des mathématiques est l'occasion d'une sensibilisation aux registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993).

Le rôle dévolu au stage filé, à savoir, sensibiliser sur la durée d'une première année les étudiants à la non congruence des temps de l'enseignement et de l'apprentissage, permettre des prises de conscience des contraintes du métier à partir d'expériences personnelles issues de la prise en charge d'une classe spécifique, nous conduit à une priorité : donner sens à des outils issus de la recherche en didactique pour aider à la construction de situations d'enseignement / apprentissage qui pourront être expérimentées dans des classes.

Toutefois, des marges de manœuvre sont ménagées.

Le contexte institutionnel se prête à un travail en amont des situations de travail qui pourrait d'une certaine façon « armer » le futur enseignant :

> « Pour éviter une imprégnation socialisante trop exclusive par la culture locale, un travail en amont sur l'espace de référence est déterminant. Son objectif serait d'alerter 'l'environnement cognitif' du sujet pour que la confrontation au champ réel de l'activité se passe sur un mode réflexif plutôt 'qu'imprégnatif' » (Beckers, 2007).

Nous nous inspirons dans ce contexte d'un type de formation développé pour les professeurs des écoles :

> « Une stratégie de transposition de type didactique passe par une adaptation, à la charge du formateur, du savoir didactique auquel il se réfère, pour le transmettre aux étudiants. Cette adaptation passe par une réflexion sur les objets didactiques utiles aux futurs professeurs d'école et la construction de situations de formation permettant la transmission de ces objets » (Houdement, 1995, pp. 4).

Les limites sont connues : il s'agit de transmettre des savoirs explicitables, théoriques et pratiques qui ne peuvent constituer l'ensemble des savoir–faire et savoir en usage dans le métier.

3.2. Choix des thèmes d'étude

Si la formation en didactique s'appuie sur deux domaines (l'algèbre et la géométrie), nous faisons le choix de développer ici le domaine de l'algèbre élémentaire (son enseignement et son apprentissage au collège et en seconde) ce qui correspond à 16 heures de formation sur les 36 heures de l'UE. Nos motivations sont diverses.

3.2.1 Du côté de l'algèbre enseignée

Nos étudiants effectuent leur stage en collège et éventuellement en seconde. L'algèbre élémentaire (calcul littéral, mise en équation et résolution algébrique, liens avec les fonctions) dispute (en partie) à la géométrie élémentaire le statut du domaine de la sensibilisation à la « rationalité mathématique ». Depuis la parution des nouveaux programmes, cette situation est notamment mise en évidence par des documents officieux (documents d'accompagnement des programmes), des rapports ministériels (citons, par exemple, Kahane (2002)).

Par ailleurs, il apparaît clairement aux étudiants comme aux enseignants que la maîtrise des compétences algébriques est une passerelle pour le lycée, un passage incontournable pour les études supérieures.

Du côté de la formation, la difficulté pour les enseignants d'établir un rapport idoine à l'algèbre élémentaire enseignée au collège et au lycée a fait l'objet de nombreux constats et suscité nombre de recherches.

3.2.2 Du côté de la didactique de l'algèbre

Le développement des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire a été initié en France dès les premiers travaux de didactique (Brousseau, 1972) puis s'est propagé internationalement. En témoigne la profusion de travaux français et internationaux (sans oublier les travaux relatifs à l'épistémologie de l'algèbre) qui diffusent depuis près de quarante ans. Certains ont pris comme entrée l'élève et les savoirs relatifs à l'apprentissage de l'algèbre par les élèves (Kieran, 2007), (Grugeon, 2000), d'autres ont privilégié une entrée par les pratiques enseignantes (Bednarz, Kieran & Lee, 1996), (Lenfant-Corblin, 2002), (Coulange, 2001). D'autres encore interrogent les enjeux de l'algèbre en termes de transposition didactique dans l'enseignement (Chevallard, 1985, 1989, 1990). Ces travaux ont donné lieu à plusieurs synthèses dont celles de Kieran en 2007 et un numéro hors-série de la revue RDM en 2012 (Coulange & Drouhard, 2012).

3.2.3 Du côté de l'enseignement

Les recherches sur les pratiques enseignantes et sur le développement professionnel des enseignants connaissent depuis les années 90 un essor semblable. Des travaux internationaux (Schulman, 1986), (Ball, 2005) par exemple, français pour lesquels nous retenons notamment (Robert, 2008), (Lenfant-Corblin, 2002), (Grugeon, 2006) fournissent un grand nombre de références pour le chercheur.

3.3. Ressources

3.3.1 Ressources transversales

Pour le formateur, les visées sont pragmatiques : définir un certain nombre de concepts didactiques dont l'usage dans les pratiques, et notamment dans des pratiques concernant l'enseignement de l'algèbre, favorisera l'analyse a priori et a posteriori de situations d'apprentissage.

Un premier travail consiste à dégager des concepts outils pour les pratiques. Le formateur s'est appuyé sur l'ouvrage (Robert & al, 1999) rédigé par A. Robert (didacticienne), M. Lattuati (professeure de lycée) et J. Penninckx (IPR), principalement sur le chapitre intitulé « Des outils pour analyser des notions mathématiques ». Explicitées, accompagnées d'exemples, certaines notions semblent particulièrement importantes pour travailler sur la conception de situations d'enseignement : la notion de variable didactique – le caractère outil/objet – les cadres et changements de cadres – les registres – les niveaux de conceptualisation – les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances.

3.3.2 Ressources pour l'enseignement de l'algèbre

Le formateur prend en compte un premier type de ressources : des ressources partagées avec les étudiants dont l'enjeu est qu'elles constituent des outils pour la classe.

Le document « Du numérique au littéral » (première publication en 2006) est un document de référence pour les étudiants. Les notions abordées, à savoir, les différents usages de la lettre, les différents statuts du signe « = », les formules et l'introduction des lettres, la résolution algébrique d'un problème, les deux aspects « procédural » et « structural » d'une expression algébrique et enfin le calcul littéral et la démonstration sont présentées et illustrées par des exemples, une progression, une rubrique sur l'utilisation du tableur. Elles couvrent l'ensemble des notions enseignées au collège pour lesquelles les étudiants devront remettre en question l'apparente évidence qu'ils leur confèrent.

Le document plus récent « Ressources pour la seconde » (2009) constitue un autre appui plus ponctuel. Les sous-rubriques « fonctions » dans le paragraphe « Programmes et éléments de logique et de raisonnement » mettent l'accent sur les liens entre équations et définition de la courbe représentative d'une fonction, « traductions » de propriétés dans des registres distincts (l'expression d'une inégalité dans la langue naturelle, en termes d'intervalle ou d'expression algébrique par exemple), sur la nécessité d'amener les élèves à l'usage des quantifications encore implicites au collège (énoncé de règles de calcul, des identités remarquables) selon le statut des énoncés (équations, fonctions). Le paragraphe « Langage courant et langage mathématique » suggère des occasions de travailler sur les clivages entre langage naturel et langage mathématique, notamment à partir d'exemples portant sur la résolution d'équations. Ces aspects, comme dans le premier document, constituent pour les élèves et pour les étudiants qui doivent en prendre conscience des conditions cruciales pour l'entrée dans un mode de pensée fonctionnel et la rationalité mathématique.

Ces documents renvoient plus ou moins explicitement à des travaux issus de la recherche. Par exemple, pour le document dédié au collège, ces références sont implicites (Combier & al, 1996) ou explicites et citées en notes de bas de page (Sfard, 1991).

Le formateur s'appuie aussi sur un second type de ressources issues de la recherche mais accessibles en partie aux étudiants telles celles qui filigranent les documents d'accompagnement : des articles extraits de revues (Petit x, Repères IREM, publications de l'INRP et de l'IREM). Ces articles feront partie des supports du dispositif de formation et seront proposés en bibliographie même s'ils ne seront pas totalement explorés.

Une dernière catégorie de ressources est gérée librement par les étudiants (manuels, ressources numériques…). Ces ressources constituent des outils pour le travail en formation et visent à permettre aux étudiants de produire leurs propres ressources.

3.4. Enjeux de la formation

Plutôt que de mener une réflexion à long terme mais segmentée sur des thèmes certes cruciaux quoique détachés du contexte des pratiques du métier, l'objectif est d'amener les étudiants à élaborer des ressources, à les discuter, à les mutualiser. Dans le contexte de cette formation, il s'agit donc de les amener à concevoir un chapitre de cours comprenant une situation d'apprentissage, des exemples, un cours rédigé, des exercices et un DS ; la séance d'exercices sera mise en œuvre en classe et fera l'objet d'une analyse. Il s'agit enfin de sensibiliser les étudiants au travail documentaire entendu comme un processus consistant à :

> « rassembler des ressources, les sélectionner, les transformer, les recomposer, les partager, les mettre en œuvre… » (Gueudet & Trouche, 2010).

Les enjeux pour le formateur sont les suivants :

- Faire en sorte que les étudiants mobilisent des connaissances dans le domaine de l'algèbre et des outils pour construire une ressource constituant un chapitre de cours ;
- A partir de l'exploitation de ces ressources dans le cadre d'une séance d'Analyse Didactique de Pratique Professionnelle (ADPP) dans la classe d'un professeur sensibilisé à la didactique, favoriser l'appropriation d'un certain nombre de concepts clés utilisables pour concevoir et évaluer en temps réel (en termes d'objectifs d'apprentissage) l'activité mathématique des élèves.

Il s'agit donc d'aider les étudiants à appréhender les difficultés de l'enseignement de l'algèbre et notamment :

> « à comprendre le renversement de pensée demandé à l'élève, eux qui ont le plus grand mal au contraire à réinventer des solutions arithmétiques » (Artigue, 2002, pp. 229).

4. Le dispositif de formation

La formation est constituée de quatre séances d'environ 3 heures réparties sur trois mois et d'une séance d'ADPP.

4.1. Première séance : « Procédures et erreurs des élèves en algèbre : quelles connaissances nécessaires pour le professeur ? »

4.1.1 Première étape

La séance a pour objet de sensibiliser les étudiants à leur propre rapport à une algèbre « naturalisée » et de prendre en compte les passages entre modélisation arithmétique et modélisation algébrique, calcul numérique et calcul algébrique. Les tâches demandées tendent à mettre en évidence les limites du raisonnement algébrique, les différences entre les divers types de raisonnement et à approcher la notion de cadres et de niveau de conceptualisation.

Les supports correspondent aux trois problèmes donnés en annexe 1.

Questions posées aux étudiants :

- Résoudre les problèmes ;
- Analyser vos démarches de résolution ;
- Quel langage utilisez-vous pour modéliser le problème ?

- Quelles procédures de calcul utilisez-vous ?
- De quels outils de contrôle disposez-vous lors de la résolution ? A quel(s) niveau(x) scolaire(s) ces problèmes sont-ils accessibles ? Quelles sont les compétences mobilisées ?

Le premier problème est résolu algébriquement par cinq étudiants sur six. La résolution arithmétique (un étudiant sur six) met en évidence son économie. Le second problème illustre la pertinence d'un raisonnement arithmétique dans les problèmes de type « partage proportionnel ». Le troisième problème, proposé dans un cadre géométrique, met en lumière les divers cadres qui peuvent être mobilisés (numérique, algébrique, géométrique) ainsi que la notion de niveau de conceptualisation (géométrie élémentaire avec recours au théorème de Thalès en 3ème, étude des configurations géométriques à l'aide des nombres complexes en Terminale S) et l'économie d'un recours aux transformations géométriques.

Ce travail aboutit, après discussion, au tableau 1 ci-dessous, censé mettre en place quelques jalons sur différents modes de pensée mathématiques.

Cadre numérique	**Cadre algébrique**	**Cadre géométrique**
Langage naturel	Langage symbolique	Langage des grandeurs/ langage algébrique
Recherche et calcul des inconnues intermédiaires s'effectuant en fonction du contexte Expressions numériques renvoyant au contexte	Introduction d'une lettre désignant l'inconnue et production d'écritures numéro-littérales décrivant la situation Expressions algébriques relevant (implicitement pour l'élève) des fonctions	Elaboration d'une proportion (égalité de deux rapports de grandeurs) Egalité de deux quotients
Opérations arithmétiques dont l'ordre d'effectuation est réglé par le déroulement de l'histoire	Usage d'opérations formelles pour transformer les expressions algébriques	Utilisation des propriétés de l'homothétie (alignement centre, point, point image) Utilisation des propriétés des configurations de Thalès
Signe d'égalité renvoyant au résultat d'une procédure de calcul	Signe d'égalité relevant dans les premières étapes d'une relation d'équivalence	Signe d'égalité renvoyant d'abord à la définition d'une proportion
Résolution restant dans le cadre numérique	Résolution impliquant des changements de cadre : cadre numérique / cadre algébrique	Tracé géométrique pour la première question ; cadre numérique pour la seconde question (ou simple mesurage)
Contrôle s'exerçant à toutes les étapes	Contrôle du sens échappant lors du traitement algébrique de l'équation	Contrôle lié aux grandeurs

Tableau 1 – Différents modes de pensée mathématiques

4.1.2 Deuxième étape

Il s'agit cette fois de dégager, à partir de travaux d'élèves extraits d'anciens mémoires de Professeurs de Lycée et de Collège 2ème année (PLC2), les obstacles auxquels sont confrontés les élèves et de permettre l'exploration du document d'accompagnement « Du numérique au littéral ». Le travail d'analyse de productions d'élèves se fait en binômes.

Les supports comprennent des productions d'élèves de 4ème et de 2nde (non jointes) et les documents d'accompagnement des programmes.

Questions posées aux étudiants :

- Etablir une typologie des erreurs recensées à partir des documents proposés (éventuellement de vos propres expériences avec des élèves). On pourra distinguer ce qui relève du statut de la lettre, du statut de l'égalité, des transformations d'expressions algébriques (littérales dans les programmes en usage) ; des changements de registres langagiers ;
- Repérez-vous des règles implicites utilisées par les élèves ? Quelles sont vos hypothèses quant à leur origine ?

Le document d'accompagnement « Du numérique au littéral » ne développe pas précisément d'explications sur l'origine des difficultés rencontrées par les élèves (en dehors du sens de l'égalité ou de la prise en compte des deux aspects « structural » et « procédural » d'une expression algébrique). L'explicitation de certaines erreurs et de leur origine invite à s'appuyer sur d'autres références : des extraits d'articles en lien avec les discussions menées avec les étudiants sur les erreurs des élèves et leurs origines.

	Erreurs	Origine
Statut de la lettre et exemples		
Les lettres en tant qu'objets	5*y* comme 5 yachts	Lien avec l'usage des lettres dans les pratiques sociales et avec les unités de grandeurs
Lettres ne représentant qu'une seule valeur	$x + y + z = x + p + z$, est-ce vrai ? toujours, jamais, parfois ? Jamais p et y sont toujours des valeurs différentes : une lettre différente pour des valeurs différentes	Lien avec l'expérience arithmétique des élèves : un symbole désigne une valeur « 3 », dans l'équation « $a+2=5$ », a désigne 3
Compréhension des expressions algébriques et de leurs transformations		
« Assembler » en addition algébrique	Pour une réponse attendue $n+3$, réponses données $3n$ ou n^3	Pour une réponse attendue $n+3$, réponses données $3n$ ou n^3
Confusion analogue entre puissances et produits		Loi de simplification (valide en arithmétique reposant sur la règle élève d'achèvement des calculs numériques)
Utilisation des parenthèses pour produire une expression littérale	Modélisation de l'aire de surface d'un rectangle $(a+m)p$ Donnant lieu à : $am\times p$	Croyance que les calculs s'opèrent de gauche à droite (parenthèses non nécessaires), croyance en usage aussi en arithmétique. (prégnance de l'aspect procédural dans document d'accompagnement
Les manipulations aveugles sur les expressions littérales	Exemple (Chevallard, 1989, p.46) de l'élève qui sait factoriser mais qui ne peut valider son résultat en donnant à x des valeurs qui lui permettrait de vérifier	La difficulté de prendre en compte deux aspects : la sémantique (le sens des écritures) et leur syntaxe (leur règle de fonctionnement)
L'absence de contrôle de la validité des solutions		Même origine : référence au document d'accompagnement de seconde en lien avec la notion de « phrase ouverte », la signification des symboles entre deux expressions (« = », « > », « < ») et les quantifications existentielle et universelle (p.5)
Les changements de registres langagiers		
L'absence ou la production d'expressions littérales erronées pour modéliser algébriquement une situation	Exemples extraits des productions d'élèves	La difficulté à articuler plusieurs registres langagiers : langage naturel, langage symbolique (mais aussi registres relevant du géométrique, du graphique...)

Tableau 2 – Erreurs d'élèves et leurs origines

Dans la bibliographie distribuée pendant le cours, le formateur renvoie à la lecture de (Combier & al, 1996, pp. 7-26), dont le premier chapitre reprend des points importants extraits des revues Petit x 5, 19 et 23. Il insiste sur les deux objectifs de l'enseignement de l'algèbre relevés par Chevallard : assurer un maniement formel du calcul algébrique sans en faire un enseignement formaliste, donner sens au calcul algébrique en instaurant des liens entre numérique et algébrique. L'hypothèse pour le formateur est que les contenus des documents d'accompagnement, les quelques éléments extraits de travaux publiés dans des revues « accessibles » en lien avec les activités menées peuvent, sinon modifier le rapport à l'algèbre des étudiants, du moins leur faire prendre conscience de la complexité de son enseignement.

4.2. Deuxième séance : « Situations d'apprentissage : autour de la notion d'activité dans les programmes, les manuels, les pratiques des enseignants »

4.2.1 Première étape

La séance a pour objectif d'aborder les changements de cadres (numérique, algébrique, fonctionnel) et leur rôle moteur pour introduire une nouvelle notion, les articulations entre registres algébrique et graphique, l'importance du langage. Il s'agit d'explorer « un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde ».

Les supports comprennent les programmes, les documents d'accompagnement et le « projet » correspondant à la situation proposée par Douady (1994, pp. 47-61) placé en annexe 2.

Un ensemble de questions congruentes à la démarche d'analyse proposée par l'auteur est proposé. Il s'agit d'identifier dans la démarche de résolution de l'élève (démarche vécue par les étudiants), les intentions didactiques du concepteur de l'énoncé. Le travail se fait en binôme.

Questions posées aux étudiants :

- Résoudre le problème ;
- Quels sont les objectifs du problème ? Pourquoi choisir ce problème ?
- Quels cadres sont mobilisés ? Quels sont les objets d'études ?
- Quelles sont les compétences supposées chez les élèves ? Dans les différents cadres…
- Quels sont les outils mobilisés (outils conceptuels, outils technologiques) ?
- Quelles sont les variables du problème ? Quelles sont les conditions qui, sans modifier ni l'objectif du problème, ni les tâches données, peuvent jouer un rôle sur la complexité des procédures ?
- Quelles sont les attentes de l'enseignant en termes de savoir mis en œuvre par les élèves ? On distinguera les parties A, B et C dans l'énoncé ;
- Qu'est-ce que l'enseignant peut institutionnaliser au terme de cette activité ?

Certaines notions sont précisées avec les étudiants : elles sont résumées dans le tableau 3.

Quelques définitions sur les registres	En résumé, selon Duval (1993 et 1995), la notion de registre sémiotique de représentation est définie comme un système qui permet essentiellement 3 types d'opérations : La formation des représentations, Leur traitement dans un registre déterminé, Leur conversion dans un autre registre. Un seul registre sémiotique ne permettait pas la compréhension du contenu conceptuel représenté.
Dimensions outil / objet de l'algèbre	La dimension objet comprend d'une part les objets de l'algèbre (incluant les expressions, les formules, les équations) et d'autre part les systèmes de représentation associés à ces objets (le système de représentation symbolique algébrique en articulation avec d'autres systèmes de représentation tels que les registres du langage naturel, des écritures numériques, des figures, des représentations graphiques). La dimension outil de l'algèbre est mobilisée comme outil de résolution de problèmes via leur modélisation (problèmes arithmétiques formulés en langue naturelle, modélisés sous forme d'équations et d'inéquations, problèmes intra ou extra mathématiques, modélisés sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables), comme outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique, comme outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel.

Tableau 3 – Quelques précisions sur les registres et les dimensions outil/objet de l'algèbre

4.2.2 Deuxième étape

Elle consiste, en lien avec le travail précédent, à produire une ressource pour le collège ou la seconde. Les thèmes retenus sont : l'initiation aux équations (au niveau 4ème), la résolution graphique d'inéquations (au niveau seconde), la découverte du calcul littéral (au niveau 5ème).

La ressource débute par une situation d'apprentissage qui s'accompagne d'un corrigé détaillé (procédures attendues, influences éventuelles des variables).

Les supports sont les programmes, les documents d'accompagnement (notamment la progression du document d'accompagnement « Du numérique au littéral ») et des documents extraits d'activités empruntés aux revues Petit x, aux ouvrages Duperret & Fenice (1999), Combier & al (1996). Deux grilles sont également proposées aux étudiants pour les aider.

1ère grille : pistes pour une analyse, inspirées des principes du rapport Kahane (2002)

- Quel type de tâches est proposé à l'élève ? Modéliser, appliquer, prouver, généraliser ?
- Les tâches proposées aux élèves permettent-elles une certaine autonomie, des choix ?
- Quel(s) sens permettent-elles de donner aux écritures (numériques, ou algébriques), à leur fonctionnement pour les élèves ?
- Quels intérêts et quelles limites peuvent présenter les situations présentées ?

2ème grille :

- Thème traité (niveau) : référence au programme
- Objectif(s)
- Compétences pré-requises
- Traces écrites
- Cadres et registres mobilisés

L’enjeu est de sensibiliser à la dimension outil de l’algèbre, à la mobilisation de divers registres de représentation.

4.3. Troisième séance : « Des outils pour analyser des ressources »

4.3.1 Première étape

La ressource choisie porte sur le thème de la « Résolution graphique d’inéquations en seconde ». L’objectif est de cibler les points forts de la situation d’apprentissage de la ressource présentée par le binôme qui l’a conçue puis de l’analyser avec l’ensemble des étudiants. Cette situation d’apprentissage traduit le souci des étudiants de penser l’articulation entre cadre graphique, cadre fonctionnel et cadre numérique. Le document a été préalablement étudié par le formateur.

Des pistes sont dégagées : rendre plus explicites et constructifs les changements de cadres et de registres (représentations des objets mathématiques étudiés). Un tableau (tableau 4) largement inspiré par celui du manuel (Thienard 2000, pp. 116) est proposé par le formateur.

<table>
<tr><td colspan="3">Soit f une fonction définie sur un intervalle I de R, a un élément de I et C la courbe représentant f sur I.</td></tr>
<tr><th>Langage des fonctions</th><th>Langage algébrique</th><th>Langage graphique</th></tr>
<tr><td>Déterminer l'image de a par f</td><td>Calculer $f(a)$</td><td>Donner l'ordonnée du point de la courbe dont l'abscisse est a</td></tr>
<tr><td>Déterminer les antécédents par f dans I d'un réel k donné</td><td>Résoudre dans I l'équation $f(x) = k$</td><td>Donner les abscisses des points de C dont l'ordonnée est k</td></tr>
<tr><td>Déterminer les éléments de I dont l'image par f est inférieure (respectivement supérieure) à un réel k donné</td><td>Résoudre dans I, $f(x) < k$ (respectivement $f(x) > k$)</td><td>Donner les abscisses des points de C dont l'ordonnée est inférieure (respectivement supérieure) à k</td></tr>
<tr><td colspan="3">Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de R, Cf et Cg, les courbes représentant respectivement f et g sur I</td></tr>
<tr><td>Déterminer les éléments de I dont l'image par f est inférieure à l'image par g</td><td>Résoudre dans I, $f(x) < g(x)$</td><td>Donner les abscisses des points dont l'ordonnée sur la courbe Cf est inférieure à l'ordonnée sur la courbe Cg</td></tr>
</table>

Tableau 4 – Les registres dans la situation d'apprentissage de la ressource

4.3.2 Deuxième étape

Il s'agit de mettre en évidence ce qu'on peut entendre par niveaux de mise en fonctionnement des connaissances : des outils pour concevoir les exemples qui illustrent le cours, les exercices, les DM et les DS.

L'activité se déroule en deux temps.

Les supports sont constitués de trois petits exercices, les documents de référence, les ressources (manuels et autres) choisis par les étudiants.

Dans un premier temps, trois petits énoncés (sans référence en annexe 3) sont proposés pour distinguer différents niveaux de connaissances à mobiliser. Il s'agit brièvement de les résoudre en jouant le rôle d'un élève de 3ème. L'objectif est de mettre en évidence : le niveau des connaissances techniques (mises en fonctionnement isolées et locales de définitions, de méthodes) ; le niveau des connaissances mobilisables (nécessité d'une organisation du savoir, choix d'une méthode à l'initiative de l'élève) ; le niveau disponible (les connaissances sont organisées, l'élève dispose de situations de référence) d'après (Robert & *al* 1999, pp. 38-39).

Dans un deuxième temps, comment utiliser ces outils pour choisir des exercices en fonction de leurs objectifs (application, réinvestissement, DM par exemple…). Le travail s'effectue en binôme sur les thèmes choisis.

Questions posées aux étudiants :

- Proposer deux ou trois exercices ;
- Argumenter vos choix en termes de mise en fonctionnement des notions mobilisées (penser au lien avec des notions déjà travaillées, au changement de cadres).

4.4.2 Deuxième étape

Il s'agit de s'interroger sur les modalités d'évaluation et de porter un regard sur les évaluations internationales. La séance a pour objectif de faire réagir les étudiants à propos des évaluations en général, de susciter leur réflexion sur leurs propres travaux, leurs attentes en termes d'apprentissage.

Le support est le bulletin vert de l'APMEP 497 (Salles, 2012, annexes pp. 46-47 et pp. 50-52 sur les tests PISA).

Le travail repose sur l'étude des diverses évaluations, les connaissances et compétences qu'elles mobilisent.

4.5. Séance d'ADPP

Une séance d'ADPP a suivi les quatre séances que nous venons de décrire. Cette séance s'est déroulée en plusieurs temps : deux séances d'une heure avec des élèves travaillant en petits groupes sur des énoncés d'exercices, une première analyse à chaud pilotée par le maître d'accueil et des formateurs ; une analyse réflexive une semaine après. Les thèmes en algèbre portent sur « Initiation à la mise en équation en 4$^{\text{ème}}$ », « Découverte des systèmes de deux équations à une inconnue en 3$^{\text{ème}}$ ».

Le document à réaliser devra comprendre une analyse a priori, des aides liées aux difficultés envisagées, une synthèse et être adapté à un travail d'élèves en petits groupes, sous la responsabilité du binôme en charge de la réalisation du document.

Dans cette communication, nous faisons le choix d'analyser les ressources produites par les étudiants et nous ne présenterons pas davantage les ADPP.

En conclusion, nous faisons l'hypothèse que, dans ce travail de conception de ressources, certes en amont et dirigé, les étudiants ont commencé à s'approprier quelques outils qui les aident à prendre du recul dans la manière de penser leur enseignement.

5. Analyse des ressources produites par les étudiants en 2012-2013

Notre objectif est de rechercher comment les étudiants opérationnalisent les notions de didactique des mathématiques abordées durant la formation pour produire des ressources.

5.1. Grille d'analyse

Notre grille d'analyse des ressources comprend différents critères qui reposent sur la prise en compte des programmes, la cohérence des ressources, le rôle des exemples et la prise en compte de notions de didactique :

1. Quelles sont les références utilisées par les étudiants pour concevoir leur ressource ? Les étudiants se réfèrent-ils aux programmes scolaires ?
2. Quelle est la progression de la ressource ? Les étudiants citent-ils des prérequis à leur ressource ? Comment les activités s'enchainent-elles ? Quelle est l'articulation entre exercices et traces écrites ?
3. Quel est le rôle joué par les exemples dans la ressource ? Les exemples jouent-ils un rôle d'illustration ou servent-ils à introduire les notions ?
4. Quel est le rapport à l'algèbre des étudiants ? Exposent-ils leur conception de

l'arithmétique ? de l'algèbre ? Comment les étudiants présentent-ils l'algèbre aux élèves ? S'agit-il d'un outil purement formel ? Ou, au contraire, l'introduction de l'outil est-elle pertinente et motivée en réponse à des problèmes concrets ?

5. Les étudiants s'appuient-ils sur quelques notions de didactique de l'algèbre ?
    a. Dimensions outil / objet de l'algèbre :
        i. Objet : les objets de l'algèbre (incluant les expressions, les formules, les équations) et les systèmes de représentation associés à ces objets ;
        ii. Outil : outil de résolution de problèmes via leur modélisation, outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique, outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel ;
    b. Les fausses continuités entre arithmétique et algèbre :
        i. Statut de la lettre : lettres avec un statut de nombre généralisé, de variable (pour substituer un nombre), d'indéterminée (pour travailler sur l'équivalence d'expressions) ou d'inconnue (pour résoudre une équation) ;
        ii. Signe d'égalité : annonce le résultat (arithmétique) ou traduit une relation d'équivalence (algèbre) ;
    c. Aspect procédural / structural de l'algèbre
        i. Aspect procédural (opérationnel), dynamique : l'expression algébrique exprime un programme de calcul et indique une suite d'opérations qu'il faut effectuer afin d'obtenir le nombre que « retourne » le programme de calcul quand on donne des valeurs numériques aux lettres qui y figurent ;
        ii. Aspect structural, statique : l'expression algébrique est un objet dont on peut décrire la forme et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs (factorisation, développement, substitution dans une autre expression…)
6. Les étudiants s'appuient-ils sur quelques notions plus générales de didactique ?
    a. Changer de cadres (numérique, algébrique, géométrique…)
    b. Articuler plusieurs registres de représentations sémiotiques : système qui permet essentiellement trois types d'opérations : la formation des représentations, leur traitement dans un registre déterminé, leur conversion dans un autre registre selon Duval (1993, 1995).

5.2. Analyse des ressources produites par les étudiants

Les effectifs des étudiants ayant suivi la formation en 2012-2013 étant fort réduits (6 étudiants) et les ressources ayant été conçues en binôme, nous ne disposons que de 3 ressources à analyser.

Celles-ci portent sur des thèmes en lien avec les stages des étudiants :

- La découverte du calcul littéral en 5ème (binôme A) ;
- L'initiation aux équations en 5ème (binôme B) ;
- La résolution graphique d'inéquations en 2nd (binôme C).

Nous proposons ici une synthèse reposant sur l'analyse de ces cas, bien conscientes du caractère limité de notre analyse.

Concernant le premier point et les références utilisées par les étudiants pour concevoir leurs ressources, nous notons que les 3 binômes font référence aux programmes scolaires et sont complètement en conformité avec ceux-ci. Pour les différents binômes, cette référence reste toutefois strictement limitée à l'intitulé de la ressource. Cette limitation est-elle due au morcellement de l'algèbre dans les instructions officielles ou est-ce en raison de l'objectif affiché de la ressource ?

Pour la progression suivie dans la ressource, qui fait l'objet du deuxième point, nous relevons des « erreurs de débutants » assez classiques. Ainsi, la ressource A commence par des activités et se poursuit par une trace écrite, sans qu'aucun lien explicite ne soit fait entre ces deux parties. La découverte du calcul littéral s'effectue par une première activité portant sur les simplifications d'écriture du type « $4 \times C = 4C$ » uniquement vues du côté de la syntaxe. Aucun lien n'est fait vers la factorisation (figure 1). Ensuite, l'activité 2 (figure 2) constitue un problème concret, ayant du sens pour les élèves et motivé dans la progression des apprentissages pour aborder la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Mais, elle ne donne lieu à aucune institutionnalisation. C'est cependant l'objet de l'activité 3 mais pour la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. Bien que progressive et cohérente, la ressource B se caractérise par un formalisme excessif avec une succession de définitions (équation, inconnue, solution) et d'exercices illustratifs. La progression de la ressource C est également cohérente et solide, bien maîtrisée, intégrant des exercices d'un certain niveau de difficulté au détriment d'exercices d'entrainement plus simples complètement absents de la ressource.

On étudie le carré ci-contre :

Que permet de calculer le produit 4×c ? Que représente la lettre c dans cette expression ?

Figure 1 – Un extrait de la ressource A

Activité 2 : Je calcule des expressions numériques

Kevin achète deux saumons, l'un de 0,85kg et l'autre de 1,15kg. Ils sont vendus 19,00€ le kilogramme.

1) Que permet de calculer chaque expression numérique suivante ?

0,85×19   0,85×19+1,15×19   0,85+1,15   (0,85+1,15)×19

2a) En déduire que deux de ces expressions sont égales. Préciser lesquelles.

2b) Calculer chacune de ces expressions. Laquelle est plus facile à calculer ?

Figure 2 – Un autre extrait de la ressource A

Le troisième point relatif au rôle joué par les exemples illustre la difficulté des étudiants à articuler les exemples avec ce qu'il faut retenir. Si les activités présentées au début de la ressource A ont valeur d'exemple car elles servent de support à la ressource, celle-ci se poursuit ensuite par une trace écrite faisant office de cours sans qu'aucun lien ne soit établi entre les activités et le cours. Pour la ressource B, les exemples servent à illustrer un cours rédigé formellement. Proposés à la fin de la ressource, les exemples sont complètement déconnectés de la progression et ne permettent donc pas de motiver l'usage du recours à l'algèbre. De plus, certains exemples sont maladroits car ils peuvent très aisément être résolus par l'arithmétique (figure 3) ; justifier le recours à l'algèbre en les prenant en exemple est donc peu légitime. La ressource C articule parfaitement exemples et institutionnalisation, en se permettant toutefois de baser des conjectures sur des tests uniques.

Paul avait 56,45€. Il a acheté deux pulls à 10,59€ et un pantalon. Il lui reste 12,58€. Combien coûte-t-il ?

Figure 3 – Un extrait de la ressource B

Nous abordons le quatrième point et le rapport que les étudiants entretiennent avec l'algèbre ainsi que la manière dont ils l'introduisent auprès des élèves.

Le binôme A réduit l'algèbre aux formules et s'appuie sur celles permettant de calculer l'aire d'un rectangle et la circonférence d'un cercle. A aucun moment la ressource A ne se pose la question : à quoi sert l'algèbre ? En particulier, l'intérêt de développer ou factoriser une expression algébrique n'apparaît pas alors que ces techniques sont présentées. De même, jamais le recours à l'algèbre n'est motivé par le problème à résoudre dans la ressource B. L'objectif de la ressource C étant de travailler plus côté fonctionnel que côté algèbre, cet aspect n'y apparait pas.

Avec le cinquième point, voyons maintenant comment les étudiants s'appuient sur quelques notions de didactique de l'algèbre pour enrichir leur ressource.

La dimension outil / objet de l'algèbre semble peu exploitée par les étudiants. Dans les ressources A et B, la dimension objet est prédominante. La dimension outil au service de la résolution de problèmes est très minorée. Au contraire, la ressource C s'appuie majoritairement sur l'aspect outil avec une dimension objet minoritaire mais cela est-il dû au fait que les objectifs concernant l'algèbre sont secondaires par rapport aux objectifs concernant les fonctions ?

Le statut de la lettre est mal maitrisé. Le binôme A introduit la variable comme une étiquette. Pour le binôme B, les paramètres sont compris comme des étiquettes utilisées dans les formules de géométrie. La lettre représente l'inconnue recherchée, définie par « nombre inconnu désigné par une lettre ».

Nous n'avons rien relevé de significatif sur le signe d'égalité.

Concernant les aspects procédural et structural de l'algèbre, la ressource A privilégie un travail sur le structural dans la simplification des expressions grâce à la propriété de la distributivité. Il y a également prédominance de l'aspect structural dans le travail par équivalences d'expressions proposé dans la ressource B avec toutefois un peu d'aspect procédural dans le test d'égalités.

Concernant le sixième et dernier point, les notions didactiques plus générales de cadre et de registres de représentation, semblent compter parmi les préoccupations de tous nos concepteurs de ressources. La ressource A s'appuie sur les cadres numérique, algébrique et géométrique et fait appel aux registres algébrique mais aussi numérique, du langage naturel ainsi que des grandeurs et des mesures. Cependant, lorsqu'elle fait appel au cadre géométrique, c'est de manière totalement fictive (figure 1). La ressource B est la moins riche de ce point de vue car, si elle articule cadres numérique et algébrique, elle ne fait intervenir le cadre géométrique que dans une feuille d'exercices empruntée à un manuel scolaire. Par contre, les registres relevés pour la ressource A apparaissent également ici. La ressource C fait appel principalement aux cadres fonctionnel et graphique. Le cadre algébrique y est très peu présent, sous exploité, alors qu'il aurait pu être davantage convoqué. Nous avons relevé quelques maladresses relevant du registre du langage naturel.

Conclusion

Cette activité de production de ressources a pour objectif principal de travailler sur un matériau immédiatement exploitable par les étudiants.

Parmi les différents critères d'analyse que nous avons retenus, nous ne relevons pas d'évolution dans le rapport à l'algèbre de nos étudiants. La conception du rôle de l'algèbre construite en tant qu'élève semble prégnante et constitue visiblement un obstacle à dépasser. L'aspect objet de l'algèbre est principalement travaillé via l'apprentissage de techniques. C'est également ce que souligne Lenfant-Corblin (2002) :

> « Ils [les stagiaires] accordent tous une place prédominante à la maîtrise de techniques permettant d'accomplir des tâches de calcul algébrique ».

Les étudiants ont tous articulé différents registres de représentations sémiotiques. Si le registre algébrique est prépondérant, les registres numérique, graphique, du langage naturel ont également été investis. L'effet de la formation est manifeste ici. En analysant les pratiques enseignantes dans l'enseignement de l'algèbre, Coulange & al (2012) ont noté que :

> « Les pratiques enseignantes sont centrées sur un travail clos, voire formel des techniques algébriques. Cette centration sur la dimension objet des savoirs algébrique enseignés va de pair avec des difficultés dans la mise en œuvre de l'articulation de différents registres sémiotiques pourtant préconisée par la référence institutionnelle ».

Nous avons observé que les étudiants articulent différents registres mais n'est-ce pas un peu artificiel et imposé par la formation dispensée ?

Les limites de ce dispositif de formation apparaissent car quelle est la transférabilité des connaissances ainsi construites ? Il restera à poursuivre des investigations auprès des étudiants en deuxième année de Master puis dans les classes qu'ils prendront en charge.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue M. (2002) Le calcul. In Kahane J.-P. (dir.) *L'enseignement des Sciences mathématiques.* Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : CNDP, Odile Jacob.

Ball D. L., Bass H., Sleep L. & Thames M. (2005) A theory of mathematical knowledge for teaching. 15th ICMI Study Conference: *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. Lindoia. Brésil.

Beckers J. (2007) Compétences et identité professionnelles : l'enseignement et autres métiers de l'interaction humaine. Bruxelles : De Boeck Université.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (1996) Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Kluwer Academic Publishers.

Booth L. (1985) Erreurs et incompréhension en algèbre élémentaire. Petit x, 5, 5-17.

Brousseau G. (1972) Processus de mathématisation. Revue de l'APMEP, 282, 428-457.

Chevallard Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. Petit x n°23, pp 5-38.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x, 19, 43-75.

Chevallard Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. Petit x, 5, 51-94.

Combier G. & al (1996) Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre ! INRP.

Coulange L., Ben Nejma S., Constantin C., Lenfant-Corblin A. (2012) Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre, à l'entrée au lycée. In Coulange L., Drouhard J.-P. (coord.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives. Hors-série Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 63-86. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coulange L., Drouhard J.-P. (coord.) (2012) Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives. Hors-série Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coulange L. (2001) Enseigner les systèmes d'équations en Troisième, Une étude économique et écologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 21(3), 305-353.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. Repères IREM, 15, 37-61.

Duval R. (1995) Semiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37-65.

Duperret J.C., Fenice J.C. (1999) L'accès au calcul littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège. Repères IREM, 34, 29-54.

Grugeon B. (2006) Conception et évaluation d'une formation PLC2. In Chiocca et Laurençot (eds) DVD des actes de la CORFEM. ENFA, Toulouse, 20-21 juin 2006.

Grugeon B. (2000) Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : Conception, exploitation et perspectives. In Actes des journées de formation de formateurs.

Gueudet G., Trouche L. (dir) (2010) Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques. Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Houdement C. (1995) Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies. Thèse de doctorat. Université de Paris VII Diderot.

Kahane J.-P. (coord.) (2002) *L'enseignement des Sciences mathématiques.* Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : CNDP, Odile Jacob.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F.K. (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol.2, p.707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lenfant-Corblin A. (2002) De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. Thèse de doctorat. Université de Paris VII Diderot.

Robert A. (2008) Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, pp 31-68. Toulouse : Octarès.

Robert A. & al (1999) L'enseignement des mathématiques au lycée, Un point de vue didactique. Paris : Ellipses.

Salles F. (2012) PISA. Bulletin de l'APMEP, 497, 40-52.

Sfard A (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36.

Shulman L. S. (1987) Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review 57(1).

Thienard J.-C. (dir) (2000) Mathématiques seconde. Paris : Bréal.

Sitographie

DVD diffusé par l'Académie de Créteil :

http://www.cndp.fr/tenue-de-classe/ressources/les- videos-tenue-de-classe.html

Site Eduscol :

Documents d'accompagnement. Ressources pour faire la classe au collège et au lycée.

http://eduscol.education.fr

Ressources pour le collège :

Du numérique au littéral (mise à jour février 2008).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Les nombres au collège (mise à jour décembre 2006).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/2/doc_acc_clg_nombres_109172.pdf

Le calcul numérique au collège (janvier 2007).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/1/doc_acc_clg_calcul_numerique_109171.pdf

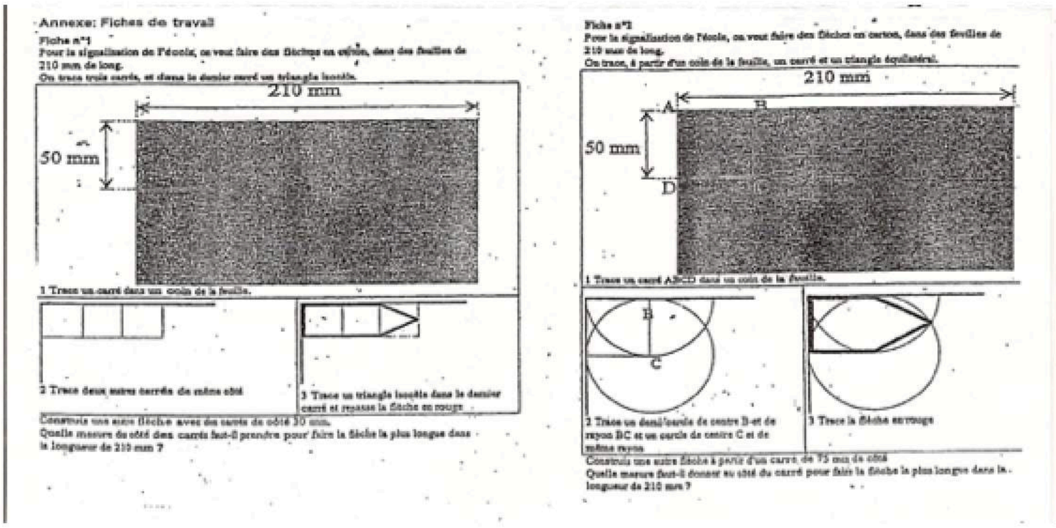
Ressources pour le lycée, classe de seconde générale et technologique :
Notations et raisonnement mathématiques (juillet 2009).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf

Annexe 1 – Problèmes de la première étape de la première séance

Problème 1 : Les élèves d'une classe veulent se cotiser pour acheter un ballon de football à un de leurs camarades. Ils calculent que chacun doit payer 20 F. Au dernier moment trois élèves ne paient pas et les autres doivent payer chacun 5 F de plus. Combien coûte le ballon ? (extrait du Rapport sur l'enseignement des sciences mathématiques, 2002, CREM, édition Odile Jacob).

Problème 2 : Un jour, deux hommes avaient l'un trois pains, l'autre deux. Ils allèrent se promener près d'une source. Lorsqu'ils arrivèrent en ce lieu, ils s'assirent pour manger. Un soldat passa, ils l'invitèrent. Celui-ci prit place à côté d'eux et mangea avec eux. Le convive partit en laissant cinq pièces pour le prix de son repas. De cet argent, le premier prit trois pièces puisqu'il avait apporté trois pains, l'autre de son côté prit les deux pièces qui restaient pour prix de ses deux pains. Ce partage a-t-il été bien fait ? Si non, proposer le partage qui vous semble le plus équitable en expliquant votre réponse. de duobus hominibus habentibus panes » d'après Fibonacci dans le Liber Abaci.

Problème 3 : Construire en respectant les consignes les deux flèches de longueur maximale ; quelle est la mesure de longueur du côté du carré ? (extrait d'un sujet proposé au CERPE –Rennes 1994).



Annexe 2 : Problèmes de la première étape de la deuxième séance

Enoncé de la situation proposée par Douady (1994, pp 47-61) :
Le plan est muni d'un repère constitué de deux axes gradués orthogonaux.
A) On s'intéresse aux points du plan dont les coordonnées (x, y) sont liées par la relation :
$y = (x+3)(8 - x/2)$. On note E l'ensemble de ces points.
1) Proposer 5 couples de coordonnées correspondant à des points de E et 5 couples de points correspondants à des points du plan n'appartenant pas à E.
2) Représenter graphiquement le plus possible de points de E
3) Y a-t-il des points de E sur l'axe des abscisses ? sur l'axe des ordonnées ?
Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points. Si non, dites pourquoi ?
4) Y a-t-il des points de E qui ont la même abscisse ? La même ordonnée ?
Si oui, donner des exemples, si non dire pourquoi ?
B) On s'intéresse maintenant à l'ensemble F des points dont les coordonnées (x,y) sont liées par la relation : $y = x^2 - 9$. Répondre aux mêmes questions qu'au A).
C) Y a-t-il des points communs à E et F ? Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points.

Annexe 3 – Problèmes de la deuxième étape de la troisième séance

Problème 1 : Factoriser les expressions ci-dessous :
$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$ $B = (2x+3)^2 - 64$

Problème 2 : Résoudre le problème ci-dessous :
ABCD est un carré de coté 4. E est un point quelconque à l'intérieur du carré.
Soit x la longueur de la hauteur issue de E dans le triangle CDE.
Exprimer en fonction de x la somme des aires des triangles CDE et ADB.
Peut-on comparer cette aire à celle du carré ABCD quel que soit x ?

Problème 3 : Résoudre le problème de l'existence d'un rectangle d'aire et de périmètre donnés.