Actes du 17e colloque de la CORFEM

17-18 juin 2010
Universite de Caen Basse-Normandie,
IUFM de l'académie de Basse-Normandie
Site de Caen

Coordonnes par Brigitte Grugeon-Allys

Sommaire

Introduction

Sylvie Coppé, responsable de la CORFEM

Depuis maintenant une quinzaine d'années, la commission Inter IREM des formateurs des professeurs de mathématiques du second degré organise tous les ans un colloque. Le présent document constitue les actes du 17$^{\text{ième}}$ colloque de la CORFEM, qui s'est déroulé les 17 et 18 juin à l'IUFM de Basse Normandie– Université de Basse-Normandie, sur le site de Caen

La CORFEM est la commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré. La commission regroupe des formateurs associés, soit à plein temps – PRCE, PRAG ou enseignants-chercheurs –, enseignant tous à l'IUFM, qui souhaitent réfléchir sur les stratégies de formation, produire des documents pour améliorer leur action auprès des professeurs stagiaires, et mutualiser des ressources. La CORFEM se donne pour buts d'accompagner la formation des formateurs d'enseignants de mathématiques, ainsi que d'échanger, de mutualiser et d'élaborer un ensemble de ressources pour la formation, en particulier, *via* son colloque annuel qui regroupe entre 60 et 80 participants. Ces colloques donnent lieu à des publications.
La CORFEM, les membres de son bureau[1], espèrent ainsi favoriser une meilleure visibilité de la formation des professeurs dans l'enseignement secondaire et contribuer à la prise en compte de thèmes de formation pour la recherche.

Les deux thèmes :

Thème 1 : ***La résolution de problèmes, la démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques : quelle formation professionnelle ?***

Thème 2 : Enseigner l'algorithmique au lycée

---

[1] Sylvie Coppé, IUFM de l'Académie de Lyon, Université Lyon 1 Responsable de la CORFEM
Alain Bronner, IUFM de l'Académie de Montpellier, Université Montpellier 2
Lalina Coulange, IUFM l'Académie de Bordeaux, Université Bordeaux 4
Michèle Gandit, IUFM de l'académie de Grenoble, Université J. Fourier
Denis Gires, IUFM de l'Académie de Basse Normandie, Université de Caen
Brigitte Grugeon-Allys, IUFM de l'Académie d'Amiens, Université de Picardie Jules Verne
Marc Guignard, IUFM de l'Académie de Créteil, Université de Paris Est, Créteil
Mirène Larguier, IUFM de l'Académie de Montpellier, Université Montpellier 2
Philippe Leborgne, IUFM de l'académie de Besançon, Université de Franche Comté
Marie-Christine Levi, IUFM de l'Académie de Versailles, Université de Cergy Pontoise
Didier Missenard, IUFM de l'Académie de Versailles, Université de Cergy Pontoise
Michel Poncy, IUFM de l'Académie de Lyon, Université Lyon 1

Thème 1 : ***La résolution de problèmes, la démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques : quelle formation professionnelle ?***

Les problèmes dans les programmes depuis la contre réforme en France

Sylvie COPPE
IUFM de Lyon, Université Lyon 1

Résumé

Dans cette introduction nous ferons un rapide historique des programmes de mathématiques, notamment de collège, depuis la contre-réforme des mathématiques modernes afin de montrer l'évolution des injonctions concernant l'enseignement/apprentissage par la résolution de problèmes et plus récemment l'introduction de la démarche d'investigation.

En France, la démarche d'investigation a été introduite en 2005 dans les programmes officiels du collège (élèves de 11 à 15 ans) pour toutes les sciences et les mathématiques, comme un outil pédagogique visant à développer l'autonomie des élèves, le goût pour la recherche, la motivation pour les sciences. Cette méthode a été développée dans les autres pays européens et elle est connue sous le nom de Inquiry Based Learning. Le rapport Rocard, 2007 préconise cette nouvelle méthode d'enseignement pour lutter contre la désaffection des élèves pour les études scientifiques. Ils définissent « inquiry » en référence à Linn, Davis, & Bell, 2004) :
« By definition, inquiry is the intentional process of diagnosing problems, critiquing experiments, and distinguishing alternatives, planning investigations, researching conjectures, searching for information, constructing models, debating with peers, and forming coherent arguments (quoted by Rocard et al. 2007, p.9). »

Le rapport explique qu'à travers cela, il y a bien une volonté de changer les pratiques d'enseignement et aussi la place du professeur et de l'élève : d'une approche « top down transmission » dans laquelle le professeur présente les savoirs et leurs applications à l'élève qui doit les appliquer vers une approche « bottom up » où le professeur laisse l'élève faire des essais, se tromper, revenir en arrière, etc.

En France, pour les mathématiques, depuis une trentaine d'années, les programmes officiels préconisent plutôt un enseignement basé sur la résolution de problèmes, c'est–à-dire faisant l'hypothèse que l'on apprend en trouvant des solutions à des problèmes bien choisis, pour lesquels la connaissance visée est une solution optimale.

Dans ce chapitre, nous allons faire une étude de ces programmes officiels de mathématiques français du collège pour montrer les évolutions en ce qui concerne la place et la fonction de la résolution de problèmes, puis nous verrons quels liens on peut faire avec la démarche d'investigation, plus récemment introduite.
Notons que le rapport Rocard prend en compte ces deux références.
« In mathematics teaching, the education community often refers to "Problem-Based Learning" (PBL) rather than to IBSE. In fact, mathematics education may easily use a problem- based approach while, in many cases, the use of experiments is more difficult.

Problem-Based Learning describes a learning environment where problems drive the learning. That is, learning begins with a problem to be solved, and the problem is posed in such a way that children need to gain new knowledge before they can solve the problem. Rather than seeking a single correct answer, children interpret the problem, gather needed information, identify possible solutions, evaluate options and present conclusions. Inquiry-Based Science Education is a problem-based approach but goes beyond it with the importance given to the experimental approach. » (op. cit. p. 9)

La notion de problème dans les programmes de mathématiques français

Nous ferons plus particulièrement porter notre analyse sur les programmes de collège (élèves de 11 à 15 ans) depuis la fin de la période des « mathématiques modernes », ce qu'on a appelé la contre-réforme (même si nous citons quelques passages des programmes de lycée). Nous choisissons ce niveau car c'est là qu'a été introduite la démarche d'investigation, mais nous avons montré une évolution semblable dans les programmes de l'école primaire (Coppé et Houdement, 2010). Au lycée, d'autres évolutions qui visent les mêmes buts (permettre aux élèves de faire des essais, des recherches, ne pas proposer que des exercices de réinvestissement proches du savoir enseigné, mettre les mathématiques en lien avec les autres disciplines) ont eu lieu comme l'introduction des TPE Travaux Personnels Encadrés et la tentative de mettre en place une épreuve expérimentale de mathématiques au baccalauréat qui a finalement été abandonnée en 2010.

Programmes de 1968
Dans les programmes correspondant à ce qu'on a appelé la réforme des mathématiques modernes (arrêté du 29 juillet 1968 appliqué en 69 en classe de 6$^{\text{ème}}$, puis dans les autres classes les années suivantes) on peut noter qu'il n'y aucune indication sur les problèmes. A cette époque, les programmes sont très courts (de une à deux pages). Ils sont constitués de l'énoncé des notions mathématiques à enseigner sous forme de thèmes (par exemple « Relations »). Quelques pages désignées par « Instructions » précisent ces notions.

Programme de mars 1977 appliqué en septembre 1978 en classe de 6$^{\text{ème}}$ (ce qu'on appelle « la contre réforme »)
On trouve un premier commentaire qui peut laisser penser que les auteurs des programmes veulent une rupture avec le formalisme et la construction axiomatique des notions qui avait cours pendant la période précédente.
« La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie. De ce point de vue l'analyse de situations et la résolution de problèmes jouent un rôle majeur.» (BO n°11 du 24 mars 1977, p. 30)

Ainsi, à partir de cette date, on peut voir apparaître deux idées que l'on retrouve depuis avec différentes formulations :
- les mathématiques sont un outil pour répondre à des questions qui se posent, par exemple, dans d'autres disciplines ;
- il y a un lien fort entre apprentissage des mathématiques et résolution de problèmes sans que sa nature soit clairement explicitée.

Enfin, on peut noter que la rédaction des programmes évolue, puisque le nombre de pages d'introduction ou de commentaires augmente de façon significative. Dans ces parties, on trouve non seulement des instructions qui portent sur les notions à enseigner, mais aussi sur les finalités et objectifs des mathématiques et, des injonctions qui vont se préciser au fil du temps, sur les pratiques (désignées sous le terme « Organisation de l'enseignement »). Cependant ces programmes ne développent pas les modalités de ce nouveau fonctionnement souhaité.

Programme de 1981 appliqué en septembre 82 en classe de 2nde

Il apparaît le terme « activité de l'élève » qui sera toujours repris dans les programmes suivants.

«A la base de tout bon apprentissage, il y a le contact avec une pratique sensorielle et concrète, la stimulation de l'activité personnelle de l'élève, l'élaboration de moyens d'investigation aussitôt applicables au monde qui l'entoure. » (BO du 5 mars 1981, p. 1)

…

« La classe de mathématiques est, dans son rôle essentiel, un lieu de découverte, d'exploration de situations plus ou moins aisément maîtrisables, de réflexion sur des problèmes résolus. » (op.cit., p.1)

…

« L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes. Il importe que toute introduction d'une notion ou d'un théorème soit précédée de l'étude d'une situation assez riche pour en attester l'intérêt et qu'elle soit suivie immédiatement d'applications substantielles. » (op.cit., p. 1)

On pointe une certaine tension entre ce qui est appelé page 2, un « exposé artificiel de logique mathématique » et les activités et problèmes. Cependant, à ce moment-là, il semble que ceux-ci interviennent surtout en entraînement ou en réinvestissement. Le programme affirme qu'ils doivent être nombreux et souligne l'importance du travail à la maison.

En 1984, dans un bilan du programme appliqué depuis trois ans en classe de 2nde (élèves de 15-16 ans), les auteurs déplorent le trop grand nombre d'exposés théoriques ou synthétiques et l'abus d'exercices mal définis, c'est–à-dire soit abordables mais coupés de tout contexte et trop techniques ou trop difficiles. Par cela, ils demandent une diversification des activités mathématiques proposées aux élèves et invitent les enseignants à changer leurs pratiques sur ce qu'on peut appeler le cours magistral.

Programmes de 1985

Il est réaffirmé que le questionnement et la résolution de problèmes permettent de donner du sens aux notions enseignées.

« Il est essentiel que les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose. Il est tout aussi essentiel qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes. » (BO n° 44 du 12 décembre 1985)

Mais surtout, un changement important intervient puisqu'une nouvelle place est assignée aux problèmes puisqu'ils peuvent (doivent) être proposés pour introduire des notions.

« L'activité de chaque élève doit être privilégiée, sans délaisser l'objectif d'acquisitions communes. Dès lors, seront choisies des situations créant un problème dont la solution fera

intervenir des “outils“, c’est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d’aboutir à la découverte ou à l’assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour de nouveaux “outils“, qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.
Les activités choisies doivent :
• permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n’exiger que les connaissances solidement acquises par tous;
• créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures;
• rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
• fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.
Elles nécessitent une synthèse, brève, qui porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu. » (op.cit., p. 20)

A partir de cette date, la citation suivante sera reprise dans chacun des programmes qui vont suivre.
On peut voir là des influences des recherches en didactique des mathématiques comme la théorie des situations de Brousseau, 1986 et la dialectique outil/objet (Douady, 1986). Ces recherches sont faites avec une hypothèse constructiviste dans laquelle la notion de problème est fondamentale, ainsi que les processus d’assimilation et d’accommodation.
« *Dans la didactique moderne, l’enseignement est la dévolution à l’élève d’une situation adidactique, correcte, l’apprentissage est une adaptation à cette situation*. » […]
« *Le maître doit effectuer, non la communication d’une connaissance, mais la dévolution d’un bon problème* » Brousseau, 1998.
Brousseau indique que le professeur doit permettre à l’élève de rencontrer la connaissance visée en résolvant un (des) problème(s) dans lesquels cette connaissance constitue un moyen optimal de résolution sans que le professeur montre à l’élève comment il faut faire.

Il y a donc une injonction institutionnelle forte à proposer ce que les manuels appelleront des « activités d’introduction ou de découverte ». Les problèmes proposés dans ces activités doivent posséder les caractéristiques suivantes : permettre d’élaborer des conjectures (ainsi, on ne demande pas une seule réponse tout de suite, l’élève doit chercher, faire des essais, contrôler, revenir en arrière, etc), de faire fonctionner les connaissances visées comme des outils et donner des moyens de contrôle aux élèves.

Programmes de 1995
Dans la continuité, ces programmes fixent à l’enseignement des mathématiques le but de développer la formation du citoyen. Des liens sont faits avec ce qui est enseigné à l’école primaire et avec les autres disciplines, apparaît le terme de « démarche scientifique ».
« Il est également important de souligner le sens, l’intérêt, la portée des connaissances mathématiques en les enseignant en interaction avec les autres disciplines et avec la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...) et en utilisant les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...). » (arrêté du 22 novembre 1995, p. 18)

Enfin, ce ne sont plus les problèmes qui sont caractérisés mais l’activité mathématique dans son ensemble.

« Au collège, les mathématiques contribuent, avec d’autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d’une démarche scientifique. L’objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d’expérimentation et de raisonnement, d’imagination et d’analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.
À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l’apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu’est une véritable activité mathématique :

- identifier un problème,
- conjecturer un résultat,
- expérimenter sur des exemples,
- bâtir une argumentation,
- mettre en forme une solution,
- contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié. » (op.cit., p. 15)

Les critères visent à favoriser la mise en activité des élèves sur des tâches qui ne consistent plus en l’application de règles ou de techniques, mais qui doivent permettre la recherche et le questionnement des élèves. On encourage encore une fois les conjectures, l’expérimentation et les vérifications. Il faut bien distinguer le terme « expérimentation » de celui « d’expérience » qui est réservée aux autres sciences. Il nous semble que c’est là un point important qui était cité dans le rapport Rocard.
On peut aussi faire l’hypothèse que le développement des outils informatiques, calculatrices, logiciels de géométrie dynamique, tableurs favorise des changements dans l’activité mathématique puisque ceux-ci permettent de faire des essais multiples, de conjecturer à partir de cas « limites », de faire des calculs rapidement, de dépasser des problèmes techniques, etc.

Telle quelle est décrite, l’activité mathématique semble particulièrement linéaire et inductive. Or on sait bien que les étapes ne se réalisent pas forcément dans cet ordre. Par exemple, l’expérimentation sur des exemples peut avoir lieu pour trouver une conjecture ou pour la vérifier, des contrôles sont faits à toutes les étapes, mais ce ne sont pas les mêmes. Enfin la place des savoirs anciens ou nouveaux n’est pas envisagée. On peut donc penser que pour mettre en œuvre une telle démarche, l’enseignant devra avoir une réflexion épistémologique importante.

Enfin, on ne donne toujours pas d’indications aux professeurs pour mettre en œuvre cette démarche dans la classe en termes d’organisation de la classe, de rapports au savoir des élèves, de prise en compte des erreurs, de la place de l’évaluation, etc.

Programmes de 2005, 2007 et 2008 (les réformes se succèdent mais les changements sont mineurs)
Les auteurs proposent une « Introduction générale pour le collège » concernant les mathématiques dans laquelle il y a une tentative de mise en cohérence des enseignements à la fois sur finalités, les contenus et sur des points essentiels qui concernent les apprentissages mathématiques et leur enseignement. Ainsi, le point intitulé « Une place centrale pour la résolution de problèmes » reprend les paragraphes déjà cités ci-dessus pour les programmes de 85 et 95 et est complété par :
« Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l’établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d’en élargir le sens et d’en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite

initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.
L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul. » (BO HS n°5 du 9 septembre 2004, p. 2)

De plus, ces programmes mettent l'accent sur la pluridisciplinarité.
« À l'issue de ses études au collège, l'élève doit s'être construit une première représentation globale et cohérente du monde dans lequel il vit. Il doit pouvoir apporter des éléments de réponse simples mais cohérents aux questions : « Comment est constitué le monde dans lequel je vis ? », « Quelle y est ma place ? », « Quelles sont les responsabilités individuelles et collectives ? ». » (BO HS n° 5 du 25 août 2005, p. 4)

Pour favoriser les rencontres entre les disciplines, les auteurs des programmes ont rédigé une « Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques » dans laquelle sont introduits, d'une part les Thèmes de convergence qui doivent être traitées par plusieurs professeurs d'une même classe (par exemple, l'énergie, l'environnement, le développement durable, etc) et d'autre part, la démarche d'investigation.
Celle–ci est présentée comme une démarche d'apprentissage basée sur la mise en questionnement et en activité des élèves, avec cependant des différences épistémologiques suivant les disciplines :

- pour les mathématiques, la résolution de problèmes et la validation par la démonstration,
- pour les sciences, la formulation d'hypothèses et la validation par l'expérimentation.

Cependant, on ne fait pas référence à la place du modèle et de la modélisation, même si cette démarche de modélisation est sous-jacente dans la validation qui ne peut se faire que par l'intermédiaire d'un modèle.

« La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. » (op.cit., p. 6)

Mais elle se présente aussi comme une démarche d'enseignement qui est décrite par sept phases (nous ne citons que les phases, le texte intégral sur la démarche d'investigation est en annexe) .

1. Choix d'une situation-problème par le professeur, à partir de l'analyse des savoirs visés, des objectifs à atteindre, des acquis initiaux, des conceptions des élèves ;
2. Appropriation du problème par l'élève, reformulation, émergence d'éléments de solution suscitant le questionnement ;
3. Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles, élaboration d'expériences pour tester ces hypothèses et conjectures, communication de conjectures, hypothèses et protocoles expérimentaux ;
4. Investigation ou résolution du problème conduite par les élèves par des débats en groupe, par une description/réalisation de l'expérience, exploitation de méthodes et résultats, recherche d'éléments de justification et de preuve ;

5. Échange argumenté autour des propositions élaborées par la confrontation des propositions, le débat sur leur validité ;
6. Acquisition et structuration des connaissances par la mise en évidence, avec l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir ;
7. Opérationnalisation des connaissances par des exercices pour automatiser certaines procédures, nouveaux problèmes de réinvestissement, évaluation.

De nouveau cette démarche est présentée comme relativement inductive : on ne fait aucune référence à la place du modèle et de la modélisation, ni à la place et au rôle des savoirs, ce qui nous semble être des points à expliciter plus largement.

On retrouve dans ces étapes des éléments que nous avions cités pour la résolution de problèmes comme le choix d'un problème qui favorise des procédures de recherche ou d'expérimentation, les moyens de contrôle. Mais le discours est beaucoup plus explicite sur les méthodes didactiques et pédagogiques que les professeurs devront mettre en œuvre dans les classes pour favoriser la démarche d'investigation. Ainsi, l'étape 1 indique que des choix sont à faire lors de la préparation des séances en fonction des conceptions initiales des élèves. Les étapes 4 et 5 mettent l'accent sur les interactions nécessaires entre élèves. Enfin, on décrit bien une démarche d'enseignement complète avec des phases de découverte, d'introduction mais aussi d'institutionnalisation des savoirs et de réinvestissement.
On a donc ici à la fois une démarche d'apprentissage pour les élèves et une démarche d'enseignement pour les professeurs qui englobe tous les aspects d'une dynamique entre savoirs anciens et nouveaux.

Conclusion
Dans cette étude, nous avons montré qu'à travers les différents changements de programmes de mathématiques depuis un peu plus de trente ans, se dessinait une évolution de la place et de la fonction des mathématiques dans l'enseignement mais aussi une évolution dans les pratiques des professeurs.
Ainsi, nous avons mis en évidence une évolution dans les finalités de l'enseignement des mathématiques 1978. On perçoit une volonté des auteurs de programme de faire entrer les mathématiques dans la société. Ainsi il est fait explicitement référence au lien avec le monde réel à la formation du citoyen depuis 1995. De plus les liens avec les autres disciplines et les enseignements précédents sont affirmés.

Une autre évolution concerne la place et l'importance de la résolution de problèmes : au début pour donner du sens aux notions, surtout en réinvestissement, pour faire fonctionner les connaissances mathématiques, puis participant à la construction des concepts, comme introduction.
Enfin les injonctions à changer les pratiques deviennent plus explicites et plus précises afin de passer d'enseignement basé sur des exposés magistraux des notions mathématiques dans un ordre logique à la mise en activité des élèves par la résolution de problèmes pour favoriser les apprentissages. On insiste sur la dynamique d'apprentissage : outil/objet/ nouvel outil.

Depuis 2005 on a introduit la « démarche d'investigation » avec un schéma d'application et des phases. Même si on perçoit tout de même une certaine gêne des auteurs entre démarche d'investigation et résolution de problèmes, à cause d'origines épistémologiques différentes, on tend bien vers des mêmes buts : rendre l'enseignement des sciences plus vivant, plus actif et plus motivant et faire évoluer les responsabilités des professeurs et des élèves face aux savoirs.

Bibliographie

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol 7/2. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Brousseau, G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques* (1970-1990). Grenoble : La Pensée sauvage.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7/2, 5-31. Grenoble : La Pensée sauvage.

Coppé, S & Houdement, C. (2010). Résolution de problèmes à l 'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. Actes du colloque de COPIRELEM, Auch, juin 2009.

Linn, M. C., Davis, E. A. et Bell, P. (2004). Internet environments for science education. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Rocard, M., Cesrmley, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Herniksson, H., Hemmo, V. (2007). Science education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Retrieved March 2010, from http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf.

Les textes officiels

Bulletin Officiel de la République française n°11 du 24 mars 1977
Bulletin Officiel de la République française du 5 mars 1981
Bulletin Officiel de la République française n° 44 du 12 décembre 1985
Arrêté du 22 novembre 1995
Bulletin Officiel de la République française Hors Série n°5 du 9 septembre 2004
Bulletin Officiel de la République française Hors Série n° 5 du 25 août 2005

« Démarche d'investigation » et Parcours d'Etude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système

Yves Matheron
UMRP3-ADEF
INRP & Aix-Marseille Université

Résumé

L'arrivée du terme de « démarche d'investigation » dans les programmes s'inscrit dans une volonté institutionnelle plus ancienne, portée par les TPE et IDD dans les années 2000, de valorisation d'une démarche alliant recherche ouverte et croisement de plusieurs disciplines. Leur étude a permis l'analyse des caractéristiques didactiques prises par de tels processus transposables à la « démarche d'investigation ».
Trente ans avant ces injonctions institutionnelles, la didactique s'est posée la question d'un enseignement basé sur une genèse artificielle du savoir qui engage collectivement les élèves. Les ingénieries nées de cet effort, notamment au COREM, visaient à créer des phénomènes afin de les étudier pour les théoriser, et à montrer la possibilité locale d'un enseignement « par adaptation ».
L'enseignement actuel des mathématiques est soumis à une double pression : une crise se manifestant par une perte de la visibilité sociale de son sens, une volonté institutionnelle d'un enseignement qui engage dans une authentique activité scientifique. Une des questions à l'ordre du jour devient celle des conditions à mettre en place afin de rendre possible, au sein du système et non dans une seule école, un enseignement du programme inscrivant son étude dans une dynamique de recherche par les élèves d'éléments de réponse à une question qui leur est dévolue.
(CD)AMPERES s'est attelé à ce travail. Ses productions se démarquent des « activités introductives » des manuels, des « problèmes ouverts » ou « problèmes pour chercher ». Elles s'appuient sur des outils incontournables venus des recherches en didactique. La conception des productions et l'analyse de leur passation révèlent certaines contraintes systémiques actuellement indépassables, et explorent les conditions nouvelles à mettre en place. Parmi elles, les questions de formation des professeurs restent largement ouvertes puisque dépendantes de décisions politiques.
On s'interrogera sur les formes, plus ou moins travesties, que pourraient prendre, sous de telles contraintes, les dispositifs proches de ce que les programmes entendent par « démarche d'investigation ».

L'arrivée dans les programmes du terme « démarche d'investigation », notamment à travers la page entière qui lui est consacrée dans la partie des programmes de 2008 du Collège, commune aux mathématiques, aux sciences de la vie et de la terre, à la physique-chimie et à la technologie, s'inscrit sans doute dans une volonté institutionnelle plus ancienne, portée par les TPE et IDD au début des années 2000 – ou, plus récemment, par les « thèmes de convergence » –, de valorisation d'un enseignement alliant recherche ouverte et croisement de plusieurs disciplines. L'étude de ces deux principaux dispositifs, au cours de la première décennie des années 2000, a permis l'analyse des caractéristiques didactiques qui leur sont propres ; qu'elles aient été inscrites dans les intentions de leurs promoteurs, ou qu'elles soient apparues lors de leur mise en œuvre effective dans le système éducatif secondaire. Les recherches - développements initiées à partir de 2005, et notamment le projet (CD)AMPERES pour (Conception et Diffusion) d'Activités Mathématiques et de Parcours d'Etude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire, rassemblant des équipes constituées à partir des IREM et de l'INRP, ont poursuivi dans la voie d'un enseignement possible des mathématiques, au sein du système éducatif tel qu'il est, sous une forme qui s'apparente à une démarche d'investigation dans laquelle sont engagés les élèves.

I. Autour de la démarche d'investigation, présupposés philosophiques et pédagogiques

1. Qu'entend-on par « démarche d'investigation » ?

Du texte précité, extrait du programme de Collège de 2008, une définition sommaire peut être retirée afin de cerner ce que le ministère de l'Education Nationale entend par démarche d'investigation : « Cette démarche, peut-on lire, s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques) ». Dans ce texte du programme, la partie qui suit explicite une proposition de « canevas d'une séquence d'investigation », courant donc sur plusieurs séances, articulée autour de sept moments : choix d'une situation – problème ; appropriation du problème par les élèves ; formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ; investigation ou résolution du problème conduite par les élèves ; échange argumenté autour des propositions élaborées ; acquisition et structuration des connaissances ; mobilisation des connaissances.

On perçoit, à travers ces quelques citations, la motivation première des promoteurs de la démarche d'investigation : « lorsque les objets d'étude s'y prêtent », comme il est écrit, passer d'un enseignement basé sur une démarche déductive (présentation aux élèves par le professeur des concepts, de ce que l'on peut en déduire, des exemples et applications) à un enseignement basé sur une démarche inductive (observation, analyse, expérimentation, conjecture, construction d'une réponse par les élèves sous la direction du professeur). C'est encore cette direction que l'on voit pointer dans le passage suivant du programme de l'école primaire de 2008, extrait de la partie consacrée aux sciences expérimentales et à la technologie : « Observation, questionnement, expérimentation et argumentation pratiqués, par exemple, selon l'esprit de la *Main à la pâte* sont essentiels pour atteindre ces buts ; c'est pourquoi les connaissances et les compétences sont acquises dans le cadre d'une démarche d'investigation qui développe la curiosité, la créativité, l'esprit critique et l'intérêt pour le progrès scientifique et technique. »

A travers ces lignes, on peut retrouver l'esprit de découverte et de recherche dans lesquelles on souhaitait engager les élèves, et qui présidait à la mise en place des TPE et IDD. Néanmoins, la dimension relative au croisement de plusieurs disciplines apparaît absente. La démarche est déclarée commune aux disciplines scientifiques, sans pour autant que la contribution de plusieurs d'entre elles pour apporter réponse à un questionnement soit explicitement citée.

2. Aux origines du terme français de « démarche d'investigation »

Comme souvent, rechercher l'origine d'innovations pédagogiques implantées dans le système éducatif conduit à tourner son regard outre-Atlantique. C'est actuellement le cas de la pédagogie des « compétences », importée des USA, apparue en Europe il y a quelques années – notamment en Belgique francophone, après avoir transité par le Canada –, et qui atteint désormais la France à travers la mise en place du « socle commun des connaissances et des compétences ».

A l'origine, au tournant des XIX^{e} et XX^{e} siècles, la démarche proposée à l'école - laboratoire de l'Université de Chicago dirigée par John Dewey, avait pour finalité de faire éprouver par les élèves la nécessité d'enquêter pour s'instruire de certaines connaissances. Le terme d'expérience était plutôt à comprendre dans le sens de donner l'occasion de « faire soi-même l'expérience de… quelque chose » ; ce « quelque chose » étant d'ordinaire peu fréquent, que ce le soit dans la vie courante, ou même à l'Ecole. Ainsi étaient proposées des sorties sur le terrain, l'usage plus important de ses sens dans la Nature. Parmi ces « expériences », on peut citer l'enquête, nécessitant une sortie de l'école : par exemple sur la manière dont la distribution de l'eau est organisée dans une ville, ou encore la réalisation de maquettes en tant qu'activité dirigée en classe.

On sait que le courant philosophique et pédagogique auquel se rattachent les travaux de Dewey a pris pour nom le *pragmatisme*. Il se positionne en tant que dépassement du dualisme entre pensée et action qui caractérise une partie de la tradition philosophique occidentale. L'expérience est vue comme source de connaissances, du fait que l'on a éprouvé par soi-même. La pensée doit être « mise à l'épreuve de l'action » et la tâche de l'enseignant consiste à « réinsérer les sujets d'étude dans l'expérience ». Ainsi, les élèves doivent-ils être confrontés à des problèmes les amenant aux savoirs relatifs aux sciences, à l'histoire, à l'art, etc. Dewey écrit, à propos de son école expérimentale qui fonctionne de 1896 à 1904 : « l'enfant vient en classe pour *faire des choses* : cuisiner, coudre, travailler le bois et utiliser des outils pour des actes de construction simples ; et c'est dans ce contexte et à l'occasion de ces actes que s'ordonnent les études : écriture, lecture, arithmétique, etc. » Ou encore, « si un enfant comprend la raison d'acquérir un savoir-faire, l'acquisition lui en est grandement facilitée. Les livres et la lecture sont donc considérés strictement comme des outils ».

3. L'*Inquiry-Based Science Education* (IBSE)

Bien qu'elles furent fortement critiquées en leurs temps, dans la première moitié du XX^{e} siècle, et de manière récurrente lorsque sont recherchés des boucs émissaires responsables de la crise du système éducatif américain, les propositions pédagogiques issues de John Dewey et concernant la « démarche d'enquête » ont été en partie reprises, et sans doute transformées, puis généralisées aux USA dans les années 1990 pour l'enseignement des sciences, sous la dénomination d'*Inquiry-based Science Education*. C'est d'ailleurs à partir de cette désignation que le rapport dit Rocard – du nom de l'ancien premier ministre et alors député européen président d'un groupe de travail sur l'enseignement scientifique – rédigé pour la Commission Européenne en 2007, prône-t-il « une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe ». Ainsi peut-on y lire : « L'enseignement des sciences basé sur la démarche d'investigation [Inquiry-based science éducation – IBSE] a montré son efficacité à accroître l'intérêt et les niveaux de réussite des enfants et des étudiants, tant au niveau primaire que secondaire, tout en renforçant la motivation des professeurs. »

Avant d'étendre aux apprentissages la validité d'une telle assertion, rappelons tout d'abord la différence que l'on peut établir, au plan des présupposés épistémologiques, entre IBSE et les actuels modèles explicatifs de la production et de l'accroissement des connaissances, notamment scientifiques. L'IBSE repose sur une démarche de type empiriste, sur laquelle se greffe une sorte d'inductivisme : « on a fait l'expérience de » en mettant à l'épreuve ses idées dans une sorte de *continuum* entre sa culture et la situation que l'on explore. Les modèles épistémologiques rationalistes, notamment celui développé par Gaston Bachelard, insistent au contraire sur les notions d'obstacle et de rupture épistémologiques, sur le fait que l'expérience est chargée de théorie, et que la production de phénomènes dépend de techniques s'appuyant sur des théories. Aussi la validation logique des résultats de l'enquête au sein de l'IBSE se différencient-ils d'une validation épistémologique telle qu'elle peut être fondée en raison au sein d'un cadre théorique.

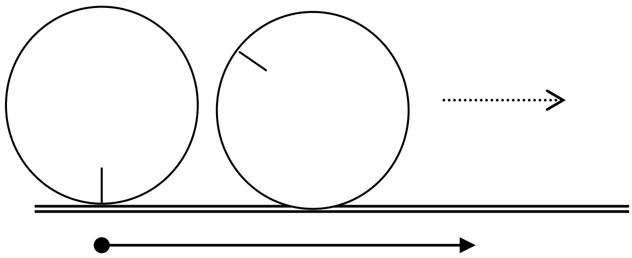
Pour Michel Fabre (2009), ces deux approches théoriques, représentées par les figures emblématiques de Dewey et de Bachelard, se rejoignent pourtant dans une conception fonctionnelle du savoir et dans l'approche de la problématisation. Néanmoins, en ce qui concerne leur traduction dans l'enseignement des savoirs scientifiques, le pragmatisme de Dewey inclinerait plutôt vers une « pédagogie du projet » et un positionnement consistant à penser que les opérations de problématisation sont transversales, par delà les spécificités disciplinaires, tandis qu'au rationalisme de Bachelard correspondrait une forme d'enseignement à l'aide de ce qu'il nomme des « situations-problèmes » spécifiques des savoirs. En conclusion de sa comparaison entre Dewey et Bachelard, Fabre pose la question de l'acceptation d'un pluralisme d'approches « qui aurait au moins le mérite d'éclairer les inévitables bricolages pédagogiques ». C'est sans doute inévitablement vers de tels bricolages que poussera ce qui, pour l'instant, apparaît n'être guère plus qu'un mot d'ordre de mise en place d'une « démarche d'investigation ».

Un article paru en 2009 dans le n° 49 de la revue Aster et signé de M. Coquidé, C. Fortin et G. Rumelhard, expose en effet, entre autres considérations épistémologiques et didactiques, les formes que prend l'IBSE dans certains pays anglo-saxons et les enseignements que l'on peut en tirer en termes d'apprentissage des élèves. Pour ce qui concerne les USA, l'*Inquiry-based Science Education* a été généralisée au cours des années 1990, notamment par l'intermédiaire de la publication des *National Science Education Standards* (1996). Les questions jugées pertinentes à étudier viennent des élèves et portent sur le réel. Elles sont ouvertes et sans objectifs prescrits, en opposition à la forme d'enseignement par *problem solving situation*. En Angleterre et Pays de Galles, un module *Scientific Investigation* a été introduit dans le *Curriculum National* en 1989, puis il est devenu *Exploration of Science* en 1994. La mise en place de l'IBSE dans ces deux pays pendant plusieurs années a permis d'étudier les effets de ce type d'enseignement. Il semble en ressortir que les élèves ont tout d'abord besoin de cadres et de conseils, et qu'ensuite disposant de concepts et ayant pris davantage confiance en eux, ils pourront apprendre par IBSE ; pas avant. Certains prônent même un retour à des formes d'enseignement plus classiques.

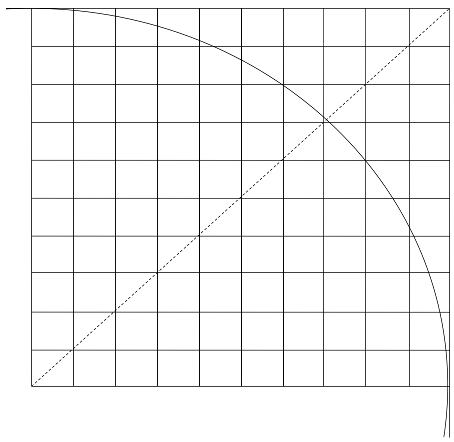
4. Opposer « exploration du réel » en sciences et « résolution de problèmes » en mathématiques ?

La partie relative à la démarche d'investigation, commune aux programmes scientifiques et à celui de la technologie du Collège, semble établir une distinction entre les démarches scientifiques et d'enseignement relatives aux sciences expérimentales et à la technologie d'une part, et aux mathématiques d'autre part. Ainsi, opère-t-on dans ce texte une distinction entre d'un côté « expérimentation », et de l'autre « démonstration ». L'expérimentation s'appliquerait-elle ainsi « sur le réel », sans qu'on semble s'interroger sur le fait que « ce réel » est un construit. Il n'y a guère, en effet, que dans le cadre de la physique du laboratoire, et donc de la salle de classe de physique, que l'on froisse une feuille de papier pour montrer qu'elle atteint le sol en même temps qu'une bille de fer lâchée de la même hauteur ; dans la réalité du quotidien de nombre de nos contemporains, il est évident que la feuille atteindra le sol après la bille ! Un souffle empiriste semble ainsi avoir inspiré les rédacteurs de cette partie du programme. On le retrouve dans le paragraphe relatif aux « divers aspects d'une démarche d'investigation », qui distingue entre « le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) » et « la résolution de problèmes (en mathématiques) ». Pourtant on expérimente pour résoudre des problèmes de mathématiques, et les mathématiques sont aussi des modèles tirés de l'expérience « du réel » ; c'est ce qu'écrivait déjà H. Lebesgue pour qui *« ce nombre* [il s'agit du dernier nombre prononcé] *est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte rendu complet* » [en italique dans le texte de Lebesgue]. Il en va tout autant du double caractère expérimental et de modélisation de la géométrie, qu'Einstein considérait comme le premier chapitre de la physique, ou encore de la statistique, pour ne parler que de ces domaines des mathématiques.

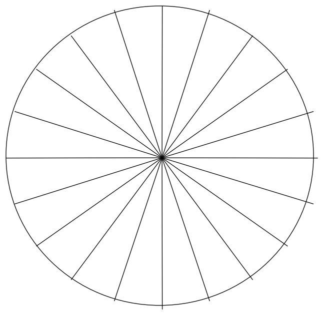
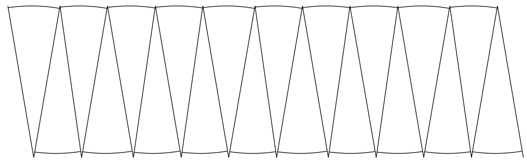
Le flottement épistémologique de cette partie du programme de Collège, relative à la démarche d'investigation, entre en contradiction avec la partie qui suit, propre au programme de mathématiques. Si le texte spécifique à la démarche d'investigation cantonne le rôle de l'expérience aux sciences… expérimentales (et à la technologie), le programme de mathématiques qui lui succède offre pourtant de nombreuses possibilités d'expérimentation. Ainsi, pour ne citer que quelques exemples, le programme de 6^{e} demande-t-il aux élèves de « Connaître et utiliser la formule donnant la longueur d'un cercle. » Le professeur peut, bien entendu, choisir de la donner aux élèves *in extenso*, sans qu'ils n'aient rien de plus à en comprendre. Cependant leur demander de faire rouler un disque en carton sur un plan permet d'établir expérimentalement une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre :



De manière plus explicite, le programme de 5^{e} indique : « Une démarche expérimentale permet de vérifier la formule de l'aire du disque. » On pourrait même relever qu'elle permet d'aller plus loin que sa seule vérification, puisqu'à ce niveau elle permet de l'établir. Car faut-il opposer aux tenants de la rigueur pour la rigueur, sans laquelle il n'y aurait évidemment pas de mathématiques valables, le rappel que pendant des siècles, c'est de cette manière que les Hommes, et notamment les mathématiciens, se sont convaincus de la vérité de cette formule ? Ce qui peut se traduire, par exemple, par la réalisation en 5^{e} de petites expériences qui consistent à « compter » le nombre des carreaux recouverts par un quart de disque :



ou encore à découper un disque en secteurs suffisamment nombreux pour reconstituer approximativement un rectangle de même aire, puis utiliser la formule de l'aire du rectangle :

En mathématiques, à travers ces quelques exemples et pour qui veut s'en donner la peine, nous ne sommes sans doute pas loin d'une démarche d'investigation du « réel » – donc d'un construit – par une méthode expérimentale telle que l'envisagent, pour les autres disciplines, les promoteurs de la démarche d'investigation du programme.

II. La question du savoir et de sa transmission

On ne peut raisonnablement se poser la question de la démarche d'investigation sans s'être, au préalable, posé la question du savoir, de sa transmission et des formes qu'elle prend dans l'institution que la société s'est donnée pour cela : l'Ecole. Partant de ce point de vue, il est alors nécessaire d'étudier les fonctions assignées aux uns et autres, essentiellement aux professeurs et aux élèves, selon les différentes formes prises pour l'organisation d'une telle rencontre avec le savoir et son appropriation. Sans avoir pour autant à recourir à l'exhaustivité d'un inventaire historique et géographique, en gommant donc les variations locales et temporelles que l'on considèrera mineures pour l'exposé qui suit, on peut en proposer une typologie en quelques classes. La question qui émerge devient alors celle de la place de la démarche d'investigation relativement à ces diverses formes.

1. La question du savoir

L'épistémologie bachelardienne permet de situer la production de connaissance scientifique relativement aux autres activités humaines. Gaston Bachelard écrit en 1938, dans *La formation de l'esprit scientifique* : « Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est réponse a une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » Autrement dit, la connaissance scientifique est un construit humain historiquement daté et constitué de réponses à des problèmes que les hommes se sont posés ; ces problèmes étant eux-mêmes des construits historiques.
A une cinquante années de distance, Yves Chevallard (1997) a étendu à l'ensemble des activités humaines, et pour définir ce qu'il appelle des œuvres, la définition donnée par Bachelard pour la connaissance scientifique. Il écrit ainsi : « J'appelle œuvre toute production humaine *O* permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions *Q*, questions « théoriques » ou « pratiques », qui sont les raisons d'être de l'œuvre – et cela sans considération de la " taille " de l'œuvre […] ». « […] La société se constitue par une accumulation plus ou moins ordonnée d'œuvres, qui donnent chacune des éléments de réponse à quelques questions plus ou moins vitales. […] Je note aussi que ce qu'on appelle ordinairement l'œuvre d'un auteur […] n'est qu'un type très particulier d'œuvre, une œuvre qu'on peut dire close […] Mais la plupart des œuvres sont des œuvres anonymes, et des œuvres ouvertes, fruit de l'action d'un collectif innombrable, recrutant dans la suite des générations. »

Certaines œuvres, ou partie d'œuvres, deviennent parfois objets de savoir, parce que des institutions ou la société considèrent « qu'il est bon de les savoir » : grammaire, code de procédure pénale, football, algèbre, génie électrique, médecine, arpentage, etc. D'autres demeurent ignorées du plus grand nombre, voire oubliées si elles ne sont pas ravies à l'oubli par quelque historien, professionnel ou d'occasion. Plus précisément, la société ou certaines de ces institutions décident des objets de savoir à propos desquels ceux qui les ignorent, c'est-à-dire essentiellement les nouvelles générations, doivent être instruites. Cette volonté sociale répond fondamentalement à une nécessité de reproduction et de développement. En effet, la société ou ses institutions devront continuer d'être capables de répondre aux questions anciennes qui se poseront encore ; d'où la nécessité de transmettre ces savoirs, à la manière d'une transmission d'héritage. Ou bien, ces objets de savoir sont considérés comme étant susceptibles de fournir des outils pour bâtir des réponses à des questions nouvelles, inédites ; autrement dit, pour se rendre capable de construire de nouveaux savoirs. Pour réaliser ce double projet, les sociétés modernes ont généralement étendu au plus grand nombre la fréquentation d'une institution ancienne – l'Ecole, lointaine héritière de la Skhôlè des Grecs – afin de mettre en contact avec des œuvres ou des parties d'entre elles, ensembles plus ou moins organisés et fluctuants de réponses à une ou des questions, et qui deviennent ainsi ce que l'on nomme des disciplines scolaires.

2. Transposition didactique et formes didactiques génériques

Des objets de savoir à enseigner ayant été choisis, s'opère un travail de transposition didactique afin de les rendre enseignables. Si l'on décide, par exemple, de faire étudier la géométrie euclidienne, étudiera-t-on toute cette géométrie ou simplement quelques-uns de ses théorèmes ? Les étudiera-t-on tels qu'ils sont exposés dans les *Eléments d'Euclide*, comme ce fut le cas pendant des siècles, ou sous une forme que l'on jugera convenablement apprêtée afin de faciliter leur apprentissage, tenant compte du développement de ce savoir depuis les Grecs, ou encore sous une forme compatible avec ce que la société pense être la bonne manière d'étudier ? Des réponses à ces questions ayant été fournies, l'ensemble résultant de ces choix est consigné dans un programme. Peuvent alors se constituer des systèmes didactiques au sein desquels se posent deux nouvelles grandes questions : que peut et doit faire l'élève pour étudier le programme et que peut et doit faire le professeur pour diriger et faciliter l'étude du programme par l'élève ?

La réponse à la première de ces questions a été variable selon les époques et les niveaux auxquels elle référait. De la « mise en étude » des élèves au sein d'internats de lycées, hors la présence du professeur, à la recommandation « moderne » de ne pas donner de devoirs aux élèves des écoles élémentaires, on ne s'étendra pas plus dans ce texte sur les divers types de réponses institutionnelles historiquement apportées. Le regard sera davantage tourné vers les réponses à la deuxième de ces questions, et plus précisément vers certaines des formes institutionnelles que peut prendre la rencontre des élèves avec le savoir, sous la médiation du professeur.

Le dictionnaire en ligne du CNRTL fournit, pour l'étymologie du verbe « enseigner » : « 1050 " faire connaître par un signe, une indication " (*St Alexis*, éd. Storey, 312); Du lat. vulg. *insignare,* class. *insignire* " signaler, désigner ". En suivant cette origine étymologique, l'enseignant est donc celui qui montre, parfois même avec insistance… le savoir ! C'est sans doute la raison pour laquelle la forme didactique qui consiste à montrer le savoir a pris pour nom celui d'ostension, dès les premiers travaux de didactique des mathématiques[2]. Dans son

[2] En poursuivant la petite recherche étymologique initiée par le verbe « enseigner », le même dictionnaire en ligne donne pour « ostension » : *ostencion* « action de montrer » (Jean de Meun, *Testament*, 1865 ds *Rose*, éd. M. Méon, t.4, p.95); spéc. av. 1622 relig. *ostension* « action d'exposer des reliques à l'adoration des fidèles » (François de Sales, *Lettre*, 873 ds *OEuvres compl.*, t.16, p.2)

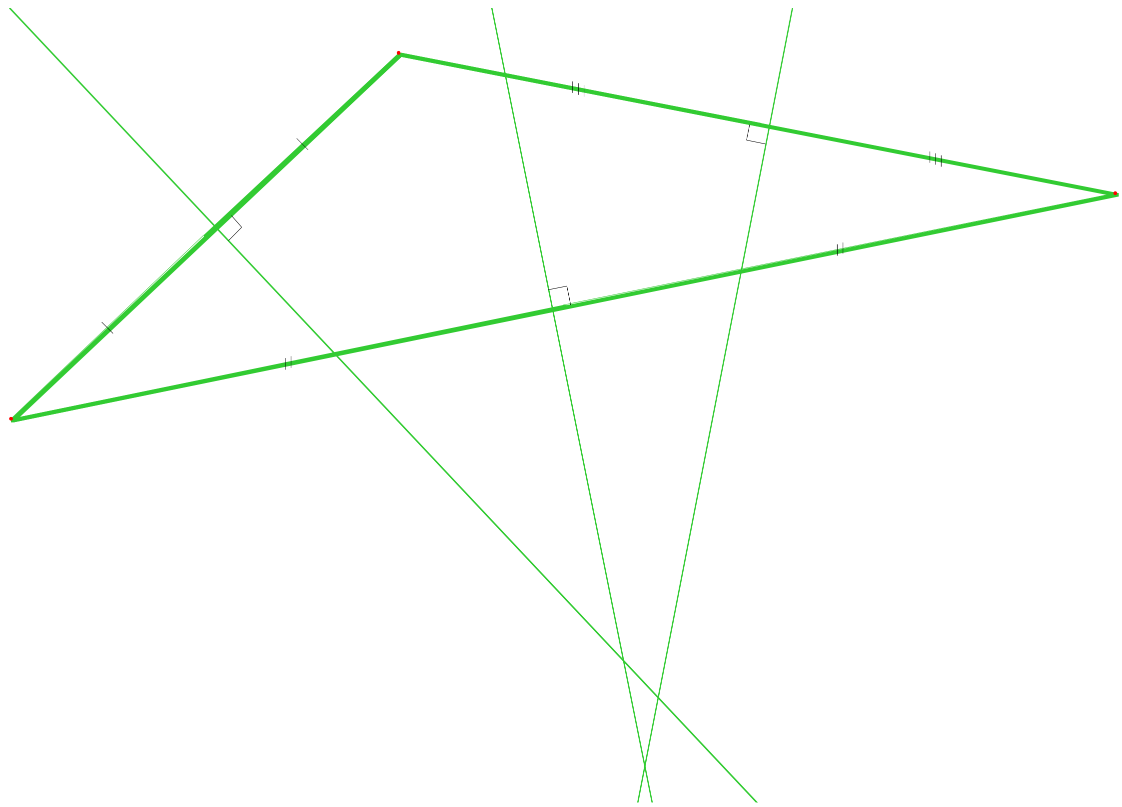
DEA de 1977, H. Ratsimba-Rajhon la définissait de la manière suivante : « L'ostension est la donnée par l'enseignant de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée ». G. Brousseau précise en 1996 : « Le professeur "montre" un objet, ou une propriété, l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance, ou plutôt de reconnaissance, ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir ». Le cours magistral obéit au contrat d'ostension ; dans ce cas elle est assumée par l'institution. La forme « moderne » que prend l'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, notamment à travers les « activités » des manuels reprises et éventuellement adaptées par les professeurs, obéit à une forme plus subtile de l'ostension que R. Berthelot & M-H. Salin (1992) ont désigné comme étant une ostension déguisée. Elle s'appuie sur la fiction que l'élève produit le savoir par son « activité », alors que le professeur continue de le montrer aux élèves mais d'une manière détournée.
Si l'on revient à la définition du savoir comme réponse à une question, on peut s'interroger à partir de la forme générique de l'ostension, assumée ou déguisée, sur la place qu'elle accorde aux partenaires de la relation didactique dans la construction du couple (question, réponse). Sous cette forme didactique, la responsabilité de produire le savoir, c'est-à-dire la réponse, incombe au professeur. Mais dans la majorité des cas, la question dont le savoir constitue un élément de réponse n'a pas même été montrée. L'élève en découvrira peut-être une, à l'occasion d'un travail réflexif mené personnellement, après-coup, lors des « applications » que le professeur montrera, ou des exercices qu'il aura à faire. Cette longue pratique d'enseignement de réponses, sans que les questions qui les motivent aient été dévolues aux élèves, contribue à nourrir le désamour envers les mathématiques révélé par les études sur les lycéens ; même si la discipline reste attractive pour des raisons qui lui sont externes à elle, parce que réussir en mathématiques permet l'entrée dans des filières de l'enseignement supérieur considérées comme les plus prestigieuses et offrant le plus de débouchés.

3. Ingénieries didactiques et enseignement par adaptation

A l'origine, à l'école Jules Michelet de Talence et au COREM, les ingénieries didactiques construites avaient pour visée la production de phénomènes didactiques afin de les observer et les analyser. Ce travail, associé à d'autres, a débouché sur les premières élaborations théoriques en didactique des mathématiques, au tournant des années 1970-1980. G. Brousseau a repris la terminologie piagétienne « d'enseignement par adaptation », en modifiant ses considérants, pour désigner la forme d'enseignement qui a présidé à la conception et à la passation en classe des ingénieries que le COREM produisait. Dans un texte de 1986 repris dans son ouvrage *Théorie des situations didactiques* en 1998, il revient sur le lien entre le couple (question, réponse) et l'apprentissage. Il écrit ainsi : « Si l'on accepte que l'apprentissage est une modification de la connaissance que l'élève doit produire lui-même et que le maître doit seulement provoquer, on est conduit à faire les raisonnements suivants. […] Le travail du professeur consiste donc à proposer à l'élève une situation d'apprentissage afin que *l'élève produise ses connaissances comme réponse personnelle à une question* et les fasse fonctionner ou les modifie comme réponses aux exigences du milieu et non à un désir du maître. » [passage *en italique* souligné par moi]. Plusieurs conséquences résultent du présupposé sur l'apprentissage sous lequel se place G. Brousseau, et notamment le fait que « l'enseignant ne peut pas dire à l'avance à l'élève exactement quelle réponse il attend de lui ; il doit donc faire en sorte que ce dernier accepte la responsabilité de chercher à résoudre des problèmes ou des exercices dont il ignore la réponse. » C'est ce qui a été appelé « la dévolution » de la responsabilité du problème à la classe.
De nombreux exemples d'enseignement par adaptation sont fournis dans les travaux du COREM et dans l'ouvrage *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* de N. et G.

Brousseau. Dans la conférence qu'il donne pour la réception du titre de *Docteur Honoris Causa* de l'Université de Montréal en 1998, G. Brousseau précise le lien établi entre l'adaptation et la théorie des situations : « L'ingénierie didactique s'attache à identifier ou à produire les situations dont le contrôle exige la mise en œuvre des connaissances visées et parmi ces situations, à distinguer celles qui permettent la création de cette connaissance par une adaptation spontanée du sujet, de celles auxquelles l'adaptation est immédiate ou impossible. » Revenant à la responsabilité de la construction du couple (question, réponse) dans un enseignement par adaptation, on peut dire que la responsabilité de *faire rencontrer la question* par les élèves *et de leur faire produire* la réponse incombe au professeur.

Un exemple relatif à l'enseignement du centre du cercle circonscrit au triangle permet d'illustrer ce que l'on entend par dévolution d'une question et adaptation, puis production de réponse. On fait construire par les élèves un triangle « assez grand », dont un angle est obtus et on demande de tracer les médiatrices. Les professeurs savent d'expérience qu'il est malaisé, tant pour les élèves sur leurs propres feuilles que pour le professeur au tableau, d'obtenir des médiatrices ainsi tracées qu'elles soient… effectivement concourantes. Ce qu'illustre la figure ci-dessous :



Le professeur indique aux élèves que l'on va s'intéresser au « petit triangle » formé par les médiatrices ; les élèves pour qui la figure donne un triangle trop « petit », voire « inexistant », devront l'agrandir. Les tentatives d'agrandissement résistant aux efforts des uns et des autres, alors que le « petit » triangle devrait grandir lorsqu'on agrandit le « grand » (connaissance culturelle sur la similitude), conduisent les élèves à adapter leurs rapports à la connaissance de la figure afin de se rendre progressivement à l'idée que le « petit » triangle n'existe qu'à travers les imprécisions des tracés. On engage ainsi les élèves dans une dialectique entre la géométrie du monde sensible et la géométrie « théorique » telle qu'elle existe au niveau de la 5^{e} ; on peut remarquer que c'est encore la conduite d'une expérience sur « le réel », pour reprendre les termes du programme, qui accompagne l'émergence de la connaissance mathématique des élèves. La dévolution du problème se termine alors par la question de la recherche des raisons pour lesquelles les médiatrices du triangle sont concourantes[3].

En conclusion de cette partie, il apparaît que le choix des formes didactiques auxquelles recourt l'enseignant, parce qu'elles déplacent les responsabilités des uns et des autres – professeur et élèves – au sein de la dialectique question / réponse, influent fortement sur les possibilités d'apprentissage des élèves ; à commencer par leur rencontre avec le savoir. Néanmoins, il serait erroné de laisser croire que les lignes qui précèdent constituent un plaidoyer contre l'enseignement par ostension. En définitive, tout dépend de l'usage, approprié ou non, qui en est fait relativement à la place laissée aux élèves dans la dialectique de la recherche de réponse à une question qui doit leur avoir été dévolue, et des questions nouvelles qui émergent au cours de l'enquête sur la question. Autrement dit, pour qu'une réponse donnée, donc montrée et non pas construite, ait des chances de fournir des éléments pour un apprentissage, il est nécessaire que la question à laquelle elle fournit des éléments de réponses ait été rencontrée et travaillée par les élèves ; à la manière où l'on va rechercher la réponse à une question que l'on s'est posée, dans un ouvrage, une bibliothèque ou sur l'Internet désormais. Les bons élèves savent, pour eux-mêmes, mener un chemin inverse de celui de l'exposé du cours, c'est-à-dire un chemin qui va de la réponse vers la ou les questions ; ils apprennent ainsi des mathématiques. Les autres rencontrent parfois la question de manière erratique au détour de la recherche d'un problème, de l'étude d'un cours. Pour une grande partie qui ne s'engage pas dans cette démarche réflexive, consciente ou résultant d'une rencontre en partie contingente, les mathématiques restent opaques, voire dénuées de sens.

III. La forme didactique inédite propre à une enquête co-disciplinaire (TPE)

1. Les TPE et les chamboulements induits dans la transposition didactique

L'arrivée des TPE (Travaux Personnels Encadrés) au sein du système éducatif, ainsi que celle des Itinéraires De Découverte même si ce dispositif a connu une moins grande ampleur, dépasse de beaucoup, du point de vue des enseignants, le niveau habituel des difficultés de gestion auxquelles ils sont ordinairement confrontés ; et sans doute aussi, par certains aspects, celui propre au « pilotage » difficile des ingénieries bâties à partir de la Théorie des Situations Didactiques. En effet, dans le cas des TPE, il n'y a plus de programme déterminant un savoir à enseigner, mais quelques « thèmes » et « sous-thèmes » les bornant[4]. Il est donc impossible de réaliser, sous une forme habituelle, une transposition didactique *a priori* d'un savoir à enseigner ; aussi bien celle consignée dans un programme, que celle concernant le travail du professeur qui poursuit la transposition didactique à travers ses préparations de cours.

La programmation d'un savoir supposerait, au minimum, qu'une fois la question génératrice du TPE déterminée, le professeur qui, tout comme les élèves, souvent ne connaît pas lui-même la réponse, mène une enquête préalable sur les savoirs à convoquer, en tant qu'outils pour la construction d'éléments de réponses.[5] Cette enquête menée, le risque existe alors que

---

[3] Le détail des diverses situations par lesquelles passent les élèves au cours de la démonstration est donné dans la brochure *Des activités aux situations d'enseignement en mathématiques au Collège*, rédigée par le Groupe Didactique des Mathématiques au Collège de l'IREM de Bordeaux (2002).

[4] L'enseignement d'exploration qui a pris pour nom « Méthodes et pratiques scientifiques » en 2[de], dans le cadre de la réforme du lycée inaugurée à la rentrée 2010, semble reprendre ce schéma propre aux TPE : une simple définition de quelques thèmes et sous-thèmes à propos desquels il est possible d'engager l'étude des élèves, une question qui en émerge ayant été posée.

[5] Citons quelques exemples illustrant la nécessité d'une enquête. Qui est capable de fournir, sans un minimum de recherche, une réponse argumentée à la question de savoir quelle est la période, si elle existe, entre deux éclipses totales de soleil en le même point du globe ? Une enquête conduit-elle forcément vers des réponses définitives à

l'enseignant expose, à la place des élèves, des réponses qu'ils auraient eux-mêmes recherchées, pour des questions qu'ils auraient été en droit de se poser. Dans l'ordinaire de l'enseignement, la transposition se poursuit en acte, lors des séances en classe, par l'intermédiaire des adaptations que connaît le savoir enjeu de la relation, au fur et à mesure que le professeur est amené à réguler ses interactions avec les élèves. Dans le cas des TPE, la fonction régulatrice assumée par l'enseignant est moins nette ; il oriente la recherche mais elle peut s'avérer infructueuse, ce qui peut être perçu comme un échec dans l'étude des savoirs utiles à l'instruction de la question. Le professeur assume la fonction de répartition et de division du travail de recherche au sein de chacun des petits groupes d'élèves ; l'unité de la classe disparaît. Il doit néanmoins veiller à maintenir l'unité de chaque groupe, tout en orientant ce travail vers la convergence des éléments épars provenant de la recherche des élèves, dans le but de construire une réponse consensuelle au sein du groupe à la question initiatrice du TPE.

2. Les TPE et les chamboulements induits dans le partage traditionnel des tâches

Revenant sur le partage des responsabilités de chacun en ce qui concerne la question et la production de réponses, le professeur se retrouve donc le plus souvent dans la même position que les élèves pour la recherche et la problématisation de la question. Sa responsabilité consiste à organiser les conditions pour la production d'une réponse possible, qui n'existe peut-être pas encore ailleurs que dans le collectif qui la produira à l'issue de son travail de recherche. Une partie des conditions de cette production, conditions nécessaires mais pas toujours suffisantes, passe par la constitution d'un milieu pour l'étude de la question. C'est-à-dire d'un ensemble de moyens que l'on s'est donnés, et non pas qui ont été disposés dans un milieu adidactique convenablement apprêté, comme c'est le cas des ingénieries conçues à partir de la Théorie des Situations Didactiques, et de réponses partielles apportées aux sous-questions qui émergent de l'enquête, au fur et à mesure de son développement ; réponses dont on a le devoir d'interroger la validité. La dimension adidactique de certaines situations constituées à partir des questions, engage vers la recherche de médias ; à leur tour, les réponses qu'on y trouve poussent à la recherche d'autres milieux et d'autres médias, notamment pour la mise à l'épreuve des réponses apportées ou des nouvelles questions qu'elles engendrent.

Cette dialectique est en grande partie erratique, grandement indéterminée, au fur et à mesure des rencontres plus ou moins aléatoires faites au cours de l'enquête, qu'elles entrent ou non en résonance avec ce que l'on connaît déjà ou avec le but que l'on souhaite atteindre. C'est ce que résumait déjà Bachelard (1938) dans sa formule : « une marche vers l'objet n'est pas initialement objective ». Elèves et professeurs sont plongés dans un environnement doublement indéterminé. Pour le professeur, parce qu'il ne connaît pas par avance le lieu où l'enquête qu'il dirige va le mener ; lieu le plus souvent extérieur à la discipline qu'il enseigne, ou carrefour d'un ensemble de savoirs relevant de plusieurs disciplines. Pour les élèves, parce qu'ils n'ont pas la certitude que le professeur va les mener là où, dans le contrat didactique ordinaire, le professeur est censé les conduire : c'est-à-dire vers la connaissance du savoir visé par l'étude[6]. Devant la difficulté introduite par cette nouveauté, notamment face à la

toute question ? N'y a-t-il pas des questions sans réponses, tout au moins au moment historique que nous vivons ?

[6] J'écrivais avec Yves Chevallard, dans une communication relative aux TPE pour un colloque de la Commission Inter-IREM de Didactique à Dijon en 2002 : « Les rôles enseignant du professeur et enseigné de l'élève s'effacent et se transforment d'autant plus qu'il n'y a plus de projet d'enseignement d'un savoir antéposé. La situation paraît répondre à celle que Herbart (1776-1841) appelait jadis de ses vœux : " Le professeur […] n'est plus un enseignant, (*Lehrender*), l'étudiant n'est plus un enseigné (*Lernender*) ; mais ce dernier poursuit des recherches personnelles, le professeur ayant pour tâche de le guider et de le conseiller dans ces recherches ". »

responsabilité d'assumer la problématisation d'une question quand on ne s'est jamais exercé à cette tâche, le poids des déterminations venues du niveau pédagogique, c'est-à-dire de ce qui s'y fait, a souvent détourné les TPE réalisés de leur objet : les professeurs engageaient leurs élèves dans une production qui ressemble davantage à un exposé – forme connue de travail scolaire –, qu'à une réponse à une question problématisée. Dans un TPE, le contrat n'est plus strictement didactique mais porte, pour le professeur, sur la nécessité d'apporter une aide à chacun des élèves dans son étude de la question ; et pour chaque élève, sur sa contribution au travail collectif du TPE au sein du groupe, croisée à l'exercice d'une confiance critique envers les réponses partielles apportées par les autres.

Les TPE constituent une tentative d'introduction dans le système éducatif d'une forme scolaire inédite. La connaissance nouvelle produite à l'issue d'un TPE – son caractère de nouveauté s'appliquant à la communauté de la classe, mais souvent aussi au-delà de cet univers clos à travers sa diffusion, par exemple à l'établissement – n'est pas déposée dans des disciplines désignées comme étant à enseigner. Elle est construite en tant que réponse à une question dont le collectif s'est emparé ; et il peut ou non la considérer comme élément d'un savoir, d'une petite œuvre qu'il est bon de connaître. La construction de la réponse suppose à la fois une problématisation de la question et une enquête ; cette dernière engendrant des sous-questions à instruire elles aussi.

Le dispositif se démarque donc d'un enseignement « à programme » et des formes qu'il peut prendre ; il se démarque ainsi à la fois d'un enseignement par ostension et d'un enseignement par adaptation. Dans ce dernier cas, les situations construites doivent prendre tout autant en charge la problématisation de la question que l'on dévolue aux élèves, que leur rencontre avec les éléments leur permettant d'y apporter des réponses[7]. Les milieux des situations et l'enchaînement des situations ont été construits à cet effet. Aussi les élèves n'ont-ils pas à les rechercher, mais à transformer en connaissances nouvelles les résultats issus du fonctionnement de dialectiques constituées des actions sur les milieux qui leur sont donnés, et des rétroactions produites ; cela avant qu'une phase d'institutionnalisation permette d'identifier comme des savoirs une partie de ces connaissances nouvelles. En ce sens, on pourrait considérer le dispositif des TPE comme allant plus loin que l'enseignement par adaptation dans « l'effacement » des rôles d'enseignant – celui qui montre –, et de professeur – « celui qui se déclare expert », d'après son étymologie latine –, afin de laisser une place plus grande aux élèves dans l'étude, la construction de réponses, et éventuellement de savoirs. On perçoit, à travers l'implantation du dispositif dans le système éducatif, la volonté d'apporter une contribution à la formation « d'esprits libres et éclairés », ayant à construire par eux-mêmes et dans un temps ultérieur, grâce à une enquête autonome menée hors du cadre scolaire, des réponses à des questions auxquelles leur vie d'adulte et de citoyen les confrontera. L'extinction de la nécessité de s'astreindre personnellement à la forme scolaire est en effet l'un des buts assignés à l'éducation et à l'enseignement : pouvoir se passer des institutions constituées pour « être porté vers le haut » dans la connaissance – autrement dit

---

Depuis lors, Y. Chevallard a développé une théorisation qui s'appuie sur ce qu'il a nommé « le schéma herbartien ».

[7] En TSD, les situations de la mesure de l'épaisseur des feuilles de papier pour enseigner les fractions me semblent prototypiques d'une problématique prise en charge par le didacticien, et non par les élèves, et de situations bâties *a priori* par le didacticien pour les élèves, afin qu'ils construisent des connaissances grâce à une dialectique avec des milieux conçus à cet effet : trouver un code, confronter les codes, constituer des tableaux faisant apparaître la proportionnalité et les travailler, travailler sur des couples puis se demander si ce sont des nombres afin d'arriver à l'addition de certaines fractions, etc. (*Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* de Nadine et Guy Brousseau, 1987, pages 1 à 23)

« être élève », c'est-à-dire engagé dans un processus grâce auquel on s'élève –, ou au contraire rechercher leur fréquentation lorsqu'on en éprouve soi-même la nécessité.

3. Quels enseignements tirer des TPE sur la gestion enseignante d'une enquête ?

Les TPE constituent un des rares dispositifs implantés dans le système éducatif à partir duquel, et en extrapolant les observations menées à l'époque, on peut anticiper les difficultés à venir pour une mise en place et une gestion par les enseignants d'une démarche d'investigation telle qu'on peut l'entendre. C'est-à-dire qui puisse prendre la forme d'une enquête (*inquiry*) menée par les élèves sous la direction du professeur : question, construction du problème, enquête et apport d'une réponse, validation de la réponse du point de vue du savoir à enseigner.

Toujours sous l'angle de la problématique du couple (question, réponse) introduite précédemment, on peut décrire quelques-uns des *habitus* et des « croyances » qui se sont constitués en autant d'obstacles chez les enseignants, parmi lesquels deux semblent avoir été parmi les plus importants lors de l'arrivée des TPE dans les lycées. D'une part, un obstacle culturel reposant sur le fait que les organisations de savoir semblent apparaître toutes faites aux yeux des sociétés, et non comme des réponses à des questions, et qu'à toute question correspond par avance une réponse. L'une des conséquences concrètes de cette vision du savoir en a été la production de « TPE – exposés », recopiages de morceaux de réponses à des questions non entrevues, tant de la part des élèves qui réalisaient, que de celle des professeurs qui encadraient. Ce fut le cas de la majorité des premières générations de TPE, révélateurs de cette vision pour laquelle toute question a par avance une réponse déjà produite, et non pas restant à construire, ne serait-ce que pour soi-même.

D'autre part, un obstacle professionnel car la démarche qui consiste à problématiser un objet de savoir pour l'enseigner est, dans la majorité des cas, étrangère à la pratique enseignante ; et ce ne sont pas les « activités », même affublées du qualificatif de « situations – problèmes », qui peuvent aller à l'encontre de cet état de fait[8]. De surcroît, dans le cas des TPE, la réponse à la question constituant le sujet, n'est pas et ne peut être, le plus souvent, connue *a priori* des professeurs. Un des effets de cet obstacle s'est traduit par l'impossibilité pratique de s'engager dans des gestes inhabituels, car extérieurs à l'enseignement d'un programme disciplinaire : mener une enquête sur le thème ou le sujet en sortant éventuellement de son cadre disciplinaire *stricto sensu*, prononcer ou non la recevabilité d'un sujet, diriger une recherche, gérer l'inattendu, etc. Dans ce cas encore, la porte est restée grande ouverte pour rabattre le travail à faire en TPE sur un exposé.

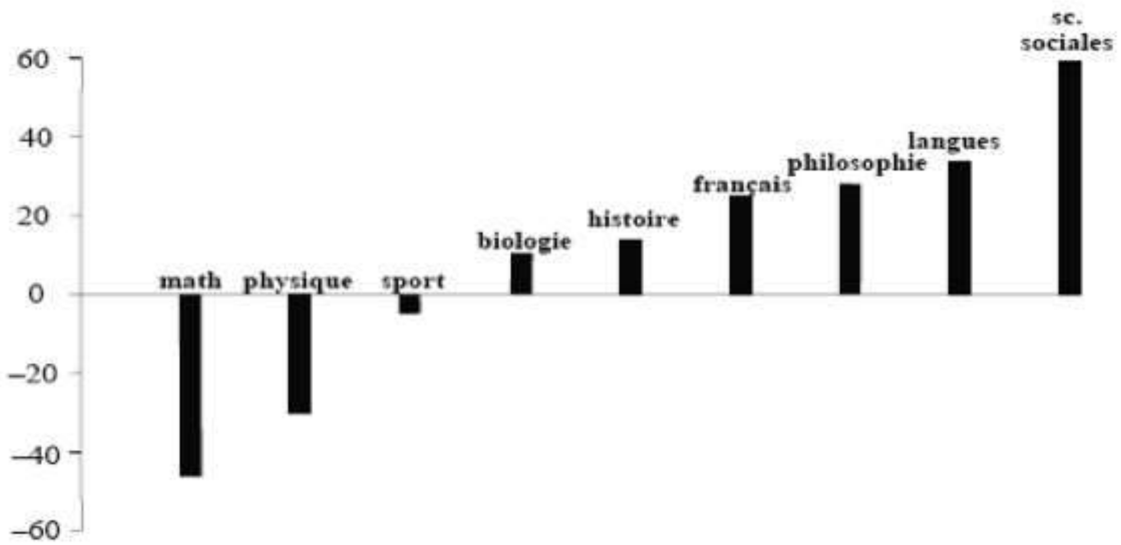
Ces obstacles professionnels se sont concrétisés dans l'impossibilité « théorique », que l'on a vu s'exprimer chez les adversaires déclarés du dispositif, d'accepter la double légitimité didactique (c'est ainsi que les élèves peuvent apprendre lors d'un TPE, et un tel TPE est réalisable par le professeur), et épistémologique (c'est ainsi que les savoirs se constituent) d'un TPE bâti sur la recherche d'éléments de réponses à une question. Assurément, la mise en place des TPE, et par contrecoup les résistances voire les oppositions qu'ils ont suscitées dans un premier temps, témoignent d'une rupture avec l'ordinaire de l'enseignement, tant du point de vue de l'organisation didactique que de celui du régime du savoir. Les questions

[8] Le texte du programme indique sous le paragraphe « Le choix d'une situation – problème » : « analyser les savoirs visés et déterminer les objectifs à atteindre ; repérer les acquis initiaux des élèves ; identifier les conceptions ou les représentations des élèves, ainsi que les difficultés persistantes (analyse d'obstacles cognitifs et d'erreurs) ; élaborer un scénario d'enseignement en fonction de l'analyse de ces différents éléments ». Le texte semble laisser croire que la profession possède les techniques qui permettront la réalisation de ces étapes ; et que chaque enseignant dispose à la fois de leur maîtrise et du temps nécessaire à leur mise en œuvre… Ce paragraphe étant le premier d'une série de sept exposant des prescriptions du même ordre exposant le « canevas d'une séquence d'investigation ».

importantes pour la formation des jeunes générations, dont l'Ecole a pour charge de fournir les outils d'attaque, relèvent rarement d'un champ disciplinaire unique. La démarche consistant à travailler en TPE une question que l'on a construite – ce qui signifie aussi que toutes les questions ne se valent pas et ne peuvent être reçues comme telles – engage à accorder du prix à la recherche personnelle, autonome ou en collaboration avec d'autres, pour des questions, scolaires ou personnelles, qui le méritent. Dans ce sens, les TPE remplissent une fonction propédeutique pour des enquêtes que les élèves auront peut-être à mener au cours de leur vie d'adulte ; que ce soit à titre personnel, professionnel ou en tant que citoyen qui cherche à s'instruire. La recherche menée dans les savoirs constitués, dans les médias qui fournissent des briques pour construire des réponses, est une première expérience pour l'exercice d'un regard critique sur la validité des sources disponibles, la prise de conscience de « ne jamais recevoir aucune chose pour vraie que je ne la connusse effectivement pour telle ; c'est à dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention », pour reprendre la formule de Descartes ; donc d'une disposition à ne pas faire *a priori* confiance à l'information fournie sans qu'on l'ait à son tour vérifiée, questionnée. Sur ce seul plan, les TPE sont porteurs d'une incontestable fonction formatrice pour laquelle le rôle d'accompagnement assuré par l'enseignant n'est sans doute pas négligeable, même si les gestes enseignant nécessaires ne font pas encore partie d'un bagage professionnel partagé.

IV. L'Etude par la Recherche : une démarche d'investigation pour l'enseignement des mathématiques

1. A partir de l'état du système, un projet d'enseignement issu de la didactique des mathématiques



Le graphique ci-dessus, extrait de Establet et *al.* (2005), indique en % les différences entre réponses positives et négatives des lycéens de l'enseignement général et technologique, matière par matière, lors de la consultation lancée à l'occasion de la réforme du lycée mise en place au début des années 2000. Il parle de lui-même en ce qui concerne l'appréciation portée sur les mathématiques…

L'enseignement actuel des mathématiques est donc soumis à une double pression : une crise se manifestant par une perte de la visibilité sociale de son sens (ce qu'indique ce graphique pour les lycéens, mais on peut s'autoriser une extrapolation qui dépasse cette seule catégorie de la population), et une volonté institutionnelle d'un enseignement qui engage dans une authentique activité scientifique (ce qu'indiquent l'inscription dans le programme d'un enseignement recourant à la démarche d'investigation, ou les présupposés généraux sur l'enseignement des mathématiques tels qu'on peut les lire en tête des programmes de Collège et Lycée). Or, quarante ans avant la publication d'injonctions institutionnelles relatives à la démarche d'investigation, la didactique des mathématiques s'est posée la question d'un enseignement basé sur une genèse artificielle du savoir qui engage collectivement les élèves. Les ingénieries nées de cet effort, notamment au COREM, visaient à créer des phénomènes afin de les étudier pour les théoriser, et à montrer la possibilité locale d'un enseignement « par adaptation ».

Une des questions à l'ordre du jour devient désormais celle des conditions à mettre en place afin de rendre possible, au sein du système et non pas dans une seule école, un enseignement du programme inscrivant son étude dans une dynamique de recherche par les élèves d'éléments de réponse à une question qui leur est dévolue. (CD)AMPERES s'est attelé à ce travail et on trouvera ses propositions à l'adresse suivante : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/. Ses productions se démarquent des « activités introductives » des manuels, des « problèmes ouverts » ou « problèmes pour chercher ». Elles s'appuient sur des outils incontournables venus des recherches en didactique car le bricolage pédagogique a, depuis que les professeurs y recourent, montré ses limites en ce domaine. La conception des productions et l'analyse de leur passation révèlent certaines contraintes systémiques actuellement indépassables, et explorent les conditions nouvelles à mettre en place. Parmi elles, les questions de formation des professeurs restent largement ouvertes puisque dépendantes de décisions politiques.

2. A l'origine du projet (CD)AMPERES

Depuis la didactique des mathématiques, quelques raisons ont pu être relevées qui fournissent des éléments de réponses explicatives de ce « désamour ». L'une d'entre elles tient à la nécrose des objets d'enseignement. Prenons sur ce point un exemple relatif à la place accordée à l'étude des triangles au Collège et au Lycée. Suivant la logique du questionnement inscrite dans la démarche d'investigation, mais en l'appliquant à d'autres qu'aux élèves, qui, parmi les professeurs de mathématiques peut-il encore donner les raisons justifiant d'accorder tant d'importance à la géométrie du triangle dans le secondaire ? Les connaissances professionnelles enseignantes, sans doute insuffisantes, ne sont sûrement pas seules en cause. L'utilité des triangles pour des problèmes ayant trait aux affaires de hommes (la triangulation précisément) paraît désormais socialement peu visible aux citoyens, et par conséquent aux professeurs ; si tant est que la société considère que cette utilité demeure. Certains contenus de programme semblent alors perdurer parce que dans la tradition, l'héritage scolaire, que les enseigner apparaît « bel et bon ». Sur ce seul cas, et il y en a bien d'autres, on a perdu l'une des questions fondamentales : par exemple « pourquoi l'honnête homme du XXI^e^ siècle se devrait-il de savoir que la somme des angles d'un triangle vaut 180°? », et son corollaire « en quoi est-ce utile de le savoir ? » De ce point de vue, seule une refondation exigeante du curriculum de mathématiques (c'est-à-dire engageant une réflexion sérieuse et donc large, à la manière de la commission Kahane au début des années 2000) pourrait commencer à inverser la tendance.

Mais une des raisons du « désamour » des lycéens pour les mathématiques – non pas la seule mais en tout cas l'une des principales – tient aussi, pour une bonne part et en liaison avec la précédente, à la forme actuelle de l'enseignement des mathématiques. Lorsqu'on observe cet enseignement depuis la France, mais ce trait dépasse le cadre de ce seul pays, quelques phénomènes peuvent être relevés qui contribuent à expliquer pour partie cette crise : « perte » des questions fondatrices de divers domaines des mathématiques induisant en retour une perte de sens des mathématiques chez les élèves, cloisonnement thématique qui induit une forme parcellaire de l'enseignement découpé en chapitre duquel la cohérence et les liens échappent, recours massif au recopiage plus ou moins arrangé et à la passation en classe d'activités dites « introductives » trouvées dans les manuels ou sur l'Internet, le plus souvent non signifiantes, purement formelles, dépourvues de pertinence épistémologique.

Par ailleurs, le découpage horaire des séquences confère à l'heure le rôle de mètre-étalon du temps d'enseignement : les mathématiques rencontrées dans l'heure se doivent en conséquence de former un tout. Si d'aventure une question problématique est soumise à l'étude en début d'heure, l'impératif catégorique découlant de la « tyrannie de l'heure » implique que la réponse soit donnée dans cette même heure, accompagnée si possible des exercices d'entraînement qui lui sont relatifs.

3. Le travail de l'équipe (CD)AMPERES : vers un type nouveau d'étude par la recherche

Le travail dans lequel sont engagés les membres de l'équipe (CD)AMPERES vise à libérer l'enseignement de certaines des contraintes que nous venons d'évoquer, tout en en acceptant consciemment d'autres. Hormis celles sur lesquelles il est difficile d'agir, par exemple celle relative au découpage horaire, la contrainte principale que suit le projet tient dans le respect des contenus du programme de mathématiques. L'objectif consiste à proposer aux professeurs un système de conditions pour un processus d'étude des mathématiques d'un nouveau type, afin qu'elles prennent davantage de sens aux yeux des élèves.

Notre travail suit ainsi l'une des directions fondatrices de la didactique des mathématiques : le développement de l'usage des outils théoriques qu'elle a établis pour la conception d'un enseignement favorisant dans la classe une genèse artificielle des savoirs mathématiques à étudier. Contre des activités non mathématiquement motivées, il s'agit d'en concevoir d'authentiques permettant l'étude par la construction collective du savoir comme recherche de réponse à une question dévolue à la classe. Contre le morcellement du savoir, il s'agit de développer des parcours d'étude permettant un recouvrement partiel de secteurs ou domaines du programme d'un ou plusieurs niveaux, à partir de questions à fort pouvoir générateur d'étude.

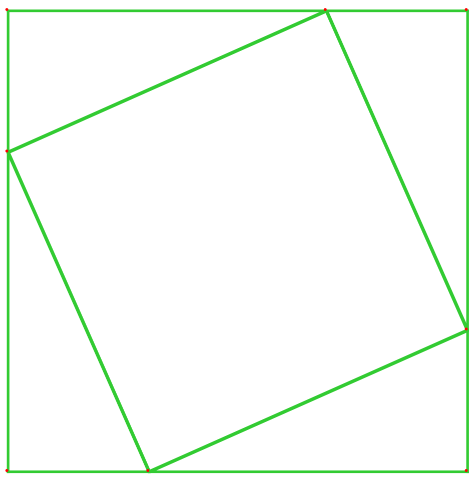
Dévoluer aux élèves la responsabilité de construire une réponse à une question est sans doute nécessaire si l'on souhaite « re-dynamiser l'enseignement des mathématiques » – c'est-à-dire rendre les élèves auteurs, et non spectateurs des mathématiques – mais cela reste encore partiellement insuffisant. Par exemple, si l'on poursuit l'exemple relatif à l'étude du triangle, il est nécessaire de se poser la question de leur utilité mathématique – ou extra-mathématique sachant que les mathématiques fourniront le modèle permettant de traiter la question dans ce dernier cas –, au moins pour justifier qu'on les étudie en leur consacrant tant de place et de temps dans le système éducatif. De même, est-il tout autant nécessaire d'analyser les parties des mathématiques des programmes scolaires dans lesquelles on les rencontre, ou plutôt que leur étude peut engendrer ; tant aux plans didactique qu'épistémologique ou encore à celui de leur organisation après transposition didactique. On a alors davantage de chances de ne pas verser dans la parcellisation thématique à partir de laquelle le sens s'éteint.

4. Quitter le niveau du sujet ou du chapitre, pour dévoluer la question au niveau du domaine

En conséquence, la question à dévoluer mérite d'être posée – sur l'exemple des triangles comme sur bien d'autres –, non plus au niveau du thème *stricto sensu,* mais au niveau du

domaine ; celui de la géométrie plane dans ce cas. Concevoir un enseignement des mathématiques bâti sur cette double préoccupation – dévoluer une question, mais une question qui soit ***suffisamment large*** pour générer « beaucoup » de mathématiques, celles que l'on rencontre dans des classes de plusieurs niveaux, afin que leur sens soit le moins possible perdu – revient à enseigner avec le souci de faire vivre dans ses classes l'étude et la construction par les élèves de savoirs par la recherche de réponses à une grande question génératrice, reprise en plusieurs fois, sur plusieurs années peut-être. Cette étude engendrant sans doute la recherche de réponses à des sous-questions cruciales, car s'imposant en raison, pour l'instruction de la question génératrice. On aboutit ainsi à une forme d'enseignement qui génère non des organisations mathématiques locales, c'est-à-dire portant sur un seul thème, un seul chapitre, mais des savoirs organisés en un recouvrement partiel de secteurs, voire de domaines des mathématiques : sur cet exemple du triangle, la génération d'au moins une grande partie de la géométrie plane.
Sur l'exemple du cercle circonscrit au triangle, une question génératrice devient : « combien de cercles peut-on faire passer par 1, 2, 3,… n points ? » Une telle question ne peut se traiter en quelques chapitres et sur un seul niveau de classe. Mais on entrevoit que pour $n = 1$ et $n = 2$, la réponse correspond à des savoirs du programme de 6^{e}, pour $n = 3$ au programme de 5^{e}, et ainsi de suite jusqu'à étudier les conditions de cocyclicité au cycle terminal. Il en va de même de l'enseignement des ensembles de nombres, de l'algèbre et des variations de fonctions dont l'une des questions auxquelles ces savoirs répondent est celle de la recherche de facilité de calculs sur des programmes de calcul. Les mathématiques sont alors motivées par des questions telles que : « Comment représenter un programme de calcul, s'assurer de l'équivalence de deux programmes, trouver les valeurs pour lesquelles ils donnent même réponse, les comparer ? », « Comment calculer la distance entre deux points inaccessibles ? », etc. Ce qui engage dans un premier temps les enseignants vers une recherche de nature épistémologique sur le savoir – qui n'a rien à voir avec un enseignement de l'histoire des mathématiques –, afin de trouver des questions générant la construction du savoir et qui puissent être transposées et dévolues aux élèves à partir de leurs connaissances et dans le cadre du programme.

Un autre avantage de ce type d'enseignement vise l'amélioration postulée de l'apprentissage des élèves. Prenons, pour rester dans le domaine de la géométrie du triangle, l'exemple du théorème de Pythagore. Le professeur suivant le programme de 4^{e} fait généralement rencontrer, en « activités », le théorème direct par les élèves. Nombre de manuels de ce niveau proposent une démonstration parfois dite « chinoise » du théorème, quelquefois même une version simplifiée n'utilisant que deux des triangles rectangles ainsi disposés :



D’autres activités relèvent d’une sophistication plus ou moins grande, selon les connaissances des élèves sur lesquelles peut s’appuyer le professeur ; on sait en effet qu’il existe quelques centaines de démonstration de ce théorème.

On peut s’interroger sur ce que retiennent les élèves de son enseignement courant, en dehors de la petite comptine qui énonce le théorème. On nous a rapporté l’épisode vécu par une bonne élève de 4^{e} et sa mère, professeur de mathématiques. Faisant ses devoirs et ne sachant pas répondre à la question du calcul du troisième côté connaissant les deux autres, cette élève disait à sa mère, qui lui indiquait l’utilisation du théorème de Pythagore, que celui-ci ne permet que d’établir des résultats sur des aires résultant d’un coloriage, et non de calculer des longueurs… Pour expliquer cette méprise, on peut légitimement soupçonner qu’une des raisons d’être du théorème n’avait pas été rencontrée par cette élève, ni sans doute enseignée ; hormis le petit jeu qui consiste à décomposer et recomposer, peut-être même seulement « par la vue », les différentes parties de la figure.

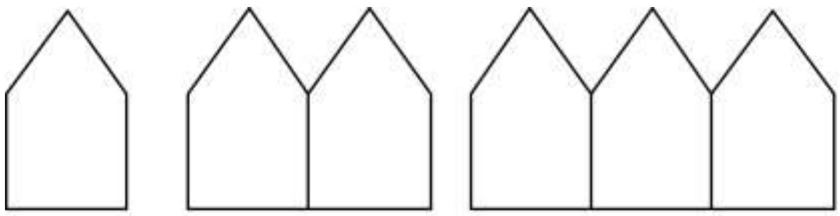
Dans ce genre de situations que les observations didactiques montrent très fréquentes dans l’enseignement courant, les élèves rencontrent ou non, tardivement ou pas, dans les exercices que le professeur donne, une des raisons du théorème de Pythagore : « calculer une longueur ». Ils apprennent ou non, par eux-mêmes et de manière aléatoire, à quelle question il peut répondre. Les meilleurs découvriront ensuite, et s’ils savent établir d’eux-mêmes le lien avec ce qu’ils ont antérieurement appris en trigonométrie, ou à propos de la similitude (théorème de Thalès par exemple), que la résolution de triangles (en 1re S) permet de calculer des distances inaccessibles. La démarche suivie par (CD)AMPERES est l’inverse de celle qui laisse quelques bons élèves établir, par et pour eux-mêmes, des rapprochements afin de parvenir à retrouver ce fait que la géométrie du triangle permet, entre autres, de calculer des longueurs dans certains cas où on ne peut les mesurer directement, et que les divers théorèmes enseignés permettent la résolution du problème dans certains cas, en fonction des données dont on dispose. Elle consiste à poser et dévoluer aux élèves la question au niveau général, puis à faire établir des résultats partiels, sous la direction du professeur, tout au long de ce qu’on a nommé un parcours d’étude et de recherche, qui s’étale sur une durée longue, de l’ordre du trimestre ou des années. Ce type d’enseignement peut en effet supporter la métaphore d’un parcours pédestre au cours duquel on interrompt parfois son avancée, afin d’occuper son attention à la découverte d’un paysage nouveau, puis qu’on reprend ultérieurement si on ne décide pas de changer de direction, etc. Mais un parcours pédestre dans lequel il y aurait des côtes et des moments plus faciles, au cours duquel les efforts personnels ou collectifs seraient nécessaires mais récompensés par la découverte du nouveau ; et non une promenade en autocar durant laquelle on se contente de regarder le paysage.

5. Un exemple : l’enseignement de l’algèbre élémentaire

Même si le terme d’algèbre a quasiment disparu des programmes de mathématiques français, on regroupera sous ce terme l’étude de certaines parties du programme : les nombres (les décimaux relatifs et ce qu’Alain Bronner a nommé l’idécimalité), le calcul sur les polynômes, les équations et inéquations, les variations et donc le début de l’étude des fonctions, etc., soit un enseignement qui court de la 5^{e} à la classe de 1re. Le point nodal de l’étude, et aussi ce qui la génère, est fourni par la notion de programme de calcul ; grandement absente de l’enseignement effectif actuel des mathématiques puisque, il y a quatre à cinq ans de cela, un problème du Brevet des Collèges qui portait sur la notion avait provoqué l’échec massif des candidats.

Le Parcours d’Etude et de Recherche débute en 5^{e} par l’étude du programme de calcul : « à un nombre, ajouter un second et soustraire un troisième ». La rencontre avec ce type de programme de calcul s’effectue sur de nombreux cas particuliers que l’on souhaite traiter « de

tête » : comment calculer mentalement 5473 + 7687 – 7690 ou 25,4 + 31,2 - 31,6, par exemple. L’idée se répand rapidement dans la classe qu’il faut commencer par « traiter » les deux derniers nombres ; ce qui conduit à produire puis à travailler sur des opérateurs qui se comportent assez rapidement comme des nombres nouveaux, car écrits avec un signe – ou un signe +. La question qui se pose alors est celle de savoir si l’on a effectivement le droit de les considérer comme des nombres. Les élèves savent ce qu’il se fait avec les nombres : on calcule, on les compare, etc. Ils en viennent à se demander si l’on pourrait faire de même avec ces nouvelles entités. L’étude débouche sur les opérations dans l’ensemble des décimaux relatifs ; opérations que l’on va construire en justifiant mathématiquement cette construction, c’est-à-dire en cherchant et justifiant les « règles » qu’elles doivent respecter. On engage ainsi les élèves dans un parcours de recherche qui les amène à étudier et apprendre des mathématiques épistémologiquement beaucoup plus consistantes que celles que l’on rencontre dans l’ordinaire des classes et des propositions des manuels ; même si des implicites relevant de choix axiomatiques demeurent non questionnés, ni même entrevus des élèves.
L’étude se poursuit et fait rencontrer la nécessité du recours aux écritures littérales pour travailler avec des programmes de calcul. L’exemple ci-dessous, extrait de la thèse de Mariza Krysinska, a été testé dans une classe de 4^{e}.



1 2 3

On demande combien d’allumettes sont nécessaires pour construire ces maisons à l’étape 5, 16, 256. Les nombres devenant grands, les élèves rencontrent la nécessité de trouver une formule générale. Elle s’exprime par une phrase du type : « on compte combien de maisons moins une, on le multiplie par 4 à cause des murs verticaux communs, puis on ajoute 5 car il faut 5 allumettes pour la première maison » ou « on multiplie le nombre de maisons par 4 et on ajoute 1 car la première maison nécessite une allumette de plus », etc. Parfois les élèves utilisent une ou deux lettres distinctes, d’autres des symboles comme □ ou ○ qu’ils jugent plus commodes. Au bout de quelques temps, alors que les productions de programmes sont diverses, on se demande pourquoi des programmes si différents donnent-ils les mêmes résultats. Les élèves en viennent à trouver que l’écriture littérale qu’ils ont fréquentée en classe de 5^{e}, ou encore à travers les formules de périmètre ou d’aire, est plus commode pour écrire $5 + (n – 1) \times 4$ et $4 \times n + 1$. On recherche alors pourquoi de tels programmes de calcul sont équivalents, ce qui conduit à développer et réduire afin de comparer ; d’où la nécessité de recherche de formes canoniques, etc. La comparaison de programmes de calcul conduit à la rencontre avec de nombreux savoirs des programmes de plusieurs classes : développer, factoriser, réduire, recourir aux identités remarquables. Lorsque deux programmes de calcul ne sont pas équivalents, on peut rechercher pour quelles valeurs communes ils donnent néanmoins le même résultat, pour quelles valeurs l’un est supérieur à l’autre, comment l’un varie par rapport à l’autre, etc.

V. Quels changements préalables pour une mise en place réussie de la démarche d'investigation au sein du système éducatif ?

1. Les problèmes professionnels révélés par la conception et la mise en œuvre du projet (CD)AMPERES

L'équipe (CD)AMPERES conçoit, expérimente et observe la passation de propositions d'Activités et de Parcours d'Etude et de Recherche bâties à partir de questions problématiques dévolues aux élèves. Le travail de recherche-développement actuellement entrepris a abouti à la mise en ligne de certaines de ses publications. Ce sont des documents pour le professeur, utilisables dans ses classes, et intégrant des éléments de didactique permettant, à qui veut bien consentir à l'effort de les étudier, la compréhension et la maîtrise des propositions ainsi construites et des phénomènes susceptibles de se produire en classe afin de pouvoir les observer et les réguler. Les groupes académiques, souvent rattachés à des IREM, organisent des formations continues à destination des professeurs de mathématiques. Les formateurs en IUFM des groupes (CD)AMPERES diffusent, en direction des PLC1 et PLC2 de mathématiques, ces productions et les outils qui permettent de les bâtir.

La question qui motivait les ingénieries didactiques conçues par Guy Brousseau s'est historiquement déplacée. Elle n'est plus « Est-il possible d'enseigner cette notion avec toutes les propriétés souhaitées ? », car la preuve en a été administrée pour les mathématiques de l'école primaire, au COREM de l'Ecole Michelet de Talence. Elle devient « Comment pourrait-on créer les conditions d'enseignement de cette notion dans un nombre significatif de classes et auprès d'un nombre significatif d'élèves par classe ? » (Mercier, 2002). L'ambition est plus modeste, mais engage vers la prise en compte de questions difficiles : celles de la ***conception*** d'un tel type d'enseignement, de la ***formation*** de professeurs capables de le faire vivre, de la continuation des ***recherches*** portant sur les contraintes à lever, celles à conserver, les conditions nouvelles à mettre en place.

Car il faut étudier les conditions de réalisation effective de telles activités et de tels parcours, ce qui signifie qu'il est nécessaire de :

- procéder à des ***analyses mathématiques*** et ***didactiques*** *a priori* et *a posteriori* ; et qu'il faut donc savoir mener,
- ***laisser du « jeu »***, sous contrôle théorique *a priori*, au professeur, alors que le déroulement des séances était fortement encadré en ce qui concerne les ingénieries didactiques initiales,
- ne pas placer une confiance exclusive dans les milieux dénués d'intentions et avec lesquels interagissent les élèves, mais laisser ***de la place pour les médias*** (professeur, manuels, livres, Internet…),
- concevoir *a priori* cette organisation ***à partir des outils venus de la seule théorie de l'enseignement des mathématiques existant à ce jour, la didactique*** : moments de l'étude, types de situations, questions « cruciales » à dévoluer aux élèves, anticipation de leurs réactions à partir de leurs connaissances antérieures, faire la part entre milieu et média, etc.,
- ***observer*** la (les) passation(s), ***analyser*** *a posteriori*, retoucher éventuellement organisations didactique et mathématique,
- rédiger un document ***exigeant*** mais utilisable par les professeurs, explicitant les choix et leurs conséquences (ainsi que les non choix), laissant un certain « jeu », contribuant à la formation professionnelle, etc.

2. Les conditions professionnelles dont il faut disposer

Au plan des pratiques professionnelles, ou encore en se situant au niveau de la profession enseignante dans son ensemble, il est encore nécessaire de :

- oser ***déconstruir**e,* interroger ses propres connaissances mathématiques,
- oser ***mener une enquête***, questionner le savoir que l'on a à enseigner aux plans épistémologique et didactique et rechercher des éléments de réponse,
- ***prendre en compte la distance*** entre savoir savant et savoir (didactiquement) transposé,
- ***investir le « jeu »*** autorisé par le programme,
- varier ses ***ressources*** en ne faisant pas seulement confiance aux manuels,
- travailler en ***équipes***, mobiliser ***d'importants moyens***.

Au plan de la formation initiale et continue des professeurs, il est nécessaire d'enseigner afin que les professeurs sachent :

- utiliser les outils pour des choix didactiques à partir d'une ***analyse raisonnée, outillée*** d'éléments théoriques
- comment est organisé le savoir à enseigner, quels sont ses rapports avec les autres éléments de savoir (son écologie),
- mener des analyses *a priori* d'organisations didactiques : comment dévoluer aux élèves une question qui motive le savoir et engage dans son étude, quelle « distance » choisir, quelles conséquences prévisibles,
- quels sont les ***moments didactiques*** par où l'on fera passer les élèves (première rencontre, élaboration d'une technique, institutionnalisation, travail de la technique),
- quels seront ***les rôles*** respectifs du professeur et des élèves au cours de ces moments,
- comment ***relancer l'étude*** par les questions incontournables qui surgissent d'une dynamique de recherche,
- quels sont les ***obstacles*** qui relèvent du savoir, des connaissances antérieures,
- prévoir quels savoirs ont des chances ***d'émerger de l'activité*** des élèves.

3. Les conditions de recherche préalables à toute implantation d'une démarche d'investigation au sein du système éducatif

L'exposé de quelques-unes des conditions qui précèdent renvoie à la formation des enseignants, ou encore à l'existence d'une culture professionnelle enseignante. Disposer d'une telle culture professionnelle signifierait rompre avec la situation actuelle, pour en faire advenir une, inédite, où chacun ne serait plus considéré comme un producteur isolé de son enseignement, mais disposerait de ressources éprouvées, partagées, validées, réfutables non de manière subjective mais à partir d'outils reposant, comme tout outil, sur une théorie qui permet de le concevoir, et de justifier et comprendre les raisons de son efficacité. Force est de constater que les quelques associations professionnelles existantes sont loin de remplir ce rôle, et que l'Etat, lui non plus, ne le remplit pas, que ce soit dans la formation délivrée ou dans la mise à disposition de telles ressources professionnelles.

Au-delà de ce constat, mais comme un des préalables aux changements espérés, il est encore nécessaire d'apporter des réponses à des questions de recherche :

- Est-il déjà possible de faire ***vivre localement***, dans le système tel qu'il est, un enseignement bâti autour de Parcours d'Etude et de Recherche ou de démarche d'investigation ? A quelles conditions didactiques ? Quels effets en termes de rapport des élèves aux mathématiques, de rapport des professeurs à leur enseignement ? Quelle formation ?
- A quelles conditions, éventuellement à créer, ce type d'enseignement peut-il ***être étendu*** ? Est-ce envisageable, souhaitable ? A quelles contraintes se heurte-t-il ?
- L'entièreté des programmes tels qu'ils sont, c'est-à-dire conçus sans une ***réflexion didactique suffisante,*** peut-elle être envisagée sous forme de Parcours d'Etude et de

Recherche ou de démarche d'investigation ? Sinon quoi ? Est-ce souhaitable ? Faut-il repenser le curriculum ?

- Comment tenir compte de ***l'imprévu***, du contingent dans le déroulement du travail d'étude en classe et qui fait parfois sortir du processus de recherche ou au contraire l'accélère ?
- Comment laisser du « jeu », ***des degrés de liberté***, au professeur, sans dénaturer les situations proposées, les faire dévier des finalités escomptées ?
- Sur quelles ***ressources*** mathématiques et didactiques s'appuyer pour la conception de Parcours d'Etude et de Recherche ou de démarche d'investigation ?

Faute d'avoir sérieusement envisagé au préalable de répondre à ces questions, d'avoir modifié certaines des conditions de l'enseignement ordinaire, les activités se présentant comme d'investigation, issues de bricolages plus ou moins heureux, risquent fort de rester « le plus souvent et fondamentalement au service de ***l'illustration*** d'un contenu conceptuel » (Coquidé, Fortin, Rumelhard, 2009), et non de sa production par les élèves au sein d'un processus effectif qui les engagerait dans la recherche.

Éléments bibliograhiques

BACHELARD G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Librairie philosophique J. Vrin, 14e édition 1989, Paris.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

BROUSSEAU N. & BROUSSEAU G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux

CHEVALLARD Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur**,** *Recherches en didactique des mathématiques*, 17/3, 17-54.

CHEVALLARD Y. (2004) Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire mai 2004. T**exte préparé en vue d'une communication aux *Journées de didactique comparée 2004 (Lyon, 3-4 mai 2004*). Version retouchée du 19 mai 2004. Disponible à l'adresse : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45**

COQUIDE M., FORTIN C., RUMELHARD G. (2009) L'investigation : fondements et démarches, intérêts et limites. *Aster*, 49, 51-78.

FABRE M. (2009) *Philosophie et pédagogie du problème.* Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

MATHERON Y. (2008) Le projet AMPERES. In *Cahiers Pédagogiques n° 466* 55 - 57

MATHERON Y. (2009) Praxéologies professionnelles enseignantes en mathématiques : le problème de l'enseignement parcellaire en sujets et en thèmes. In J. Clanet (Ed.) *Recherche/formation des enseignants. Quelles articulations ?* (pp. 111-125). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

MERCIER A. (2002) Note de synthèse. La transposition didactique des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* n°141 135 – 171.

ROCARD M, CSERMELY P., JORDE D., LENZEN D., WALBERG-HENRIKSSON H., HEMMO V. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe.* Commission Européenne, Direction générale de la recherche, Science, économie et société.
WESTBROOK R. (1993) John Dewey. *Perspectives : revue trimestrielle d'éducation comparée*, vol. XXIII, n° 1-2, 1993, 277-293.

Que nous disent les évaluations internationales sur les compétences de nos élèves en matière de résolution de problèmes ?

Antoine Bodin

IREM de Marseille

Résumé

Quels cadres de référence ? Quels types de problèmes testés ? - Résultats et difficultés observés - Rapport avec la pratique ordinaire des classes - Quelle prise en compte possible ? Lien avec la problématique du socle commun.

1. Avertissement préalable

Pour avoir une idée de ce que les études internationales peuvent nous dire sur les compétences de nos élèves en matière de résolution de problèmes, il convient de s'entendre sur le sens à donner au mot problème et de s'accorder sur la présence ou non de problèmes dans le questionnement utilisé dans ces études.

À moins d'étendre la notion de problème à toute question appelant un traitement utilisant plus ou moins les mathématiques ou, simplement, la logique commune, il faut au moins, à chaque fois que l'on utilise le mot problème, se demander de quel type de problème on parle.

Sur la notion même de problème, ou plutôt sur les notions de problème, nous renvoyons en particulier à Polya [2], Glaeser [3], Bouvier [4] (articles « problème » et *« problem solving »*), Bodin [5].

Les études internationales comme d'autres études de même type, cherchent à évaluer les connaissances et les compétences des élèves relatives à un domaine ou à un thème donné en utilisant des ensembles de questions qui se veulent des révélateurs du savoir, mais qui sont aussi des filtres plus ou moins grossiers. Une question elle même ouvre parfois sur plusieurs items qui correspondent à autant de ou sous-questions.

Une partie de la question peut être l'exposé d'une situation. Par exemple un extrait d'horaires de bus est proposé dans un habillage plus ou moins riche. Nous avons là l'exposé d'une situation. L'item lui même ou les items relatifs à cette situation se présentent au sens propre sous forme de questions : « est-il vrai que… ? », « Pierre veut arriver à B avant midi ? », Quels bus peut-il prendre ?.... ou encore, d'actions à exécuter : « coche la bonne case », « complète le tableau », « explique ta méthode »… Certaines questions se réduisent à un item. Il n'y a pas mise en situation : « Quel est le cube de 3 ? »,… Le vocabulaire utilisé est loin d'être univoque, d'autant que dans les études internationales la langue de travail est l'anglais et que les concepts comme les pratiques sont empruntés à des univers culturels bien différents du nôtre. Dans certains cas, les mots, même lorsqu'ils s'écrivent de la même façon en anglais et en français (les homonymes translangagiers) n'ont pas toujours la même signification lorsque l'on passe d'une langue à l'autre). Dans d'autres cas les mots utilisés dans une langue n'ont pas de traduction unique dans l'autres. Le mot compétence en français, par exemple évoque immédiatement dans nos milieux un débat, voir une querelle, qui n'a aucun équivalent dans les pays de langue anglaise. Dans les versions françaises des documents issus des études internationales, le mot compétence est très souvent utilisé pour traduire le mot « *skill* » qui est d'usage beaucoup plus ancien et qui ne véhicule aucune connotation du type de celles associées en français au mot compétence. Cela pour rappeler qu'ici plus qu'ailleurs il faut être attentif à définir la signification que l'on donne aux mots utilisés.

2. Les études internationales en mathématiques : TIMSS et PISA

En ce qui concerne les mathématiques, deux études internationales se complètent ou se font concurrence selon le cas : les études TIMSS (*Trends in Mathematics and Science Studies*), héritière des études menées par l'IEA depuis 1960 et les études PISA menées par l'OCDE depuis l'année 2000. Études reprises et complétées tous les trois ans. La prochaine étude aura lieu en 2012 et comme en 2009 sera plus spécialement centrée sur le domaine mathématique.

Les études TIMSS sont liées aux programmes habituellement enseignés dans les différents pays. Elles sont « curriculum dépendantes ». Dans ces études, on pose des questions portant directement sur des connaissances particulières, sur l'utilisation de procédures, sur le raisonnement mathématique, sur la capacité à communiquer. On pose aussi des questions désignées comme relevant de la « résolution de problème », distinguées des précédentes. Dans l'étude TIMSS de 1995, la dernière à laquelle la France a participé, seul le tiers des questions posées sont qualifiées de problèmes. Toutefois, si l'on se réfère aux conceptions évoquées ci-dessus, et courantes dans notre pays, on pourra avoir du mal à accepter cette qualification pour nombre d'énoncés.

Par exemple (questions TIMSS 1999, niveau Quatrième) :

- Un coureur parcourt 3000 m en exactement 8 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne en mètres par seconde ?

  Réponse : A. 3,75 B. 6,25 C. 16,0 D. 37,5 E. 62,5

- Si le produit par 4 d'un nombre est 48, à quoi est égal le tiers de ce nombre ?

  Réponse : A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

Ces questions sont des questions à choix multiples comme le sont environ 75% des questions de TIMSS.

La dernière étude TIMSS à laquelle la France a participé date de 1995. Disons simplement qu'elle mettait en évidence, chez les élèves de notre pays (niveaux Quatrième et Terminale), des difficultés particulières à utiliser leurs connaissances dans des situations non formelles (problèmes plus ou moins concrets, supposant interprétation et construction de démarches). Plus précisément, alors que les questions de type formelles étaient plutôt mieux réussies dans notre pays que dans beaucoup d'autres pays, les questions en lien avec la vie courante et concrète étaient, elles, nettement moins bien réussies. Déjà, à cette époque, la distance entre ceux qui réussissaient le mieux et ceux qui réussissaient le moins bien apparaissait plus grande que ce que l'on pouvait observer dans beaucoup d'autres pays et, en particulier, dans les pays du Nord de l'Europe. Tout ce que l'on voit aujourd'hui avec les études PISA qui font à intervalle régulier (tous les 3 ans), les délices des media était déjà visible il y a 15 ans à travers les études TIMSS.

3. Les études PISA

Dans la suite de cet article il ne sera plus question que de PISA. D'une part parce que la France ne participe plus aux études TIMSS et d'autre part parce que la place du problème dans TIMSS, quel que soit le sens que l'on donne à ce mot, est assez peu importante.
Pour des détails sur l'organisation de ces études, nous renvoyons à la bibliographie et nous nous limiterons ici à ce qui a un rapport avec la place qu'elle accordent aux problèmes.

3.1. Les problèmes dans PISA

Tout d'abord, est-il correct de parler de problèmes dans PISA ?
Certes, il y a présentation de situations qui peuvent être assez complexes (on verra plus loin des exemples). Mais si l'on considère que l'élève a moins de 2 minutes à consacrer à chaque item, on peut observer que le processus de résolution, s'il s'enclenche, devra être réduit au minimum. Il faut comprendre rapidement la situation et exécuter rapidement la consigne. Pas question ici de mettre en œuvre les 6 ou 8 étapes de résolution souvent associées à la notion de recherche de problème. En fait on est plus proche du « *problem solving* » anglo-saxon, que du problème telle que nous le concevons habituellement. Cette restriction étant faite, nous utiliserons cependant le mot problème pour les énoncés de PISA comme le font les documents officiels de l'OCDE et comme le font ensuite la plupart des commentateurs. Il convient simplement de rester conscient de l'acception réductrice que PISA donne à ce terme.

3.2. La littéracie dans PISA

Par rapport à ce qui a été dit plus haut de TIMSS, les choses sont très différentes dans PISA. D'une part, PISA ne s'intéresse pas directement aux programmes d'enseignement, mais plutôt à ce qu'il est convenu d'appeler la littéracie ; elles se veulent indépendantes du curriculum.
Plus précisément, pour PISA :

> *« …la notion de « littéracie » …renvoie à la capacité des élèves d'exploiter des savoirs et savoir-faire dans des matières clés et d'analyser, de raisonner et de communiquer lorsqu'ils énoncent, résolvent et interprètent des* **problèmes** *qui s'inscrivent dans divers contextes. »* [6]
>
> *« La maîtrise des matières du programme de cours, comme les langues, les mathématiques et les sciences, est essentielle…, mais les élèves doivent également posséder un véritable arsenal de savoir-faire pour être bien armés pour l'avenir. Parmi ces savoir-faire figurent les compétences en* ***résolution de problèmes****, c'est-à-dire la capacité de comprendre des problèmes situés dans des contextes inédits et transdisciplinaires, d'identifier des informations ou des contraintes pertinentes, d'imaginer des processus de résolution alternatifs, d'élaborer des stratégies de résolution de problèmes, de résoudre les problèmes et de communiquer leur solution. » [1]*

La dernière citation met en évidence le fait que, pour PISA, la notion de problème n'est pas limitée au domaine mathématique.

Les études PISA portent en fait sur trois types de littéracie : la compréhension de texte, la littéracie mathématique et la littéracie scientifique. Plus, du moins pour l'étude de 2003, un domaine transdisciplinaire :... la résolution de problème [1].
En ce qui concerne la littéracie mathématique, voici la définition qu'en donne PISA :

> *« La littéracie mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde, à produire des jugements fondés, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi. »*

Et encore :

> *« ... la « littéracie mathématique » ne peut se réduire à la connaissance de la terminologie mathématique, de propriétés et de procédures, ni aux savoir-faire permettant d'effectuer certaines opérations ou d'appliquer certaines méthodes, tout en présupposant, bien sûr, l'existence de ces compétences. Ce qui caractérise la littéracie mathématique est la mise en œuvre créative de ces compétences pour répondre aux exigences suscitées par les situations externes où se trouve l'individu. » [ ]*

L'étude du questionnement de PISA et celles des corrélations existantes entre les différents domaines de l'étude (compréhension de texte, mathématiques, sciences) conduit à penser que PISA évalue en réalité une discipline qui ne serait ni le français, ni les mathématiques, ni les sciences, mais un discipline nouvelle que l'on pourrait appeler la PISA-littéracie.
Cette remarque n'enlève aucun intérêt ni aucune légitimité aux études PISA, mais si elle était acceptée, elle conduirait à regarder PISA de façon à la fois plus sereine et plus utile.
On peut même penser, comme l'OCDE, que cette PISA-littéracie est indispensable à tous les citoyens et qu'elle doit constituer un objectif privilégié de tout système éducatif. Cela rejoint la problématique française du socle commun de connaissances et de compétences. Mais on ne peut pas considérer qu'ainsi définie et surtout, comme on le verra plus loin, ainsi évaluée, PISA fournirait une mesure valide de la qualité globale de la formation mathématique donnée dans un pays.
Ainsi, PISA se distingue de TIMSS par son détachement du curriculum (des programmes) et son attachement à la notion de problème - ou du moins à une certaine idée de problème.
D'autre part, la plupart des énoncés de PISA sont de type question ouverte ou semi ouverte (réponse attendue éventuellement réduite à un mot) ; moins du tiers des questions posées le sont en QCM.

3.3. Problèmes et monde « réel » - Processus de mathématisation

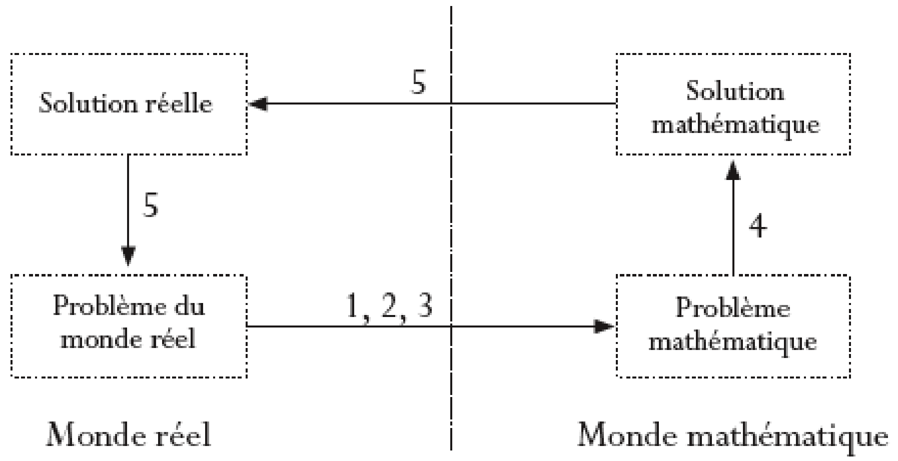
Une expression revient souvent dans les études PISA ; celle de « monde réel - *real life* » et d'aptitude à utiliser ses connaissances et ses savoir-faire dans des situations dans lesquelles l'utilisation des connaissances mathématiques, aussi minimes soient-elles, supposent un traitement préalable passant par la compréhension de la situation (qui, par définition, n'est pas située dans le domaine mathématique), sa traduction en langage mathématique, son traitement mathématique, et finalement l'interprétation des résultats par un retour au « monde réel ».
C'est ce que pisa appelle le cycle de mathématisation.

1. *« Commencer par un problème relevant de la réalité ;*
2. *Organiser le problème en fonction de concepts mathématiques ;*

3. *Effacer progressivement la réalité au travers de divers processus, tels que la formulation d'hypothèses concernant l'identification des principales caractéristiques du problème, la généralisation et la formalisation (dont l'objectif est de faire ressortir les caractéristiques mathématiques de la situation et de transformer le problème réel en un problème mathématique qui soit le reflet fidèle de la situation) ;*
4. *Résoudre le problème mathématique ;*
5. *Comprendre la solution mathématique et l'appliquer à la situation réelle (ce qui implique aussi d'identifier les limites de la solution). »*

Les anciens reconnaîtront ce qui était enseigné naguère, mais seulement à propos du problème d'algèbre, dans toutes les classes de troisième.

Figure 1.3 ■ Le cycle de mathématisation



Les nombres 1 à 5 de la figure renvoient à la définition du cycle de mathématisation.

Remarquons que cette importance donnée à la résolution de problème dans l'enseignement des mathématiques n'est ni nouvelle ni originale. Vergnaud, G. avec d'autres estime en effet que *« La résolution du problème est la source et le critère du savoir opératoire »* [7]. Sans remonter à Platon, ou à Clairaut, on sait combien les pédagogies modernes issues des courants Montessori, Decroly, Freinet, et quelques autres ont installées le problème au centre de l'enseignement des mathématiques. Et là il ne s'agit pas que des problèmes au sens de PISA, mais la problématique définie par l'OCDE y a souvent été intégrée avant la lettre.
Les pédagogies plus traditionnelles ont elles aussi donné ou essayé de donner une grande place à la résolution de problème. Il suffit pour s'en assurer de lire les instructions officielles des années 1920-1930 (et toutes celles qui ont suivi).

3.4 Les trois dimensions de la culture mathématique selon PISA

Pour passer des définitions précédentes à une évaluation de la littéracie mathématique, trois grandes dimensions ont été définies, à savoir (texte adapté du cadre de référence de PISA):

Les contenus (les idées majeures)

Plutôt que de s'attacher au découpage traditionnel (et scolaire) des contenus, le cadre de référence de PISA met l'accent sur des grandes idées mathématiques : variation et croissance, espace et forme, quantité, incertitude.

Les processus et les compétences

Le programme OCDE/PISA étudie les capacités des élèves à analyser des idées mathématiques, à raisonner à leur propos, et à les communiquer à autrui, au moment où ils posent, formulent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques relevant de diverses situations. Pour résoudre ces problèmes, les élèves doivent exploiter les savoir-faire et les compétences qu'ils ont acquis tout au long de leur scolarité et de leurs expériences de vie.

OCDE/PISA désigne par le terme de « mathématisation » le processus fondamental appliqué par les élèves pour résoudre des problèmes concrets[9].

Les contextes

Il s'agit des contextes d'où sont issus les questions de l'évaluation.

Un aspect important de la culture mathématique est de pouvoir utiliser les mathématiques dans des situations très diverses : vie personnelle, vie scolaire, activités sportives ou professionnelles, participation à la vie de la collectivité locale ou de la société en général.

PISA référence ses énoncés en termes de contenu, de contexte, de compétences susceptibles d'être mobilisées, et de groupe de compétence.

Pour plus de détails sur ces trois dimensions, le lecteur pourra se reporter aux documents officiels de PISA ou à Bodin [8]. Donnons simplement une description succincte des groupes de compétences.

Les groupes de compétences

PISA distingue trois grands groupes de compétences. Ces groupes ont été repris à peu près tels quels dans les documents que la Degesco a publié pour accompagner la mise en place du socle commun. Il s'agit de :

Le groupe reproduction.

Les compétences classées dans ce groupe impliquent essentiellement la reproduction de connaissances déjà bien exercées …

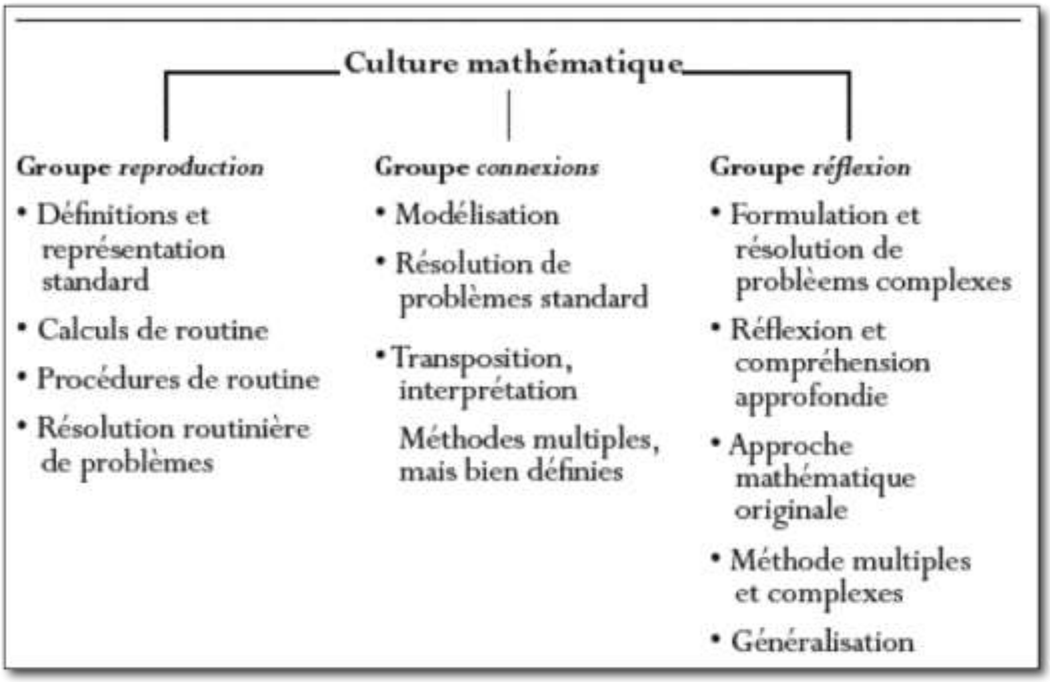
Le groupe connexions

Les compétences du groupe connexions sont dans le prolongement de celles du groupe reproduction, dans la mesure où elles servent à résoudre des problèmes qui ne sont plus de simples routines, mais qui continuent à impliquer un cadre familier ou quasi-familier

Le groupe réflexion

Les activités cognitives associées à ce groupe demandent aux élèves de faire preuve d'une démarche mentale réfléchie lors du choix et de l'utilisation de processus pour résoudre un problème. Elles sont en rapport avec les capacités auxquelles les élèves font appel pour planifier des stratégies de solution et les appliquer dans des situations qui contiennent plus d'éléments que celles du groupe connexions, et qui sont plus « originales » (ou peu familières).

On peut voir dans le tableau résumé que, pour PISA, le qualificatif de problème s'applique à des énoncés relevant des trois groupes de compétences.



Présentation résumée des groupes de compétences

4. Exemples de problèmes posés dans la mathématique de PISA

On ne peut rien comprendre à une évaluation si l'on n'a pas accès à son cadre de référence : quels sont les objectifs que l'on souhaite évaluer, quel est le mode de questionnement, comment sont réparties les questions, comment sont construites les échelles etc.… Mais cela ne suffit pas : il faut de plus avoir accès à un nombre significatif de questions d'évaluation si l'on veut avoir quelque chance de pouvoir interpréter les résultats publiés.
Dans le cas contraire, les acteurs sont soumis aux interprétations officielles, plus ou moins conformes aux conceptions que les décideurs du moment se font du domaine évalué et de l'urgence de décisions à prendre pour améliorer la qualité de l'enseignement (ou plus insidieusement, pour justifier des choix budgétaires).
De ce point de vue, PISA est exemplaire : son cadre de référence est détaillé et facilement accessible, les méthodes utilisées pour les traitements le sont aussi. Environ la moitié des questions utilisées sont mises à la disposition de tous. Il est possible de critiquer les études PISA, voire de rejeter l'épistémologie ou l'idéologie qu'elles sous-tendent, mais au moins on peut le faire en connaissance de cause.

4.1. Exemple 1 : Problème « Déchets »

Pour un devoir portant sur l'environnement, des élèves ont recueilli des informations sur le temps de décomposition des différents types de déchets .

Type de déchets	Temps de décomposition
Peau de banane	1–3 ans
Pelure d'orange	1–3 ans
Boîtes en carton	0,5 année
Chewing-gum	20–25 ans
Journaux	Quelques jours
Gobelets en polystyrène	Plus de 100 ans

Un élève envisage de représenter les résultats de ses recherches sous forme d'un diagramme en bâtons.

Donnez **une** raison pour laquelle le diagramme en bâtons ne conviendra pas pour représenter ces données.

Classement PISA

- Contexte : scientifique.
- Domaine : Incertitude.
- Groupe de compétence : Réflexion

Consignes de codage

Crédit complet :

Donne une raison qui se fonde sur la très grande variance dans les données.

- Les différences de longueur entre les bâtons demanderaient un diagramme beaucoup trop grand.
- Si le bâton qui représente le polystyrène mesure par exemple 10 centimètres, celui des boîtes en carton ne mesurerait que 0,05 centimètre.

OU

Donne une raison qui se fonde sur la variabilité des données pour certaines catégories.

- La longueur du bâton correspondant aux « gobelets en polystyrène » n'est pas déterminée.
- On ne peut pas représenter 1 3 ans ou 20–25 ans par des bâtons.

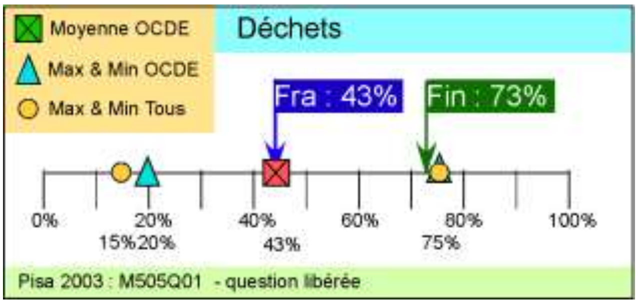
Pas de crédit :

Autres réponses.

- Parce que cela ne fonctionnera pas.
- Un pictogramme, c'est mieux.

- On ne peut pas vérifier l'information.
- Parce que les nombres indiqués dans le tableau ne sont que des approximations.

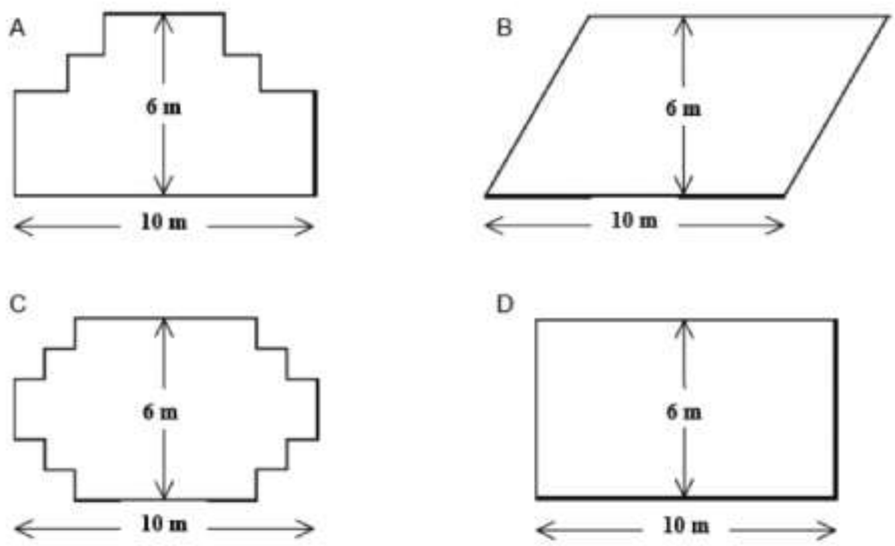
Avoir accès aux questions ne suffit pas. Il faut aussi connaître les consignes de codage associées. Pour cette question « déchets » nous avons détaillé ces consignes. Pour les suivantes nous seront plus succincts, renvoyant là aussi à la bibliographie.
Cette question a été réussie par 52% des élèves de l'OCDE. Elle est considérée comme étant de difficulté moyenne et illustre le niveau 4 de PISA avec un indice de difficulté de 551.



La figure ci-contre met en évidence quelques résultats à cette question, pour divers pays de l'étude. Sur cette question, on voit l'écart considérable existant entre les taux de réussite observés en France (Fra) et en Finlande (Fin).
La question demande de porter un jugement personnel sur une action envisagée par un tiers et d'exprimer ce jugement avec ses propres mots. Deux types de comportements devant lesquels, d'une façon générale, les élèves français sont particulièrement mal à l'aise.

4.2. Exemple 2 : Problème « Menuisier»

Un menuisier dispose de 32 mètres de planches et souhaite s'en servir pour faire la bordure d'une plate-bande dans un jardin. Il envisage d'utiliser un des tracés suivants pour cette bordure :

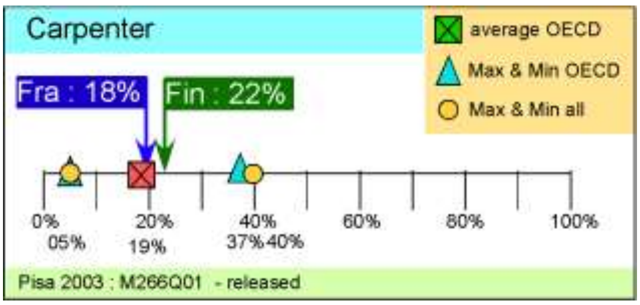


Indiquez, pour chacun des tracés, s'il peut être réalisé avec les 32 mètres de planches. Répondez en entourant « Oui » ou « Non ».

Tracé de la bordure	En utilisant ce tracé, peut-on réaliser la plate-bande avec 32 mètres de planches ?
Tracé A	Oui / Non
Tracé B	Oui / Non
Tracé C	Oui / Non
Tracé D	Oui / Non

Classement PISA

- Contexte : éducatif et professionnel.
- Domaine : Espace et formes.
- Groupe de compétence : Connexions



Cette question a été réussie par 20% des élèves de l'OCDE. Elle est considérée comme étant de difficulté supérieure et illustre le niveau 6 de PISA avec un indice de difficulté de 687.
Mais où se niche la difficulté ? Remarquons déjà que cette question est une QCM d'un type particulier et que le crédit complet n'est donné que si les 4 réponses sont exactes. Pour qui n'a jamais rencontré ce type de question, les items A et C relèvent de la catégorie problème au sens

par exemple de Polya. Les élèves, cependant n'ont sans doute pas vu le problème et, s'ils l'ont vu non certainement pas eu le temps de le résoudre, ce qui supposait des déformations de la figure conservant le périmètre ; déformation - transformation qui n'a rien d'évident. Les élèves asiatiques, habitués aux QCM et en particulier aux questionnaires de type Quizz ou il faut aller très vite et, lorsque l'on n'a pas la réponse immédiatement, choisir celle qui paraît la plus plausible sont évidemment avantagés. Mais de quelle éducation mathématique fait-on alors l'apologie. Des chercheurs chinois et japonais s'élèvent contre ce jeu de « l'enseignement pour le test » et du remplacement de la preuve par la simple impression d'exactitude. Nous pouvons sans doute chercher à améliorer nos résultats aux études internationales, mais au prix d'un abandon de ce qui fait l'essence même des mathématiques.
C'est une caractéristique souvent remarquée chez nos élèves : ils hésitent à répondre lorsqu'ils ne sont pas certains de leur réponse. Il suffirait sans doute que les réponses fausses entraînent des pertes de points pour améliorer les résultats français. On le sait, c'est ce qui se fait couramment dans les examens sérieux utilisant des QCM (cela pour ramener l'espérance mathématique du score à 0 lorsque les réponses sont données au hasard).
Remarquons cependant que ce qui a fait chuter les résultats, c'est moins les items A et C que l'item B. En fait les scores correspondants à une seule erreur au plus sont à peu près doubles des scores correspondants à 0 erreur. Et dans ce cas c'est plus souvent B qui est faux que l'un des trois autres. Pourtant, là, il n'y a pas vraiment de problème. L'oblique est plus longue que la perpendiculaire, c'est tout ! Et ça relève de la perception (même animale), plus que de la modélisation géométrique. Il est vraisemblable que le souci d'aller vite et la réalité de la difficulté pour A et C auront eu raison ici de la vigilance de beaucoup d'élèves.
Cette question est-elle pour autant une mauvaise question ? Si elle n'a pas été éliminée lors de la phase expérimentale de l'étude, c'est qu'elle est très liée au score général des élèves. Autrement dit les élèves qui sont assez rapide et assez vigilants pour ne pas se laisser distraire par le leurre que représente l'item B sont aussi ceux qui réussissent bien l'ensemble des questions auxquelles ils ont eu à répondre.

4.3. Exemple 3 : Problème « Contrôle de sciences »

Au collège de Karima, son professeur de sciences fait passer des contrôles qui sont notés sur 100. Karima a obtenu une moyenne de 60 points pour ses quatre premiers contrôles de sciences. Pour son cinquième contrôle, elle a une note de 80 points.

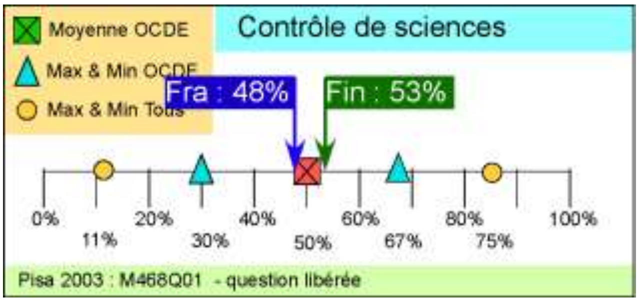
Quelle sera la moyenne des notes de Karima en sciences après les cinq contrôles ?

Moyenne : ....

Classement PISA

- Contexte : éducatif et professionnel.
- Domaine : incertitude.
- Groupe de compétence : Reproduction

Cette question a été réussie par 47% des élèves de l'OCDE. Elle est considérée comme étant de difficulté supérieure et illustre le niveau 4 de PISA avec un indice de difficulté de 556.
Il s'agit là d'un type de problème que l'on rencontre fréquemment dans le curriculum français.



5. *Le volet « problem solving» dans PISA 2003*

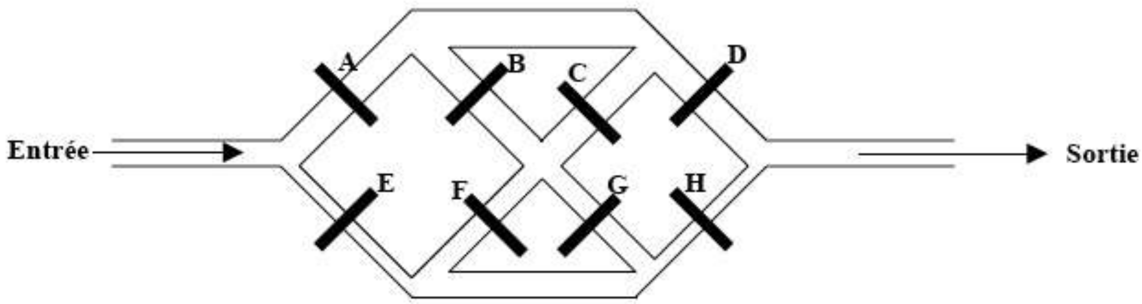
Pour bien montrer que la notion de problème ne concernait pas que le domaine mathématique. L'étude 2003 a été comprté un volet « problem solving » distinct du volet mathématique. Les situationsont encore (et davantage) des situations issues de la vie réelle mais les outils de résolution sont plutôt de type logique et organisationels.
Voici un exemple typique de question posée dans ce cadre.

5.1. Exemple 4 : Problème « Irrigation»

Le schéma ci-dessous représente un système de canaux destiné à l'irrigation de parcelles cultivées. Les vannes A à H peuvent être ouvertes ou fermées pour amener l'eau là où elle est nécessaire. Quand une vanne est fermée, l'eau ne passe pas.

Dans ce problème, il s'agit d'identifier une vanne qui est bloquée, empêchant l'eau de s'écouler au travers du système de canaux.

Schéma 1 : Un système de canaux d'irrigation



Michel a remarqué que l'eau ne s'écoulait pas toujours là où elle était censée le faire.

Il pense qu'une des vannes est bloquée en position fermée, de sorte qu'elle ne s'ouvre pas, même lorsqu'on en commande l'ouverture.

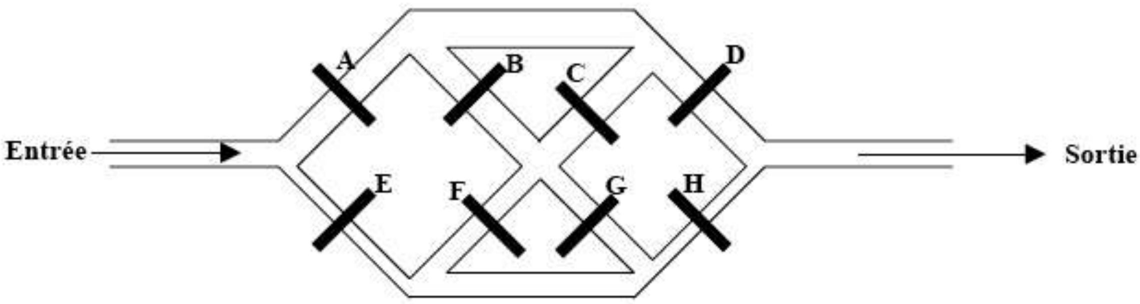
Irrigation - Question 1

Michel utilise les réglages présentés par le tableau 1 pour tester le fonctionnement des vannes.

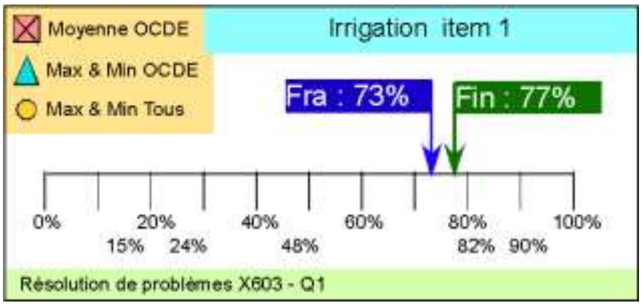
Tableau 1 : Réglages des vannes

A	B	C	D	E	F	G	H
Ouverte	Fermée	Ouverte	Ouverte	Fermée	Ouverte	Fermée	Ouverte

Compte tenu des réglages qui figurent au tableau 1, et en supposant que toutes les vannes fonctionnent correctement, tracez **sur le schéma ci-dessous** tous les chemins possibles par où l'eau peut s'écouler.



et un aperçu des résultats :

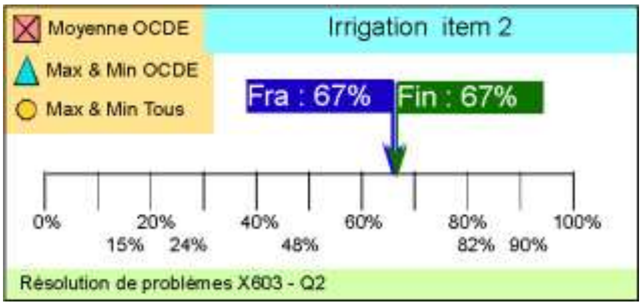


Irrigation - Question 2

Michel s'aperçoit que, quand les vannes sont réglées comme indiqué dans le tableau 1, il n'y a pas d'eau qui s'écoule à la sortie, indiquant qu'au moins une des vannes réglées en « position ouverte » est en fait bloquée en position fermée.

Pour chacune des pannes décrites ci-dessous, indiquez si l'eau s'écoulera jusqu'à la sortie. Entourez « Oui » ou « Non » pour chaque panne.

Panne	L'eau s'écoulera-t-elle jusqu'à la sortie ?
La vanne **A** est bloquée en position fermée. Toutes les autres vannes fonctionnent correctement selon les réglages du tableau 1.	Oui / Non
La vanne **D** est bloquée en position fermée. Toutes les autres vannes fonctionnent correctement selon les réglages du tableau 1.	Oui / Non
La vanne **F** est bloquée en position fermée. Toutes les autres vannes fonctionnent correctement selon les réglages du tableau 1.	Oui / Non



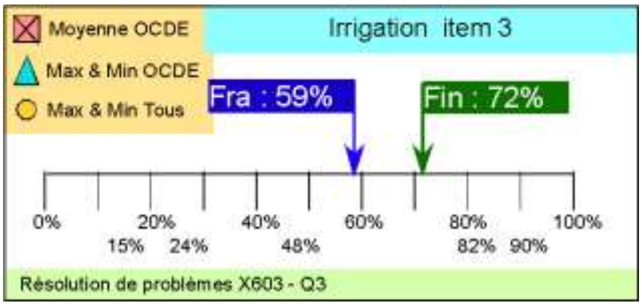
Irrigation - question 3

Michel veut pouvoir tester si la **vanne D** est bloquée en position fermée.

Dans le tableau ci-dessous, indiquez comment devront être réglées les vannes pour savoir si la **vanne D** est bloquée en position fermée alors qu'on l'a réglée en « position ouverte ».

Réglages des vannes (« Ouverte » ou « Fermée » pour chacune)

A	B	C	D	E	F	G	H



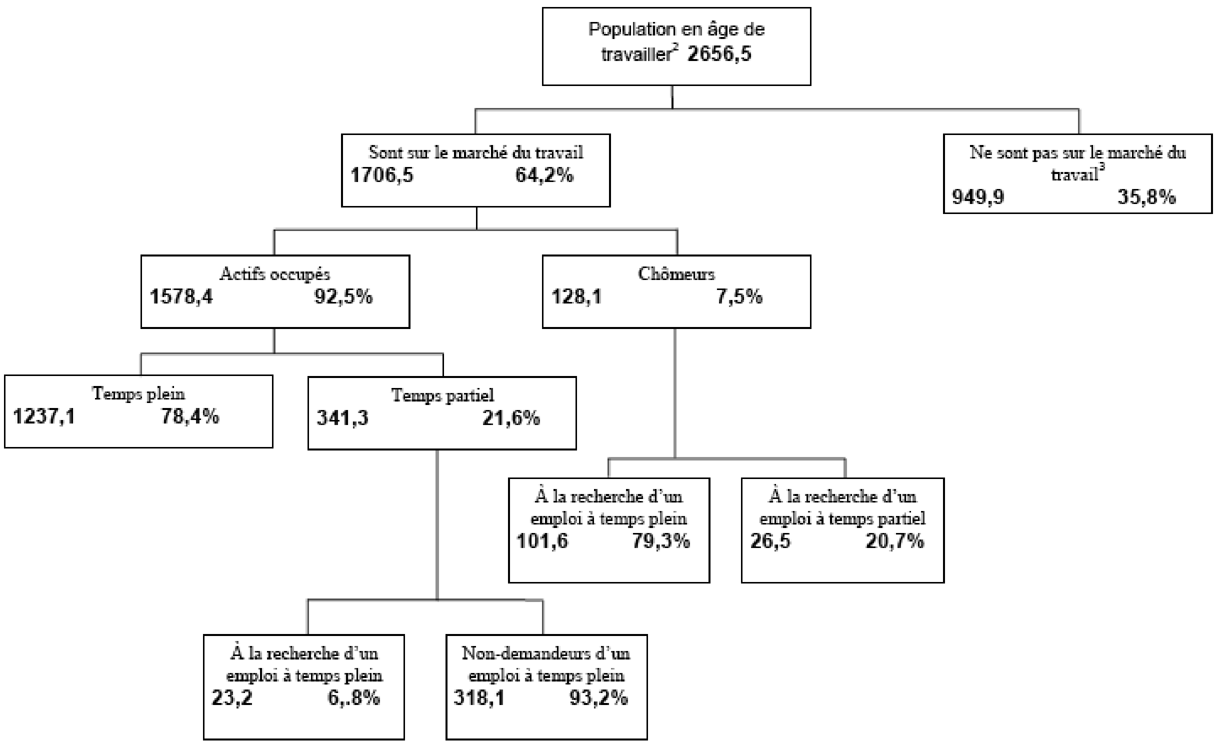
6. Les mathématiques et les problèmes dans les autres domaines

Il est naturel que des demandes de type mathématique se rencontrent en littéracie scientifique. La place nous manque pour présenter des exemples et il nous semble plus intéressant de montrer que les mathématiques et dans un certain sens, le problème, ne sont pas absent du volet compréhension de texte.

6.1 Exemple 5 : question du domaine compréhension de texte (reading littéracie)

Le diagramme en arbre ci-dessous présente la structure de la population active d'un pays, C'est-à-dire sa «population en âge de travailler». En 1995, la population totale de ce pays était d'environ 3,4 millions d'habitants.

La structure de la population active au 31 mars 1995 (x 1 000)



Notes

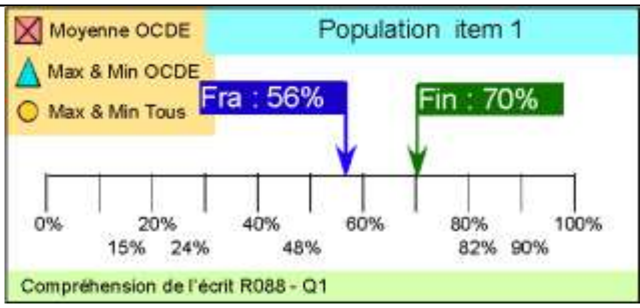
1. Le nombre de personnes est exprimé en milliers (x 1 000).
2. La population en âge de travailler est définie comme l'ensemble des personnes âgées de 15 à 65 ans.
3. Les personnes qui «ne sont pas sur le marché du travail» sont celles qui ne sont pas activement à la recherche d'un emploi ou ne sont pas disponibles pour travailler.

La question elle même comporte 5 items. Nous n'en présentons ici qu'une seule.

Population active - question 1

Quels sont les deux groupes principaux entre lesquels se répartit la population en âge de travailler ?

A Les travailleurs et les chômeurs.
B Les personnes en âge de travailler et celles qui ne sont pas en âge de travailler.
C Les travailleurs à temps plein et les travailleurs à temps partiel.
D Les personnes sur le marché du travail et celles qui ne sont pas sur le du marché du travail.



7. En guise de conclusion

Il a paru important de profiter de cette communication pour tenter de mieux informer le lecteur sur le questionnement de PISA dans les différents domaines étudiés. Un regard sur ce questionnement permet de mieux comprendre quels types de compétences sont réellement évaluées par PISA. Il permet aussi de mieux comprendre pourquoi les corrélations observés entre les différents domaines sont si importantes : corrélations plus élevées que ce que l'on observe habituellement à l'intérieur même du domaine mathématique.

Faut-il s'en plaindre ou plutôt constater que cela plaide pour le statut à part qu'il convient de donner à la littéracie ? Une première conclusion serait qu'une étude reste à faire en ce qui concerne les compétences de nos élèves en matière de résolution de problèmes.

Toutefois, le domaine mathématique se distingue des autres domaines de l'étude par les jugements que les élèves portent sur lui. En effet, en France, les élèves déclarent être très anxieux devant une question ou un problème de mathématique et cela beaucoup plus que dans la plupart des autres pays. Nous avons déjà dit qu'ils avaient peur de se tromper et qu'ils avaient peu de goût pour la prise de risque. En schématisant, ils font lorsqu'ils savent qu'ils savent faire. Dans le cas contraire ils ont tendance à s'abstenir de chercher.

On comprend alors que l'institution cherche à promouvoir la démarche d'investigation dans les pratiques (cf. les instructions). Toutefois cela suppose une formation sérieuse des enseignants, initiale et continue. Formation qui demande du temps et des moyens qui font bien défaut aujourd'hui. Cela suppose que le temps d'enseignement comme les attentes ne se réduisent pas eux aussi comme une peau de chagrin. Il sera difficile de déclarer simultanément que le socle commun de connaissances et de compétences est acquis par tous les jeunes de 16 ans - cela essentiellement pour satisfaire aux demande de la LOFT - et d'obtenir des résultats aux études objectives qui démentiront fortement ces résultats.

Références

[1] OECD 2004 : Problem Solving for Tomorrow's World. First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003. (Publié en français sous le titre : Résoudre des problèmes, un atout pour réussir - Premières évaluations des compétences transdisciplinaires issues de PISA 2003)

[2] Polya, G. (1965) : Comment poser et résoudre un problème - DUNOD - Paris.

[3] Glaeser & al., Irem de Strasbourg (1976) : Le livre du problème, vol.1, CEDIC - Paris

[4] Bouvier, A & al. (1986) : Didactique des mathématiques. Le dire et le faire.Cedic/Nathan

[5] Bodin, A. (2002) : Comment classer les questions d'évaluation. Colloque international de Kangourou sans frontières

[6] OCDE 2004 - Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003.

[7] Vergnaud, G. (1989) : Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. Petit x, n° 22 pp. 51 à 69.

[8] Bodin, A . (2005) : Classification des questions d'évaluation et cadre de référence des études PISA pour les mathématiques – présentation commentée pour les enseignants. (Pages EVAPM et PISA du site de l'APMEP)

Bibliographie complémentaire

Bodin A. : 1997, Une présentation de la Troisième Étude Internationale sur l'enseignement des Mathématiques et des Sciences - Considérations sur la démarche, sur les résultats, sur l'intérêt de l'étude - Dossier d'information sur TIMSS - IREM de Besançon.

Bodin, A. (2006) : Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue Français. Bulletin de l'APMEP. Num. 463. p. 240-265.

Bodin, A. (2006) : Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. De la première étude menée en 1960 aux études TIMSS et PISA … en passant par les études de la DEP et d'EVAPM. Communication séminaire de l'EHESS. Repères IREM, N°65, octobre 2006.

Bodin, A. (2007) : What does PISA really assess? What it doesn't? A French view. In S. Hopman, G. Brinek, M. Retzl (éds): PISA according to PISA. Wien: Lit Verlag, 2007. Download : http://www.univie.ac.at/pisaaccordingtopisa

Bodin, A. (2008) : Lecture et utilisation de PISA pour les enseignants. Petit x ; n° 78, pp. 53-78, IREM de Grenoble.

Bodin, A. (2009) : L'étude PISA pour les mathématiques. Résultats français et réactions. Gazette des mathématiciens N°120 (Société Mathématique de France).

OECD (2009) : Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA.

Steen, L. A (ed) : (1990), On the shoulders of the giants - new approaches to numeracy. National Academic Press (Washington)

Internet

Pisa sur le site de l'APMEP site : http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique114
Contributions to the Joint Finnish-French Conference "Teaching mathematics: beyond the PISA survey » Paris 6 - 8 octobre 2005
http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/France-Finlande-2005/ResumeConferences.html
Voir aussi site personnel de l'auteur :
http://web.me.com/antoinebodin/pro/. (pages PISA)

Une formation de professeurs stagiaires sur les démarches d'investigation

Michèle GANDIT

IUFM de Grenoble,

Maths à modeler, Université Joseph Fourier
michele.gandit@ujf-grenoble.fr

Résumé

Nous présentons les résultats d'une recherche et la formation proposée à l'IUFM aux professeurs stagiaires en mathématiques, en 2009/2010. La recherche, menée conjointement en mathématiques, SPC et SVT, s'inscrit dans le cadre du projet européen S-TEAM. Il s'agit de mesurer les effets de la formation à la pratique en classe d'une démarche d'investigation. La formation intègre à la fois une dimension spécifique à la discipline et une dimension sociale du métier d'enseignant, le travail collaboratif enseignant. Nous présenterons ces deux aspects tels que nous les avons abordés en mathématiques. Seul l'aspect disciplinaire de la recherche sera abordé (épistémologie, enseignement et apprentissage). Nous proposerons de réfléchir sur la méthodologie (outil de mesure construit et modalités d'utilisation).

Nous présentons les résultats d'une recherche et la formation proposée à l'IUFM aux professeurs stagiaires en mathématiques, en 2009/2010. La recherche, menée conjointement en mathématiques, sciences physiques et chimiques (avec J.-C. Guillaud) et sciences de la vie et de la terre (avec E. Triquet) s'inscrit dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) (Grangeat 2009), dont les objectifs sont de trouver des réponses au manque de vocations scientifiques et aux difficultés d'enseigner les sciences de manière à motiver les élèves.
La formation dispensée intègre à la fois une dimension spécifique à la discipline et une dimension sociale du métier d'enseignant, le travail collaboratif enseignant, qui constitue le thème central du projet S-TEAM. Les questions de recherche de ce projet sont les suivantes. Quel est l'effet du travail collaboratif enseignant[10] sur la mise en place d'une démarche d'investigation par les enseignants stagiaires dans leur classe ? Quel est l'effet de ces pratiques sur les élèves, en termes de motivation et d'apprentissages ? Dans cet article, nous resterons essentiellement dans le cadre de la didactique des mathématiques, à la fois en ce qui concerne la formation et en ce qui concerne la recherche, celle-ci concernant l'épistémologie, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous proposerons enfin de réfléchir sur la méthodologie utilisée pour mesurer les effets de cette formation. L'outil utilisé est un questionnaire de type Q-sort, qui intègre à la fois les trois dimensions que nous venons de citer. Avant de présenter la formation proposée aux professeurs stagiaires et la méthodologie utilisée pour mesurer

[10] Celui qui se produit lorsque les enseignants débattent au sein des ateliers de pratique de classe, disciplinaire ou non.

son impact, nous proposons une caractérisation de ce que nous appelons *démarche d'investigation*. L'outil de mesure utilisé renvoie à cette caractérisation.

Cette expression est reprise telle quelle dans le questionnaire et la formation, que nous allons décrire, parce qu'elle figure sous cette forme dans le programme du collège. Le mot *démarche* est au pluriel dans le titre de cet atelier pour signifier que ces démarches recouvrent des processus qui peuvent être différents, suivant les disciplines, suivant les objectifs d'apprentissage. Pour notre part, nous préférons remplacer cette expression par *La démarche expérimentale en classe de mathématiques*[11], que nous tentons de définir.

I. La démarche expérimentale en classe de mathématiques (« démarche d'investigation »)

Nous entendons *démarche* au sens de manière de penser, de progresser dans la connaissance et nous parlons des élèves en classe de mathématiques. La définition de ce que nous appelons *démarche expérimentale en classe de mathématiques* est indissociable de celle de l'*activité mathématique en classe*, que nous commençons par caractériser.

Pour caractériser *l'activité mathématique en classe*, nous nous référons à divers travaux de didactique. Tout d'abord Lakatos (1976) développe l'idée que l'activité mathématique et les mécanismes de la découverte en mathématiques relèvent d'une dialectique preuve/réfutation, celle-ci étant mise en œuvre en classe par la construction didactique du *Débat scientifique* (Legrand 1990). Dans le cadre d'une recherche IREM-INRP (1999-2003), le groupe de l'IREM de Grenoble[12] définit : « […] activité mathématique vue comme culture de base à faire partager par l'école à tout futur citoyen d'un pays qui se veut humaniste et démocratique. ». En référence à Robert & M. Rogalski (2002), qui associent à des tâches (constituées des couples (énoncés, questions)) des activités mathématiques potentielles des élèves, nous reprenons une partie du sens attribué au mot *activité* : « […] tout ce que dit, fait, pense l'élève pendant l'action, avant ou après. Cela peut avoir des traces, écrites ou orales, mais une partie est invisible. ». Enfin le groupe CESAME (2005) étudie l'élève en train de faire des mathématiques, ce qu'il peut dire de son activité et analyse le rôle d'autrui : « Le modèle de la triple approche dans son double aspect, statique (Léonard & Sackur 1991) et dynamique (Sackur & al 1997), nous a permis de caractériser certains comportements d'élèves sur lesquels on peut s'accorder pour dire qu'il leur manque des caractéristiques importantes d'une activité mathématique. ».

Nous tentons d'élaborer un modèle (assez grossier) pour décrire les différents types d'activité de l'élève en classe.

Une de nos hypothèses de travail est de considérer que beaucoup de tâches données en cours de mathématiques engendrent chez les élèves des *activités* que nous ne considérons pas comme mathématiques. Notre modèle différencie, même si le tri n'est pas facile, celles que nous considérons comme *mathématiques* et celles que nous considérons comme *non mathématiques*. La nature (mathématique ou autre) dépend à la fois de la tâche qui est proposée (l'énoncé choisi) et de la gestion de la classe par le professeur. De ce fait, la nature de l'activité de l'élève dépend étroitement de la

---

[11] expression qui constitue le titre d'une sous-unité d'enseignement dans le prochain master professionnel spécifique du métier de professeur de mathématiques à l'université J. Fourier de Grenoble, à la rentrée 2010.

[12] Dont faisait partie l'auteur.

conception que l'enseignant a lui-même de l'activité mathématique et de son métier (ce que nous questionnons plus loin).
Avoir une *activité mathématique*, ce serait, face à un problème, à une question, adopter une attitude où s'entrelacent concret et abstrait, particulier et général, concepts et techniques, informel privé et formalisme, imagination et rigueur. L'entrelacement est important car ces divers aspects qui s'opposent, l'un s'appuyant sur l'autre, aident à la construction du sens. Il s'agit avant tout de comprendre que la plupart des problèmes ne sont pas naturellement mathématiques, mais qu'ils peuvent, par modélisation, donner naissance à des questionnements essentiellement mathématiques dont les conclusions nécessaires apporteront des éléments de réponses aux problèmes de départ. L'expérimentation sur des cas simples permet l'entrée dans le problème devenu mathématique, de voir ce qu'il y a de général ou de généralisable derrière le particulier. L'identification d'un concept ou l'acte de définition permettent la simplification du problème, la formulation de conjectures, dont la résolution peut passer alors par l'utilisation de telle technique, reconnue pertinente. La mobilisation d'un résultat connu relève aussi d'une activité mathématique, à condition évidemment qu'aucune indication ne soit donnée. Ces actions s'accompagnent nécessairement de représentations et langage informels, qui relèvent du domaine privé de la personne qui fait des mathématiques. Ces représentations et langage évoluent ensuite pour devenir plus canoniques, formalisés, et être communiqués à autrui. Il est à la fois nécessaire d'imaginer les cas les plus extrêmes, pour mettre à l'épreuve ses conjectures ou ses conclusions, et de recourir à la logique la plus rigoureuse pour produire des réponses qui ne puissent être mises en défaut. Dans *l'activité mathématique* se retrouve simultanément la recherche de la vérité et d'une explication de cette vérité : ceci induit la reconnaissance du faux et des raisons du faux, la reconnaissance de la pertinence d'une stratégie ou de son inadéquation, et toujours des raisons. Celles-ci sont aussi importantes, voire plus importantes à l'école, que les conclusions finales auxquelles elles permettent d'aboutir.
A ces critères de l'activité mathématique, qui touchent essentiellement à la personne et qui ne sont qu'en partie, reconnaissables de l'extérieur, s'en ajoutent d'autres relatifs à la dimension sociale. Les mathématiques se pratiquent à l'intérieur d'une communauté qui valide ou non ce qui lui est communiqué, qui produit aussi des résultats, les ressources ainsi constituées fournissant un matériau précieux pour tous les membres de la communauté. La recherche documentaire, la communication scientifique de résultats sont ainsi d'autres facettes de l'activité mathématique, transposables à la classe.
Cependant, pour que l'activité en classe puisse être potentiellement mathématique, des conditions sont nécessaires : le choix des énoncés, avons-nous dit, mais aussi le respect d'un vrai temps de recherche pour les élèves, la dévolution d'une responsabilité scientifique à la classe, la liberté de s'exprimer accordée aux élèves, l'engagement de ces derniers, l'interaction sociale. Le *débat scientifique* (Legrand 1990, Gandit & Massé-Demongeot 2001), nous y revenons, est une construction didactique qui permet une activité essentiellement mathématique. Mais ce n'est pas le cas s'il s'agit de répondre à une injonction du professeur, qui, dans quelques instants, donnera la solution à la question qu'il vient de poser. « Une des fonctions essentielles du débat scientifique est de favoriser l'émergence et le traitement explicite de questions méta-mathématiques, qui vont progressivement conduire l'élève à se constituer une solide épistémologie scientifique, à défaut de laquelle se substitue par nécessité une épistémologie purement scolaire : "c'est important parce que ça figure souvent aux examens ". » (Legrand 1990).
Pour l'élève, il existe en effet d'autres enjeux que la pratique des mathématiques. Se

débarrasser de son exercice en appliquant une méthode sans vraiment comprendre, savoir sa leçon en apprenant par cœur les théorèmes et les définitions, avoir une bonne note à l'examen en suivant pas à pas les différentes questions de l'énoncé sans s'occuper de la cohérence globale, ces trois enjeux induisent, à notre sens, des activités qui ne sont pas mathématiques, même si elles sont utiles pour faire des mathématiques. Nous les déterminons en fonction de l'objectif qu'elles visent. Nous qualifions l'activité de *technique* s'il s'agit d'appliquer sans réflexion une méthode, un algorithme, l'objectif étant d'arriver à un résultat ; nous disons activité *d'apprendre* au sens d'activité d'étude, l'objectif étant d'acquérir des connaissances ; nous parlons d'activité *scolaire* au sens de conformité au contrat, l'objectif étant de réussir à l'école. Nous ne disons pas qu'apprendre ou utiliser une technique de façon automatique ne relèvent pas de l'activité mathématique. La technique (même sans réflexion) aide à la recherche de la vérité et des raisons, et il est souvent fort utile de ne pas se préoccuper de « pourquoi cette technique fonctionne », pour ne pas perdre de vue la question que l'on cherche à résoudre. Elle fait partie de l'activité mathématique si elle s'accompagne d'une vigilance par rapport aux résultats intermédiaires, de moyens de contrôle, d'une réflexion sur les résultats finaux par rapport à la question posée. Apprendre ou utiliser une technique peut relever ou non d'une activité mathématique, suivant qu'on est capable ou non d'expliciter la technologie[13] afférente. Il est impossible de faire des mathématiques si l'on n'a pas acquis certaines connaissances : l'élève doit apprendre des définitions, des théorèmes, des techniques, pour enrichir le milieu de la prochaine situation dans laquelle il sera amené à pratiquer une activité mathématique. Cette activité *d'apprendre* peut être un moyen d'enrichir sa pratique mathématique : apprendre un algorithme, le faire fonctionner pour augmenter sa rapidité à l'exécuter, apprendre des résultats, tout ceci est utile pour faire des mathématiques. Dans ce type d'activité, l'enjeu est d'apprendre. Mais si, ce faisant, on ne se demande jamais pourquoi cette technique fonctionne, pourquoi on la présente ainsi, dans quels cas elle est pertinente ou ne l'est pas, pourquoi et comment on peut appliquer ce théorème, comment on le démontre, si on n'apprend que pour réussir au contrôle ou à l'examen, on n'apprend pas en accord avec l'activité mathématique. Cette activité d'apprendre peut donc elle aussi être loin de l'activité mathématique. Il en est aussi de même de l'activité que nous qualifions de *scolaire*. Nous allons plus loin. Il est même nécessaire pour qu'un élève réussisse à l'école qu'il acquière des connaissances scolaires qui, même si elles lui servent à répondre à des questions de mathématiques, le détournent de l'activité mathématique. Par exemple, il doit savoir que, dans un sujet d'examen, si on lui demande de prouver quelque chose, c'est que c'est vrai et qu'il n'a pas à se mettre en position de supposer que c'est faux (sauf évidemment s'il s'engage dans un raisonnement par l'absurde ou par contraposition). Il ne doit pas s'engager dans la recherche d'une question suscitée par le sujet, si celle-ci ne lui est pas posée explicitement. Il doit savoir repérer des indices qui vont lui être utiles à la poursuite de la résolution d'une question, même s'il n'en voit pas les raisons. Cette activité *scolaire* relève essentiellement du contrat. Elle peut s'avérer en opposition avec l'activité mathématique. La manifestation d'un esprit critique développé par la pratique des mathématiques coexiste en effet difficilement avec l'obéissance aux règles, néanmoins incontournable à l'école.

[13] Au sens de Chevallard

Ainsi nous venons de définir quatre types d'activité[14] en classe, *mathématique*, *technique*, *d'apprendre* ou *scolaire*, tout en gardant à l'esprit que les trois dernières peuvent être en accord ou bien en opposition profonde avec la première. Comme nous l'avons décrit, cette activité mathématique intègre clairement une dimension expérimentale. Dias (2004) caractérise l'expérience mathématique comme un système de gestes qui se développent dans deux espaces (Cavaillès 1994), dont l'intersection est le sujet en activité mathématique, « [...] un espace combinatoire pour l'expression des gestes sur les signes et un espace opératoire pour les gestes portant sur les idéalités. ». On peut ainsi dire que la partie visible de l'activité mathématique de l'élève, la seule à laquelle a accès le professeur, est constituée par les gestes de l'espace combinatoire. *La démarche expérimentale en classe de mathématiques* (*notre* démarche d'investigation) peut se définir comme la partie, visible de l'extérieur, de l'activité mathématique de l'élève, au sens où venons de la caractériser. C'est ainsi la démarche qui est l'indice d'une activité mathématique potentielle.
Par cette définition, nous nous démarquons de ce que propose le B.O. n°6 (2008) qui donne des « repères pour la mise en œuvre d'une démarche d'investigation » et définit l'expression *faire des mathématiques* : « Faire des mathématiques, c'est se les approprier par l'imagination, la recherche, le tâtonnement et la résolution de problèmes, dans la rigueur de la logique et le plaisir de la découverte. ». La discussion sur ces définitions et la comparaison avec les préconisations proposées dans le B.O. feront l'objet de la première partie du travail de l'atelier.

II. La démarche expérimentale en classe de mathématiques, non seulement comme activité mathématique à privilégier, mais aussi comme source d'apprentissages

Des relations sont établies entre la démotivation des élèves face à l'apprentissage des sciences « dures » et les pratiques des enseignants. Ainsi le rapport Rocard (2007) sur l'enseignement des sciences à l'Ecole recommande pour les enseignements européens : « Renverser la pédagogie utilisée pour enseigner les sciences à l'école, en la faisant passer de méthodes essentiellement déductives à des méthodes basées sur l'investigation permet d'augmenter l'intérêt des jeunes pour les sciences. ». Par ailleurs, l'introduction des programmes de collège (BOEN n°6 2008) mentionne : « A l'école primaire, une proportion importante d'élèves s'intéresse à la pratique des mathématiques et y trouve du plaisir. Le maintien de cet intérêt pour les mathématiques doit être une préoccupation du collège. Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre.».
Si la transposition à la classe de la pratique mathématicienne du professionnel peut permettre aux élèves de se constituer une épistémologie personnelle, pour peu que le contrat accorde une place à la responsabilité de la classe sur le plan scientifique,

[14] Mais il se peut aussi que l'activité de l'élève en classe ne relève d'aucune des catégories de ce modèle, qu'elle soit totalement autre, dans le cas, par exemple, où il est en position de refus d'apprendre. Ce type de posture d'élève n'est pas exceptionnel, mais nous ne traiterons pas de ce cas, parce que nos outils sont totalement inefficaces dans ce domaine. Il ne faut cependant pas oublier que ce comportement est aussi une réalité à l'école.

favorisant ainsi la motivation des élèves par rapport aux mathématiques, il reste que cela ne suffit pas à justifier l'effort considérable demandé aux enseignants dans le changement de leurs pratiques. Encore faut-il garantir que, ce faisant, les élèves apprennent des mathématiques, et peut-être d'*autres* mathématiques, qui ne sont pas enseignées.

Les pratiques d'enseignement des mathématiques sont en effet « restées relativement stables depuis une trentaine d'années, globalement verrouillées sur des modèles transmissifs. » (Bloch 2009). Les élèves reçoivent actuellement[15] en France un enseignement de mathématiques qui, par rapport à un contenu donné, suit globalement le schéma suivant : une activité d'introduction, souvent peu problématique (Rousset-Bert 2001), puis une liste de savoirs, qui sont ensuite mis en œuvre dans une série d'exercices, plus ou moins simples, enfin un contrôle des connaissances acquises, et on passe au chapitre suivant. Cette organisation du cours, qui se déroule souvent sous la forme d'un dialogue entre le professeur et quelques élèves de la classe, ne laisse pas de place à l'activité mathématique des élèves, comme nous l'avons définie. Et ceci dure malgré les libellés des programmes qui mettent en avant la pratique d'une démarche scientifique. Il faut cependant noter que cette démarche est certes décrite dans l'introduction des programmes, mais n'est pas reprise par rapport aux différents contenus à traiter à chaque niveau de classe. Or les enseignants établissent leur progression annuelle en se référant essentiellement aux contenus à traiter au niveau de la classe dont ils ont la charge. Les actions des enseignants sont complètement dirigées par l'avancement dans le traitement des connaissances, qui figurent dans cette progression.

Ainsi les élèves ne peuvent avoir réellement accès à la pratique d'une démarche expérimentale, ni, par conséquent aux savoirs transversaux sous-jacents, car les questions qui leur sont posées la plupart du temps se rapportent à des connaissances en cours de construction. Nous renvoyons à Gandit (2008) qui montre que : « Un enseignant sur deux voit la preuve essentiellement comme un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours. ». Or une hypothèse de travail essentielle dans notre recherche est de considérer qu'*on ne peut comprendre la pratique d'une démarche mathématique réelle que si elle se situe dans un contexte où les connaissances mathématiques en jeu sont élémentaires.* C'est le cas dans les situations de recherche pour la classe (SRC) (Grenier & Payan, 2002 ; Godot, 2005).

Renforçant cette idée que la démarche d'investigation doit être au service de l'apprentissage de notions mathématiques, les injonctions officielles (B.O. n°6, 2008) donnent un canevas d'une séquence d'investigation, en sept temps, dont le premier est intitulé « Le choix d'une situation-problème ». Cette notion de situation-problème (Arsac & al 1991) renvoie bien à l'idée que l'objectif d'apprentissage visé est relatif à une notion mathématique très précise, qu'il s'agira ensuite d'institutionnaliser. Nous ne développerons pas cet aspect. Nous parlerons d'une autre modalité de mise en œuvre de la démarche expérimentale en classe de mathématiques, celle qui vise davantage l'acquisition de savoirs transversaux. Ce sont des raisons, à la fois, épistémologiques et humanistes, qui expliquent notre volonté de faire acquérir ces savoirs transversaux. Nous pensons en effet, que, non seulement, il est possible d'initier tout élève à la pratique scientifique, mais aussi qu'il est essentiel que les élèves puissent devenir « […]

[15] L'expérience de l'auteure de formatrice d'enseignants conduit à cette constatation, d'après les visites qu'elle a effectuées dans de nombreuses classes.

les auteurs de ce qu'ils font, les propriétaires de ce qu'ils savent, les responsables de ce qu'ils disent [...]. » (Brousseau 2005).
Permettre aux élèves de pratiquer une démarche expérimentale en classe de mathématiques, à partir d'un problème reposant sur des notions mathématiques élémentaires, c'est ce que proposent les *situations de recherche en classe* (Grenier & Payan 2002). Nous les proposons comme une alternative à cet enseignement traditionnel des mathématiques, mis en cause dans le rapport Rocard. Elles mettent en jeu des savoirs transversaux qu'on peut distinguer en deux catégories. Expérimenter, avec du matériel (objets, ordinateurs, calculatrices), ou simplement avec du papier et un crayon, émettre une conjecture, établir une preuve, invalider une conjecture, sont des savoirs de la pratique mathématique, explicitement décrits dans les programmes, que nous rangeons dans la première catégorie. Ceci ne veut pas dire que ces savoirs aient une vie réelle dans les classes, d'autant plus qu'ils ne sont pas vraiment évalués dans les examens (pas du tout dans le brevet des collèges, très légèrement au baccalauréat de la série S). Il apparaît en effet que, si l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat de la série S ait « permis de sortir du piège d'une abstraction excessive » (IGEN 2009), en introduisant une dimension expérimentale dans l'enseignement des mathématiques en classe de terminale scientifique, cette amorce de changement n'atteigne pas encore les autres classes du lycée. Les savoirs de la seconde catégorie ne sont pas mentionnés dans les programmes et, par conséquent, sont davantage absents de la majorité des classes : savoir, par exemple, à partir d'une situation proposée, cerner et se poser une question mathématique, sans que celle-ci ne soit explicitée, se choisir des hypothèses pour être en mesure d'apporter un élément de réponse, ou encore voir ce qui est généralisable derrière le particulier, prendre l'initiative de définir un objet mathématique... Ces aspects, plus subtils, ne sont pas travaillés dans le quotidien des cours de mathématiques, mais sont présents dans les SRC. Dans le cadre de cet article, nous n'irons pas plus loin sur ce point.

III. La formation dispensée en 2009-2010 à l'IUFM à propos de la démarche d'investigation en mathématiques

Une formation relative à la démarche d'investigation a été proposée aux professeurs stagiaires de lycée ou collège des trois disciplines scientifiques : mathématiques, sur les sites de Grenoble et Chambéry, sciences physiques et chimiques et sciences de la vie et de la terre, durant leur année de formation professionnelle. Nous développons essentiellement la formation qui concerne les futurs professeurs de mathématiques.
Rappelons que les hypothèses de travail de la recherche S-TEAM sont, d'une part, que les démarches d'investigation sont des pratiques enseignantes efficaces et motivantes pour les élèves, d'autre part, que peu d'enseignants cependant les mettent en pratique effectivement au sein de leur classe (Rocard 2008). Il s'agit donc de mettre en place des programmes de formation incitatifs à la mise en œuvre de ces démarches en classe. Celui qui a été mis en place à Grenoble est constitué, d'une part, de deux séances de pratique de classe disciplinaire, d'autre part, de trois séances d'analyse des pratiques, animées par des enseignants des sciences de l'éducation. Ces cinq séances étaient construites sur l'idée de créer un conflit, pouvant provoquer un changement d'attitude des enseignants à l'égard des démarches d'investigation ou autres pratiques permettant de motiver les

élèves à l'égard des sciences, ce changement pouvant être déclaré ou observé en classe[16]. L'objectif de formation visé lors de ces séances était de construire avec les enseignants stagiaires l'idée selon laquelle les démarches d'investigation représentaient un cadre dans lequel inscrire des pratiques enseignantes susceptibles de favoriser la motivation et les apprentissages des élèves.
L'objectif de formation de la première séance disciplinaire consacrée à la démarche d'investigation était de faire comprendre en quoi consistait cette démarche. Les enseignants stagiaires étant répartis sur les sites de Grenoble (deux groupes) et Chambéry (un groupe), avec des formateurs différents d'un site à l'autre, la formation n'a pas été la même. A Chambéry, le formateur est parti de la description de la démarche d'investigation telle qu'elle figure dans le B.O. n°6 (2008) et les échanges se sont organisés avec les stagiaires sur la façon dont ils pensaient pouvoir la mettre en œuvre dans leurs classes. Il a ensuite donné des exemples de situations-problèmes. A Grenoble, nous avons nous-même assuré cette formation, mais suivant des modalités différentes, d'une part, du fait que nous intervenions ponctuellement dans l'un des groupes et habituellement dans l'autre[17], d'autre part, en raison de la différence entre les deux groupes des contenus de formation abordés lors des séances précédentes. Des échanges ont d'abord eu lieu à partir du texte du B.O. qui décrit la démarche d'investigation. Il a ensuite été question de pratique de la narration de recherche, en collège (Sauter 2000) et en lycée (Pombourg & Lacage 2007) : les textes ont été lus et commentés, puis des copies d'élèves ont été longuement examinées. Il s'agissait d'une part de productions de groupes d'élèves répondant à un problème de recherche donné à chercher en classe (par exemple, en sixième ou cinquième, le nombre de diagonales d'un polygone), d'autre part, de copies d'élèves contenant une narration de recherche. Cette formation sur la démarche d'investigation a été associée au module sur la preuve, où ont été étudiés les malentendus engendrés par l'enseignement actuel de la démonstration (Gandit 2004), où l'aspect formel l'emporte sur le sens, ce qui détourne immanquablement les élèves de la pratique scientifique, dans la mesure où ils ne comprennent plus ce qu'ils font en mathématiques. Les professeurs stagiaires ont ensuite pu disposer d'un canevas proposant une façon de construire une séquence de classe incluant une démarche d'investigation, soit avec l'objectif de travailler la validation par la preuve, soit avec celui de travailler un contenu mathématique précis (en annexe).
Le canevas des autres séances était le même, pour la deuxième en mathématiques et les trois ateliers d'analyse des pratiques, assurés par des formateurs des sciences de l'éducation. Une des hypothèses de travail du groupe S-TEAM de Grenoble est qu'une façon d'optimiser le développement professionnel des enseignants stagiaires consiste à leur proposer un contenu de formation qui peut être débattu au cours d'un conflit « organisé » à propos d'une tâche (un conflit qui se régule sur le fond d'une problématique et non autour des personnes). Cette tâche, qui constitue le point de départ des séances, est une séance en classe ou une préparation de séance, présentée par un(e) professeur(e) stagiaire volontaire. Cette séance doit, selon la personne qui la présente, comporter une mise en investigation des élèves. Le débat (d'une durée d'une heure et demie) autour de cette présentation est organisé en différentes phases avec l'objectif que les enseignants stagiaires confrontent leurs points de vue en retenant et en intégrant éventuellement les arguments de leurs collègues à leurs systèmes de connaissances.

[16] Les professeurs stagiaires ont été interrogés par questionnaire en décembre-janvier, puis en juin ; certains d'entre eux ont été filmés dans leur classe en mai-juin. Les élèves aussi ont été interrogés par questionnaire, en février, puis en mai.

[17] Des éléments liés à la démarche d'investigation avaient donc été davantage travaillés dans ce dernier que dans l'autre.

Il se termine par une étape d'écriture, où les stagiaires explicitent ce qu'ils retiennent et ce qu'ils pensent intéressant de mettre en place dans une classe (et non dans leur classe afin de ne pas les inciter à le faire) ou ce qu'ils pensent avoir mis en place, qui relève d'une démarche d'investigation. Nous ne développons pas ici les résultats de cette partie, mais ils seront évoqués lors de l'atelier.
Enfin, outre ces séances étiquetées « démarche d'investigation », les professeurs stagiaires de mathématiques ont eu des éléments de formation (6 heures) sur la preuve, son enseignement et son apprentissage, ainsi que des éléments sur le *débat scientifique* et, pour certains, les *situations de recherche en classe*. Ils ont également travaillé la construction de séquences d'enseignement, notamment à partir de la trame d'une séquence incluant une démarche d'investigation (en annexe). Ils ont participé au congrès *Maths-en-Jeans* (qui a eu lieu à Grenoble). Ils ont également reçu une formation en épistémologie et histoire des mathématiques et, dès le début de l'année, en informatique liée à l'enseignement.

IV. L'outil élaboré pour mesurer les changements dans les conceptions

Cet outil est constitué d'un questionnaire, de type Q-Sort, et comporte trois domaines. Le premier, qui relève de l'épistémologie propre à la discipline, est constitué de quatorze affirmations (items), le second, qui concerne l'enseignement des mathématiques, dix-sept items et le troisième, qui porte sur l'apprentissage, dix-huit items. Pour chacune de ces affirmations, on demande au professeur stagiaire de donner son opinion en cochant une parmi cinq cases : −2 signifie « pas du tout d'accord », −1 correspond à « plutôt d'accord », 0 à « avis partagé », +1 à « plutôt d'accord », +2 à « tout à fait d'accord ».
Pour construire cet outil nous nous sommes appuyée sur un Q-Sort proposé par Darley (1994) pour étudier les représentations d'enseignants de biologie à propos de la démarche expérimentale, ainsi que sur les définitions que nous avons développées précédemment de *l'activité mathématique en* classe et de la *démarche expérimentale en classe de mathématiques*, de même que sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau 1990), le Débat scientifique (Legrand 1993), comme nous l'explicitons ci-dessous. Les items du questionnaire ont en effet été rédigés en fonction de certaines variables que nous allons préciser, en vue de pouvoir étudier les conceptions des personnes interrogées. Mais l'adhésion à tel ou tel item n'est pas forcément significative d'une conception. En revanche il existe des adhésions et surtout des rejets, qui lorsqu'ils sont effectués de manière simultanée, témoignent ensemble d'une conception (Triquet & Guillaud 2010). Nous avons donc regroupé en catégories les items susceptibles de caractériser une même conception, comportant des items d'adhésion et des items de rejet. E. Triquet et J.-C. Guillaud ont fait ce même travail en sciences expérimentales.
La constitution du questionnaire repose sur l'hypothèse (de travail) de relation directe entre les activités possibles des élèves et leurs apprentissages, d'une part, et entre les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves, d'autre part. On retrouve dans la démarche d'investigation telle qu'elle est décrite dans le B.O. (2008) le modèle de l'apprentissage mathématique à partir des situations fondamentales et du milieu, qui sont les éléments de base de la TSD. Dans ce cadre, les problèmes au cœur des situations d'enseignement sont élaborés à partir du sens profond des concepts en jeu et de leur rôle dans l'édifice mathématique. Les questions proposées permettent aux élèves d'accéder, au moins en partie, à ce sens, pour peu qu'elles s'inscrivent dans un déroulement où se succèdent des phases d'action, de formulation, de validation (Brousseau 1998). C'est aussi dans ce cadre de la TSD que nous nous sommes placée pour l'élaboration du questionnaire, cadre dont nous rappelons deux hypothèses de base (Brousseau 1986) : « Admettons que le sens d'une connaissance provient en bonne

partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations didactiques qui lui sont proposées (dévolues). Nous admettons aussi qu'il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct […] ». Legrand (1993) évoque le travail du professeur, qui s'engage dans la recherche de ces situations *fondamentales* dont il pointe « une sorte d'irréversibilité didactique : le sens induit par la situation sur la connaissance sera difficilement rectifiable par la suite. », irréversibilité difficilement admise par le professeur dans la pratique, qui croit à la force des explications qu'il peut donner pour rectifier les erreurs et les contresens. Toutefois, en se plaçant dans ce modèle de recherche du fondamental par rapport à un concept donné, le professeur se libère nécessairement des contraintes de linéarité et de progressivité dans la présentation des savoirs, qui est une des *habitudes profondes du milieu* (Robert 2005). Ceci renvoie à la fois aux composantes *sociale* et *institutionnelle* des pratiques des enseignants (Robert 2008) : *sociale* au sens où l'enseignant débutant essaie d'avoir une pratique en conformité avec celles de la plupart de ses collègues et *institutionnelle* au sens où il pense que c'est ce que lui demande l'institution. Nous pointons ici un premier décalage dans les points de vue adoptés sur le questionnaire, d'une part par les enseignants débutants, d'autre part par l'auteur du questionnaire : les premiers ont en majorité leurs pratiques dominées par les composantes sociales et institutionnelles du métier d'enseignant, alors que le questionnaire est centré sur la composante cognitive[18]
Par ailleurs ce questionnaire se réfère, dans le cadre de la TSD, à un élève générique qui apprend des mathématiques pour peu que les situations d'enseignement proposées soient suffisamment pertinentes par rapport au savoir visé. Aux hypothèses évoquées précédemment, concernant l'apprentissage et le savoir, s'en ajoute une relative à l'élève considéré « comme un sujet épistémique, capable d'entrer durablement dans une rationalité mathématique » (Legrand 1993). Cette hypothèse n'est pas nécessairement partagée par l'enseignant débutant confronté aux difficultés de gestion de classe. En considérant donc les apprentissages potentiels d'un élève générique, favorisés ou non par telle pratique d'enseignant, nous nous éloignons de la classe dans sa réalité et des élèves en tant que sujets singuliers (Robert 2008). C'est un élément important à prendre en compte dans l'analyse des réponses au questionnaire car nous supposons (autre hypothèse de travail) que les enseignants en formation initiale n'adoptent pas le même point de vue sur les élèves. La *composante médiative*[19] du métier (Robert 2008) intervient fortement au sens où les enseignants sont préoccupés par l'organisation du travail de la classe et la prise en compte de la diversité des élèves, compétences (B.O. 2007) qui sont repérées comme « à renforcer » pour une grande majorité de professeurs débutants. La forte prégnance de la composante *médiative* chez les enseignants débutants, alors que celle-ci est peu présente dans les différents items, permet de désigner a priori un second décalage à prendre en compte dans l'analyse des réponses.

---

[18] « La composante cognitive traduit ce qui correspond aux choix de l'enseignant sur les contenus, les tâches, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance. Elle renseigne donc sur l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant. » (Robert 2008)

[19] « Les choix correspondant aux déroulements, les improvisations, les discours, l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la réalisation de la tâche, les validations, les expositions de connaissances, incrémentent la composante médiative. Elle renseigne sur les cheminements organisés pour les différents élèves. » (Robert 2008)

Ces deux décalages dans les points du vue sur le métier sont d'autant plus à prendre en compte que plusieurs items du questionnaire renvoient à la représentation de ce qu'est *un bon enseignement des mathématiques*. Or il n'y a pas de consensus sur ce point dans la communauté didactique (Robert 2008). Paradoxalement, on peut noter que l'évaluation de la pratique d'un enseignant ne se fait pas sur les apprentissages réalisés, mais bien plus sur l'enrôlement des élèves et leur réussite aux contrôles ou examens, ces deux derniers points n'apparaissant pas dans le questionnaire.

La principale variable retenue dans l'élaboration du questionnement d'ordre épistémologique est la *dimension expérimentale en mathématiques* (qui prend les valeurs *présente* ou *absente*). « La question de l'expérience et plus particulièrement de l'expérimentation en mathématiques est entretenue de longue date en épistémologie […]. » (Dias 2004). Dias relève quatre écoles autour de cette interrogation. L'école *empiriste* considère que les objets mathématiques sont inférés à partir de l'observation de la nature. L'école *idéaliste* prône l'existence a priori des objets mathématiques ou, au contraire, qu'ils sont des constructions pures de l'esprit humain. L'école *intuitioniste* ne considère l'existence des objets mathématiques que s'ils relèvent d'une construction (par un algorithme), la preuve formelle de l'existence d'un objet ne suffisant pas. Enfin l'école *logistique* fonde les mathématiques sur la logique et ramène toute preuve à un système formel logiquement bien organisé. Sans faire correspondre explicitement chaque item à une de ces écoles, nous explicitons deux *conceptions* — que les enseignants ont de l'activité mathématique du mathématicien — à partir de l'association de certaines valeurs (positives ou négatives) obtenues pour un groupe d'items bien identifiés, parmi les quatorze items de la première partie. D'une part, les mathématiques intègrent une dimension expérimentale, en lien avec la formulation de conjectures et la validation par la preuve. Cette conception correspond à un code strictement positif attribué à chacun des items[20] A1, A4, A7, A10 et A11, mais aussi un code strictement négatif attribué aux items[21] A6, A8 et A12. D'autre part, une démarche expérimentale n'a pas sa place en mathématiques, comme le pensent, jusqu'à la fin des années quatre-vingts, la majorité des professeurs de mathématiques (INRP 2007), qui ne voient l'activité mathématique que comme l'art de démontrer formellement des résultats, à partir de propriétés et règles bien établies. Cette conception correspond à des codes strictement positifs attribués à A2, A3, A6, A8 et A9[22], ainsi que des codes strictement

[20] A1. Face à un problème, le mathématicien procède à une suite de tâtonnements, calculs, études d'exemples, d'où finissent par émerger des formulations d'énoncés permettant une compréhension de la situation, de conjectures. A4. L'expérimentation en mathématiques peut ouvrir la voie vers de nouveaux domaines, de nouvelles conjectures. A7. L'échec d'une tentative de preuve peut amener à une modification d'une conjecture, voire de l'expérimentation elle-même. A10. L'expérimentation mise en place pour cerner une question mathématique peut déboucher sur des résultats inattendus, qui conduisent à s'interroger sur d'autres résultats. A11. L'ordinateur permet, par sa puissance de calcul, d'aborder certains concepts sous un jour nouveau.

[21] A6. L'expérimentation n'a pas sa place dans le travail du mathématicien. A8. L'activité essentielle du mathématicien est la preuve de résultats qui mettent en jeu des concepts abstraits. A12. La puissance de calcul des machines ne facilite pas l'accès à de nouveaux concepts mathématiques, qui relèvent essentiellement du domaine théorique.

[22] A2. La force des mathématiques réside dans le traitement abstrait d'objets abstraits à l'aide de théorèmes et de règles clairement établis. A3. La preuve formelle est le seul

négatifs pour A1, A4, A5, A10[23] et B2[24] (de la deuxième partie consacrée à l'enseignement des mathématiques, mais qui renvoie à la discipline elle-même). Nous venons ainsi de préciser deux conceptions, la première, notée EXP et la seconde, notée FTH.

L'utilisation de l'outil informatique ouvre de nouvelles perspectives dans la recherche en mathématiques : exploration de domaines nouveaux ou retour sur des objets connus, qu'on redécouvre autrement. La puissance de calcul des ordinateurs permet d'aller plus loin dans l'expérimentation en mathématiques (Delahaye 2005). Ceci est mis aussi en avant par le rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (CREM 2002) et permet de dégager de l'analyse du questionnaire une troisième conception, notée INFO. Elle est définie par l'association d'une valeur strictement négative associée aux items[25] A9 et A12 et d'une valeur strictement positive associée à l'affirmation A11.

Conception	*Valeur strictement positive aux items*	*Valeur strictement négative aux items*
EXP	*A1, A4, A7, A10, A11*	*A6, A8, A12, B2*
FTH	*A2, A3, A6, A8, A9*	*A1, A4, A5, A10*
INFO	*A11*	*A9, A12*

Tableau 1 : Des conceptions relatives à l'épistémologie relevées dans le questionnaire

La deuxième partie du questionnaire aborde l'enseignement des mathématiques, elle est liée à la troisième partie qui concerne l'apprentissage. Les variables retenues sont essentiellement l'organisation de l'enseignement, la prise en compte de l'interaction sociale dans la classe, la dévolution d'une responsabilité scientifique à la classe. Nous en dégageons, dans un premier temps, une conception, notée ENSPb, selon laquelle un « bon » (compte tenu du cadre théorique précisé auparavant) enseignement de mathématiques a pour point de départ la dévolution d'une question problématique aux élèves et leur donne les moyens d'être autonomes sur le plan de la responsabilité scientifique de ce qui se dit dans la classe (Leroux & Lecorre 2008 ; Gandit & Massé-

moyen que possède le mathématicien pour se convaincre de la vérité d'un résultat. A9. Les outils du mathématicien sont théoriques et non pas techniques.
Pour les autres codes, voir ci-dessus.

[23] A5. L'échec d'une tentative de preuve peut amener à mieux tester la solidité d'une conjecture née de l'expérimentation.
Pour les autres codes, voir ci-dessus.

[24] B2. Enseigner les mathématiques par la pratique d'une démarche d'investigation est une pratique pédagogique sans rapport avec l'activité réelle du mathématicien.

[25] A9. Les outils du mathématicien sont théoriques et non pas techniques. A12. La puissance de calcul des machines ne facilite pas l'accès à de nouveaux concepts mathématiques, qui relèvent essentiellement du domaine théorique. A11. L'ordinateur permet, par sa puissance de calcul, d'aborder certains concepts sous un jour nouveau.

Demongeot 1996). Nous relevons ENSPb si des valeurs strictement négatives sont attribuées aux items[26] B7, B8 et C1 et des valeurs strictement positives aux items[27] B1 et B3 : un bon enseignement de mathématiques est fondé sur la résolution de problèmes, les élèves étant amenés à pratiquer une démarche expérimentale. Nous notons ENSSoResp La conception de l'enseignement fondée sur l'interaction sociale, où dévolution est faite à la classe d'une responsabilité scientifique. La conception de l'enseignement, notée ENSCrsStruc, correspond à l'idée qu'un cours de mathématiques sur un contenu donné doit exposer les notions relatives à ce contenu, les unes après les autres, en commençant par la plus simple. Elle est identifiée par l'association de valeurs strictement positives à B4, B8, C1 et C2[28] et des valeurs strictement négatives à B1 et B3. Enfin la conception EnsObjReu voit l'enseignement comme une aide au franchissement pas à pas de petits obstacles, où l'objectif premier du professeur est d'aider l'élève à réussir ; elle correspond à une valeur strictement positive aux items B7, C2, C10 et strictement négative à l'item B3.

Conception	*Valeur strictement positive aux items*	*Valeur strictement négative aux items*
ENS Pb	*B1, B3*	*B7, B8, C1*
ENS SoResp	*B10, B11, B15, B16*	*B13, B17, C1, C2*
ENS CrsStruc	*B4, B8, C1, C2*	*B1, B3*
ENS ObjReu	*B7, C2, C10*	*B3*

Tableau 2 : : Des conceptions relatives à l'enseignement relevées dans le questionnaire

Dans la troisième partie du questionnaire, qui concerne l'apprentissage des mathématiques, liée, comme nous l'avons dit, à la seconde, on retrouve l'organisation de l'enseignement et la dévolution d'une responsabilité scientifique à la classe, variables auxquelles s'ajoute le rôle de l'erreur, ainsi qu'une quatrième variable liée à la dimension épistémologique. Il s'agit de la comparaison entre l'apprentissage des savoirs transversaux liés à la démarche expérimentale en mathématiques et les savoirs liés

---

[26] B7. Pratiquer la démarche d'investigation en classe ne fait pas perdre de temps si l'on considère les connaissances diverses qui sont mises en jeu dans la résolution d'un problème mathématique. B8. L'enseignement des mathématiques doit être organisé de manière à ce que les connaissances soient introduites logiquement une à une, de la plus simple à la plus complexe. C1. Pour pouvoir apprendre, l'élève doit disposer le plus rapidement possible d'un cours clair et simple.

[27] B1. Un bon enseignement de mathématiques doit commencer par une réflexion autour d'une question problématique pour l'élève. B3. Un bon enseignement de mathématiques est construit à partir de problèmes à résoudre.

[28] B4. Un bon enseignement de mathématiques doit débuter par l'exposé clair de ce que l'élève doit retenir.
C2. En classe les choses doivent être organisées de telle façon que les élèves fassent le moins d'erreurs possible.

davantage aux concepts mathématiques eux-mêmes. Nous nous référons à la définition que nous avons donnée de l'activité mathématique en classe. Apprendre des mathématiques, c'est avant tout apprendre à reconnaître la vérité et l'explication de cette vérité, ce qui passe par la reconnaissance du faux et des raisons du faux, la pertinence d'une stratégie ou son inadéquation, et les raisons. Ceci est plus important que l'apprentissage d'une liste de contenus et ne peut se faire si l'on ne laisse pas l'élève pratiquer une démarche d'investigation, si l'on ne tient pas compte de ses conceptions. Cette conception, notée APPRaisVF, correspond à une valeur strictement positive accordée aux items[29] C4, C12, C16, et une valeur strictement négative accordée aux items[30] C1, C10. Une autre conception, notée APPCum, consiste à voir l'apprentissage des mathématiques comme une accumulation de connaissances, qui permettent de résoudre des exercices : elle est relevée à partir d'un code strictement positif attribué à C1, C2, C7, C10[31], C13 et strictement négatif pour C4 et C12[32]. Par rapport à la prise en compte des conceptions initiales des élèves et au rôle constructif de l'erreur dans l'apprentissage, nous définissons la conception globale APPErr+ par l'association de valeurs strictement positives affectées aux items[33] B11, B18, C3 et C5 et de valeurs strictement négatives attribuées aux affirmations[34] C6, C14 et C17. Enfin, la conception

[29] C4. Les élèves font des mathématiques s'ils sont en recherche de la vérité et d'une explication de cette vérité ; ceci est plus important que l'apprentissage de contenus. C12. Les élèves font des mathématiques s'ils reconnaissent le faux et les raisons du faux ; ceci est plus important que l'apprentissage de définitions et propriétés. C16. Les élèves font des mathématiques s'ils reconnaissent, sans aide, la pertinence d'une stratégie ou son inadéquation, ainsi que les raisons de la pertinence ou de l'inadéquation.

[30] C1. Pour pouvoir apprendre, l'élève doit disposer le plus rapidement possible d'un cours clair et simple. C10. Il est préférable de décomposer un problème trop complexe en plusieurs questions simples.

[31] C2. En classe les choses doivent être organisées de telle façon que les élèves fassent le moins d'erreurs possible. C7. La meilleure méthode pour faire disparaître les erreurs consiste à multiplier le nombre des exercices d'application.
C10. Il est préférable de décomposer un problème trop complexe en plusieurs questions simples. C13. L'apprentissage se construit par l'atteinte progressive d'objectifs opérationnels, clairs et précis, sur lesquels l'élève s'est entraîné en résolvant notamment de petits exercices adaptés.

[32] C4. Les élèves font des mathématiques s'ils sont en recherche de la vérité et d'une explication de cette vérité ; ceci est plus important que l'apprentissage de contenus. C12. Les élèves font des mathématiques s'ils reconnaissent le faux et les raisons du faux ; ceci est plus important que l'apprentissage de définitions et propriétés.

[33] B11. Un bon enseignement de mathématiques doit toujours partir des idées que les élèves ont sur la question qui va être traitée et les prendre en compte. B18. Les erreurs des élèves constituent des informations précieuses que l'enseignant doit utiliser dans l'élaboration de son dispositif pédagogique. C3. L'erreur est constitutive du processus de construction de connaissances. C5. En mathématiques une activité déterminante pour l'élève est d'apprendre à identifier et rectifier lui-même ses erreurs.

[34] C6. C'est juste ou c'est faux : il y a toujours une vérité à laquelle il faut souscrire, c'est pourquoi l'erreur doit être sanctionnée.

de l'erreur comme un dysfonctionnement est résumée par APPErr– qui correspond à une valeur strictement positive affectée à chacune des affirmations C2, C6, C14 et C17 et une valeur strictement négative à C3.

Conception	*Valeur strictement positive aux items*	*Valeur strictement négative aux items*
APPRaisVF	*C4, C12, C16*	*C1, C10*
APPCum	*C1, C2, C7, C10, C13*	*C4, C12,*
APPErr+	*B11, C3, C5, B18*	*C6, C14, C17*
APPErr–	*C2, C6, C14, C17*	*C3*

Tableau 3 : : Des conceptions relatives à l'apprentissage relevées dans le questionnaire

Outre ces conceptions, nous proposons un autre axe de la méthodologie. fondé sur trois indicateurs, relatifs à chacune des affirmations (Darley 1994). L'un, noté ST, est constitué par la somme algébrique des réponses, convertie en pourcentage de la somme maximale possible, compte tenu de la taille de l'échantillon (obtenue si chaque personne de l'échantillon attribuait +2 à l'item), si le score total est positif ; sinon, cette somme algébrique (qui est négative) est convertie en pourcentage de la somme minimale possible (obtenue si chaque personne de l'échantillon attribuait –2 à l'item). Le second indicateur, correspondant à chacune des affirmations, se décompose en deux : d'une part, la fréquence, en pourcentage, des réponses strictement positives (notée P), d'autre part, la fréquence des réponses strictement négatives (notée N). Ces trois indicateurs associés permettent de préciser, pour chaque affirmation, l'adhésion ou le rejet de la part des individus de l'échantillon. Par exemple, pour un item donné, si une valeur moyenne (positive) du premier indicateur, par exemple, ST = 52 %, est associée à une fréquence élevée des réponses positives, par exemple, P = 80 %, on conclura que l'accord global de l'échantillon par rapport à cette affirmation est assez réservé. Par contre, un pourcentage faible représentant le score total d'un item, par exemple, ST = 1%, associé à des fréquences de réponses strictement positives (par exemple, P = 20 %) et strictement négatives très différentes (par exemple, N = 50 %) signifiera que l'échantillon est composé d'un groupe de personnes, tout à fait d'accord avec l'item, et d'une majorité qui a un avis partagé.

V. Les résultats obtenus

Nous avons procédé à deux recueils de données par le questionnaire présenté , l'un à l'issue des deux premiers mois de formation, l'autre en fin de formation, sur un échantillon de 32 stagiaires en sciences expérimentales (13 en sciences-physiques et 21 en sciences de la vie et de la Terre) et 44 stagiaires en mathématiques. Cette population en mathématiques a connu quelques légères modifications entre les deux moments des questionnaires (absences, congés…).

C14. L'erreur est de toute évidence un obstacle à l'apprentissage.
C17. Pour un apprentissage efficace, il est nécessaire que l'enseignant rectifie les erreurs des élèves le plus rapidement possible.

Nous ne présentons ici que quelques résultats associés à la première partie de la méthodologie présentée. D'autres résultats seront exposés lors de l'atelier.
Les résultats concernant le premier questionnaire (voir le tableau 4) montrent que certaines conceptions n'apparaissent pas du tout ou de façon très marginale. Nous avons alors redéfini certaines d'entre elles en les « affaiblissant ». Le seul fait d'enlever une contrainte permet de changer considérablement l'effectif relatif à la conception. Il en est ainsi de la conception concernant l'implication de l'outil informatique dans les mathématiques dont l'effectif passe de 2 (pour la conception INFO) à 17 pour la conception notée INFOf, qui se différencie de la précédente par le seul abandon de l'item A9[35], le rejet de celui-ci n'étant d'ailleurs pas nécessairement contradictoire avec la reconnaissance de l'impact de l'informatique dans la pratique mathématique.

	Questionnaire 1 Effectif sur 43	*Questionnaire 2 Effectif sur 44*	*Redéfinition de certaines conceptions : en éliminant*
Epistémologie			
EXP	*1*	*5*	
EXPf[36]	*18*	*25*	*A11>0, A8<0, A12<0, B2<0 :*
FTH	*0*	*0*	
FTHf[37]	*7*	*11*	*A6>0 , A9>0 et tous les « items négatifs »*
INFO	*2*	*11*	
INFOf[38]	*17*	*24*	*A9<0*
Enseignement			
ENSPb	*0*	*4*	
ENSPbf	*8*	*10*	*t*[39] *B8<0, C1<0 et C8<0*
ENSSoResp	*3*	*6*	

[35] A9. Les outils du mathématicien sont théoriques et non pas techniques.

[36] Acceptation des items : A1. Face à un problème, le mathématicien procède à une suite de tâtonnements, calculs, études d'exemples, d'où finissent par émerger des formulations d'énoncés permettant une compréhension de la situation, de conjectures. A4. L'expérimentation en mathématiques peut ouvrir la voie vers de nouveaux domaines, de nouvelles conjectures. A7. L'échec d'une tentative de preuve peut amener à une modification d'une conjecture, voire de l'expérimentation elle-même. A10. L'expérimentation mise en place pour cerner une question mathématique peut déboucher sur des résultats inattendus, qui conduisent à s'interroger sur d'autres résultats.
Rejet de l'item A6. L'expérimentation n'a pas sa place dans le travail du mathématicien.

[37] Rejet d'aucun item et acceptation des items : A2. Faire des mathématiques consiste à traiter des objets abstraits à l'aide de théorèmes et de règles clairement établis. A3. La preuve formelle est le seul moyen que possède le mathématicien pour se convaincre de la vérité d'un résultat. A8. L'activité essentielle du mathématicien est la preuve de résultats qui mettent en jeu des concepts abstraits.

[38] En éliminant A9. Les outils du mathématicien sont théoriques et non pas techniques.

[39] En éliminant les valeurs strictement négatives attribuées à : B8. Un bon enseignement de mathématiques doit débuter par l'exposé clair de ce que l'élève doit retenir. C1. Pour pouvoir apprendre, l'élève doit disposer le plus rapidement possible d'un cours bien structuré. C8. Pratiquer la démarche d'investigation en classe permet aux élèves de construire de nouvelles connaissances, activement, en passant par une phase d'expérimentation.

ENSSoRespf[40]	*23*	*33*	*B11>0, B15>0, B13<0, B17<0, C1<0*
ENSCrsStruc	*0*	*0*	
ENSObjReu	*0*	*0*	
Apprentissage			
APPRaisVF	*2*	*2*	
APPCum	*0*	*0*	
APPErr+	*9*	*8*	
APPErr-	*0*	*0*	

Tableau 4 : Evolution des conceptions des professeurs stagiaires au cours de la formation

Il faut rappeler que le premier questionnaire a été posé deux mois après la rentrée, au cours desquels les professeurs stagiaires ont reçu une formation assez importante sur le plan informatique. Ceci peut expliquer l'évolution sur le plan épistémologique, qui s'est poursuivie au long de l'année. Toujours sur le plan épistémologique, la conception EXP, présente chez un seul individu de l'échantillon, est redéfinie en EXPf, qui compte alors 18 individus. De même la conception FTH (effectif nul) évolue en FTHf (effectif de 7) qui n'est pas contradictoire avec l'intégration d'une dimension expérimentale en mathématiques. En fin de formation, sur le plan épistémologique, plus de la moitié des enseignants stagiaires (25/44) reconnaissent la présence de l'expérimentation en mathématiques et l'importance de l'outil informatique dans la pratique des mathématiques (24/44). Nous pensons que la croissance reconnue à cette dimension expérimentale en mathématiques est liée à la formation proposée, en ce sens que celle-ci a mis fortement l'accent sur l'importance de l'activité mathématique de l'élève comme elle est décrite au début de cet article. Les visites que nous avons effectuées dans les classes des professeurs stagiaires dont nous assurions le suivi (9 sur les 44) nous confortent dans cette idée qu'ils étaient particulièrement attentifs à ce point, même s'ils avaient des difficultés à le mettre en œuvre. Il apparaît ainsi que la formation sur la pratique de classe permettrait de modifier les conceptions sur le plan épistémologique, les seules à notre sens, susceptibles de faire évoluer durablement celles qui concernent l'enseignement et l'apprentissage.
Cette évolution est nette concernant l'épistémologie, plus atténuée concernant l'enseignement, même si l'on regarde les conceptions telles qu'elles étaient définies au départ. La conception du cours comme lieu de résolution de problèmes progresse lentement. Nous analysons cette lenteur par rapport aux dimensions sociales et institutionnelles du métier d'enseignant, comme nous l'avons déjà signalé. Une autre raison est la difficulté pour le professeur débutant de trouver de *bons* problèmes. Par contre 33 enseignants sur 44 reconnaissent qu'il faut accorder une place à l'interaction sociale, au débat scientifique et qu'il faut faire la dévolution à la classe d'une responsabilité scientifique. Ce changement formulé au niveau des pratiques est, à notre sens, lié aux éléments de formation sur la preuve, sur le débat scientifique. Ces résultats

[40] Cette conception « affaiblie » correspond alors à l'acceptation des items : B10. L'enseignement des mathématiques doit faire une place importante au débat entre les élèves, à partir de conjectures à valider ou à réfuter. B16. Un bon enseignement de mathématiques doit favoriser la responsabilité scientifique de l'élève, qui doit pouvoir se prononcer sur le vrai et le faux.
Et au rejet du seul item C2. En classe les choses doivent être organisées de telle façon que les élèves fassent le moins d'erreurs possible.

rejoignent l'impression que nous avons de cette évolution au regard des visites effectuées dans les classes des stagiaires et des entretiens qui ont suivi, mais aussi des présentations de certains mémoires professionnels.
Enfin les résultats sont stables sur le plan de l'apprentissage. Nous attendons davantage d'éléments par rapport à l'apprentissage en examinant les résultats item par item, conformément à la deuxième partie de la méthodologie. Nous en présenterons lors de l'atelier.

Bibliographie

ARSAC. G., GERMAIN G. & MANTE M. (1991), *Problème ouvert et situation-problème*, éd. IREM de Lyon BROUSSEAU, G. (1986), Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7/2, éd. La Pensée Sauvage, 33-115.

BLOCH, I. (2009), Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ?, *Petit x* n°81, éd. IREM de Grenoble, 25-53.

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*, éd. La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2005), Réponses écrites aux questions à Guy Brousseau, Sur la théorie des situations didactiques, Questions, réponses, ouvertures, Hommage à Guy Brousseau, éd. La Pensée Sauvage

CESAME (2005) (CESAME : groupe constitué de SACKUR, C., ASSUDE, T., MAUREL, M., DROUHARD, J.-P. & PAQUELIER, Y.), L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25/1, éd. La Pensée Sauvage, 57-90.

DELAHAYE, J.-P. (2005), Mathématiques expérimentales, *Pour la science*, n°331, 90-95.

DIAS, T. (2004), Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques, Mémoire de DEA Construction des savoirs scientifiques, Université Lyon 1.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-31.

GANDIT, M. (2004), Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques, *Petit x n*°65 (première partie) et *Petit x* n°66 (deuxième partie)

GANDIT, M. & MASSE-DEMONGEOT, M.-C. (1996), Le vrai et le faux au collège et au lycée, IREM de Grenoble.

GRANGEAT, M. (2009), Présentation du projet S-TEAM, http://iufm.ujf-grenoble.fr/index.php/component/content/article/188.html

GRENIER, D. & PAYAN, C. (2002), Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Les cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, éd. IREM de Paris 7.

IGEN (Inspection Générale de l'Education Nationale) (2009), L'expérimentation d'une épreuve pratique de Mathématiques au baccalauréat de la série S, Rapport à Monsieur le ministre de l'Education nationale, n°2009-085.

INRP (2007), Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques, Les dossiers de la veille.

INRP/ADIREM (2003), *Evaluation et développement de dispositifs d'enseignement en mathématiques*, Rapports de synthèse des équipes engagées dans la recherche, éd. IREM de Clermont-Ferrand.

KAHANE, J.-P., Rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques au ministre de l'Education nationale.

LAKATOS I. (1976), *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press. Traduction française (1985) : Preuves et réfutations, éd. Hermann.

LEGRAND, M. (1990), Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 9/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 365-406.

LEGRAND, M. (1993), La problématique des situations fondamentales, *Cours à l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*.

LEGRAND, M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères-IREM* n°10, éd. Topiques, 123-159.

LEROUX, L. & LECORRE, T. (2008), Le "Débat scientifique" en classe, Plot n°19, APMEP

POMBOURG, P. & LACAGE, M. (2007), Problèmes ouverts et narrations de recherche au lycée, Plot n° 17, APMEP

ROBERT, A. (2005), De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 10, éd. IREM de Strasbourg, 209-249.

ROBERT, A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, 59-68, éd. Octares.

ROBERT, A. (2008), Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques, *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, p. 11-22, éd. Octares.

ROBERT A. & ROGALSKI M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x*, n°60, éd. IREM de Grenoble, 6-35.

ROCARD, M. Rapport sur l'enseignement des sciences à l'école en Europe : http://ec.europa.eu/research/science-society

SAUTER, M. (2000), Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège, Repères-IREM n°39.

SACKUR C., DROUHARD J.P., MAUREL M. & PECAL M. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères-IREM*, n°28, éd. Topiques, 37-68.

TRIQUET, E. & GUILLAUD, J.-C. (2010), Démarches scientifiques et démarches d'investigation : point de vue d'enseignants stagiaires de l'IUFM , à paraître dans les actes des journées S-TEAM, éd. INRP.

Bulletins officiels de l'Education nationale

B.O. n°1, du 4 janvier 2007, Cahier des charges de la formation des maîtres en Instituts Universitaires de la Formation des Maîtres, http://www.education.gouv.fr/bo/2007/1/MENS0603181A.htm

B.O. spécial n°6, du 28 août 2008, Programmes des collèges.

Démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée

Dominique Baroux

Groupe IREM de Paris 7

Résumé

Dans cette communication, nous présenterons la brochure IREM qui vient de paraître et nous nous attarderons sur plusieurs points illustrés d'exemples et qui seront l'occasion de débat.

- Deux des moments clefs de l'activité mathématique concernant la démarche expérimentale : le moment de la conjecture et le moment de la preuve.
- Les conditions qui nous semblent nécessaires pour garantir une démarche expérimentale constructive pour les élèves, intégrant les nouvelles technologies, et qui ne soit pas dénaturée.
- L'évaluation des élèves au cours de ces activités d'investigation.
- La gestion de classe propre à ce type d'activités avec un bref aperçu des problèmes à prendre en compte.

Nous présenterons un exemple de formation continue sur le thème de la démarche expérimentale.

Le texte présenté ci-dessous est largement inspiré de la brochure IREM n°94 parue en mai 2010, dont les auteurs sont les membres du groupe « Démarche expérimentale et TICE » : F. Vandebrouck, D. Baroux, G. Bonal, S. Galland, M. Guignard, F. Hérault, G. Marbeuf, C. Petitjean, B. Yvert.

I. Généralités

1. Présentation du groupe.

Les programmes de mathématiques donnent depuis quelques années une importance à la dimension expérimentale des mathématiques, mais cette démarche n'est pas vraiment explicitée dans les textes institutionnels.

Cette importance trouve son aboutissement dans la mise la mise en place au printemps 2007 dans certains établissements, d'une expérimentation d'une épreuve expérimentale de mathématiques au baccalauréat. C'est à la suite de cette mise en place que s'est créé notre groupe IREM. La brochure est rédigée après trois ans de fonctionnement du groupe et la réalisation d'un stage de formation au cours de l'année 2009-2010, dans le cadre du PAF des trois académies de l'Ile de France.

2. La dimension expérimentale

La question de savoir si les mathématiques possèdent une dimension expérimentale reste aujourd'hui encore ouverte et d'actualité. Dans l'article de P. Lombard « les méthodes expérimentales en géométrie » paru en 2008 dans la revue *Repère IREM* on peut lire que « expérimenter, c'est vérifier des hypothèses ». Pour lui, le travail du scientifique, et donc sans doute du mathématicien, se résume plutôt à « avoir une idée » et « vérifier expérimentalement si elle marche ».

Au contraire, D. Perrin (2007) décrit la démarche expérimentale par « expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuves, production éventuelle de contre exemples etc … ». Autrement dit, expérimenter pourrait être commencé par des cas particuliers, sans avoir d'hypothèse ou de conjecture en tête. Cela ne correspond pas à la démarche expérimentale dans les autres sciences mais plutôt à une démarche d'investigation.
Les caractéristiques de cette démarche n'ont pas été complètement clarifiées, mais vu la forte incitation institutionnelle il nous a paru nécessaire de nous interroger sur sa transposition dans l'enseignement des mathématiques et sur la spécificité des technologies dans cette démarche.

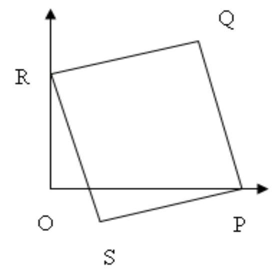
3. Transposition dans l'enseignement des mathématiques

En essayant de caractériser la démarche expérimentale dans l'enseignement des mathématiques, nous nous sommes mis d'accord sur des temps forts à organiser pour l'élève :
* Formuler un problème (se questionner, modéliser, se documenter, …),
* Expérimenter (réaliser, tester, observer…),
* Conjecturer,
* Tester la conjecture (éprouver, évaluer…),
* Prouver,
* Communiquer…
Parmi ces moments, deux semblent devoir attirer notre attention : le moment de la conjecture et le moment de la preuve.

4. Le moment de la conjecture

Le moment de la conjecture nous est apparu essentiel dans la démarche expérimentale. Nous avons établi un certain nombre de conditions afin que ce moment puisse vivre dans l'enchaînement des différents moments :
* Une première conjecture naïve qui peut être fausse, être invalidée et peut enclencher la recherche d'une nouvelle conjecture.
* Une rétroaction directe sur la conjecture formulée (validation, falsification)
* Une conjecture pas trop évidente qui demande du coup une démonstration.
Un problème type où on retrouve une conjecture pas évidente est un problème de lieu de points.
En voici un exemple que l'on peut proposer à des terminales S. Il s'agit d'un TP où, sans logiciel de géométrie dynamique, il est, pour la grande majorité des élèves, pratiquement impossible de conjecturer le lieu du point S. Il y a un va et vient intéressant entre la recherche « papier-crayon » et la démarche expérimentale : pour construire le carré, il est nécessaire, « en papier-crayon » d'analyser la situation mais, une fois celui-ci créé, c'est l'expérience à l'aide du logiciel qui va permettre la conjecture concernant le lieu du point S. Enfin, c'est de nouveau en « papier-crayon » que se fera la démonstration.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$
P est un point du demi-axe [0x) et R un point du demi-axe [oy) tels que :
OP + OR = a où a est un réel strictement positif donné. On construit le carré direct PQRS. Le but de ce module est de démontrer que le point Q est fixe et de trouver le lieu du point S lorsque P et R se déplacent sous la condition indiquée.



Démarche expérimentale
Pour répondre expérimentalement au problème posé, vous allez utiliser le logiciel Geogebra.

1. **Réalisation de la figure** : Lancer l'application Géogébra

   - **On prendra a = 5 .** Créer un curseur p.(p variant de 0 à 5). Placer le point P mobile sur [0 ;5]
   - Placer le point R
   - Tracer le carré PQRS. Indiquez votre méthode de construction.

Appelez l'examinateur.

2. **Expérimentation**
   - Afficher la trace de S et faîtes varier le point P.

Appelez l'examinateur.

3. **Conjecture**
   - Quel semble être le lieu du point S quand P varie ?
   - Imaginez une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture.

Appelez l'examinateur.

Recherche d'une démonstration
On appelle p l'affixe de P. On a OP = p, p décrit l'intervalle [0 ; a]

1. a) Quelle est l'affixe de R ?

b) Prouvez, par le calcul, que l'affixe q de Q ne dépend pas de p. (on pourra utiliser un quart de tour de centre Q)
c) Précisez la position de Q par rapport aux points « limites » P_0 et R_0 tels que :
$$OP_0 = OR_0 = a$$

2. Démontrer que l'affixe s de S s'exprime sous la forme s = $\left(p - \frac{a}{2}\right)(1 - i)$
3. a) Déduisez-en les coordonnées de S en fonction de p et a.
   b) Démontrer que S décrit un segment lorsque p décrit l'intervalle [0 ;a]

5. Impact de la technologie

Les technologies semblent potentiellement intéressantes pour permettre aux élèves des activités de conjectures, qu'il ne leur serait pas possible de développer dans l'environnement traditionnel. Cependant les nouvelles représentations véhiculées parles technologies, affectent l'activité mathématique des élèves et notamment la manière dont ils conceptualisent les notions, pouvant amener par là-même à des conjectures erronées.

6. Le moment de la preuve

Ce deuxième moment ne va pas de soi pour les élèves, ni même pour certains mathématiciens. Citons Delahaye (2005), qui prend en compte explicitement les technologies dans son discours. Il explique que la démarche expérimentale avec des

technologies, cela peut être « trouver des contre exemples qui falsifient les conjectures ». Autrement dit, selon lui, confirmer ou infirmer des conjectures avec des technologies est possible, tout comme valider des démonstrations, et « la plus grande certitude mathématique n'est pas forcément atteinte par les démonstrations habituelles ». Cela peut choquer mais n'y a-t-il pas un paradoxe à accepter de certaines technologies qu'elle nous donnent effectivement des résultats mathématiques – pensons à une calculatrice bas de gamme qui nous donne le résultat d'une multiplication – et à refuser dans l'enseignement certains résultats de nouvelles technologies plus sophistiquées – un lieu de points donné par un logiciel de géométrie dynamique, une limite de suite donnée par un logiciel de calcul formel ? Dans notre cadre d'enseignement avec des élèves, convenons que ce moment de la démarche est important et qu'il convient pour le professeur de ne pas le négliger. Duvernay (2007) explique que : « le deuxième inconvénient de la démarche expérimentale avec des technologies (le premier étant que ça prend du temps, forcément sur quelque chose d'autre) c'est que l'insistance sur l'aspect expérimental des mathématiques et l'usage de l'ordinateur pour « voir » ne conduise une grande partie des élèves à une conception faussée de ce que sont les mathématiques et des conditions de leur efficacité (que certains trouvent déraisonnables, on ne sait pourquoi).
Il ne faut donc pas nier que des questions, pour le professeur, tournent autour de la nécessité de preuve mathématique des conjectures émises et sur le fait que bien souvent les élèves ne ressentent pas la nécessité de conclure la démarche expérimentale par une preuve.

7. Conclusions

Les réflexions dans notre groupe IREM nous ont amené à poser des conditions qui sembleraient nécessaires pour garantir une démarche expérimentale qui ne soit pas dénaturée et qui permettent une activité intégrant les technologies.
- des sujets épurés, facilement compréhensibles et appropriables par tous pour permettre la mise en activité de chacun des élèves, sans une aide préalable dès le début des enseignants ;
- une conjecture qui dans ces sujets ne s'impose pas d'elle-même ou du moins qui ne peut-être que partiellement mise en évidence par l'exploration sur le logiciel, et donc qui appelle un travail papier crayon pour être complétée ;
- enfin un travail exploratoire et un travail dans l'environnement papier-crayon qui se renvoient l'un l'autre au sens où la partie exploratoire guide et aide pour prouver en papier crayon la conjecture et la compléter et où, en retour, le résultat du travail en papier crayon peut être validé par une vérification sur le logiciel.

Nous sommes conscients que ces trois conditions sont difficiles à mettre en pratique et qu'elles ne garantissent pas à elles seules une activité mathématique de type expérimental. On prendra cependant ces conditions comme une aide pour nous en approcher.

Thème 2 : Enseigner l'algorithmique au lycée

Pourquoi enseigner l'algorithmique ?

Eric Reyssat

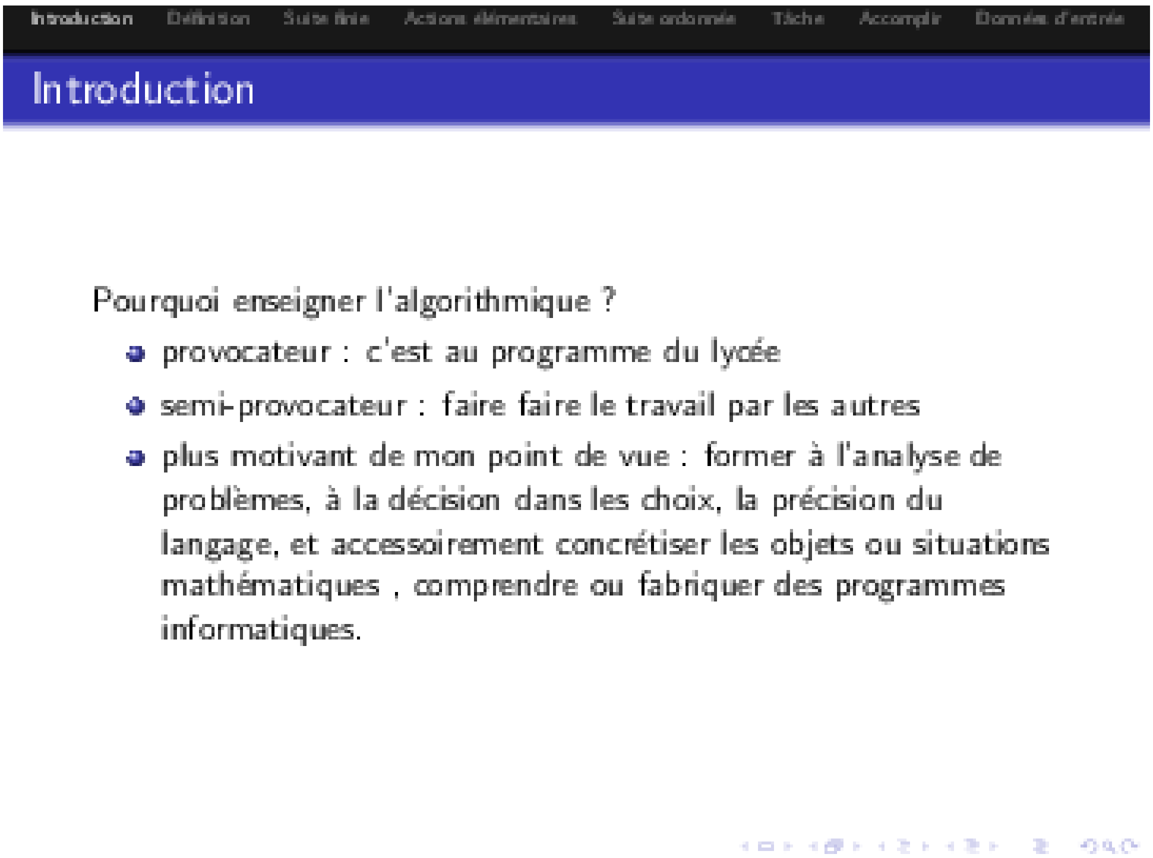
Université de Caen Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme

IREM de Basse Normandie

Résumé

Je montrerai à travers quelques aspects de l'algorithmique et exemples d'algorithmes ce que leur enseignement peut apporter dans la formation scientifique. L'exposé sera construit autour d'une définition commentée de ce qu'est un algorithme. Ce sera l'occasion aussi de réfléchir à certaines difficultés de cet enseignement.

Le texte présenté ci dessous reprend les diapositives de l'exposé réalisé lors du colloque.



Définition

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée d'actions élémentaires pour accomplir une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Définition

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée d'actions élémentaires pour accomplir une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

[début des affichages] affiche([1, 1], $sqrt(1^2 + 1^2)$);
affiche([1, 2], $sqrt(1^2 + 2^2)$);
affiche([1, 3], $sqrt(1^2 + 3^2)$);
affiche([1, 4], $sqrt(1^2 + 4^2)$);
affiche([2, 2], $sqrt(2^2 + 2^2)$);
affiche([2, 3], $sqrt(2^2 + 3^2)$);
affiche([2, 4], $sqrt(2^2 + 4^2)$);
affiche([3, 3], $sqrt(3^2 + 3^2)$);
affiche([3, 4], $sqrt(3^2 + 4^2)$);
[fin des affichages] affiche([4, 4], $sqrt(4^2 + 4^2)$);

Suite finie

Définition

Un **algorithme** est une **suite finie** ordonnée d'actions élémentaires pour accomplir une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Suite finie

Définition

Un **algorithme** est une **suite finie** ordonnée d'actions élémentaires pour accomplir une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Algorithme factorielle

entrée : un entier $n \geq 1$ **sortie :** l'entier $f = n!$

[initialisation] $f \leftarrow 1$

[une boucle] **pour** i **de** 1 **à** n **faire**

$f \leftarrow f * i$

fin(pour)

[retour de la valeur] f

La boucle compte pour autant d'actions qu'il y a de tours de boucle : dépend de n.

Suite finie : complexité

Définition

Un **algorithme** est une **suite finie** ordonnée d'actions élémentaires pour accomplir une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Conséquences :

- Prouver la finitude (indécidable, souvent facile, pas toujours !)
- Complexité

Suite finie : complexité

Problème de Syracuse

entrée : un entier n **sortie** : ????

$a \leftarrow n$
tant que $a > 1$ **faire**
  si a `est pair` **alors**
    $a \leftarrow a/2$
  sinon
    $a \leftarrow 3a + 1$
  fin(si)
fin(tantque)

$42 \rightarrow 21 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Suite finie : complexité

Problème de Syracuse

entrée : un entier n **sortie :** ????

$a \leftarrow n$
tant que $a > 1$ **faire**
  si a est pair **alors**
    $a \leftarrow a/2$
  sinon
    $a \leftarrow 3a + 1$
  fin(si)
fin(tantque)

$42 \to 21 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

Suite finie : boucles

pour
...
fin(pour)

différence essentielle : pb de finitude

tant que ... **fin(tantque)**	différence technique minime	**répéter** ... **jusqu'à**

Suite finie : complexité

Vous êtes né l'année a et avez commencé à travailler l'année t :

Algorithme

[boucle jeunesse] **pour** i **de** a **à** $t-1$ **faire**
`s'épanouir en apprenant`
[fin de boucle] **fin(pour)**
[boucle active] **pour** i **de** t **à** $mystère(a,t)$ **faire**
`travailler`
`cotiser`
[fin de boucle] **fin(pour)**
[enfin ou déjà ?] `Retraite`

Complexité ?

Introduction Définition Suite finie Actions élémentaires Suite ordonnée Tâche Accomplir Données d'entrée

Suite finie : complexité

Vous êtes né l'année a et avez commencé à travailler l'année t :

Algorithme

[boucle jeunesse] **pour** i **de** a **à** $t-1$ **faire**
`s'épanouir en apprenant`
[fin de boucle] **fin(pour)**
[boucle active] **pour** i **de** t **à** $mystère(a,t)$ **faire**
`travailler`
`cotiser`
[fin de boucle] **fin(pour)**
[enfin ou déjà ?] `Retraite`

Complexité ?
Y a-t-il un moyen plus rapide d'arriver au même résultat ?

Complexité

Complexité d'un algorithme

$C(n) =$

nombre d'opérations
au pire
sur données de taille n

Complexité

- $O(\log n)$: logarithmique ☺☺
- $O(n)$: linéaire
- $O(n^2)$: quadratique ☹
- $O(n^k)$: polynomiale ☹☹
- $O(a^n)$: exponentielle ↯

Mauvaises nouvelles :
$\Omega(n^2), \Omega(2^n), \ldots$

Complexité

Maxime

Avec une horloge à 1GHz , la notion de complexité asymptotique devient plus importante qu'à 10MHz : les constantes cachées dans les O perdent de l'importance.

Exercice

Entre ces algorithmes dont les complexités ont été estimées (ou admises), préciser le meilleur choix en fonction de la taille des données

Complexité

Exemple

Animation à 2 GHz de 50 objets définis comme enveloppes convexes de n points :

	$n = 50$	$n = 500$
$20n \log n$	0.1 ms	1ms
$3n^2$	0.2 ms	10ms
n^4	0.1 s	30 min

Tracer les courbes, où se croisent-elles, ...

Introduction Définition Suite finie Actions élémentaires Suite ordonnée Tâche Accomplir Données d'entrée

Complexité

Intérêt pédagogique

- Choisir entre plusieurs méthodes pour résoudre un problème, la complexité est l'un des arguments
- Gagner en bon sens sur les ordres de grandeur :

Actions élémentaires

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée **d'actions élémentaires** pour accomplir une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

- Actions indivisibles
- Actions compréhensibles et maîtrisées par l'exécutant

Introduction Définition Suite finie Actions élémentaires Suite ordonnée Tâche Accomplir Données d'entrée

Actions élémentaires

Exercice :

Algorithme

```
blanchir les dés
ajouter un bouquet garni
glacer à blanc des petits oignons
préparer un roux blanc
...
```

Quel est le résultat de cet algorithme ?

Actions élémentaires

Algorithmes d'Eratosthène

entrée : un entier $n \geq 2$ **sortie :** la liste des premiers jusque n.

[initialiser] $p_2, \ldots, p_n \leftarrow$ vrai
pour i **de** 2 **à** n **faire**
  si p_i **alors**
    barre les multiples de i
  fin(si)
fin(pour)
récolte les p_i vrais dans une liste L

[initialiser p] **pour** i **de** 2 **à** n **faire** $p_i \leftarrow$ vrai **fin(pour)**
pour i **de** 2 **à** n **faire**
  si p_i **alors**
    $k \leftarrow 2$
[barre les] **tant que** $ki \leq n$ **faire**
[multiples de i] $p_{ki} \leftarrow$ faux
      $k \leftarrow k+1$
    fin(tantque)
  fin(si)
fin(pour)
[initialiser L] $L \leftarrow [\ ]$
pour i **de** 2 **à** n **faire**
[récolte les premiers] **si** p_i **alors** $L \leftarrow L, i$ **fin(si)**
fin(pour)
[sortie] L

Le premier algorithme est plus lisible mais masque la double boucle.

Actions élémentaires : structures de données

Structures de données : tables, listes, piles, ...
avec opérations (élémentaires "par définition") : extraire un élément, le premier, le dernier, etc...

D'où représentation d'objets : chiffres d'un nombre $[a_0, \ldots, a_n]$, point $[x, y]$, polynôme $[a_0, \ldots, a_n]$, droite $[a, b, c]$, etc.

Exercice

- Écrire un algorithme qui à partir des chiffres de deux entiers $[a_0, \ldots, a_n]$ $[b_0, \ldots, b_m]$ trouve les chiffres de la somme
- Écrire un algorithme qui à partir deux points $[x, y], [x', y']$ trouve une équation $[a, b, c]$ de la droite qui les joint.
- Écrire un algorithme qui à partir d'un polynôme $[a_0, \ldots, a_n]$ calcule son carré.

Actions élémentaires : pédagogie

Intérêt pédagogique

- Savoir communiquer (= [se faire] comprendre) avec
  - une machine (précision)
  - un haut dignitaire (respect des formules protocolaires)
  - un étranger (langage)
  - un enfant (vocabulaire restreint)
  - un employé pressé (résumer ses demandes)
  - ... ou niais (détailler ses demandes)
- Tester sa maîtrise de certaines notions : révision par la pratique

Suite ordonnée

Définition

Un **algorithme** est une **suite** finie **ordonnée** d'actions élémentaires pour accomplir une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Suite ordonnée

Exercice

Algorithme ou pas ?

$a \leftarrow 1$	$a \leftarrow 1$
$b \leftarrow 1$	$b \leftarrow 1$
$a \leftarrow -ab$	$b \leftarrow -ab$
$b \leftarrow -ab$	$a \leftarrow -ab$
tant que $a < 10$ `faire`	**tant que** $a < 10$ `faire`
$a \leftarrow 2a$	$a \leftarrow 2a$
fin(tantque)	**fin(tantque)**

Suite ordonnée

Exercice

Même résultat ?

a ← 3	a ← 3	a ← 3
b ← 4	b ← 4	b ← 4
a ← a+b	b ← a+b	b ← a+b
b ← a+b	a ← a+b	a ← a+b
écrire(a,b)	écrire(a,b)	écrire(b,a)

version interactive (saime)

Suite ordonnée

Algorithmes d'Eratosthène

entrée : un entier $n \geq 2$ **sortie :** la liste des premiers jusque n.

```
[initialiser p] pour i de 2 à n faire p_i ← vrai fin(pour)
                pour i de 2 à n faire
                  si p_i alors
                    k ← 2
[barrer les]        tant que k i ≤ n faire
[multiples de i]      p_{ki} ← faux
                      k ← k + 1
                    fin(tantque)
                  fin(si)
                fin(pour)
[initialiser L] L ← [ ]
                pour i de 2 à n faire
[stocker les premiers] si p_i alors L ← L, i fin(si)
                fin(pour)
[sortie] L
```

```
[initialiser p] pour i de 2 à n faire p_i ← vrai fin(pour)
[initialiser L] L ← [ ]
                pour i de 2 à n faire
                  si p_i alors
[stockage]          L ← L, i
                    k ← 2
[barrer les]        tant que k i ≤ n faire
[multiples de i]      p_{ki} ← faux
                      k ← k + 1
                    fin(tantque)
                  fin(si)
                fin(pour)
[sortie] L
```

Même résultat ?

Suite ordonnée

Algorithme

si tu es poli **alors**
  mouche ton nez
  dis bonjour à la dame
sinon
  dis bonjour à la dame
  mouche ton nez
fin(si)

Suite ordonnée

"algorithme" non déterministe

entrée : un entier n produit de deux nombres premiers
sortie : la factorisation (prouvée) de n.

```
a ← un facteur premier de n
b ← n/a
écrire comme à l'école
la multiplication de a par b
```


Suite ordonnée

P = NP ?

Introduction Définition Suite finie Actions élémentaires **Suite ordonnée** Tâche Accomplir Données d'entrée

Suite ordonnée

factorielle itérative

```
procédure factorielle(n)
[initialisation] f ← 1
[une boucle] pour i de 1 à n faire
    f ← f * i
fin(pour)
[retour de la valeur] f
```

factorielle récursive

```
procédure factorielle(n)
si n = 1 alors
    1
sinon
    n factorielle(n − 1)
fin(si)
```

Introduction Définition Suite finie Actions élémentaires **Suite ordonnée** Tâche Accomplir Données d'entrée

Suite ordonnée

Suite ordonnée : intérêt pédagogique

- Comprendre la dépendance logique des idées, approcher la notion de preuve.
- Structurer sa pensée
- Approcher la notion de récursivité
- Nouveau critère de choix
- Apprendre à gérer

Tâche

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée d'actions élémentaires pour accomplir **une tâche** fixée à partir des données prévues en entrée.

Tâche

- Plusieurs (ou aucun) algorithmes pour une tâche : deux notions de fonction.
- Complexité d'un problème
- Méthodes algorithmiques générales (diviser pour régner, glouton, retour arrière)
- Définition précise de la tâche.

Tâche : intérêt pédagogique

Tâche : intérêt pédagogique

- Ne pas confondre **la** fin et **les** moyens.
- Le choix entre algorithmes force l'expérimentation.
- Apprendre sur l'exemple à focaliser sur l'essentiel.
- Penser en terme de méthodes générales
- Décrire précisément un objectif

Accomplir

Euclide : pgcd(x,y)

```
[initialisation] a ← x
                 b ← y
        [boucle] tant que b > 0 faire
                     r ← a − b
                     a ← r
                     si a < b alors
       [échange]         r ← a
                         a ← b
                         b ← r
                     fin(si)
                 fin(tantque)
        [retour] a
```

Invariant : $pgcd(a, b) = pgcd(x, y)$.
Donc à la fin $a = pgcd(a, 0) = pgcd(x, y)$.

Accomplir

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée d'actions élémentaires pour **accomplir** une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Accomplir

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée d'actions élémentaires pour **accomplir** une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Accomplir : intérêt pédagogique

- Apprendre à se méfier des machines
- Expérimenter par batterie de tests

Accomplir

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée d'actions élémentaires pour **accomplir** une tâche fixée à partir des données prévues en entrée.

Accomplir : intérêt pédagogique

- Apprendre à se méfier des machines
- Expérimenter par batterie de tests

Données d'entrée

Définition

Un **algorithme** est une suite finie ordonnée d'actions élémentaires pour accomplir une tâche fixée à partir des **données prévues en entrée**.

Données d'entrée

- Doivent être précisées : a-t-on envisagé les cas suivants pgcd(3), pgcd(3,-4), pgcd(3,4,5), pgcd(3,π), pgcd(chien,chat)
- Récursivité
- Type

Données d'entrée : intérêt pédagogique

Données d'entrée : intérêt pédagogique

- Prendre conscience de la nature des objets et savoir à quels objets les notions s'appliquent

Place de l'algorithmique en mathématiques

Luc Sanselme, Lycée Henri Poincaré à Nancy

UMR 8623 LRI (Laboratoire de recherche en informatique)

Résumé

Dans cet exposé, nous allons essayer de comprendre la place de l'algorithmique en mathématiques. Nous commencerons par un historique de l'algorithmique : nous chercherons entre autre à replacer son histoire dans celle des mathématiques et de l'informatique. Nous continuerons avec une introduction à l'algorithmique qui aura pour but de poser les bases de ce qu'est cette science aujourd'hui .Ensuite, nous essaierons de dégager les liens et les différences entre les branches plus classiques des mathématiques et l'algorithmique : nous tenterons de mettre en avant comment ces mathématiques plus traditionnelles et l'algorithmique peuvent se nourrir mutuellement. Nous terminerons en exposant quelques pistes et quelques idées sur la façon de présenter l'algorithmique au grand publique et en particulier aux lycéens.

Le texte présenté ci dessous reprend les diapositives de l'exposé réalisé lors du colloque.

Structure de l'exposé

- Un peu d'histoire...
- Les machines de Turing, modèle de référence en calculabilité et en complexité
- Vers un formalisme simplifié
- Eléments didactiques

La démarche algorithmique au fil des siècles

- Averroès (12ème siècle) : méthode de raisonnement qui s'affine étape par étape jusqu'à une certaine convergence
- Descartes : "diviser chacune des difficultés que j'examinerois, en autant de parcelles qu'il se pourroit, et qu'il seroit requis pour les mieux résoudre"
- la descente infini de fermat au 17ème siècle

- Constructions géométriques

Historique

- Quelques éléments d'histoire des algorithmes
- Quelques repères dans l'évolution des machines de calculs
- L'algorithmique, de sa naissance à nos jours
  - Naissance de la calculabilité
  - Naissance de la complexité
  - Etat de l'art et perspectives

Les algorithmes au fil des siècles

"Algorithme"de Algorismi, surnom latin du mathématicien arabe Abu Ja'far Mohammed Ben Mussa Al-Khwarismi (780-850).

Algorithmes célèbres

- calculs commerce et impôts chez les Babyloniens (vers -1800/-1600)
- Algorithme d'Euclide (4ème siècle avant JC)
- Algorithme d'Archimède (3ème siècle avant JC)
- Crible d'Eratosthènes (3ème siècle avant JC)
- Méthode du Pivot de Gauss (1er siècle chez les Chinois)
- Code de Vigenère (16ème siècle)
- Machine enigma (Deuxième guerre mondiale)
- RSA (1977)

L'ère de l'informatique et l'omniprésence des algorithmes

Raisons

- Intérêt de systématiser certaines opérations
- Puissance de calcul des ordinateurs

Tous les domaines

- Economie : statégies d'investissement, gestion des stocks,...
- Industrie : procédés de fabrication,...
- Simulation : météorologie, aérodynamisme, ... (Sciences)
- Cryptographie et compressions de données
- Gestion de grosses masses d'informations : bases de données,...
- Traitement d'images et de sons

Histoire des machines de calcul

- Boulier Chinois (3000 avant JC)
- 1642 Calculatrice de Blaise Pascal
- 1940 "Bombes" de Turing
- 1946 ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer)
- 1947 Invention du transistor
- 1948 : Manchester Mark I
- 1953 IBM lance son premier ordinateur commercial en série, l'IBM 650
- 1965 Loi de Moore : capacité sur les puces double tous les ans
- 1971 Intel met en vente le premier microprocesseur
- 1975 Loi de Moore : le nombre de transistor dans un microprocesseur double tous les deux ans (densité double)
- 1975 Texas Instruments présente sa première calculatrice de poche programmable, la TI SR 52
- 1981 IBM lance son 5150 Personal Computer

Naissance de la calculabilité

- Les fondements de l'algorithmique datent des années 1930
- Liés à la construction formelle des mathématiques et de la logique
- Donner un cadre formel à la théorie de la démonstration
- Défini ce qu'est une fonction calculable

- Thèse de Church (Kleene en 1943)/Turing-Church (années 1990)
  - 1933 Church et le λ-calcul
  - 1936 Turing et les "Machines de Turing"

La thèse de Turing-Church

La thèse

Les machines de Turing (les fonctions λ-définissables, les fonctions récursives...) formalisent correctement la notion de méthode effective de calcul.

Méthode effective

1. Ensemble fini d'instructions simples et précises, décrites avec un nombre fini de symboles,
2. nombre fini d'étapes,
3. suivi par un humain avec seulement du papier et un crayon,
4. l'exécution ne requiert pas d'intelligence de l'humain sauf celle nécessaire pour comprendre et exécuter les instructions.

La thèse de Turing-Church

Succès de la thèse

- Depuis 1940, notion de fonction calculable est bien définie
  - ⟶ Début du XXe siècle : expressions informelles comme "effectivement réalisable"
- Tous formalisme "raisonnable" est équivalent à une Machine de Turing : Thèse renforcée
  - ⟶ Encore vrai aujourd'hui

⟶ Précise la notion d'algorithme et fonde l'algorithmique (calculabilité)

Naissance de la complexité

Années 1960 – 1970, pour mesurer l'efficacité d'un algorithme :

"Il s'exécute en temps de temps sur une machine"

Problème

- Dépend de la machine
- Dépend du langage de programmation
- Dépend de la façon dont est implanté l'algorithme

Notion de complexité

- Modèle théorique (Machines de Turing,...)
  - ⟶ En temps : nombre d'opérations pour arriver au résultat
  - ⟶ En espace : nombre de cases nécessaires sur le ruban
- Le plus souvent : évaluation asymptotique en fonction de l'augmentation de la taille des données
  - ⟶ En pratique : bon modèle
- Etudie aussi la complexité de problèmes

Etat de l'art et perspectives

- Machines de Turing toujours modèle utilisé en calculabilité
  - ⤳ Thèse de Turing-Church toujours valable
- Domaine de recherche très actif
- Divers scénarios qui font évoluer les modèles de complexité :
  - Plusieurs ordinateur, qui communiquent (lien avec la théorie de l'information)
  - Source aléatoire
  - scénarios proposés par la cryptographie...

- Problème de la miniaturisation des transistors (effet tunnel)
  - ⤳ Comment lutter contre cet effet ?
  - ⤳ Tirer bénéfices des propriétés de la mécanique quantique
- Calcul quantique : plus rapide ?
  - Algorithme de Grover : gain quadratique prouvé
  - Factorisation de Shor (1994) : gain sous-exponentiel supposé

Les machines de Turing, modèle de référence en calculabilité et en complexité

- Présentation des machines de Turing
- Introduction à la théorie de la complexité

Un modèle de calculabilité : les machines de Turing

Présentation intuitive des machines de Turing

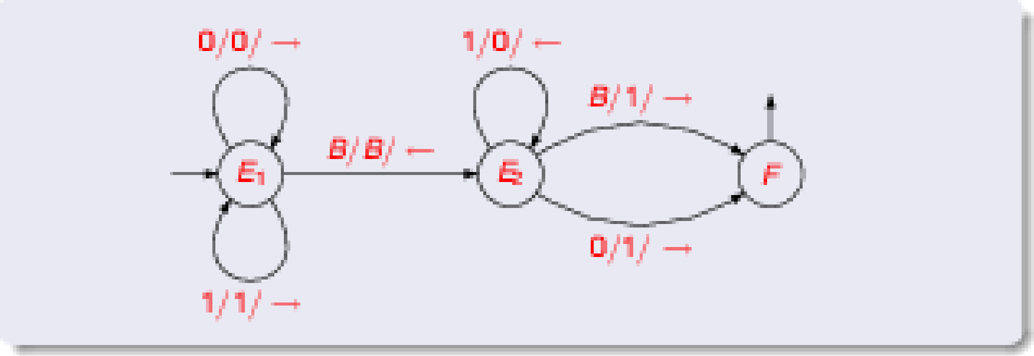
Qu'est-ce qu'une machine de Turing ?

Etant donné un alphabet qui contient un symbole "Blanc".

1. Un "ruban" : "longueur infinie",déplacement gauche ou droite, divisé en cases,
2. Une "tête de lecture/écriture" : lit, écrit et se déplacer à gauche ou à droite,
3. Nombre fini d'états : un initial et des finaux,
4. Un "registre d'état" : mémorise l'état courant,
5. Une "table d'actions" : quel symbole écrire, direction de la tête de lecture (gauche ou droite), et le nouvel état, en fonction du symbole lu.

Un premier exemple

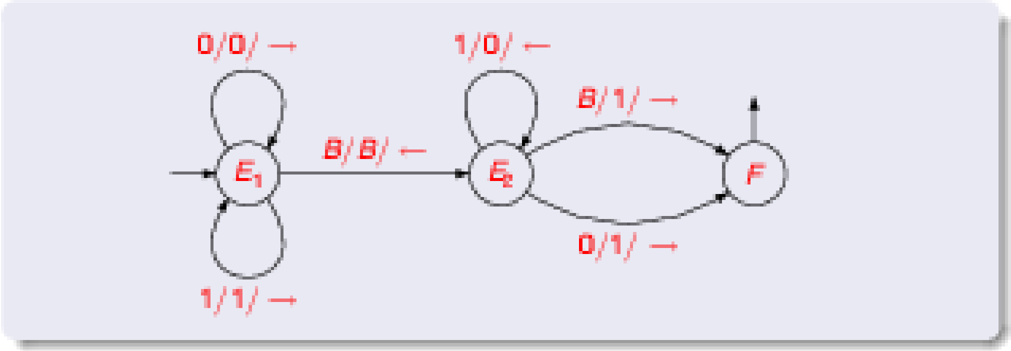
La fonction $f : n \mapsto n+1$ Alphabet : $\{0, 1, B\}$



B	B	B	1	0	1	B	B	B	B	E_1
B	B	B	1	0	1	B	B	B	B	E_1
B	B	B	1	0	1	B	B	B	B	E_1
B	B	B	1	0	1	B	B	B	B	E_1
B	B	B	1	0	1	B	B	B	B	E_2
B	B	B	1	0	0	B	B	B	B	E_2
B	B	B	1	1	0	B	B	B	B	F

Un premier exemple : en langage courant...

La fonction $f : n \mapsto n+1$ Alphabet : $\{0, 1, B\}$



L'algorithme

1. Tant que $CC \neq B$, se déplacer vers la droite,
2. Se déplacer vers la gauche,
3. Tant que $CC = 1$:
   1. Remplacer CC par 0,
   2. Se déplacer vers la gauche,
4. Remplacer CC par 1,
5. Se déplacer vers la droite.

Définition formelle d'une machine de Turing

Definition

Une machine de Turing déterministe est un septuplet $(Q, \Gamma, B, \Sigma, q_0, \delta, F)$ où

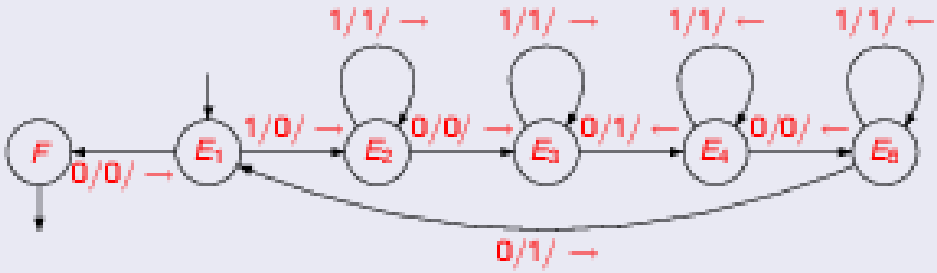
- Q est un ensemble fini d'états,
- Γ est l'alphabet de travail des symboles de la bande,
- $B \in \Gamma$ est un symbole particulier (dit blanc),
- Σ est l'alphabet des symboles en entrée ($\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{B\}$),
- $q_0 \in Q$ est l'état initial,
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \to\}$ est la fonction de transition,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants (ou finaux, terminaux).

Un deuxième exemple

La fonction

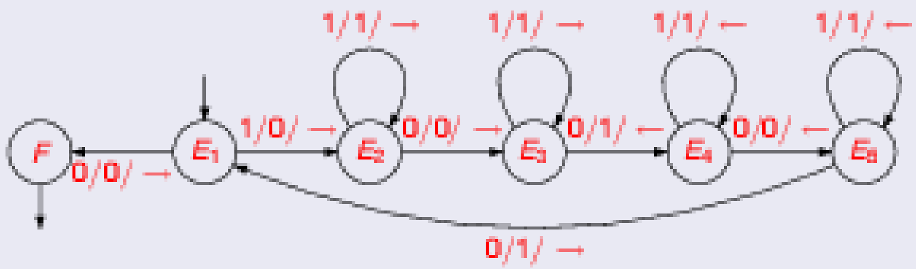
- Alphabet $\{0, 1\}$, 0 étant le "blanc",
- Le ruban contient une série de 1,
- la tête de lecture/écriture se trouve initialement au-dessus du 1 le plus à gauche,
- Cette machine a pour effet de doubler le nombre de 1, en intercalant un 0 entre les deux séries.
- Exemple : 111 devient 1110111.

Un deuxième exemple



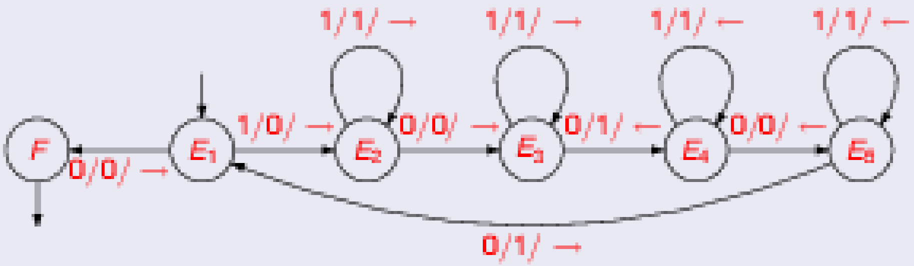
0	0	1	1	0	0	0	E_1
0	0	0	1	0	0	0	E_2
0	0	0	1	0	0	0	E_2
0	0	0	1	0	0	0	E_3
0	0	0	1	0	1	0	E_4
0	0	0	1	0	1	0	E_5
0	0	0	1	0	1	0	E_5

Un deuxième exemple



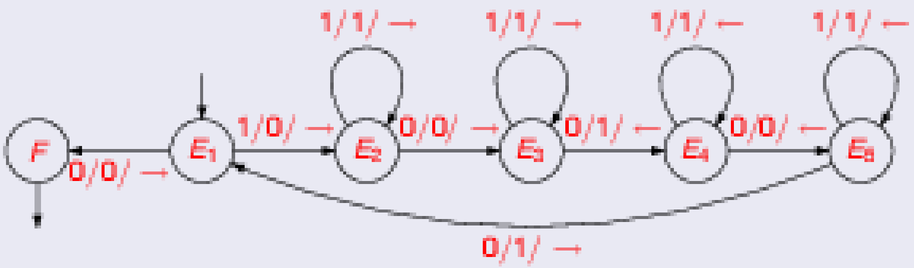
0	0	0	1	0	1	0	E_5
0	0	1	1	0	1	0	E_1
0	0	1	0	0	1	0	E_2
0	0	1	0	0	1	0	E_3
0	0	1	0	0	1	0	E_3
0	0	1	0	0	1	1	E_4
0	0	1	0	0	1	1	E_4

Un deuxième exemple



0	0	1	0	0	1	1	E_4
0	0	1	0	0	1	1	E_5
0	0	1	1	0	1	1	E_1
0	0	1	1	0	1	1	F

Un deuxième exemple : en langage courant...



L'algorithme

1. Tant que $CC \neq 0$
   1. Remplacer CC par 0/Aller à droite
   2. Aller à droite Jusqu'à ce que $CC = 0$
   3. Aller à droite Jusqu'à ce que $CC = 0$
   4. Remplacer CC par 1/Aller à gauche
   5. Aller à gauche Jusqu'à ce que $CC = 0$
   6. Tant que $CC = 1$ Aller à gauche
   7. Remplacer CC par 1/Aller à droite
2. Aller à droite

Un deuxième exemple : en langage courant...

0	1	1	1	1	...	1	1	1	0	0	0	0	...	0	0	0
0	0	1	1	1	...	1	1	1	0	0	0	0	...	0	0	0
0	0	1	1	1	...	1	1	1	0	1	0	0	...	0	0	0
0	1	1	1	1	...	1	1	1	0	1	0	0	...	0	0	0
0	1	0	1	1	...	1	1	1	0	1	0	0	...	0	0	0
0	1	0	1	1	...	1	1	1	0	1	1	0	...	0	0	0
0	1	1	1	1	...	1	1	1	0	1	1	0	...	0	0	0
0	1	1	0	1	...	1	1	1	0	1	1	0	...	0	0	0
⋮					⋮								⋮			⋮
0	1	1	1	1	...	1	0	1	0	1	1	1	...	1	0	0
0	1	1	1	1	...	1	1	1	0	1	1	1	...	1	0	0
0	1	1	1	1	...	1	1	0	0	1	1	1	...	1	0	0
0	1	1	1	1	...	1	1	0	0	1	1	1	...	1	1	0
0	1	1	1	1	...	1	1	1	0	1	1	1	...	1	1	0

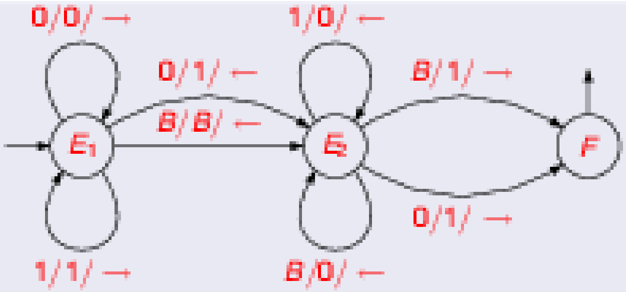
Machines de Turing non-déterministes

Definition

Une machine de Turing non-déterministe est un septuplet $(Q, \Gamma, B, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ où

- Q est un ensemble fini d'états,
- Γ est l'alphabet de travail des symboles de la bande,
- $B \in \Gamma$ est un symbole particulier (dit blanc),
- Σ est l'alphabet des symboles en entrée ($\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{B\}$),
- $q_0 \in Q$ est l'état initial,
- $\Delta \subseteq (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\})$ est une relation vérifiant : $\forall (q_1, x) \in (Q \times \Gamma)$,
  $$\exists (q_2, y, f) \in (Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}); \quad ((q_1, x), (q_2, y, f)) \in \Delta,$$
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants (ou finaux, terminaux).

Machines de Turing non-déterministes



Remarques

- Ce n'est plus un modèle de calcul "réaliste"
- Par contre, si l'on nous donne un trajet, on peut vérifier si on arrive dans un état final et donc vérifier si la réponse à un un problème est bien oui (mais pas non)
- Mêmes fonctions calculables que pour une machine de Turing déterministe
- A la base du modèle des machines de Turing probabilistes : machines de Turing non-déterministe + répartition de probabilité pour choisir celle des différentes branches possibles
  - → Compliqué : pour simplifier on ne parlera que des non-déterministes

Variantes des machines de Turing

Machines de Turing universelles

Evolutions possibles

- Nombre de bandes
- Bandes en lecture seule ou en écriture seule
- Bande simplement infini

Evolution très utilisée

- Machine RAM (Random Access Machine)

Introduction à la théorie de la complexité

- De la complexité d'un algorithme à celle d'un problème algorithmique
- Quatre familles de classes
- Principales classes
- Réduction de problèmes
- Structures de ces classes

De la complexité d'un algorithme à celle d'un problème algorithmique

Modèle

Les deux modèles les plus utilisés en théorie de la complexité sont :

- La machine de Turing (déterministe ou non),
- La machine RAM (Random Access Machine).

→ Modèles "équivalents"

Complexité d'un algorithme

- Estimation, théorique, des ressources informatiques nécessaires.
- En temps : nombre d'étapes nécessaires pour effectuer le calcul
- En espace : nombre de cases nécessaires sur le ruban pour effectuer le calcul
- Fonction de la taille des données en entrée/ Etude asymptotique

Complexité d'un problème algorithmique

- Vise à savoir si la réponse à un problème peut être donnée efficacement
- Hiérarchies de difficultés entre les problèmes algorithmiques : "classes de complexité"

Quatre familles de classes

n : Taille des données en entrée

- $TIME(t(n))$: classe des problèmes résolus en temps de l'ordre de $t(n)$ sur une machine déterministe.
- $NTIME(t(n))$: classe des problèmes résolus en temps de l'ordre de $t(n)$ sur une machine non déterministe.
- $SPACE(s(n))$: classe des problèmes résolus avec un espace de l'ordre de $s(n)$ sur une machine déterministe.
- $NSPACE(s(n))$: classe des problèmes résolus avec un espace de l'ordre de $s(n)$ sur une machine non déterministe.

Principales classes

n taille des données

- Classe $P = TIME(n^k, k \in \mathbb{N})$ (déterministe)
  - → Exemples : connexité dans un graphe, test de primalité (2002),...
  - → Stable par "composition".
  - → Classe des problèmes que l'on peut résoudre "efficacement".
  - → Différents "modèles" équivalents pour cette classe

- Classe NP équivalent non-déterministe de P
  - → SAT (Boolean Satisfiability Problem) : problème de savoir si une formule logique admet une instance pour laquelle elle est vraie est NP
  - → Autres exemples : Tester si deux graphes sont isomorphes, sac-à-dos, voyageur de commerce, factorisation,...
  - → Classe des problèmes pour lesquels on peut "tester si une solution est vraie en temps polynomial"

- Classe $CoNP$ (complémentaire de NP)
  - → Exemple : Une formule logique donnée est-elle toujours vraie ?
- Classe $PSPACE$, $NPSPACE$, $EXPTIME$

Réduction de problèmes

Réduction de problèmes

- Ramener la résolution d'un problème à la résolution d'un autre
- Algorithme de réduction
- Cette réduction doit être polynomiale et déterministe (le plus souvent)
- A se réduit à un problème B : A est plus facile que B

$\longrightarrow$ Egalement, réduction d'un "modèle" à un autre

Problèmes C-complets et C-difficiles

- C une classe de complexité (P, NP, $PSPACE$, ...).
- Un problème est C-difficile s'il est au moins aussi difficile que tous les problèmes dans C.
- Un problème C-difficile qui appartient à C est dit C-complet.

Théorème de Cook-Levin

- SAT est NP-complet

Structure de ces classes

Hiérarchie

- $P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq NPSPACE \subseteq EXPTIME$,
- $P \subseteq CoNP \subseteq PSPACE \subseteq NPSPACE \subseteq EXPTIME$,
- $PSPACE = NPSPACE$ (Théorème de Savitch)
- $P \subsetneq EXPTIME$.

Problèmes ouverts

- $P = NP$?
- $NP \neq CoNP$?

Vers un formalisme simplifié

- Notions élémentaires en algorithmique :
  - Problème
  - Algorithmes et syntaxe
  - Preuve de terminaison et de correction
  - Complexité
- Objets élémentaires en algorithmique
- Stratégies élémentaires en algorithmique

Notions élémentaires : le problème

Notion de problème

- un problème est une question générique
- chaque instance du problème a une réponse
- la notion de problème est indépendante de la notion de programme

Exemples de problèmes

- Déterminer si un nombre est pair ou impair est un problème,
- Trier un tableau est un problème
- Déterminer si un programme écrit dans un langage s'arrête est un problème appelé problème de l'arrêt
- Déterminer si un polynôme (en plusieurs variables) à coefficients entiers a des racines entières est un problème (dixième problème de Hilbert)

Notion élémentaire : l'algorithme

Notion d'algorithme

Un algorithme est

- un processus systématique de résolution, par le calcul, d'un problème
- présente les étapes vers le résultat à une autre personne physique (un autre humain) ou virtuelle (un calculateur).
- une suite finie et non-ambigüe d'opérations "élémentaires" permettant de donner la réponse à un problème.

Notion de syntaxe

- Un algorithme est un "texte" écrit dans un langage.
- "Textes" dans ce langage : suivent des règles.
- Le "texte" représentant un algorithme est la syntaxe de cet algorithme.

$\longrightarrow$ Syntaxe doit être correcte.

Notion élémentaire : l'algorithme

Exemples d'algorithmes

- Déterminer si un nombre est pair ou impair :
  Regarder son dernier chiffre en binaire pour savoir si il est pair ou impair est un algorithme
- Trier un tableau :
  Tri insertion, tri bulle, tri rapide, tri fusion, tri par tas...sont des algorithmes
- Déterminer si un programme écrit dans un langage s'arrête :
  Aucun algorithme ne résoud ce problème
  Problème de Syracuse :

$$f : n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 1 \\ f(n/2) & \text{si} \quad n \text{ pair} \\ f(3n+1) & \text{si} \quad n \text{ impair} \end{cases}$$

- Déterminer si un polynôme (en plusieurs variables) à coefficients entiers a des racines entières est un problème (dixième problème de Hilbert)
  Aucun algorithme ne résoud ce problème

Notions élementaires : preuve de terminaison et de correction

Validité d'un algorithme

Pour qu'un algorithme soit valide, il faut prouver que :

- sa syntaxe est correct
- il termine (toujours) : preuve de terminaison
- il donne la réponse au problème posé (toujours) : preuve de correction

Notions élementaires : preuve de terminaison et de correction

Pour la syntaxe

- Bonnes habitudes de présentation
- Débugger en mettant en commentaires

Pour la terminaison

- Pour une boucle : fonction valeurs entières strictement décroissante
- Tester différentes valeurs correspondant aux différents "circuits"

Pour la correction

- Pour une boucle : propriété vraie à chaque passage dont l'instance au dernier passage est la propriété voulue
- Comprendre ce que chaque variable "représente" (à chaque instant)
- Tester différentes valeurs correspondant aux différents "circuits"

$\hookrightarrow$ Tester les cas particuliers

Notions élementaires : la complexité

Notion de complexité

- Fonction qui à n associe $f(n)$, nombre maximum (ou moyen, mais plus compliqué) d'opérations pour les entrées de longueur n.
- Comportement asymptotique (constante multiplicative).
  Exemple : un entier n a une longueur de $\log_2(n)$ en binaire

Efficacité

Algorithme efficace : complexité polynomiale en la taille de l'entrée

Espace moins un problème que le temps : capacités des ordinateurs.

Objets élémentaires en algorithmique

Les structures de données

- constantes
- variables
- tableaux
- structures récursives (listes, arbres, graphes)

Les structures de contrôle

- séquences
- conditionnelles
- boucles

- Itérativité et récursivité
- "while" et "for", et bannir les "goto"

Stratégies élémentaires en algorithmique

L'algorithmique a développé quelques stratégies pour résoudre les problèmes

- Recherche exhaustive
- Algorithme glouton : rendu de pièce de monnaie (euro)
- Diviser pour régner : tri fusion
- Aléatoire : marches aléatoires
- Par approximations successives : dichotomie
- Décomposition top-down / bottom-up
- Pré-traitement (ou post-traitement) : crible d'ératosthène pour la primalité sur des petits entiers
- Heuristique : solution rapide, assez bonne, mais pas toujours optimale.

Eléments didactiques

- L'algorithmique, une des branches les plus récentes des mathématiques
- L'algorithmique comme outil didactique pour les mathématiques
- Didactique de l'algorithmique et évaluation
- Choix d'un langage/logiciel

L'algorithmique, une des branches les plus récentes des mathématiques

Deux domaines du 20ème siècle

- Les probabilités et les statistiques
- L'algorithmique et l'informatique théorique

Nouveaux modes de raisonnement

- Liés aux probabilités : algorithmes probabilistes,
- Notion d'induction,
- Mathématiques discrètes,
- Constructiviste,
- Formalisme et abstraction un peu différents,
- Introduit la notion de temps en mathématiques, qui était plutôt la science de l'éternité.

L'algorithmique comme outil didactique pour les mathématiques

Outil pour comprendre les objets traditionnels des mathématiques

- La notion de variable/inconnue
- La notion de fonction

Notion de variable et d'inconnue

- Pas de différence entre une variable "mathématique" et une variable "informatique"
- En mathématiques :
  - ⟶ Pas de distinction entre $:=$ et $=$.
  - ⟶ "Type" pas les variables explicitement.
  - ⟶ Quantificateurs définissent le type.
  - ⟶ Pas besoin de "prévoir" l'espace mémoire.
- En informatique :
  - ⟶ Quantifie pas (ou peu).
  - ⟶ Constructiviste : $\exists$ "disparait".
  - ⟶ Ensemble qu'elle parcourt donné par son type (sinon binaire) : $\forall$ disparait.
- Différence due à l'utilisation : ne nécessite pas de la rigueur au mêmes endroits.

L'algorithmique comme outil didactique pour les mathématiques

Outil pour comprendre les objets traditionnels des mathématiques

- La notion de variable/inconnue
- La notion de fonction

Notion de fonction

- Permet de comprendre qu'une fonction peut être "n'importe quoi",
  - → En mathématiques : fonctions ont toujours des "bonnes propriétés"
  - → En informatique : natures très diverses
  - → Créativité : pas limité à combiner des fonctions usuelles
- Les propriétés étudiées sont différentes : calculabilité, complexité

L'algorithmique comme outil didactique pour les mathématiques

Améliorer la méthodologie

- Rigueur rédactionnelle/Présentation,
- Analyse et méthodologie de la résolution.

Rigueur rédactionnelle/Présentation

- La rigueur rédactionnelle est obligatoire sur un ordinateur,
  - → Importance de la syntaxe,
  - → Sanction directe,
  - → En mathématiques : pas une lubie pour "embêter" les élèves,
  - → Rigueur avec les objets $f \neq f(x)$,
- Présentation des programmes, en pratique, indispensable,
  - → Structurer les démonstrations de la même façon,
- Découper un programme en modules,
  - → Faire de même avec une démonstration (lemme),

L'algorithmique comme outil didactique pour les mathématiques

Améliorer la méthodologie

- Rigueur rédactionnelle/Présentation,
- Analyse et méthodologie de la résolution.

Analyse et méthodologie de la résolution

- Découper un programme en modules,
  - → Faire de même avec une démonstration (lemme),
- Réduire un problème à un autre grâce à un algorithme,
  - → Faire de même en mathématiques pour démontrer une proposition
- Techniques de génie logiciel : du cahier des charges au logiciel,
  - → De l'énoncé à l'algorithme,
  - → De l'énoncé à la démonstration sur feuille (en passant par l'analyse et la rédaction).

Didactique de l'algorithmique et évaluation

- Travail sur machine
  - → La sanction est directe,
  - → Apprendre à corriger ses erreurs : autonomie,
  - → ... mais écrire les programmes sur papier avant (rapidement),
- Evaluer la rigueur rédactionnelle,
- Evaluer la présentation/structure des programmes,
  - → Sortir de l'idée qu'un bon programme est incompréhensible,
  - → ...au contraire.

Didactique de l'algorithmique et évaluation

- Travailler sur des programmes déjà faits : que fait-il, quelle complexité ?
  - → ...ou faits en partie et à compléter,
- Projets,
- Méthodes d'analyse par "couches" (génie logiciel).

Didactique de l'algorithmique et évaluation

- Savoir tester un programme,
  - → Avec l'ordinateur (cf avant),
  - → A la main (cf après),
- Le tableau comme "machine de Turing"/simulateur d'ordinateur (écrire/effacer/réécrire),
  - → Dessiner les cases mémoires,
  - → Les modifier en faisant une exécution pas à pas,
- Expliquer "ce qui se passe en machine",
  - → Désacraliser l'ordinateur,
  - → Autre chose qu'une boîte noire.

Le problème du choix d'un langage/logiciel

Différents paramètres

- Structuré et syntaxe rigoureuse ou plus permissif
- Typé ou non
- Passage par valeur ou par adresse
- Itératif ou récursif
- Fonctionnel ou impératif
- Orienté objet ou non

Une proposition : Python/Sage

Sage : aspect pédagogique

- Programmé en python, utilisation en Python.
- Le "notebook" : interface agréable/possibilités graphiques ,
- Nombreuses bibliothèques spécialisées
- Très complet : algèbre, analyse, calcul numérique, calcul symbolique, probabilités, statistiques, géométrie,
- Peut être utilisé jusque dans le supérieur

Une proposition : Python/Sage

Sage : aspect logistique

- Logiciel licence GNU
- L'aspect "serveur".
- Une communauté qui se développe.
- → Logiciel en anglais uniquement (mais ébauche d'une version francisée),
- → Peu de ressources en français pour les enseignants,
- Utilisé par certaines académies : Académie Aix-Maseille http://sage.irem.univ-mrs.fr/

Une proposition : Python/Sage

Python

- Python : un vrai langage, utilisé aussi bien par la Nasa, Google, en bioinformatique, ...
- Multi-plateforme, portable,
- Langage orienté objet : bonne vision intellectuelle,
- Fortement typé,
- Syntaxe simple et intuitive,
- Licence libre.

Conclusion

Introduction de l'algorithmique dans les programmes

- Mini-révolution dans l'enseignement des mathématiques
- Occasion de diversifier les compétences demandées aux élèves
- Pas seulement outil indispensable en mathématiques appliquées

Introduire des éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement secondaire ? Une étude didactique

Nguyễn Chí Thành
Faculté de l'Education, Université Nationale du Vietnam à Hanoi

Annie Bessot
IREM de Grenoble et Laboratoire LIG, équipe DIAM, Université de Grenoble

Cet exposé a pour objectif de présenter le travail de thèse de Nguyen Chi Thanh (2005)[41].
Nous présentons d'abord les résultats d'une analyse épistémologique concernant l'algorithmique et la programmation. Puis nous donnons les résultats d'une analyse institutionnelle comparative France Viêt-nam en ce qui concerne la présence d'éléments informatiques dans l'enseignement mathématique secondaire (noté par la suite EMS) sous les programmes autour des années 2000. Nous interrogeons brièvement les nouveaux programmes 2009. Nous terminons en présentant les éléments d'une ingénierie didactique expérimentée en France et au Viêt-nam : conception, réalisation et analyse dans les conditions et les contraintes du programme en vigueur lors de l'expérimentation.

Analyse épistémologique

1. Analyse de la genèse de la machine ordinateur en rapport avec les problèmes mathématiques

Nous nous attachons à repérer les ruptures et les filiations dans la co-genèse de la notion de machine ordinateur et de la programmation d'algorithmes, en prenant en compte 3 critères :
- les problèmes mathématiques, ayant une solution algorithmique connue,
- les savoirs mathématiques de l'époque en relation avec ces problèmes
- le contexte technologique de l'époque

Nous portons aussi notre attention sur l'évolution d'une étape à une autre du rapport de l'homme avec la machine.

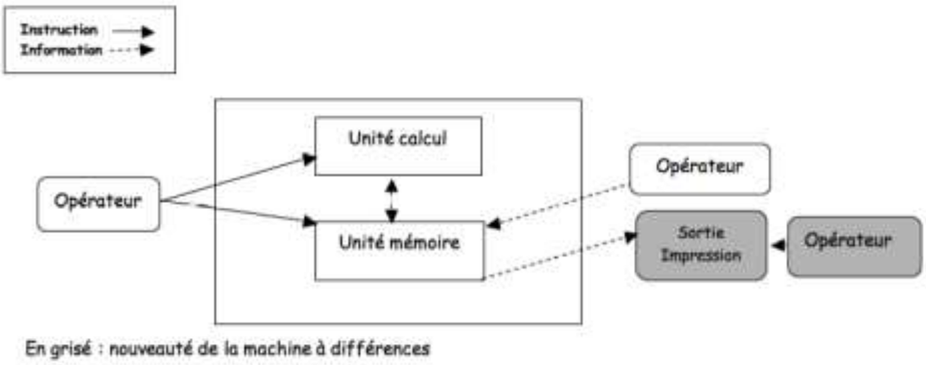
1.1. La machine arithmétique

La mécanisation des calculs fut d'abord celle des algorithmes liés aux 4 opérations de l'arithmétique décimale. *L'enjeu initial* de cette mécanisation du calcul est bien décrit par Leibniz : se libérer du calcul qu'il qualifie de travail d'esclave : « il est indigne d'homme remarquable de perdre des heures à un travail d'esclave, le calcul, qui pourrait fort bien

[41] Thèse en cotutelle France – Viêt-nam codirugé par Anie Bessot et Lê Van Tien. Philippe Jorrand en a contrôlé les parties informatiques. Alain Birebent a aussi participé à ce travail.

être confié à n'importe qui, avec l'aide de machine. » (Leibniz cité par Ligonnière 1987, p. 41)
Cette mécanisation s'appuie sur l'existence d'un contexte technologique, celui du mécanisme d'horlogerie avec roues dentées et ergots
Le problème de la mécanisation des quatre opérations est résolu en 1821 par Thomas de Colmar, qui conçoit l'Arithmomètre en filiation avec la Pascaline de Pascal (1642) et la machine de Leibniz (1672 - 1693) : les dispositifs, qui servent à inscrire les deux nombres pour l'opération et à afficher le résultat, sont dissociés.
De nouvelles méthodes mathématiques liées à l'évolution des mathématiques émergent et vont faire évoluer la conception des machines arithmétiques.
La méthode des différences finies, utilisant les dérivées successives d'une fonction polynomiale, va permettre d'organiser la tabulation de toute fonction polynomiale et par approximation celles d'une classe plus large de fonctions.
Charles Babbage, mathématicien anglais (1791-1871), veut mécaniser les tâches répétitives de réalisation de ces tables afin de diminuer le risque d'erreurs dues au calcul humain et au report humain des résultats : *second enjeu de la mécanisation des calculs*. La première machine de Babbage « difference engine » (1821) a des capacités étonnantes, puisqu'elle […] peut calculer des valeurs de fonctions polynomiales de degré 7 pour des nombres comportant jusqu'à 31 chiffres (Swade 1993, p. 82)
Mais la seule innovation par rapport aux machines précédentes du projet de machine à différences est d'imaginer l'impression automatique des résultats. Le dispositif de sortie qu'est l'imprimante soulage le travail de l'homme dans le report de résultat. Ce dispositif est, en quelque sorte, l'embryon de dispositif de sortie de la machine ordinateur actuelle.

Nous représentons par un schéma l'architecture de la machine arithmétique (cf. figure



1).

Figure 1. Architecture de la machine arithmétique

Dans la machine arithmétique, l'opérateur humain doit entrer les nombres dans la mémoire - inscripteur, mémoriser les résultats intermédiaires à l'aide de rondelles ou d'un moniteur de rotation, faire tourner chaque roue et enfin lire les chiffres apparaissant dans les lucarnes pour les copier. L'intervention humaine est donc nécessaire tout au long du processus de calcul. Babbage améliore l'architecture des machines arithmétiques par l'invention de l'imprimante qui supprime l'action de report du résultat.
Chaque machine arithmétique est un programme mécanisé : le programme est interne et figé.

1.2. Une première rupture : la machine analytique de Babbage

C’est en voulant que la machine exécute automatiquement non seulement une tâche de calcul mais *une chaîne de calculs* sans intervention de l’opérateur que Babbage pense à un nouveau projet plus ambitieux, celui de la machine Analytique (1834-1836).
L’invention des métiers à tisser par Jacquard au XVIIe siècle marque un pas important dans la communication entre l’homme et la machine par l’introduction de programmes extérieurs à l’aide de cartons perforés « préfigurant ainsi la notion moderne de programme » (Ifrah 1994, p. 536).
Le champ des algorithmes de calculs s’élargit, suite aux avancées en analyse et en algèbre comme par exemple, l’invention du calcul différentiel et intégral (Leibniz en 1672), la solution d’un système d’équations (Cramer en 1750), la théorie des fonctions analytiques (Lagrange en 1797).
Ce nouveau contexte technologique et mathématique va offrir à Babbage les moyens de concevoir une machine capable de traiter mécaniquement une chaîne de tâches de calcul.
Grâce aux cartes perforées, sa machine est capable de choisir les opérations à effectuer, soit à partir d’une règle qui lui a été donnée, soit en fonction du résultat des calculs précédents. Une telle possibilité, connue sous le terme de « branchement » ou de « saut conditionnel » permet à la machine analytique de poursuivre seule sa tâche, après sélection de la décision appropriée.
En plus de la faculté de décision, Babbage conçoit pour la première fois la notion de mémoire (« store ») structurée en colonnes et ayant la propriété d’être effaçable.
Cette machine n’est pas construite quand Ada Lovelace écrit un premier programme informatique. Cette écriture nécessite un travail mathématique préalable. Ce travail mathématique lui permet à la fois d’identifier un invariant de cycle et la formulation d’une condition d’arrêt (compteur décrémenté).

Pour nous faire comprendre, examinons le problème du calcul des nombres Bernoulli .
Ci-après le travail mathématique d’Ada Lovelace avant l’écriture d’un programme à la machine Analytique de Babbage.

Ada Lovelace part d’une formule connue

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^4}{2.3.4} + B_5\frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

Elle transforme cette formule en la formule de récurrence suivante :

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1} + B_1\frac{2n}{2} + B_3\frac{2n.(2n-1).(2n-2)}{2.3.4} + \ \ldots + B_{2n-1} = 0$$

avec n entier supérieur à 0 et où $A_0 + A_1B_1 + A_3B_3 + \ldots B_{2n-1} = 0$

Ce travail mathématique lui permet de transformer une formule initiale contenant une infinité dénombrable de valeurs en un processus de calcul n-fini.
Ce processus est basé sur une double formule de récurrence : A_{2i+1} en fonction de A_{2i-1} ($i \geq 1$) et B_{2i+1} en fonction de B_{2j+1} et de A_{2j+1} ($j = 1 \ldots i-1$)
Il permet aussi d’attacher la condition d’arrêt du processus de calcul à la valeur finie n.
Ada Lovelace écrit alors un programme pour n = 4 et l'exécute « à la main ».
Nous voyons donc que l’écriture d’un programme (qui devient externe) s'accompagne d'un retour réflexif sur les objets mathématiques de la formule afin de dégager la condition d’arrêt et l’invariant d’un cycle.

Une colonne variable devient alors un emplacement dans l'unité de mémoire effaçable dans *lequel on stocke intentionnellement une* donnée, c'est-à-dire une variable informatique.

Nous représentons par un schéma l'architecture de la machine Analytique de Babbage (cf. figure 2).

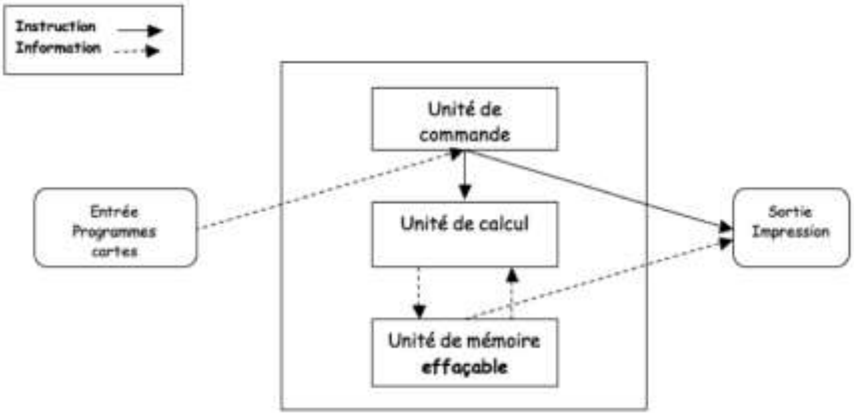


Figure 2. Architecture de la machine Analytique

L'existence d'un programme externe séparé de la machine va permettre potentiellement à la machine de Babbage d'accroître les possibilités mécaniques de calcul. De plus, la mémoire de cette machine a pour propriété fondamentale d'être *effaçable* contrairement à la mémoire des machines arithmétiques. Nous avons montré comment Ada dans le premier programme à cette machine utilise ce caractère d'effaçabilité de la mémoire pour faire émerger les notions de variable et de boucle.
Mais cette machine à programmes externes a des limites.
Les programmes sont contenus dans un dispositif *externe* (cartes perforées) que l'unité de commande vient lire pas à pas pour exécuter les instructions successives qui y figurent. Si un programme doit être exécuté de nouveau, il faut qu'un opérateur humain l'introduise de nouveau dans la machine, ce qui allonge le temps du traitement.
De plus, il y a une séparation totale entre l'organe de commande (programmeur à cartes contenant les ordres de commande) et les autres organes et informations, en particulier les données et les résultats du calcul.
Absentes des mémoires, les instructions une fois exécutées disparaissent pour la machine.
Cette idée que le résultat d'une action puisse réagir sur une commande a émergé lentement au cours du XIXème siècle. Par contre il faudra attendre le XXe siècle pour qu'on se permette de traiter automatiquement les ordres de commande comme de vulgaires données. (Verroust 2004)

1.3. Une deuxième rupture : la machine ordinateur de Von Neumann

La contribution fondamentale de Von Neumann à la conception de la machine ordinateur est nommée couramment « Principe de Von Neumann ». Elle est une réponse aux limitations de la machine analytique : selon ce principe, les instructions doivent être contenues dans la mémoire et la machine doit fonctionner sur programme enregistré. L'idée de programme enregistré présente deux avantages principaux, celui de

l'accélération des calculs et celui de la modification des instructions par la machine elle-même : en ce sens cette machine se différencie fondamentalement des machines calculateurs et prend le nom d'ordinateur.
Les avancées théoriques en mathématiques et en physique (travaux de Turing, Von Neumann etc.), et les avancées technologiques (registres, systèmes de communication etc.), permettent en 1948 de fabriquer aux États-Unis « la machine de Manchester », première machine ordinateur entièrement électronique et construite conformément au plan de Von Neumann .
Cela va entraîner un accroissement considérable du champ des problèmes calculables.
En travaillant sur le 10e problème de Hilbert, Turing a essayé de formuler la réponse à la question de l'existence d'un algorithme universel pour une classe de problèmes et de trouver un modèle théorique de la machine ordinateur. Ce travail va conduire à la notion de problème décidable : un problème est réputé décidable lorsqu'il existe un algorithme dont l'entrée est une instance du problème et dont la sortie est une réponse effective à ce problème. Les années 30 ont consacré l'existence de problèmes indécidables ce qui a nécessité de définir la notion d'algorithme. Nous retiendrons la définition attachée à la machine hypothétique de Turing (qui ne s'arrête jamais !) : Turing définit la notion d'algorithme comme un ensemble d'instructions pour sa machine simple. (Goldschlager et al., 1986). La thèse de Church-Turing postule que tout problème de calcul basé sur une procédure algorithmique peut être résolu par une machine de Turing. Tout programme d'ordinateur peut donc être traduit en une machine de Turing.
Si on se restreint au problème de la tabulation d'une fonction, quelles sont les fonctions mathématiques calculables par la machine de Von Neumann ? La réponse donnée est que toute fonction pour laquelle il existe un ensemble d'instructions pour la machine de Turing ou encore pour laquelle existe un algorithme, est calculable.
L'architecture de tous les ordinateurs existants actuellement est celle de Von Neumann.
Les efforts pour faciliter la communication entre l'homme et la machine se reportent alors sur l'amélioration des langages de programmation qu'autorise le programme enregistré.
Les premiers langages en restant proches des caractéristiques de la machine rendent opaques la signification du programme et des notions qui y sont fondamentalement liées comme variable et boucle. Cette opacité est à la source de l'avènement de langages évolués proches de l'algorithme que l'on programme et libres des contraintes technologique de la machine. De tels langages, tout en étant évolués, c'est-à-dire libérés des contraintes technologiques de la machine, gardent des liens sémantiques avec la machine de Von Neumann, car « la notion de mémoire est représentée par la donnée abstraite qu'est une variable ».
Nous n'en dirons pas plus dans le cadre de cet exposé : on peut se reporter à la thèse de Nguyen Chi Thanh pour une analyse de l'évolution des langages du programme d'Ada aux langages évolués.

Nous représentons par un schéma l'architecture de la machine ordinateur (cf. figure 3).

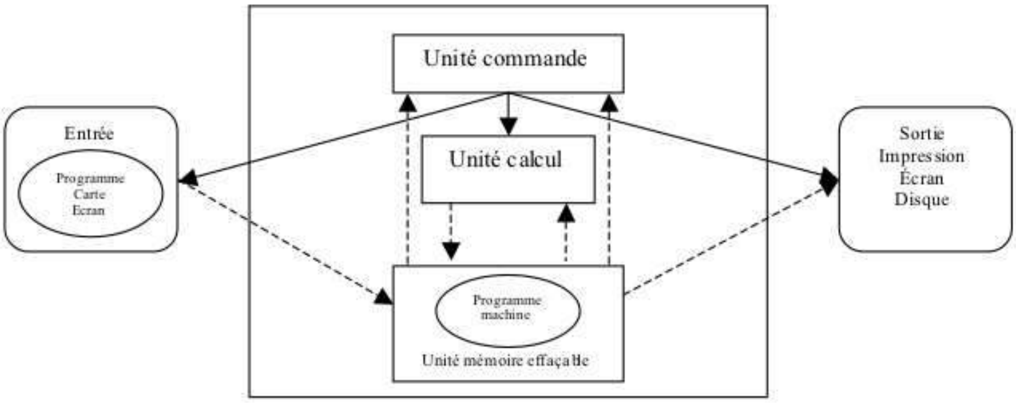


Figure 3. Architecture de la machine ordinateur

Du point de vue de l'architecture de la machine, les trois étapes « Machine Arithmétique », « Machine Analytique » et « Machine Ordinateur » sont marquées d'une part par l'accroissement des possibilités de stockage et d'autre part par la propriété fondamentale d'effaçabilité de la mémoire qui, conjointement, accroissent les possibilités de calcul de la machine.
L'évolution de la mémoire a permis de transformer les relations entre l'homme et la machine. Avec la possibilité mécanique du stockage en mémoire de résultats intermédiaires liée elle-même à la propriété d'effaçabilité de ces résultats, l'exécution mécanique de calculs répétitifs est rendue possible (machine analytique de Babbage). Cela a pour conséquence fondamentale l'écriture d'un programme à une machine, la notion d'effaçabilité étant intrinsèquement liée à la notion de variable et de boucle.
La définition de mémoire effaçable servira de référence pour la suite de l'exposé, en particulier pour la notion de variable informatique : Une mémoire effaçable est un emplacement dans l'unité de mémoire où l'on peut intentionnellement stocker une valeur. Ce stockage efface l'ancienne valeur contenue dans cette mémoire. L'unité de mémoire d'une machine qui possède un certain nombre de mémoires effaçables est dite effaçable.
L'idée qu'un programme dit enregistré et des données puissent partager une mémoire commune (machine de Von Neumann) permet de traiter le programme lui-même comme des données de calculs. Un programme, une fois exécuté, peut devenir une instruction pour un autre programme.

1.4. En conclusion, quelques définitions

Je vais m'appuyer sur un schéma pour conclure cette première partie de l'analyse épistémologique (cf. figure 4).

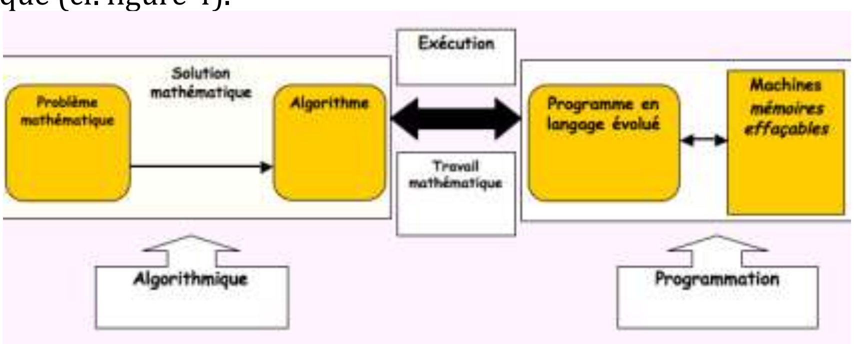


Figure 4. Schéma des rapports entre algorithmique et programmation en mathématiques

Un algorithme est une suite finie d'instructions à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données, pour arriver avec certitude, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat, *solution d'un problème mathématique*, et cela indépendamment des données. (Bouvier et al. 1993)
L'objet de l'algorithmique est la conception, l'évaluation et l'optimisation des méthodes de calcul en mathématiques et en informatique. (Flajoret, Encyclopaedia Universalis, tome 1, p. 814)
Un programme informatique est une liste des instructions auxquelles *la machine* devra obéir, dans l'ordre de leur exécution […]. On le chargera dans la mémoire de la machine, où elle puisera les instructions au fur et à mesure de leur exécution, à sa propre vitesse (Arsac 1995)
Les langages de programmation permettent de définir les ensembles d'instructions effectuées par l'ordinateur lors de l'exécution d'un programme. Un programme est donc l'expression d'un *algorithme* dans un langage donné pour une *machine* donnée.
L'articulation entre algorithmique et programmation se construit en même temps que l'architecture des machines évolue

2. Émergence d'un enseignement universitaire d'algorithmique et de programmation

Nous présentons très brièvement maintenant comment a émergé un enseignement d'algorithmique et de programmation en même temps qu'a émergé l'informatique comme discipline scientifique à l'université. Nous chercherons à dégager les conditions mises en place par ces pionniers et des stratégies possibles d'enseignement. Nous accorderons une importance particulière à la place de la machine dans ces enseignements.
Pour repérer l'arrivée dans l'enseignement universitaire d'objets fondamentaux de l'informatique (centration sur les notions de boucle et variable), nous avons choisi des moments clés marqués par trois traités. *Un traité est un ouvrage écrit par un auteur, qui non seulement contribue à la production d'un domaine ici l'informatique mais aussi à son enseignement.*
Ces traités sont les suivants :
1957 : premier enseignement de programmation mis en place à l'université Joseph Fourier par J. Kuntzmann.
1968 : première édition du volume « Fundamental algorithms » dans la série « The art of computer programming » de Knuth.
1978 : parution d'un ouvrage de référence pour l'algorithmique « Fundamentals of Computer Algorithms » de Horowitz et Sahni.
Remarquons tout d'abord que l'enseignement de la programmation a précédé l'enseignement de l'algorithmique.
Quelles conditions sont mises en place dans ces traités pour cet enseignement et quelle place y occupe la machine et les langages de programmation ?
- *Kuntzmann* choisit pour son enseignement de la programmation, d'écrire et de faire écrire les programmes en langage assembleur d'une machine concrète et réelle EDSAC mais évoquée puisque absente de l'environnement des étudiants. Les objets informatiques fondamentaux présents sont instructions, boucles, programmes,

organigrammes et architecture de la machine. Une variable informatique est un emplacement dans une mémoire effaçable. Le rôle des organigrammes est central dans ce traité pour la conception, la construction et l'évaluation des programmes et pour la conceptualisation de la notion de boucle.
- *Knuth* construit une machine idéale, nommée MIX, associée à son langage assembleur Mixal. Le couple (machine MIX, langage Mixal) est conçu par Knuth comme universel : d'une part l'architecture de la machine est celle des machines existantes ; d'autre part, un programme-machine est présent et permet de traduire tous les programmes écrits en Mixal en langage machine numérique.
Knuth développe un discours explicatif sur la notion de variable, au travers de la notion d'affectation ; en particulier il prend soin de distinguer son usage de celle de variable mathématique. La description d'un algorithme par un organigramme avec son système de règles d'écriture établit la notion de boucle
- *Quant à Horowitz et Sahni*, ils conçoivent un langage de programmation, SPARKS pour décrire tous les algorithmes. Ce langage évolué, proche du langage Pascal, est considéré comme universel car traduisible (par un pré-compilateur) en un programme en langage Fortran, disponible sur tous les ordinateurs de l'époque. La notion de variable reste implicite, mais la notion de boucle est un objet fortement présent et contribue pour Horowitz et Sahni à l'expressivité et la simplicité du langage SPARKS.
La notion de machine passe à l'arrière plan et disparaît des enjeux didactiques de ce manuel.

L'analyse de ces trois traités permet de dégager deux grandes stratégies d'enseignement.
Le terme de stratégie désigne pour nous une façon d'organiser le corps des savoirs dans un enseignement d'algorithmique et de programmation.
- *Première stratégie : présence d'une machine de référence, réelle ou fictive*
Ces machines fictives peuvent être virtuelles (c'est-à-dire non construites mais particulière comme celle de Babagge, 1842), ou idéales (c'est-à-dire non construites mais représentantes d'une classe de machines réelles comme la machine MIX de Knuth, 1968). L'enseignement de l'algorithmique et de la programmation est alors lié à la compréhension de l'architecture de la machine et à la conception d'un langage orienté vers cette machine.
Deuxième stratégie : absence de machine de référence
Dans cette stratégie, l'enseignement de l'algorithmique passe par celui d'un langage de programmation représentatif d'une classe de langages existants (comme le langage SPARKS de Horowitz et Sahni, 1978, langage évolué de style impératif). *Cet enseignement suppose la connaissance préalable d'un langage de programmation.*
Les deux stratégies repérées se distinguent par la place de la notion de machine et du langage de programmation dans l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation.
Les traités de Kuntzmann et de Knuth relèvent de la première stratégie, celui d'Horowitz et Sahni de la deuxième. La deuxième stratégie est la stratégie dominante de l'enseignement actuel d'algorithmique.

Nous allons maintenant présenter les points principaux d'une analyse comparative de deux systèmes d'enseignement : EMS en France autour des années 2000 et au Viêt-Nam dans les années 1990 - 2000.

Analyse institutionnelle comparative des EMS France, Viêt-nam[42]

1. Avant 2009

Il y a volonté institutionnelle d'introduire des éléments d'informatique dans les deux institutions, Lycée en France et au Viêt-nam, mais avec deux points de vue différents.
En France, cette introduction se fait au sein des mathématiques dans des domaines, comme l'analyse, la statistique et à partir de 2000 l'arithmétique, sans que la notion d'algorithme soit objet d'enseignement.
Au Viêt-nam, l'introduction est tentée à deux endroits : en mathématique et en informatique laquelle est considérée comme une discipline autonome.
Par un examen de manuels en France pour le programme 2000 et ceux en vigueur au Viêt-nam entre 1990 et 1998, Nguyen Chi Thanh a tenté de répondre aux questions suivantes :
- Y a-t-il présence d'algorithmes ? Si oui, quel rôle jouent-ils ?
- Y a-t-il présence de programmes informatiques ?
- Comment vivent-ils ?

Nous considérons les manuels Belin, Déclic, Bréal en France - M1, M2, M3 au Viêt-nam

Regardons le nombre d'exercices qui concernent la notion de variable informatique. Comme le montre le tableau ci-après les exercices sont quasi inexistants dans les deux EMS (cf. tableau 1).

Belin	3
Déclic	2
Bréal	0

M1	0
M2	4
M3	0

Tableau 1. Effectif des exercices sur la notion de variable informatique

Comment l'élève peut-il différentier la notion de variable informatique (qui désigne une case de mémoire) de la notion préconstruite de variable mathématique ?

De la même façon examinons les exercices concernant l'écriture d'un algorithme : ils sont inexistants en France, nombreux au Viêt-nam mais là les algorithmes ne sont pas itératifs (cf. tableau 2)

Belin	1
Déclic	2
Bréal	0

M1	2
M2	19
M3	5

Tableau 2. Effectif des exercices sur l'écriture d'algorithme

[42] Au Viêt-nam, Nguyen Chi Thanh s'est appuyé sur la recherche de Le Van Tien (2001), qu'il a complété par l'analyse de trois collections de manuels (1990) (M1), (M2) et (M3).

Les exercices d'exécution d'un programme sont nombreux en France, mais avec une très faible familiarisation des élèves avec les algorithmes mathématiques ; ils sont par contre quasi inexistant au Viêt-nam (cf. tableau 3).

Belin	33	M1	1
Déclic	22	M2	3
Bréal	11	M3	2

Tableau 3. Effectif des exercices sur l'écriture d'algorithme

En conclusion, des algorithmes mais pas d'algorithmique enseignée ; des programmes mais pas de programmation enseignée.
Soulignons de plus l'absence institutionnelle de tout langage de programmation aussi bien en France qu'au Viêt-nam.

Dans les deux institutions, on peut faire un constat de grandes difficultés voire d'échec de ces tentatives à des degrés divers.
Au Viêt-nam, le chapitre informatique a été supprimé et une deuxième tentative (introduction de l'informatique en tant que discipline) a, elle aussi, été éphémère (1995-96).
En France, sous les programmes 2000, si les notions de base en informatique se maintiennent, elles vivent mal : cela se traduit dans les manuels par l'effacement de la nature algorithmique des procédés d'approximation, par le refus de construire des tâches relatives à la programmation des algorithmes et enfin par le recours à des logiciels de calcul pour instrumenter les techniques associées à ces tâches.
On peut avancer certaines raisons explicatives de cet échec ou difficultés.
Au Viêt-nam, le chapitre informatique est un « isolat » dans EMS puisque les algorithmes itératifs nécessaires à cette partie sont peu présents dans les mathématiques enseignées. De plus, l'absence ou la non prise en compte des instruments de calcul (calculatrice, ordinateur) font que les algorithmes itératifs de calcul ne sont jamais effectifs au-delà des calculs des premiers termes de l'itération (calculs à la main).
En France, il existe dans EMS des lieux possibles pour les algorithmes itératifs de calcul en analyse, en statistique et en arithmétique. Leur présence a été voulue par les promoteurs de la contre-réforme pour introduire l'activité expérimentale dans l'enseignement des mathématiques. Pour ces promoteurs, une condition pour faire vivre ces algorithmes de calcul et l'activité expérimentale, est la présence des instruments de calcul. Mais les logiciels comme le tableur (de la calculatrice et de l'ordinateur) qui sont préconisés, prennent en charge les calculs itératifs et une part de l'élaboration de ces algorithmes.

2. Et dans les programmes 2009 en France ?

Pour questionner brièvement les programmes 2009, nous allons d'abord donner certaines idées essentielles issues du rapport de la commission Kahane de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (2001), l'une des références du travail de Nguyen Chi Thanh.
Cette commission défend l'idée d'introduire une part d'informatique dans l'enseignement des mathématiques et dans la formation des maîtres en faisant évoluer progressivement les contenus pour intégrer de nouveaux objets et notions d'algorithmique et de programmation.

Ce rapport souligne une distinction fondamentale :
- d'une part, l'utilisation des ordinateurs et calculatrices et des logiciels qui y sont implantés,
- d'autre part , l'apprentissage et l'enseignement des concepts de base de l'algorithmique et de la programmation.
Les concepts de base de la programmation et de l'algorithmique sont pour la commission:
- structures de contrôle (*boucles et branchements*) et *récursivité* pour la programmation :
- *structures de données* et *complexité* pour la notion d'algorithme.
Un survol rapide des programmes 2009 pour la classe de seconde montre une certaine influence du travail de cette commission.
Par exemple, ce programme différencie fondamentalement l'algorithmique de l'usage des logiciels. Mais l'algorithmique est première et séparée de la programmation.
Il y a bien présence de certains des concepts de base de l'algorithmique et de la programmation identifiés par la commission Kahane mais ces concepts deviennent des compétences.
La complexité des algorithmes commande la machine. Les machines sont bien mentionnées explicitement, mais comme un environnement de programmation.
Il resterait à analyser les manuels actuels pour avoir une idée des pratiques possibles pour les enseignants et les élèves dans EMS sous les contraintes et conditions de ces nouveaux programmes.

Nous allons maintenant essayer de vous faire rentrer dans la conception et la réalisation de l'ingénierie didactique de Nguyen Chi Thanh.

Principaux éléments de la conception de l'ingénierie didactique

1. Une situation fondamentale possible de l'algorithmique et de la programmation

Notre enquête épistémologique a permis d'identifier dans l'histoire de l'informatique et de son enseignement un certain nombre de conditions favorables à la genèse des notions de variable et de boucle pour la résolution de problèmes mathématiques. Parmi ces problèmes nous choisissons le problème de tabulation d'une fonction numérique. Pourquoi ?
La résolution du problème de tabulation exige la répétition de calculs identiques. L'amélioration de la fiabilité des résultats des calculs et la réduction du coût de la répétition de ces calculs ont conduit historiquement à concevoir des machines et à écrire des programmes adaptés aux caractéristiques de ces machines. De plus ce problème est présent dans EMS, la notion de fonction étant une notion mathématique centrale au lycée.
C'est pour cela que nous formulons une situation fondamentale possible de l'algorithmique et la programmation pour l'ingénierie didactique qui articule un problème de tabulation à un problème informatique.
- Le *problème mathématique de la tabulation d'une fonction numérique* est formulé comme suit :

> « Soit **f** une fonction. Calculer les images par cette fonction de **m** nombres x_0, $x_1 \ldots x_k \ldots$espacés d'un pas **p** et appartenant à l'intervalle **[a, b]** avec $x_0 = a$. »[43]

[43] en gras les choix possibles.

- Le *problème informatique est celui de l'écriture d'un message à une machine à mémoire effaçable* pour une exécution effective d'une solution du problème mathématique.
L'absence dans les programmes 2000 du Lycée de tout langage de programmation conduit au choix de la première stratégie d'enseignement de l'algorithmique repérée dans la partie épistémologique, à savoir la présence d'une machine de référence, réelle ou fictive avec comme enjeu la compréhension de l'architecture de la machine ordinateur et la conception d'un langage approprié à cette machine.
La machine de base des machines de l'ingénierie est la calculatrice non programmable. Ce choix est fondé par le fait que cette machine est présente dans la plupart des EMS en particulier celle du Viêt-nam.

2. Types de mémoires d'une calculatrice non programmable ?

Nous avons montré que le caractère d'effaçabilité d'une mémoire et le stockage intentionnel de données dans cette mémoire est nécessaire à l'émergence de la notion de variable informatique et de boucle. Rappelons que pour une telle mémoire le stockage d'une nouvelle valeur efface toute valeur déjà là. *Par abus de langage et par commodité, nous appellerons touches mémoires les touches de la calculatrice qui renvoient à une place dans l'unité de mémoire de la machine calculatrice.*
Nous examinons maintenant les principaux types de mémoires des calculatrices non programmables.

- Mémoires visibles
Quelles touches mémoires visibles de la calculatrice peuvent devenir candidates à donner du sens à la notion de variable informatique ?
• Un premier type de mémoire visible : les touches A, B, C, etc.
Deux opérations sont associés à ces touches : le stockage (Sto chez TI ou -> chez Casio) et le rappel (Enter chez TI ou = chez Casio ou Rcl dans les 2). Par exemple, si on fait la suite d'appuis suivante : « √3 sto A ; sin 30 =; A x 4 – 5 » alors la valeur dans la mémoire A est √3.
Quand une nouvelle valeur est stockée en mémoire, l'ancienne valeur est effacée. Cette propriété d'effaçabilité nous amène à nommer ces mémoires « mémoires variables ».
• Un deuxième type de mémoire visible : la touche Ans
Cette deuxième mémoire se distingue de la « mémoire variable » par le fait que le stockage d'une donnée suit automatiquement tout appui sur la touche « = » (ou « Enter »). Cette mise en mémoire peut donc ne pas être le résultat d'un stockage volontaire et ce stockage peut même être ignoré de l'utilisateur de la calculatrice. Par exemple, si on fait la suite d'appuis « √3 = ; sin 30 = ; Ans x 4 – 5 », la valeur dans la mémoire est celle du dernier résultat à savoir sin 30.
La particularité d'effacer automatiquement le contenu rend la mémoire Ans impropre pour supporter la notion de variable informatique. La mémoire Ans est en quelque sorte la mémoire du dernier résultat. Nous dirons qu'elle est non effaçable.

- Un touche mémoire invisible : la parenthèse
Les touches parenthèses sont commandées par une mémoire « pile » invisible pour sauvegarder provisoirement des valeurs numériques et fonctions dans une expression entrée à l'écran.

3. Une calculatrice générique : Alpro

Pour les besoins de l'ingénierie, nous avons conçu une calculatrice générique au sens où elle représente les calculatrices non programmables présentes en 2000 dans les EMS en France et au Viêt-nam. Ce projet avait en particulier pour objectif de répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la pratique privée de la calculatrice chez les élèves ?
- Dans cette pratique privée quel est l'usage des mémoires ?

De plus nous voulions observer et contrôler la genèse instrumentale de ces mémoires. Nous avons donc construit un émulateur de calculatrice non programmable dit Alpro.
Une caractéristique de cet émulateur est l'enregistrement automatique d'un fichier de l'historique des touches actionnées : ainsi ces fichiers dits historiques nous donnent accès à ce que nous avons appelé « programme en actes » pour toute tentative de calcul effectif avec Alpro.
Deux versions de cet émulateur ont été construites : Alpro et Alpro bloqué que nous décrivons plus loin.

4. Des choix didactiques

Nous avons choisi d'écrire les nombres en écriture décimale parce que cette écriture est celle de l'affichage des résultats d'un calcul à l'aide d'une calculatrice ordinaire. Ce choix installe le calcul dans une problématique du calcul effectif à l'aide de la calculatrice tel qu'il existe dans les deux institutions. La notation Dj désignera désormais l'ensemble des nombres décimaux ayant j chiffres après la virgule.

- La machine de base de l'ingénierie est la calculatrice *Alpro bloqué* (cf. figure 5).

Figure 5. Image d'Alpro bloqué

Décrivons les restrictions apportées à Alpro et leurs raisons.

• On retrouve les deux types de mémoires potentiellement visibles d'une calculatrice non programmable : la Mémoire Ans et *trois* mémoires variables A, B, C. Nous avons choisi de restreindre les mémoires variables à trois (A, B et C) pour favoriser d'une part l'usage des mémoires variables et d'autre part l'émergence de la notion de variable informatique. Les touches liées aux mémoires variables, « Sto » et « Rcl », sont disponibles ; on peut les taper directement sans devoir passer par la touche Shift.

• L'*indisponibilité* des touches *parenthèses* vise à favoriser ou rendre nécessaire l'usage des mémoires (variables ou Ans) lors de l'exécution ou de la programmation des calculs des images de nombres par une fonction.
• Nous avons choisi de ne conserver que les quatre opérations arithmétiques : « + », « - », « × », « ÷ ». Ce choix augmente, pour les multiplications en particulier (absence de la touche puissance), le coût des calculs et accroît les risques d'erreurs et justifie l'usage des mémoires.
• De plus l'émulateur donne accès à un message d'information concernant les touches mémoires quand le curseur se place à proximité de ces touches sur l'interface graphique. Par exemple, le déplacement du curseur sur la touche « A » donne l'information suivante « A : Stocker une valeur dans la mémoire variable A. ». De même, le déplacement du curseur sur la touche « Ans » donne l'information « Ans : Rappeler le dernier résultat calculé. ».
Ces informations peuvent permettre d'amorcer l'instrumentation d'une touche mémoire variable ou mémoire Ans.

Principaux éléments de la réalisation de l'ingénierie didactique

1. Les trois situations de l'ingénierie et leurs enjeux

L'ingénierie didactique est composée de 3 situations générées par la situation fondamentale et elle articule un problème mathématique de tabulation à un problème informatique qui est l'écriture de messages à différentes machines (cf. figure 6).
Pour le problème de tabulation, on se restreint aux fonctions polynomiales de degré n :

> « Soit f une fonction polynomiale de degré n. Calculer les images par cette fonction de nombres x_0, x_1…x_k… espacés d'un pas p et appartenant à l'intervalle [a, b] avec x_0 = a. »

Les différentes machines dans chacune des trois situations de l'ingénierie didactique sont analogues de celles de la genèse historique des machines : *machine Arithmétique, Machine Analytique de Babbage et enfin Machine Ordinateur de Von Neumann* (cf. figure 6).

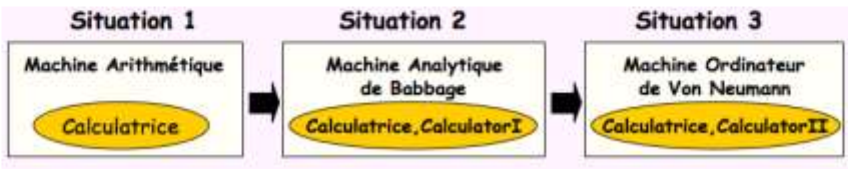


Figure 6. Les trois situations de l'ingénierie didactique

Les enjeux de chacune des 3 situations par rapport au problème informatique sont les suivants :
Situation 1 : Exploration des pratiques instrumentées avec la calculatrice et disponibilité des mémoires.
Situation 2 : Formulation de l'invariant de boucle à une machine à mémoire effaçable.
Situation 3 : Écriture d'un programme informatique à boucle à la machine ordinateur.
Nous faisons l'hypothèse que la calculatrice non programmable fonctionne pour l'élève comme une machine arithmétique *malgré la présence de mémoires effaçables et l'écriture d'un programme extérieur*. Dans les situations 2 et 3 la calculatrice est complétée par des parties fictives qui sont les robots Calculator I et II. Nous verrons plus loin les propriétés de ces robots.

2. La situation 1 (Alpro)

2.1. Description

Dans cette première situation, nous proposons trois calculs effectifs, les deux premiers individuellement, le troisième en binôme, avec écriture d'un message à un autre binôme en langage calculatrice (écriture des touches à appuyer uniquement). On peut considérer ces calculs comme le calcul de l'image d'un seul nombre $x \in Dj$ par une fonction polynomiale ou composée.

Nous allons associer à chaque calcul des stratégies optimales en termes de coût (nombre d'appuis de touches et risque d'erreurs) en rapport avec l'usage des mémoires.

- La consigne pour le calcul 1 est la suivante : « Calculer $2x^2 + x + 1$ avec $x = 3{,}141$ ».

Pour ce calcul, toutes les stratégies sont équivalentes (entre 16 et 20 appuis).

- La consigne pour le calcul 2 est la suivante :

  « Calculer $8x^3 + 6x^2 - 3x - 1$ avec $x = 3{,}141759682$ »[44].

Pour ce calcul, les stratégies utilisant la mémoire Ans ou les mémoires ABC sont équivalentes (entre 29 et 37 appuis). Par contre les stratégies sans usage de mémoire sont très coûteuses (jusqu'à 134 appuis !).

- La consigne pour le calcul 3 est la suivante :

  « Ecrivez un message le plus court possible à un autre binôme qui ne possède ni papier ni stylo. Il dispose seulement de la même calculatrice que vous. Dans le message n'indiquez que les touches de la calculatrice. En suivant vos instructions, ce binôme doit obtenir la valeur numérique de z à l'écran de la calculatrice.

  $z = y^2 - 5y + 7$ où $y = \dfrac{2x^3 + 15x - 5}{32{,}1x - 27{,}7534}$ avec $x = 1{,}254$ ».

Pour le calcul 3, qui peut être interprété comme le calcul de l'image par une fonction composée, les stratégies à mémoire sont obligatoires pour obtenir le résultat du calcul.

2.2. Quelques résultats

Dans les tâches de calcul numérique instrumenté, le rapport à la calculatrice dans EMS est essentiellement celui d'une machine arithmétique, c'est-à-dire sans mémoire effaçable comme le montre le tableau 4 suivant, dans lequel le fonctionnement non intentionnel de la mémoire Ans est noté Ans~~Sto~~.

mémoires et stratégies / Classes	Sans mémoire Nd	Ans~~Sto~~ Nd	Ans Md_a	Variables Md_v	Total
2nd F1 et F2	47	19	0	0	66
1er F	7	0	0	2	9
Sous total	54 (72%)	19 (25,33%)	0 (0%)	2 (2,67%)	75
2nd V	7	2	0	1	10
1er V	6	3	0	0	9
Sous total	13 (68,42%)	5 (26,32%)	0 (0%)	1 (5,26%)	19
Total	67 (71,28%)	24 (25,53%)	0 (0%)	3 (3,19%)	94

Tableau 4. Usage des mémoires

[44] Une consigne supplémentaire est : « Combien de fois en tout devez-vous appuyer sur les touches de la calculatrice Alpro pour réaliser le calcul complet de la question 2 ? ».

(issu de l'analyse des fichiers historiques d'Alpro de 94 élèves) de 2^{nde} et $1^{ère}$ (2004-05).

L'expérimentation de la situation 1 a été conduite dans cinq classes :
- Deux classes de 2^{nde} , France
- Une classe 10 (équivalent de la 2^{nde}) et une classe 11 (équivalent de la $1^{ère}$), Viêt-nam

Les procédures très largement majoritaires sont des procédures de calcul sans usage de mémoire ou sans usage intentionnel de mémoire.
L'exécution du programme écrit à autrui pour le calcul 3 ainsi que les premières rencontres avec les mémoires dans les phases exploratoires des calculs 1 et 2 semblent avoir contribuer de façon cruciale au processus d'instrumentation des touches mémoires d'Alpro comme l'attestent les programmes en actes et les programmes écrits des élèves.
Le stockage des nombres dans les mémoires (Ans et mémoires variables) devient intentionnel. C'est le résultat le plus probant concernant l'instrumentation des touches mémoires. De ce fait la touche Ans, mémoire la plus utilisée, devient une mémoire visible.
Mais les touches mémoires, que ce soit Ans ou les mémoires variables, ont, dans l'écriture des programmes, un statut de « variable mathématique » : une mémoire contient un seul nombre durant tout le calcul.
La caractéristique d'effaçabilité n'est pas encore mise en place pour la majorité des élèves, quelque soit leur niveau : Alpro n'est pas encore une machine à mémoire effaçable. Ce sera l'un des enjeux des situations suivantes de l'ingénierie didactique.

3. Situations 2 et 3 (Alpro, Calculator I puis Calculator II)

3.1. Description

C'est dans ces deux situations que l'on aborde véritablement le problème mathématique de tabulation et de la répétition d'un même calcul.

> « Soit **f** la fonction $\mathbf{x \to x^2 + 1}$ Calculer les images par cette fonction de m nombres $x_0, x_1 \ldots x_k \ldots$ espacés d'un pas **p** et appartenant à l'intervalle **[-3, 2] avec $\mathbf{x_0 = -3}$ ».**

On va jouer sur la taille du pas pour augmenter le nombre de répétitions de l'invariant de calcul.
Deux algorithmes implicites prenant en charge cette répétition sont possibles :
- algorithme M(R) correspondant à la formule de récurrence : $x_{k+1} = x_k + p$ avec $x_0 = -3$
- algorithme M(F) correspondant à la formule fonctionnelle : $x_{k+1} = a + k.p$ avec $a = -3$

Le nombre n de répétitions doit être calculé en faisant intervenir la valeur du pas et la longueur de l'intervalle.
L'écriture de ces algorithmes fait partie du travail mathématique indispensable pour rendre programmable la solution mathématique du problème de tabulation.
- Dans la situation 2, le passage de la valeur 0,2 à la valeur 0,03 pour la valeur du pas p, augmente drastiquement, non seulement la complexité du calcul (saut informationnel) mais aussi l'écriture du programme. En particulier, la formulation d'une condition d'arrêt devient plus problématique et oblige à un retour réflexif sur des notions mathématiques comme les notions d'intervalle, de fonction et d'image d'un nombre par une fonction. On passe ainsi de 26 à 167 répétitions de l'invariant du calcul !

Pour 167 répétition, on doit recourir à l'aide d'un robot *Calculator I* qui joue le rôle d'une unité de commande des calculs indiqués dans un programme extérieur.
Ce robot ne sait exécuter que deux actions :

• Appuyer sur les touches de la calculatrice Alpro à condition qu'on lui indique la suite d'appuis des touches par écrit ;
• Imprimer automatiquement ce qui est affiché sur la ligne de résultat de la calculatrice Alpro après l'appui sur la touche = ;
De plus Calculator I ne possède ni papier ni stylo.
Les capacités de la machine (Alpro, Calculator I) font que la longueur du message est au moins le nombre d'appuis de touches d'Alpro. L'écriture du message est alors impossible dans un temps limité !
- Les enjeux du passage de la situation 2 à la situation 3 sont la co-amélioration de la machine et du langage pour pouvoir diminuer drastiquement la longueur du message. La transformation de l'invariant de répétition en un corps de boucle est une réponse à cette recherche d'économie. Pour cela on introduit un robot amélioré *Calculator II*, qui a la capacité supplémentaire (par rapport à Calculator I) de comprendre des instructions formées d'un nombre limité de mots (3-5 mots) exprimant la répétition (répéter, fois, Fin etc.) ; on cherche donc à faire évoluer le langage à la machine en même temps que la machine (Alpro, Calculator II) qui devient un machine à programme enregistré c'est-à-dire une machine de Von Neumann.
Pour cela, on demande aux élèves :
• d'écrire en langage Alpro, l'invariant de la répétition dans le calcul de la tabulation de f (c'est-à-dire ce que le robot amélioré Calculator II devra pouvoir répéter de lui-même) ;
• de faire évoluer le langage Alpro en un langage (Alpro, Calculator II) qui permette d'écrire un message le plus court possible à la machine, en complétant le langage Alpro par au plus 5 mots : grâce à ce nouveau langage, aux instructions de séquentialité, présentes dès la situation 1, s'ajoutent des instructions d'initialisation du programme, d'itération et de sortie de boucle.

3.2. Situations 2 : résultats

Quand les mémoires variables A, B, C sont utilisées, elles sont initialisées au début de l'itération. Ce résultat infirme des études précédentes qui montraient que l'opération fondamentale d'affectation était problématique « même pour des élèves d'un plus haut niveau de connaissance dans la construction des boucles » (Samurçay 1985). Cependant un nombre quasi équivalent d'élèves continue à concevoir les mémoires variables A, B, C comme des variables mathématiques. Ce statut, présent dès la situation 1, résiste aux conditions mises en place, en particulier à la répétition importante des calculs. Les élèves ont recours à des palliatifs comme la mémoire papier ou des symboles ou mots habituels de la répétition.
Les résultats de l'analyse de cette situation montrent que dans les premiers programmes écrits de calcul répétitifs, la majorité des élèves délèguent au robot Calculator I la prise en charge de la répétition et de l'arrêt des calculs : ils ont donc pour la plupart écrit un programme « impossible » au robot Calculator I qui ne sait ni répéter ni arrêter des calculs.
L'enseignant a du intervenir pour rappeler les capacités et les limitations du robot Calculator I.
La situation 2 s'achève sur le besoin d'améliorer de robot Calculator I puisque l'écriture du programme en un temps limité est impossible !

3.2. Situations 3 : résultats

Les programmes écrits par les binômes à la fin de cette situation attestent de la présence dans la majorité de ces programmes
- d'une part, des notions de variable informatique et de boucle, un observable étant la mise à jour des mémoires variables,
- d'autre part, d'éléments d'un langage évolué (Alpro, Calculator II), un observable étant des mots et des signes exprimant la séquentialité et la répétition.

Du fait que la machine est en partie fictive, le recours à la validation pragmatique d'Alpro ainsi que le travail coopératif d'institutionnalisation entre l'enseignant et les élèves ont joué un rôle prépondérant dans l'évolution des notions informatiques.

Ce recours et ce travail coopératif ont permis :
- de valider ou d'invalider les programmes proposés par l'exécution des premières itérations d'un corps de boucle sur Alpro ou « à la main » ;
- de rendre publics et d'officialiser des objets informatiques comme « mise à jour » ; « initialisation », « condition d'arrêt » et « corps de la boucle ».

La situation 3 a permis aussi d'observer la difficulté de la mise en place d'une variable compteur.

Maintenant, nous allons examiner de plus près le parcours d'un binôme de 1ère S en France (programme 2000).

Etude du cas d'un binôme de 1ère S en France

1. Situation 1 : d'Alpro « machine Arithmétique » à Alpro « machine à mémoires variables mathématiques »

Nous ne regardons ici que la phase du calcul 3. Rappelons ce calcul :

« $z = y^2 - 5y + 7$ où $y = \frac{2x^3 + 15x - 5}{32{,}1x - 27{,}7534}$ avec $x = 1{,}254$ ».

Chaque binôme dispose d'un stylo et d'Alpro et doit écrire un message le plus court possible à un autre binôme qui dispose aussi d'Alpro, mais qui n'a ni papier ni stylo. Dans le message, on ne doit indiquer que les touches de la calculatrice.

Cette phase de codage est suivie :
- d'une phase de décodage du message : exécution du programme du message sur Alpro. Cette exécution valide ou invalide pragmatiquement le programme. Le binôme décodeur envoie le résultat de l'exécution de son programme au binôme codeur ;
- d'une phase de rectification du programme suite à la phase de décodage du message.

Examinons le message écrit par le binôme de 1ère observé.

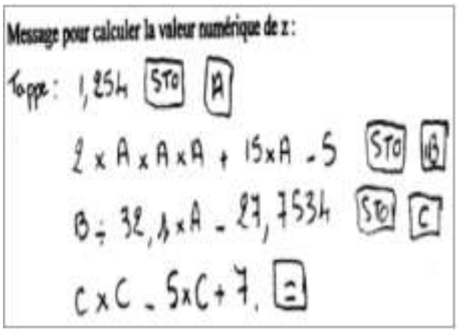


Figure 7. Message du binôme observé pour le calcul 3

Le programme écrit utilise la suite des mémoires A, B, Ans et C.
Mais les mémoires A, B, C ne sont disponibles qu'avec le statut de variable mathématique, c'est-à-dire elles ne contiennent qu'une seule valeur et elles n'utilisent pas leur propriété d'éffaçabilité.

2. Situation 2 : émergence de la notion de variable comme mémoire effaçable

Dans cette situation, on joue sur la taille du pas relativement à la longueur de l'intervalle pour organiser un saut informationnel entre la phase 1 et la phase 2 : le nombre de répétition passe de 26 à 167
Dans la phase 1 de la situation 2, le travail mathématique du binôme observé s'appuie sur l'algorithme MF : $x_{k+1} = -3 + k \times p$. Il utilise la mémoire Ans pour réutiliser le dernier calcul réalisé (avec un statut de variable mathématique).
L'enjeu de la phase 2 est d'écrire un programme de calcul répétitif à une machine et donc de rencontrer, à propos d'un problème de tabulation, un problème informatique. Le langage pour l'écriture de ce programme est le *langage Alpro* (déjà initié lors du calcul 3 de la situation 1) : suite de touches d'Alpro. Le travail mathématique du binôme dans cette phase s'appuie *sur* l'algorithme MR : $x_{k+1} = x_k + 0{,}03$

Examinons les trois messages successifs adressé au robot Calculator I, messages que nous qualifions de programme.
En continuité avec la phase 1 le binôme utilise la mémoire Ans avec un statut de variable mathématique avec une erreur : -1 au lieu de +1 dans le calcul de l'image (cf. figure 8).

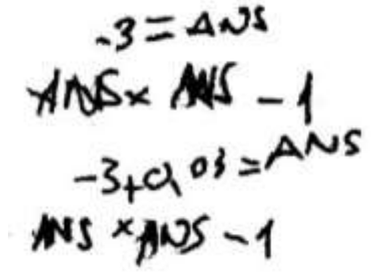


Figure 8. Premier programme avec mémoire Ans : statut de variable mathématique

L'un des élèves met en doute ce programme et propose d'utiliser une mémoire variable.
Aussitôt, l'autre élève lui dicte un autre programme (cf. figure 9). Ce programme reste inachevé. L'intention est que la mémoire variable A contienne une constante, le pas p.

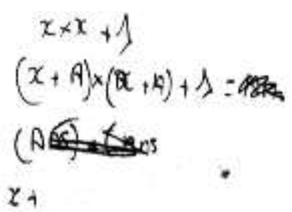


Figure 9. Deuxième programme avec mémoire A pour contenir le pas
Le stockage des nombres dans A est alors envisagé, ce qui leur fait rencontrer *le problème de la mise à jour de cette mémoire variable* : « A plus 0.03 est mis dans B », en même temps qu'est pris en compte la répétition « t'as A, on fait le calcul avec B et on augmente B tout ça et on retourne comme ça » qui est marqué dans le programme écrit par les pointillés puis le trait qui renvoie à A + 0,03.

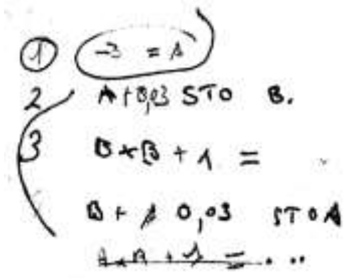


Figure 10. Troisième programme mémoires variables A, B : émergence de l'effaçabilité

L'opération effective de mise à jour « A + 0.03 Sto A » n'est pas encore disponible (utilisation d'une mémoire intermédiaire B). Mais les élèves différencient déjà de ce qui relève de l'initialisation de ce qui relève du corps de boucle. Ils ne discutent pas des capacités de Calculator I et confient donc la tâche de répéter le corps de l'invariant de la répétition à Calculator I.

3. Situation 3 : de la programmation d'une machine à mémoire effaçable à la programmation d'une machine de Von Neumann

En même temps que l'émergence de la notion de boucle, nous avons conçu le passage de la situation 2 à la situation 3, comme nécessitant la participation des élèves à l'évolution d'un langage : aux instructions de séquentialité, présentes dès la situation 1, s'ajoutent des instructions d'affectation, d'itération et de sortie de boucle.
Dans la première phase de cette situation on demande aux élèves d'écrire le groupe de touches à répéter (cf. Figure 11).

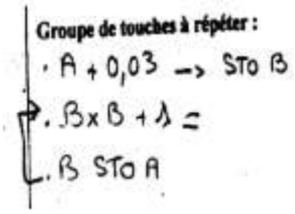


Figure 11. Groupe de touches à répéter écrit par le binôme

Notons que leur groupe de touches ne permet pas de calculer f(-3). Ils continuent à utiliser une mise à jour indirecte c'est-à-dire qui s'appuie sur une mémoire intermédiaire B. Cette difficulté à formuler cette composante essentielle du corps de boucle qu'est la mise à jour des variables informatiques est générale.
Dans la phase de synthèse le professeur institutionnalise les deux groupes de touches associés à chacun des algorithme de calcul M(R) et M(F). Nous ne donnons ici que celui retenu par le binôme observé, l'algorithme M(R)

AxA +1 =
A+0,03 Sto A

Les groupes de touches restent affichées au tableau.
Dans la troisième phase, on introduit le robot Calculator II à qui on attribue la capacité supplémentaire (par rapport au robot Claculator I) de pouvoir répéter l'un des groupes de touche écrit au tableau, à condition de choisir des mots qui permettent d'écrire un message le plus court possible (les mots sont comptés comme les touches).
Voici le message écrit à la machine (Alpro, Calculator II) par notre binôme (cf. figure 12).

Figure 12. Message final à la machine (Alpro, Claculator II)

L'observation fine des interactions du binôme peut donner une interprétation possible au calcul erroné du nombre d'appuis de touches (166) donné par de nombreux élèves : l'initialisation de la variable A (– 3 Sto A) ne fait pas partie du corps de boucle (invariant de la répétition) et donc le calcul de f(-3) est hors du décompte du nombre de répétition du calcul des images. Ou encore, le calcul de l'image par f du nombre contenu dans A, c'est-à-dire f(-3) est considéré comme entreprise avant la mise à jour de la variable A par l'élève : le calcul de f(-3) ne fait donc pas partie du corps de boucle.

Conclusion

1. Les principaux résultats

- L'effaçabilité de la mémoire et la notion de variable
La notion de variable informatique se construit contre la notion préconstruite de variable mathématique. Elle ne prend son sens qu'à partir du moment où une mémoire est conçue comme une mémoire effaçable, au-delà de son rôle de conserver une donnée (ici un nombre). Cette affirmation se nourrit à la fois de l'analyse que nous avons faite de la genèse historique de la machine ordinateur et de l'ingénierie didactique. Cette notion de variable a besoin pour émerger d'une matérialisation en tant que mémoire d'une machine, c'est-à-dire un emplacement réservé à l'avance pour conserver une donnée.
- Le fonctionnement de la calculatrice comme une machine arithmétique
Les calculatrices à la disposition des élèves dans EMS sont toutes munies de touches mémoires associées à des mémoires effaçables. Or l'analyse institutionnelle et les résultats de la première situation de l'ingénierie mettent en lumière un fonctionnement largement majoritaire de la calculatrice comme une machine arithmétique : les touches mémoires peuvent être utilisées sans donner intentionnellement à la mémoire le caractère d'effaçabilité.
- L'économie de la communication homme - machine : la notion de boucle
La présence de calculs répétitifs qui installent dans EMS les algorithmes itératifs a été l'une des justifications de notre intérêt pour la notion de boucle. L'autre a été l'apparition de boucles dans l'écriture du premier programme à une machine à mémoire

effaçable (machine analytique de Babbage) pour l'exécution d'un algorithme itératif par Adda Lovelace (1842).
Nous avons vérifié que l'intention d'exécuter des calculs répétitifs avec un invariant opératoire est une condition pour concevoir et élaborer une communication à la machine qui économise la répétition de tous les calculs exécutés par elle. La notion de boucle est une réponse à cette recherche d'économie.
- Le travail mathématique nécessaire à la programmation d'un algorithme
L'analyse épistémologique a montré qu'Ada a dû transformer un algorithme mathématique infini en un algorithme itératif fini pour pouvoir écrire un programme à la machine analytique de Babbage. Les élèves se sont, eux aussi, engagés dans un travail sur l'algorithme de tabulation pour établir et écrire, en langage Alpro et en langage plus évolué, l'invariant et la condition d'arrêt de la répétition. Ces écritures ont nécessité un retour réflexif sur les objets mathématiques présents dans le problème de tabulation : variation de la fonction, discrétisation de l'intervalle de définition.

2. Les limites de ce travail

- L'ingénierie s'arrête au moment où les objets informatiques élémentaires, variable informatique et boucle, se mettent en place. Il n'y a donc pas eu de stabilisation des connaissances sur ces objets dans des types de tâches qu'il reste à inventer. Un seul domaine de valeur pour les variables (ou type de variable) est envisagé, celui des nombres décimaux. Or d'autres structures de données existent dans EMS comme des tableaux ou des listes. Il faudrait prolonger notre ingénierie pour donner un sens « informatique » à ces structures de données élémentaires.
- Cette ingénierie favorise la conception d'un type de boucle dont le nombre d'itérations est déterminé à l'avance, ce qui fixe la nature de la condition d'arrêt : boucle « répéter n fois… ». Or d'autres types de boucles existent pour lesquels la condition d'arrêt s'exprime par une condition logique comme : « tant que…faire » ou « répéter…jusqu'à…». Notre choix de privilégier la première boucle a été contraint par la nature d'Alpro.
La restriction des boucles à une seule boucle limite la signification de cette notion informatique.
- Nous avons fait le choix du problème de tabulation, problème présent dans EMS, pour faire traiter par les élèves un problème de programmation absent de EMS. Or ce problème est pris en charge par le tableur dans EMS en France.
Il semble judicieux d'envisager une reprise de l'ingénierie didactique sur un problème mathématique du domaine de l'Arithmétique ou de la Statistique.
-Notre ingénierie didactique soulève donc un ensemble de questions qui sont, pour nous, au cœur d'une formation des enseignants de mathématiques sur les objets élémentaires d'informatique en relation avec des problèmes mathématiques et en écho avec les fortes recommandations des deux pays pour l'introduction de ces objets, pour l'utilisation de la calculatrice et de l'ordinateur.

Bibliographie

Bouvier A., George M. Le Lyonnais F. (1993) *Dictionnaire de mathématiques*. Paris : PUF.

Golschlager et Lister (1986) *Informatique et algorithmique*. InterEdition.

Horowitz E. et Sahni S. (1978) *Fondamentals of Computer Algorithms*. Edition Pitman.

Knuth D-E. (1968) *Algorithmes fondamentaux, l'art de la programmation d'ordinateur*. Addison-Wesley Publishing Company.

Kuntzmann J. (1957) *Formation de calculateurs – Moyens de Calcul – L'atelier Arithmétique*. 2e édition. Université de Grenoble, Année 1957 – 1958.

Lê Van T. (2001) *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-nam.* Thèse en cotutelle France – Viêt-nam de didactique des mathématiques. Université Joseph Fourier (Grenoble) et Université Pédagogique de Ho Chi Minh.

Ligonnière R. (1987) *Préhistoire et histoire des ordinateurs*. Paris : Edition Robert Laffont.

Nguyen C. T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice.* Thèse en cotutelle France – Viêt-nam de didactique des mathématiques. Université Joseph Fourier (Grenoble) et l'École Normale Supérieure n°1 de Hanoi.

Samurçay R. (1985) Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants. *Educationnal Studies in Mathematic,* n° 16-2 (pp. 143-161).

Swade D. (1993) Le calculateur mécanique de Charles Babbage. *Pour la Science*, n° 186, (pp. 78-84).

Verroust G. (2004) *Histoire, épistémologie de l'informatique et révolution technologique*. http://hypermedia.univ-paris8.fr/Verroust/cours/

Dictionnaire Encylopaedia, tomes 1, 12, 19

Rapport de la commission Kahane (2001)

Programmes scolaires

1. Programmes des mathématiques au lycée en France des années 70, 80, 90, 2000

2. Programmes des mathématiques au lycée au Viêt-nam des années 1990, 2000 et programmes en expérimentation 2002

3. Programme en expérimentation de l'informatique de 1994 - 1995 à 1997 - 1998

Manuels scolaires :

1. Collection Math 2e, 1er S, Edition Belin 2000

2. Collection Déclic Maths 2e, 1er S, Tle S, Edition Hachette 2001

3. Collection Mathématiques 2e, 1er S, Tle S, Edition Bréal 2002

4. Manuels de mathématiques au lycée Đại số 10, Đại số và giải tích 11, Giải tích 12, Nhà xuất bản Giáo dục Hà nội Việt nam 1998

5. Trois collections de manuels Đại số 10 (Mathématiques en Seconde), Nhà xuất bản Giáo dục Hà nội Việt nam 1990

Algorithmes géométriques selon le nouveau programme de Mathématiques pour la classe de Seconde

Ruben Rodriguez Herrera
IUFM de Basse-Normandie

Résumé :

Dans l'atelier nous vous proposons de travailler sur des activités permettant aux élèves de la classe de seconde d'investir les capacités, attitudes et connaissances géométriques travaillées jusqu'à la fin du collège, pour résoudre de constructions et aborder une forme de « pensée algorithmique ».
1° Algorithmes de construction utilisant seulement les tracés « milieu de deux points » et «droite passant par deux points ».
2°Algorithme d'Euclide dans l'Univers de la géométrie ainsi que dans l'univers de l'arithmétique.

I) PGCD de deux entiers Algorithme d'Euclide dans l'Univers de la géométrie ainsi que dans l'univers de l'arithmétique

Partie I Du rectangle au carré

Phase1

On propose aux élèves de réaliser les constructions à la règle, à l'équerre et au compas sur une feuille et simultanément sur l'ordinateur à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. (Voir exemple 1). La suite d'instructions donnée par l'enseignant est :
Tracer l'arc de cercle de rayon C1B de centre le sommet C1, jusqu'à couper le segment [DC1] en C2 Tracer la droite qui passe par C2 et est perpendiculaire à (AC1), cette droite perpendiculaire coupe le côté [AB1] en B2
Compléter le quadrilatère B1C1C2B2.

Différenciation :

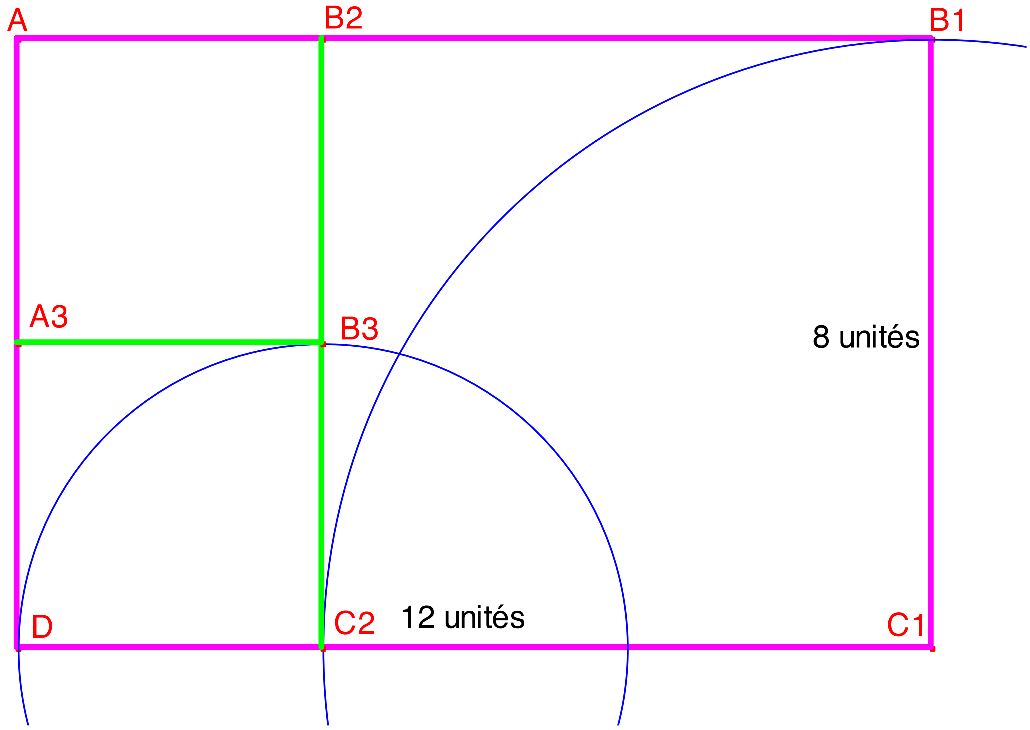
On peut les autoriser à réaliser les construction seulement sur une feuille quadrillée et prendre comme unité le bord du « petit carré » de la feuille. De même, si certains élèves veulent se contenter seulement des constructions sur feuille on peux les y autoriser, mais il faut les encourager à utiliser les logiciels, (les élèves en général aimant bien cet univers géométrique).

Compétence 3
Géométrie
Connaître et représenter des figures géométriques. Utiliser leurs propriétés.
Effectuer des constructions simples en utilisant :
Des outils (instruments de dessin, logiciels)
Des définitions, des propriétés
Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer

Ici les élèves doivent justifier que la construction de chaque étape est bien à chaque fois un carré. Les argumentations des élèves doivent aboutir à démontrer qu'il s'agit bien d'un quadrilatère qui

a Ses quatre angles droits (rectangle) et qui a deux côtés consécutifs de même longueur. Donc c'est un carré.
A partir des échanges oraux on met en avant les affirmations qui découlent de la construction même : angles droits en B1, en C1, en C2 et l'égalité des longueurs C2C1 = C1B1 et les déductions : angle droit en B2 puis le quadrilatère B1C1C2B2 est un carré.

Exemple 1 A partir d'un rectangle de dimensions : 8 et 12 c'est le cas où PGCD (8 ;12) = 4 On ne mentionne pas encore le PGCD. On reste dans le champ géométrique et on demande aux élèves de décrire la nature des figures obtenues et de justifier cette nature.



Compétence 3
Décrire le comportement d'une grandeur : l'élève est capable de quantifier dans des cas simples, à partir d'une observation d'une série de mesures, le comportement d'une grandeur

Ici il s'agit de modéliser le comportement des étapes de cette construction « Psychomorphisme » avec l'univers arithmétique

Nous allons à partir de cette structure géométrique et l'expérimentable ainsi dégagé par les élèves leur proposer d'établir une correspondance morphique avec un univers arithmétique qui formalise la structure de la division euclidienne et quelques propriétés des diviseurs et des multiples, en particulier le PGCD. Ceci est encore un exemple de notre principe des « psychomorphismes » mis en évidence au cours de nos recherches sur l'apprentissage et qui affirme que « tout apprentissage se construit par la mise en correspondance entre deux univers structurés avec leurs formalisations propres, mais qui correspondent à un même univers des actions directement expérimentables par l'élève. Ici l'univers expérimentable est celui des actions de construction, et on a deux formalisations : L'une dans l'univers des propriétés géométriques énoncées et articulées lors d'un discours explicatif de l'élève et l'autre dans l'univers arithmétique articulé par le langage symbolique numérique et par le discours explicatif de l'élève.

Nous avons ici une formalisation possible :

Etape 1
Aire du rectangle initial 8 x 12
Aire du premier carré 8 x 8, nombre de carrés 1
Aire du deuxième rectangle qui reste après la « soustraction géométrique »
8x12- 8x8= 8x4
Les élèves peuvent écrire ceci de deux façons différentes
Soit 96 -64 = 32 ou bien 8(12 -8) =8 x 4
La deuxième formalisation est bénéfique car elle renforce l'apprentissage de la distributivité.

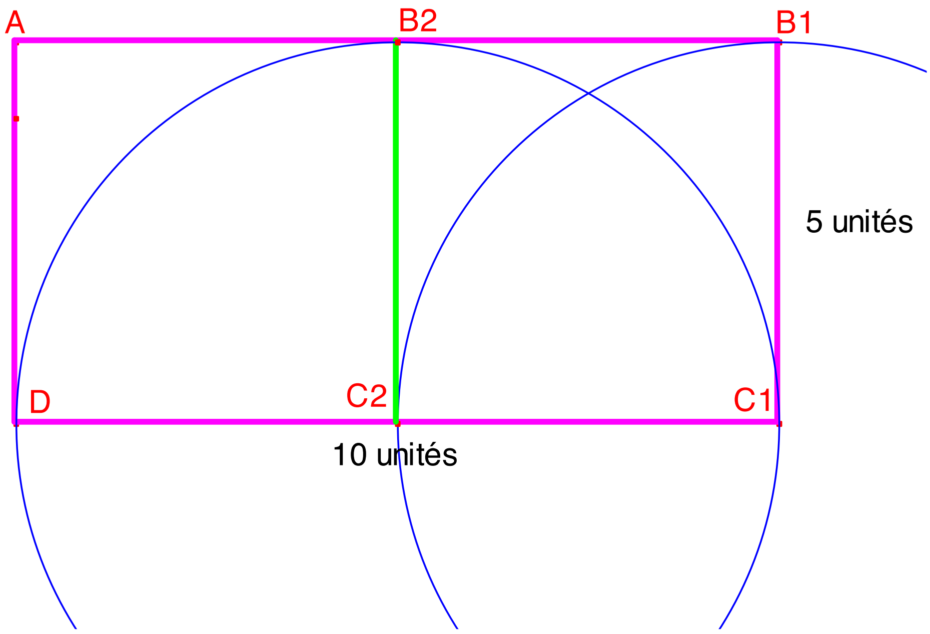
Etape 2
Aire du deuxième rectangle 8 x 4
Aire du deuxième carré 4 x 4 ; nombre de carrés 2
Aire qui reste après la « soustraction géométrique »
8x4 - 2x 4x4 =32–32=0

On propose aux élèves de formaliser la structure géométrique qui se dégage de la procédure dans l'univers de l'arithmétique. Au départ on a un rectangle 8 x 12, on observe le plus petit des deux nombres qui est 8 puis on s'intéresse au nombre 8 au carré noté : 82. On compte combien de fois 82 rentre au maximum dans 8 x12. Ceci reviens, pour les élèves, en observant la disposition géométrique de la figure, à se poser la question plus simple : « combien de fois 8 rentre-t-il dans 12 ? ».
Il reste un rectangle de 8 x 4 et on recommence la procédure : 4 est le plus petit des nombres 4 et 8, on se pose alors à nouveau la question : combien de fois 42 rentre-t-il dans 4 x 8, ce qui reviens à se poser la question : combien de fois 4 rentre-t-il dans 8 ? On arrête alors car la « soustraction géométrique » nous indique que la surface qui reste est nulle. Ce qui s'écrit 8 – 2 x 4 = 0.

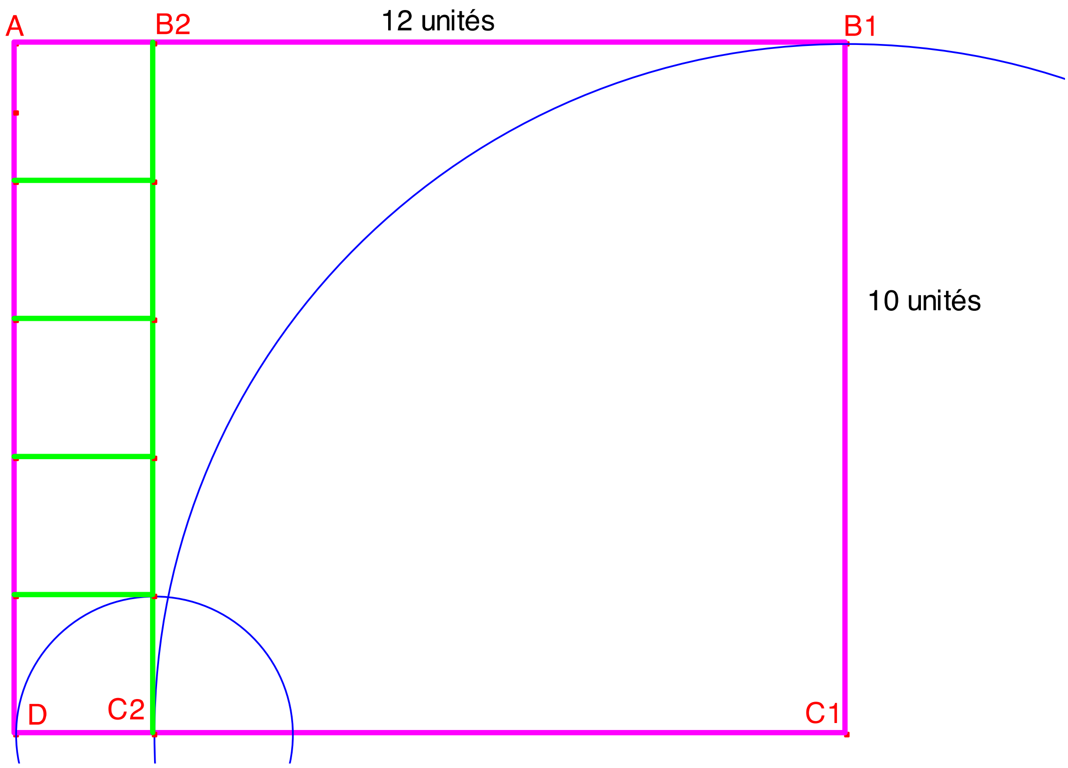
Phase 2
Après quelques exemples utiles, on constate qu'on obtient au bout de quelques itérations un carré de dimension entière : le PGCD de deux entiers (donnés par la largeur et la longueur du rectangle initial). Après le traitement de quelques cas différents (mais avec le même algorithme de construction) où le professeur ne suggère pas la notion de PGCD, on invite les élèves à modéliser les constructions dans un univers arithmétique.

Remarque : Cette suite d'étapes sera proposée à chaque exemple, ainsi on renforce à travers le travail de nos élèves leurs connaissances et compétences citées précédemment. Nous mettons, dans les exemples qui suivent l'accent sur le fait qu'on arrive toujours par cet algorithme géométrique à obtenir un carré final.
Nous invitons nos élèves à expliquer cette conclusion.

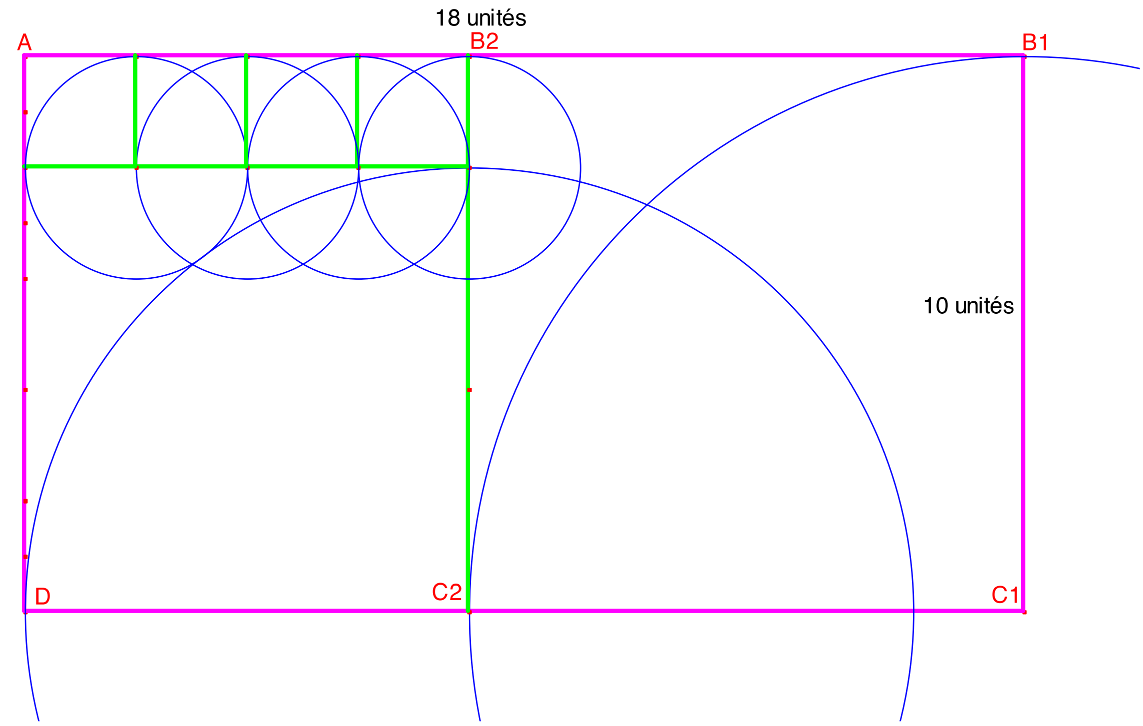
Exemple 2
A partir d'un rectangle de dimensions : 5 et 10
PGCD (5 ; 10) =5



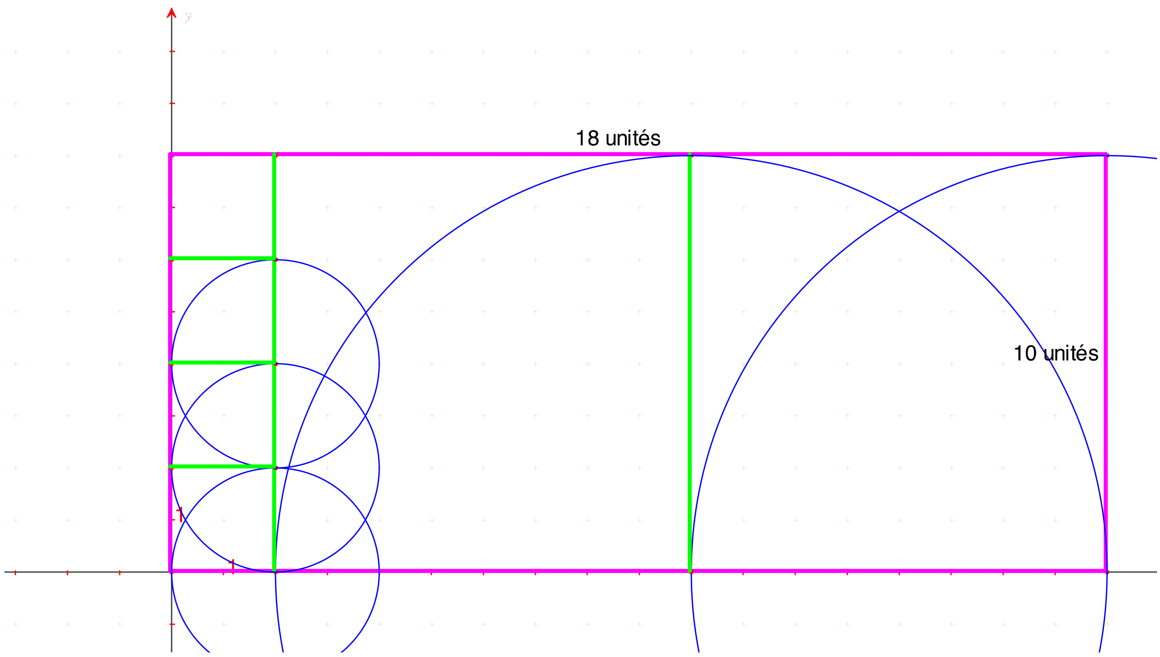
Exemple 3
A partir d’un rectangle de dimensions : 10 et 12
PGCD (10 ; 12) = 2



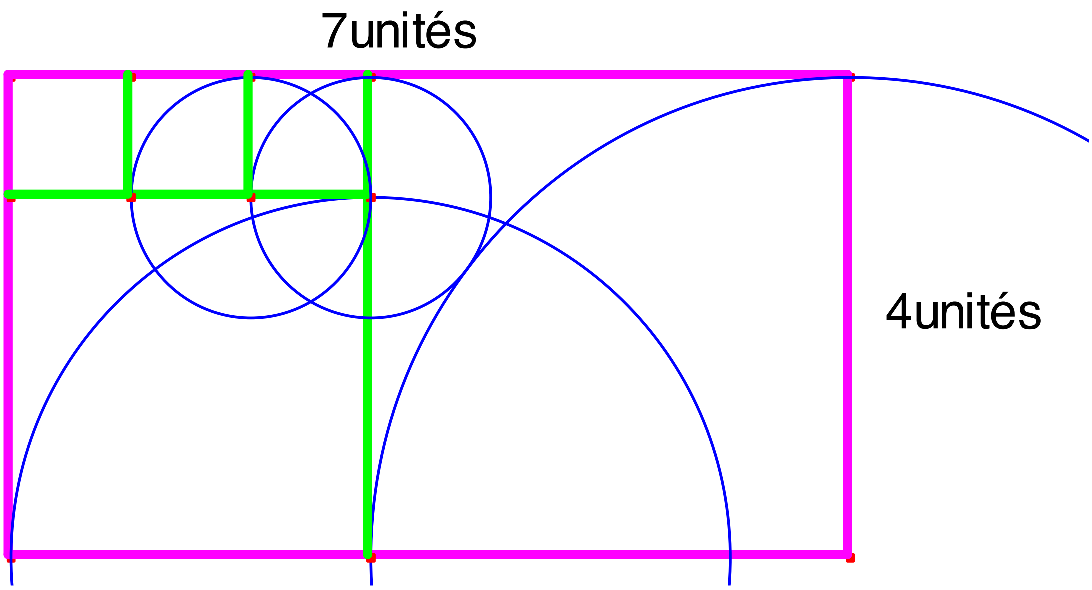
Exemple 4
PGCD (10 ; 18)=2



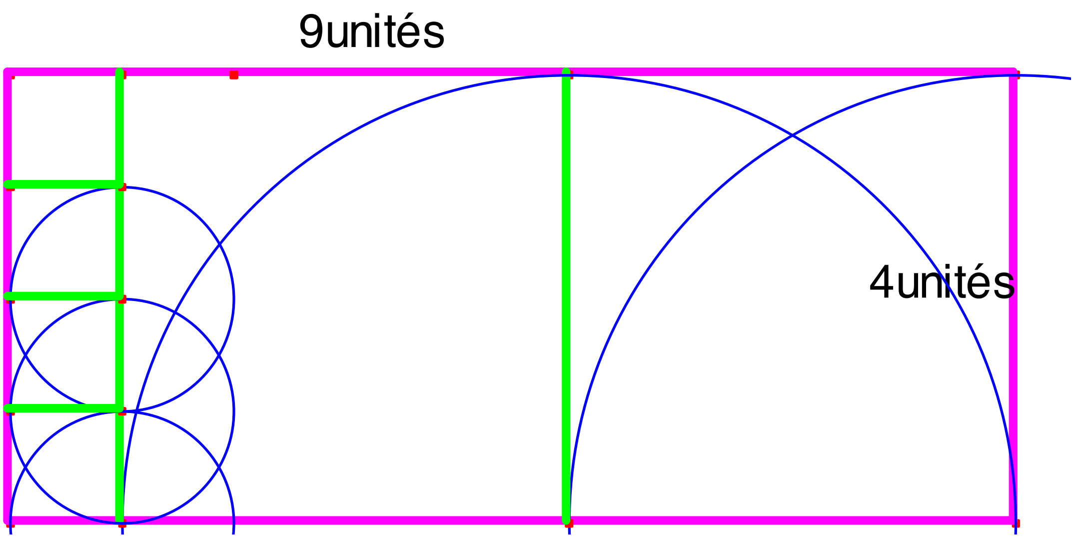
Exemple 5
PGCD (8 ;18) = 2



Exemple 6
PGCD (4 ; 7) = 1



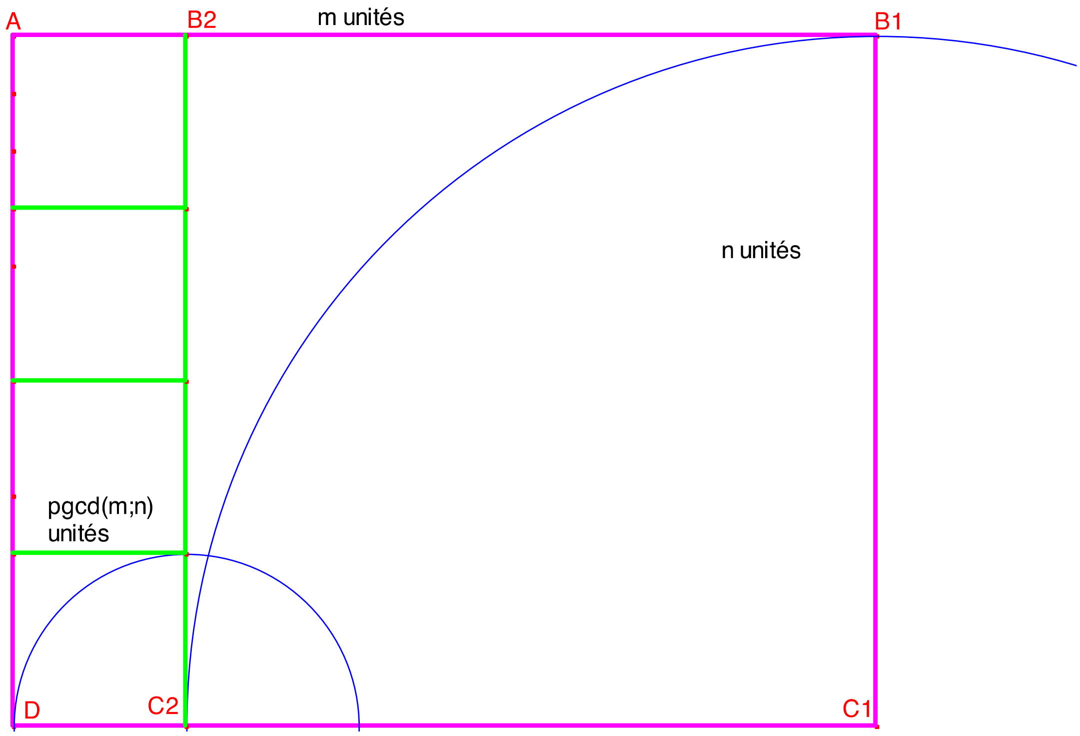
Exemple 7 PGCD(4 ;9) = 1
1



Dans cette phase on demande aux élèves de décrire une suite d'instructions qui va se généraliser sur la forme d'un texte construit par le groupe et avec l'aide de l'enseignant l'objectif est d'arriver à un algorithme géométrique.

Par exemple l'algorithme suivant , (il n'est pas forcement écrit avec les élèves dans une écriture classique d'algorithme:
1 Au départ on a un rectangle de dimensions m et n
2 Si m >n alors on construit une suite de carrés de dimension n
« posés sur la longueur » jusqu'à qu'on ne puisse plus construire un nouveau carré
3 On regarde les dimensions du rectangle obtenu, si elles sont égales on arrête, sinon on choisit la plus petite et on recommence.
Remarque : ici il faut bien laisser les élèves proposer des textes qui doivent correspondre à la suite de constructions. **Les élèves doivent bien, se rendre compte de l'itération, donc de l'existence d'un algorithme**.

Phase 3
a) Les élèves argumentent sur leur affirmation :
« Etant donnés deux entiers m et n dimensions du rectangle initial, **cet algorithme de constructions itérées permet toujours d'obtenir un carré. »**



Exemple d'argumentation possible
Dans la suite des constructions les dimensions des rectangles sont toujours des nombres entiers positifs de plus en plus petits. Les dimensions sont toujours positives, donc elles ne peuvent pas être plus petites que 1. Donc soit on trouve le dernier carré de dimensions 1 ou bien il est de dimension supérieure à 1.

b) Etant donnés deux entiers m et n
Construction avec les élèves de l'affirmation plus fine
« **Avec cet algorithme de constructions itérées on obtiendra toujours un carré de dimension le PGCD de m et n » Les élèves trouvent par eux-mêmes que par cet algorithme géométrique on trouve un nombre d dimension du dernier carré, tel que les nombres m et n sont dans la table des multiples de d D'autres élèves trouvent que par cet algorithme la dimension du dernier carré d est toujours un diviseur de m et de n**

Exemple d'argumentation possible
Dans la suite des constructions les dimensions des rectangles sont toujours des nombres entiers positifs de plus en plus petits. Les dimensions sont toujours positives, donc elles ne peuvent pas être plus petites que 1. Donc, soit on trouve le dernier carré de dimension 1 ou bien il est de dimension supérieure à 1.

Autre Argumentation :
On construit le premier rectangle en position « prototypique », (avec la largeur en position verticale).
Quand on rabat la largeur sur la longueur de chacun des rectangles successifs on obtient à la fin un carré. Soit de dimension 1, ou bien de dimension d>1.où d est un nombre entier positif, car la soustraction d'un entier plus petit à un autre entier plus grand donne un entier positif.

La dimension d du carré final est un diviseur des nombres donnés m et n, car d divise les deux dimensions Xi et Yi du rectangle à l'étape finale i. L'une de ces deux dimensions du rectangle Yi est la largeur n du rectangle initial, d'après la disposition des figures itérées. Donc d divise n.

L'une de deux dimensions Xi ou Yi est la dimension des carrés isométriques précédents qui, en nombre entier, constituent l'avant-dernier rectangle de dimensions Xi-1 et Yi-1, ainsi « de proche en proche » on arrive au rectangle initial de dimensions m et n. L'expression : « De proche en proche » montre, dans cette construction itérée, (qui est en fait un algorithme purement géométrique), que le « dernier carré » obtenu rentre un nombre de fois entier dans les rectangles de dimensions (Xi et Yi) , (Xi-1 et Yi-1) ,..... (m ; n)

On conclut que d divise m et n. Le carré de dimension d est le premier carré trouvé qui rempli entièrement le dernier rectangle donc il est le carré de plus grande dimension qui permet de remplir avec un nombre entier le rectangle initial de dimensions n et m.
Donc d est le PGCD de m et n.

Commentaire didactique
La formalisation de cet algorithme géométrique par un discours de formalisme mathématique est complexe, mais les élèves, par la suite de ces constructions en admettent plus aisément le résultat : « Le PGCD de m et n est d ». Le professeur de ne pas rendre obligatoire cette phase de formulation discursive au groupe entier mais de la proposer aux élèves intéressés.

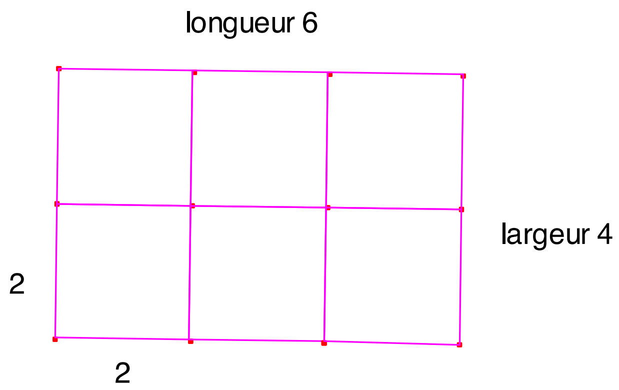
Partie II Du carré au rectangle

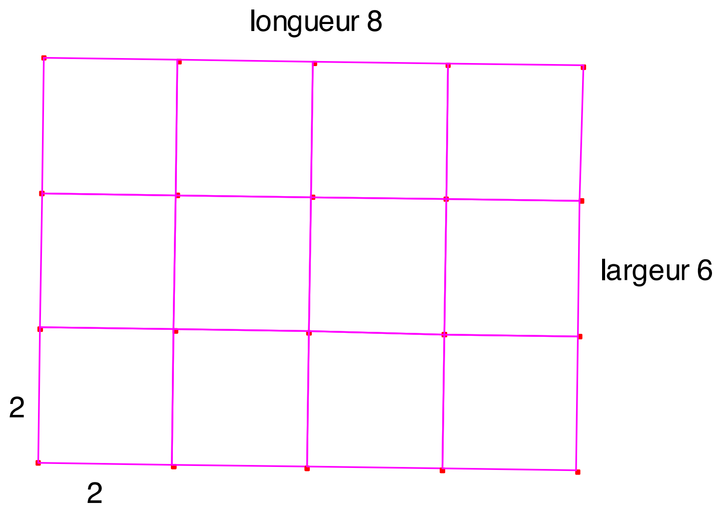
Il est fondamental, dans tout apprentissage d'une notion mathématique, de proposer l'activité réciproque. Ici nous avons deux directions possibles de l'inversion de l'Algorithme.

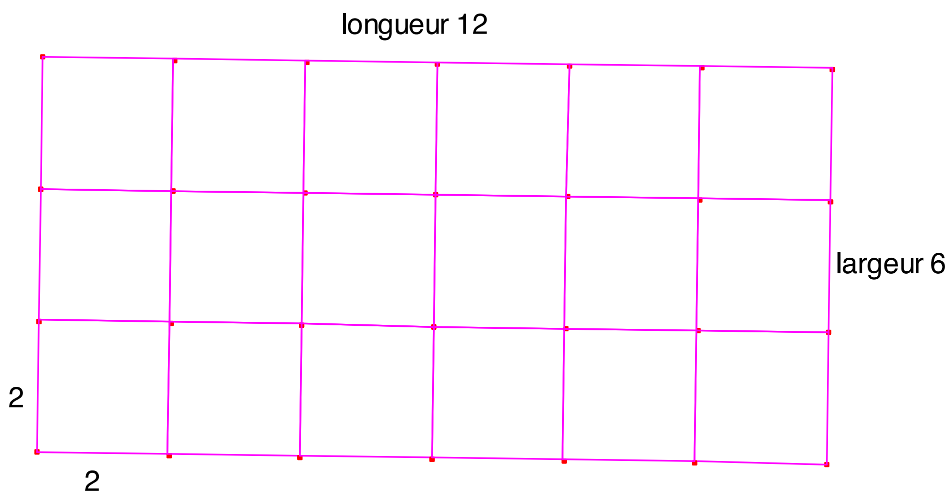
Possibilité 1
Phase 1

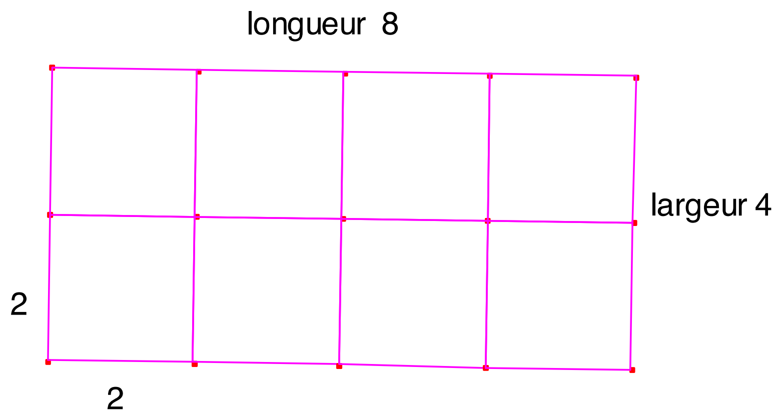
On propose de partir d'un carré de dimension 2 et de former des rectangles par recollement d'un certain nombre des carrés On laisse les élèves réfléchir librement et on leur demande de construire au moins quatre rectangles différents.

Exemples :









On demande aux élèves de justifier oralement l'obtention par recollement d'un rectangle

Compétence 3
Géométrie
Connaître et représenter des figures géométriques. Utiliser leurs propriétés.
Effectuer des constructions simples en utilisant :
Des outils (instruments de dessin, logiciels)
Des définitions, des propriétés
Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer

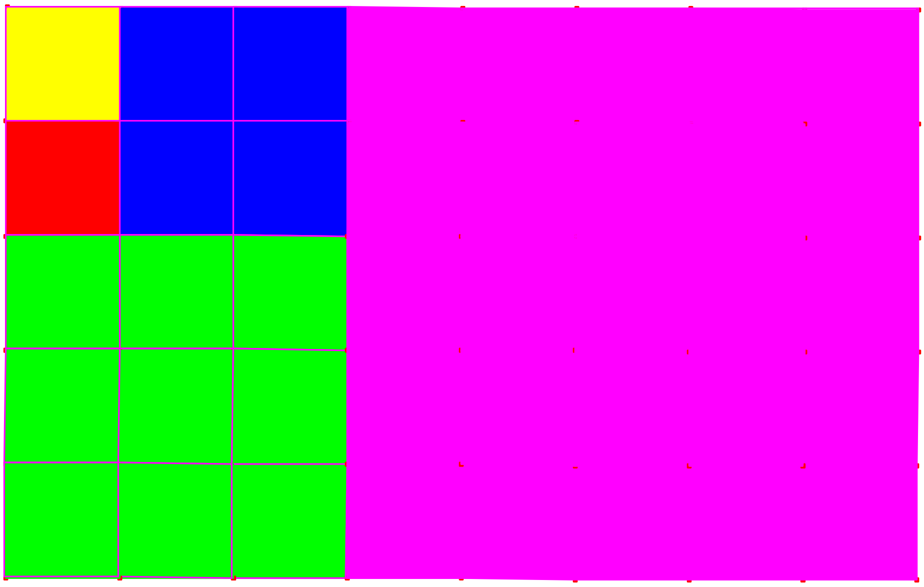
Phase 2' On demande aux élèves d'appliquer les constructions de l'algorithme de la partie I et d'expliquer si l'on trouve toujours le carré initial ou quelquefois un autre plus grand.

Phase 3' On demande aux élèves d'expliquer, dans l'univers numérique, les affirmations de cette partie 2 et les conclusions qui seront explicitées.

Possibilité 2
Phase 1''
On propose aux élèves de partir d'un carré et réaliser un « inverse réduit » de l'algorithme précèdent ce qui donne l'algorithme suivant :
(*) les élèves partent de valeurs de « d » numériques, par exemple 2, 3, 4,... puis par la suite on le généralise à un carré de dimension « d »

Voici un texte d'algorithme, pour un carré de dimension « d » donné au départ
1) Construire un carré de dimension « d »
2) Construire un carré de dimension « d », accolé, (ou « »), au premier carré.
3) Construire un carré de dimension d+d, accolé au dernier rectangle, ceci donne un rectangle de dimensions 2d et 3d
4) On recommence avec un carré accolé de dimension 3d, ceci donne un rectangle de dimensions 3d et 2d+3d, c'est-à-dire 3d et 5d
5) On recommence le même type de construction et on arrête quand on le désire.

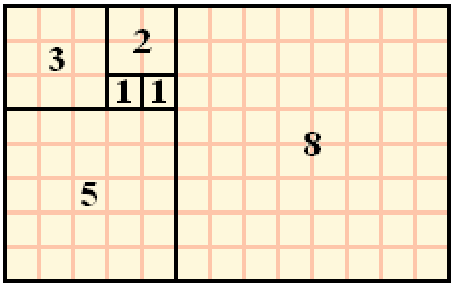
Par exemple avec un carré de dimension 2 au départ on obtient la suite de couples de dimension des rectangles successifs : (2 ; 4) (4 ; 6) (6 ; 10) (10 ; 16) ....



Phase 2’’
On demande aux élèves de calculer le PGCD de chaque couple précèdent
On obtient :
PGCD (2 ; 4) = 2
PGCD (4 ; 6) =2
PGCD (6 ; 10) = 2
PGCD (10 ; 16) = 2
Les élèves formulent une conjecture les PGCD sera toujours 2

Phase 3’’
On peut avec avancer dans l’apprentissage de la logique et de raisonner avec les élèves par une contraposée non rigoureusement formalisée mais assez intuitive:
Supposons que à une étape de cette construction on obtient comme PGCD un nombre k plus grand que 2
Alors il divise les deux dimensions a et b du rectangle, par exemple avec a<b
Alors il divise les deux dimensions du rectangle précèdent qui sont a et b-a
Ainsi de proche en proche on arriverait à la conclusion que k divise les nombres 2 et 4 tout en étant k>2 mais ceci est absurde car le PGCD de 2 et 4 est 2*(*)*

Pour approfondir cette question nous vous conseillons à nos collègues de consulter des articles sur la suite de Fibonacci et l’Algorithme d’Euclide. Si on part d’un carré de dimension 1 on obtient les termes de la suite classique de Fibonacci.



Partie III Problèmes dans le champ étudié : multiples, diviseurs PGCD

On propose dans cette partie des problèmes où les procédures et notions trouvées précédemment sont à la base de la résolution.

Pour cela nous pouvons extraire de certains manuels des énoncés qui ne soient pas que des énoncés d'application numérique directe du PGCD.

Exemple : sésamaths

Exercices d'approfondissement

62 *Division euclidienne par 13*

Dans une division euclidienne, le diviseur est 13, le reste est 5.

a. Si l'on augmente le dividende de 1, que devient le quotient ? Que devient le reste ?

b. De combien peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient ?

c. Si on veut diminuer le quotient de 1, combien faut-il enlever au dividende ? Donne toutes les possibilités.

63 *Division euclidienne*

On a l'égalité : $3\,625 = 85 \times 42 + 55$.
Réponds aux questions suivantes sans faire de division et en justifiant.

a. Quel est le quotient de la division euclidienne de 3 625 par 42 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 85 ?

c. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 42 ?

d. Mêmes questions que **b.** et **c.** en remplaçant 3 650 par 3 600.

e. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 569 par 85 ?

64 *Division euclidienne (bis)*

Dans une division euclidienne, que deviennent le quotient et le reste si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre ?

65 *Devinette*

Lorsque je divise 134 par ce nombre, le reste est 2 et lorsque je divise 183 par ce même nombre, le reste est 3.

Quel peut être ce nombre ? Trouve toutes les solutions.

66 *Distribution de crêpes*

La grand-mère de Nicolas a fait 26 crêpes. Elle demande à Nicolas de les distribuer à parts égales à chacun de ses quatre cousins présents dans la cuisine. Lorsqu'il ne pourra plus en distribuer, il gardera le reste pour lui.
Après réflexion, Nicolas s'empresse d'aller chercher ses trois autres cousins dans le jardin.

Pourquoi ?

67 Un groupe de moins de 40 personnes doit se répartir équitablement une somme de 229 €. Il reste alors 19 €. Plus tard, ce même groupe doit maintenant se répartir équitablement 474 € : cette fois-ci, il reste 12 €.

a. Combien y a-t-il de personnes dans ce groupe ?

b. Ils décident de se répartir ce qu'il reste équitablement.
Combien chaque personne reçoit-elle en plus ?
Quelle somme auront-ils reçue au total ?

68 *Démonstration de l'algorithme d'Euclide*

a et b sont deux entiers naturels, $a > b$.
On effectue la division euclidienne de a par b :
$a = b \times q + r$ où $r < b$.

a. Démontre que si d est un diviseur commun à a et b alors d est aussi un diviseur de r.

b. Démontre que si d' est un diviseur commun à b et r alors d' est aussi un diviseur de a.

c. Démontre que PGCD $(a\,;\,b)$ = PGCD $(b\,;\,r)$.

69 *Pages*

Deux livres ont respectivement 480 et 608 pages. Chacun de ces livres est formé de fascicules ou cahiers, qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.

a. Quel est le nombre de pages d'un cahier ?

b. Quel est le nombre de cahiers qui composent les deux livres ?

70 *Énigmes*

a. Trouve deux nombres entiers naturels dont la somme est 2 285 et le PGCD est 457. Y a-t-il plusieurs solutions ?

b. Trouve deux nombres entiers naturels dont le PGCD est égal à 8 et dont le produit est 960. Y a-t-il plusieurs solutions ?

71 *Timbres*

Un philatéliste possède 17 017 timbres français et 1 183 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, comportant le même nombre de timbres français et le même nombre de timbres étrangers.
Calcule le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser et dans ce cas, le nombre de timbres de chaque sorte par lot.

Page suivante de sésamaths

Exercices d'approfondissement

72 *Tempête*

Des poteaux téléphoniques étaient plantés le long d'une route sur une ligne droite, régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres.
Après une tempête, il n'en reste plus que trois : le premier, le dernier et un autre situé entre les deux, à 345 m du premier et 184 m du dernier. Un technicien arrivé sur les lieux estime le nombre de poteaux tombés à plus de 10 mais moins de 100 !
Combien de poteaux sont-ils tombés ?

73 *Soyons tous à l'heure*

a. La montre d'Éric sonne toutes les 6 heures et celle de Leïla, toutes les 14 heures. Elles ont sonné ensemble le 9 octobre à 17h30.
À quelle date et à quelle heure sonneront-elles ensemble de nouveau ?

b. Même question si la montre d'Éric sonne toutes les 15 heures et celle de Leïla toutes les 21 heures.

74 *Arbres*

Un terrain rectangulaire a pour dimensions 966 m et 1 008 m. Sur ses côtés, on veut planter des arbres régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres. Il doit y avoir un arbre à chaque coin du terrain.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter ?

75 *Piscine*

Une piscine rectangulaire mesure 3,36 m par 7,80 m et a une profondeur de 1,44 m.
On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques.
Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.

a. Quelle taille de carreaux doit-il commander ?

b. Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

76 *Entiers naturels consécutifs*

a. Calcule le PGCD de 34 et 35 puis celui de 456 et 457.

b. Quelle conjecture peux-tu faire ? Démontre cette conjecture.

77 *Premiers entre eux*

a. Démontre que les entiers naturels k et $2k + 1$ sont premiers entre eux pour n'importe quelle valeur de k.

b. Même question avec $k + 1$ et $2k + 1$.

c. Déduis-en des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

78 Rends la fraction $\frac{11\,413}{14\,351}$ irréductible.

79 Soit $C = \frac{4}{15} + \frac{1}{6} + \frac{5}{9}$.

a. En écrivant la liste des premiers multiples de chacun des dénominateurs, trouve le dénominateur commun aux trois fractions le plus petit possible.

b. Calcule C et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

c. Procède de la même façon pour calculer $D = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}$.

80 *Addition*

a. Soit $G = \frac{3\,575}{4\,225}$.
Écris G sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Soit $H = G + \frac{4}{26}$.
Écris H sous la forme d'un nombre entier. Indique le détail des calculs.

81 Calcule $J = \frac{575}{161} - \frac{45}{21}$. (Donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.)

82 Calcule en détaillant les étapes et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$A = \frac{24 \times 9 \times 72 \times 121}{36 \times 33 \times 64}$

$B = 56 \times \frac{15}{128} - \frac{1}{18}$

$C = \left(\frac{24}{15} + \frac{35}{25}\right) \times \frac{20}{33}$

$D = \frac{81}{63} \div \left(4 - \frac{2}{14}\right)$

$E = \frac{56}{15} \times \frac{\frac{5}{6} - \frac{5}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$

$F = 3 + \frac{2}{15} \times \left(5 \times \frac{23}{25} - \frac{12}{49} \div \frac{9}{14}\right) \div \frac{1}{70}$

Conclusion de cette partie: Cette proposition didactique basée sur l'algorithme d'Euclide permet aux élèves d'avancer à partir de leurs productions et d' aborder des propriétés des multiples et diviseurs, en particulier le PGCD de deux entiers naturels non nuls. Ceci dans le cadre du développement des connaissances et compétences du socle commun.

II) Ouverture d'un problème par une transformation de l'énoncé. Sur l'exercice du manuel Sésamaths 3e, le 75 Piscine, page 27, Chapitre N1, Collection Mathenpoche, Génération5

75 *Piscine*
Une piscine rectangulaire mesure 3,36m par 7,80m et a une profondeur de 1,44m.
On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques. Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.
a) Quelle taille de carreaux doit-il commander ?
b) Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

Analyse didactique :
1° Les capacités travaillées par ce problème chez les élèves

Partie de la question (a)
1) Capacité relevant du socle commun
Les élèves doivent rechercher et organiser l'information.
Ils doivent ici à partir de « Une piscine rectangulaire » penser à un parallélépipède rectangle ou pavé droit. Mais faire attention qu'il y a seulement 5 faces à prendre en compte car une piscine a seulement un fond et quatre faces latérales.
Ils doivent penser à la forme des faces du pavé droit, c'est-à-dire des rectangles. Ils doivent penser aux différents rectangles, (largeur et longueur) et au nombre de chaque type. Soit deux rectangles de 3,36m x 1,44m , deux rectangles de 7,80m par 1,44 et pour le fond un rectangle de 3,36m par 7,80m

2) Capacité relevant du socle commun
Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer
Ils doivent penser que l'interdiction de faire des découpes implique un « nombre entier de carrés ».

Ils doivent penser que « préfère les grands carreaux » implique « chercher le carré de plus grande dimension »
Capacité relevant du socle commun
Calculer, mesurer, appliquer des consignes
Ils doivent penser à transformer les mesures en cm et regarder s'il s'agit de nombres entiers.
Ils doivent penser à chercher un carré tel que sa dimension lui permette de rentrer un nombre entier de fois dans la largeur et la longueur de chaque type de rectangle.
Ils doivent modéliser ceci par « il faut trouver un diviseur commun à 336 ; 144 ; et 780, le plus grand possible »
Ils doivent adapter leurs connaissances apprises des méthodes de recherche du PGCD de deux nombres à la recherche d'un PGCD de trois nombres.

Partie de la question (b)
Capacités relevant du socle commun
Calculer, mesurer, appliquer des consignes
Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer
Ils doivent penser que « calculer le nombre de carreaux par face de la piscine » revient à mesurer l'aire de chaque rectangle avec comme unité « le carreau obtenu dans la question (a) » Pour cela il faut qu'il pensent à diviser la largeur et la longueur de chaque rectangle par le PGCD obtenu et ensuite multiplier les deux quotients obtenus.
Ils doivent une fois qu'ils ont trouvé le nombre total des « carreaux carrés », penser à la division euclidienne par 100, puis augmenter le quotient d'une unité si le reste est non nul.

Proposition de transformation de l'énoncé

75 *Piscine*
Une piscine rectangulaire mesure 3,36m par 7,80m et a une profondeur de 1,44m. On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques. Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.
a) Quelle taille de carreaux doit-il commander ?
b) Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

Nous proposons soit d'ajouter à l'énoncé le texte suivant
Dessiner « à main levée » un schéma de représentation en perspective de cette piscine. Quelle est la forme géométrique de cette piscine ?

Si tu préfères, tu peux résoudre, pour commencer, le même type de problème mais plus facile, avec une piscine de 6m par 12m par 4m de profondeur.
Tu peux nous montrer que tu sais trouver la solution pour une des faces de la piscine, par exemple celle de 6m par 4m, puis celle de 4m par 12m, puis celle de 6m par 12m. Tu écris quelle est la forme de chaque face.
Et tu nous montres que tu sais calculer le nombre de carreaux carrés de chaque face.
Maintenant peux-tu résoudre le problème donné au départ ? Pour cela tu nous expliques chaque étape de tes calculs.

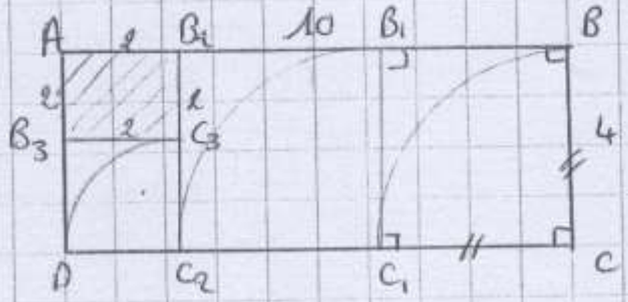
Soit d'ouvrir complètement l'énoncé, même jusqu' à tenir compte des observations faites sur un carrelage réel. Par exemple dans la salle de cours. Dans ce cas il faudra même tenir compte d'un nouveau paramètre : la largeur des « 'joints ». Le problème devient plus en accord avec la réalité. Il faudra bien se mettre d'accord avec nos élèves quelles ont les modélisation possibles. On garde par contre le choix des valeurs entiers des carreaux carrés et le fait qu'on ne veut pas les découper. Ce deuxième choix pédagogique nous parait le plus approprié et plus en accord avec l'orientation du « socle commun ». Les élèves qui travaillent de cette manière comprennent que les mathématiques sont fort utiles quand on modélise bien un problème de la vie réelle.

Annexe 1 productions des élèves « étudiants professeurs des écoles »

Champ Numérique et Géométrique

I Dessiner un rectangle

de dimensions 4 et 10 (unité le bord du carré du quadrillage)



Algorithme de construct

1) B_1BCC_1 est un carré car 4 côtés consécutifs de même longueurs et il possède 4 angles droits

2) On continue l'agorithme
$C_2C_1B_1B_2$ est un carré aussi.

3) On continue l'agorithme et on arrête qd on obtient $AB_2C_3B_2$ (carré) de dimension 2

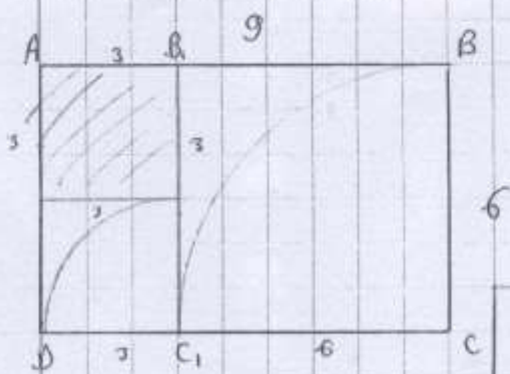
II ... modéliser numériquement les étapes de cet algorithme

1) rectangle 10 ; 4
calcul 10-4
2) rectangle 6 ; 4
calcul 6-4

rectangle
3) 2;4
calcul ;4-2
4) 2;2 Fin

Entrée	Sortie
(10;4)	2

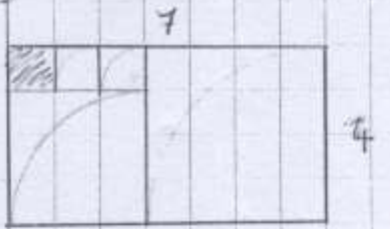
III Deuxieme exemple



1) regtangle 9;6
(9-3)
2) regtangle 3;6
(6-3)
3) 3;3

Entrée	Sortie
(9;6)	3

IV



rectangle
1) 7;4
(7-4)
2) 3;4
(4-3)
3) 3;1
(3-1)
4) 2;1
(2-1)
5) 1;1

Entrée	Sortie
(7;4)	1

V En partant d'un regtangle quelconque ayant 1 lg et lar ... ds cet algorythme arrive-t-on tjr à un carré?

Raisonnement = Dans cet algorythme des construct° géométriques, A chq étape on obtient un rectangle + petit mo ayant de dimens° de 2 nbres entiers.
Au pire on arrive on arrive à 1 rectangle ayant pr largeur 1 et pour longueur un nb entier. → On obtient 1 carré de dimens° 1.
Remarque = L'algorythme peut s'arrêter avt ac un carré de dimens° supérieure à 1.

VI Dans la géométrie

Dans la géométrie
(10;4) → 2
(9;6) → 3
(7;4) → 1.
(12;6) → 6
(12;15) → 3
(18;10) → 2
(24;30) → 6 $6 \times 5 \rightarrow 30$ $6 \times 4 \rightarrow 24$
60;36 → 12

VII Expliquer, par des propriétés des nombres, le résultat trouvé pr chq exemple

→ Chq nb entre parenthèse ∈ à la table de multiplicat° du nb que l'on trouve.
→ Le nb trouvé est le + grd diviseur commun.
PGCD de (60;36) = 12
(+ grd commun diviseur)

Annexe2 Propositions de différents manuels
Collection phare hachette éducation 3ème

> Activités

1 J'effectue une division euclidienne

J'AI DÉJÀ

1) a Effectuer la division euclidienne de 264 par 15. Quel est le quotient entier ? Quel est le reste ?
b Quelle égalité peut-on écrire à l'aide de ces nombres ?

2) a Effectuer la division euclidienne de 1 288 par 23. Quel est le quotient entier ? Quel est le reste ?
b Quelle égalité peut-on écrire à l'aide de ces nombres ?
c Recopier et compléter : « *23 est un ... de 1 288* » et « *1 288 est un ... de 23.* »

2 Je détermine les diviseurs d'un entier

J'AI DÉJÀ

A : Liste de diviseurs

1) On veut déterminer tous les diviseurs du nombre 20.
a Recopier et compléter les égalités : $20 = 1 \times ...$
$20 = 2 \times ...$
$20 = 4 \times ...$
b Déduire de chaque égalité deux diviseurs du nombre 20.
c Pourquoi n'a-t-on pas écrit l'égalité $20 = 3 \times ...$? l'égalité $20 = 5 \times ...$?
d Écrire la liste des diviseurs de 20.

2) Déterminer la liste des diviseurs de 90.

J'ai trouvé 12 diviseurs pour 90.

B : Nombres premiers

Un **nombre premier** est un nombre entier qui admet exactement deux diviseurs.
Dans chaque cas, préciser si le nombre est premier. Justifier la réponse.
a 11 ; b 4 ; c 2 ; d 34 ; e 1 ; f 0.

3 Je découvre le PGCD de deux nombres entiers

A : Notion de PGCD

1) a Déterminer la liste des diviseurs de 24, celle des diviseurs de 30 et celle des diviseurs de 35.
b Écrire la liste des diviseurs communs à 24 et 30. Quel est le plus grand ?
c Écrire la liste des diviseurs communs à 30 et 35. Quel est le plus grand ?
d Écrire la liste des diviseurs communs à 24 et 35. Quel est le plus grand ?

2) Expliquer pourquoi deux nombres entiers positifs ont au moins un diviseur commun.

3) Le plus grand des diviseurs communs à deux nombres entiers a et b s'appelle le Plus Grand Commun Divise
de a et b et se note **PGCD (a ; b)**.
Recopier et compléter : « PGCD (24 ; 30) = ... ; PGCD (30 ; 35) = ... ; PGCD (24 ; 35) = ... »

B : Propriétés du PGCD

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs. Justifier chaque propriété :
a PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a) ; b PGCD (a ; a) = a ; c Si b est un diviseur de a, alors PGCD (a ; b) =

52

4 Je calcule le PGCD de deux nombres entiers

A : Propriétés

a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $a > b$.

1) **a** Démontrer la propriété :

« *Si un nombre d divise a et b, alors d divise b et a – b* ».

J'ai écrit $a = n \times d$ et $b = n' \times d$.

b Démontrer la propriété :

« *Si un nombre d divise b et a – b, alors d divise a et b* ».

J'ai écrit $a = a - b + b$.

2) Que peut-on dire des diviseurs communs à a et b et des diviseurs communs à b et $a - b$?

3) Que peut-on en déduire pour PGCD $(a ; b)$ et PGCD $(b ; a - b)$?

B : Algorithme des soustractions successives

On veut calculer le PGCD de 145 et 87.

Recopier et compléter en utilisant la propriété démontrée dans la partie **A 3)**.

145 – 87 = 58,	d'où PGCD (145 ; 87) = PGCD (87 ; 58)
87 – 58 = ...,	d'où PGCD (87 ; 58) = PGCD (58 ; ...)
58 – ... = ...,	d'où PGCD (58 ; ....) = PGCD (... ; ...).
Or, PGCD (... ; ...) = ...	Donc, PGCD (145 ; 87) = ...

5 Je calcule le PGCD par l'algorithme d'Euclide

A : Propriétés

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec $a > b$.

r désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

J'ai écrit $r = a - bq$.

1) **a** Démontrer la propriété :

« *Si un nombre d divise a et b, alors d divise b et r* ».

b Démontrer la propriété :

« *Si un nombre d divise b et r, alors d divise a et b.* »

2) Que peut-on dire des diviseurs communs à a et b et des diviseurs communs à b et r ?

3) Que peut-on en déduire pour PGCD $(a ; b)$ et PGCD $(b ; r)$?

B : Algorithme des divisions euclidiennes successives

On veut calculer le PGCD de 2 295 et 612.

Recopier et compléter en utilisant la propriété démontrée dans la partie **A 3)** :

2 295 = 612 × 3 + 459,	d'où PGCD (2 295 ; 612) = PGCD (612 ; 459)
612 = 459 × ... + ...,	d'où PGCD (612 ; 459) = PGCD (459 ; ...)
459 = ... × ... + 0.	
D'où ... est un diviseur de 459. Ainsi, PGCD (459 ; ...) = ...	
Donc, PGCD (2 295 ; 612) = ...	

Ed. BREAL 3ème

activités

Activité de découverte

La pelouse d'un terrain de rugby

On veut refaire la pelouse d'un terrain de rugby avec des plaques carrées, toutes de la même taille. L'enceinte de jeu d'un terrain de rugby ne doit pas dépasser 100 mètres de long sur 70 mètres de large. On veut trouver la longueur des côtés des plaques, sachant qu'elle doit être égale à un nombre entier de mètres.

1. **Donner tous les diviseurs de 100, puis tous les diviseurs de 70.**

2. **En utilisant les diviseurs communs à 100 et 70, trouver les différentes longueurs des carrés de pelouse qui peuvent être utilisés pour recouvrir l'enceinte de jeu.**

3. **Quelle est la plus grande longueur des plaques carrées de pelouse ? Combien en utilisera-t-on ?**

1 Calculs en écriture fractionnaire

Exercices 15 à 27, p. 17-18

A. Additionner et soustraire

▶ Effectuer les calculs suivants : $A = \frac{2}{7}+\frac{5}{7}$; $B = \frac{4}{5}+\frac{9}{15}$; $C = -\frac{8}{3}-\frac{7}{5}$; $D = \frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{7}{12}$.

▶ Recopier et compléter :
« Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire, on les écrit d'abord avec le même .... et on ajoute (ou soustrait) les ...., en gardant le .... commun. »

B. Multiplier

▶ Effectuer les calculs suivants : $E = \frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$; $F = \frac{2}{3}\times\frac{-7}{5}$; $G = -\frac{8}{7}\times\frac{5}{-16}$; $H = -3\times\frac{7}{36}$.

▶ Recopier et compléter :
« Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on .... les .... entre eux et les .... entre eux. »

C. Diviser

▶ Effectuer les calculs suivants : $I = \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$; $J = \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{16}{21}}$; $K = \dfrac{\frac{2}{-5}}{4}$; $L = \frac{2}{-5} : 4$.

▶ Recopier et compléter :
« Diviser par un nombre en écriture fractionnaire non nul revient à .... par son .... »

activités

2 Diviseurs communs et PGCD

Exercices 28 à

A. Le plus grand diviseur commun à 48 et 60

- Énoncer les critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9.
- Écrire dans l'ordre croissant tous les diviseurs de 48, puis ceux de 60.
- Donner tous les diviseurs communs à ces deux nombres. Quel est le plus gra
On l'appelle le plus grand diviseur commun et on le note PGCD (48 ; 60).

B. À vous de jouer !

- Calculer le PGCD de 76 et 24.
- Calculer le PGCD de 27 et 81.

3 Calcul du PGCD

Exercices 35 à 4

A. Diviseurs de la différence et de la somme

- Écrire tous les diviseurs de 75, puis tous les diviseurs de 45.
- Vérifier que les diviseurs communs à 75 et 45 sont des diviseurs de la différen
et de la somme 75 + 45.
- Démontrer que si 5 est un diviseur commun à deux nombres entiers a et b avec $a < b$, alors 5 est un diviseur de $a - b$ et de $a + b$.

Je me souviens que si c est un diviseur de a, alors il existe un entier q tel que $a = c \times q$.

- On sait que :
  - si c est un diviseur de a, alors il existe un entier q tel que $a = c \times q$;
  - si c est un diviseur de b, alors il existe un entier q' tel que $b = c \times q'$.

  Recopier et compléter les égalités suivantes :
  $a - b = c \times (\ldots\ldots\ldots)$; $a + b = c \times (\ldots\ldots\ldots)$.
- En déduire que c est un diviseur de $a - b$ et de $a + b$.
On a démontré la propriété suivante : un diviseur de deux nombres enti
aussi leur différence et leur somme.
On pourrait aussi démontrer que : si a et b sont deux nombres entiers pos
$a > b$, alors PGCD(a ; b) = PGCD($a - b$; b).

B. L'algorithme des soustractions successives

- Utiliser cette propriété pour déterminer le plus grand diviseur commun de 2
Arrêter dès que l'on trouve deux nombres égaux. Ce nombre est le PGCD cherc
PGCD (252 ; 144) = PGCD (144 ; …) car 252 − 144 = …
PGCD (… ; …) = PGCD (… ; …) car … − … = …
PGCD (… ; …) = PGCD (… ; …) car … − … = …
PGCD (… ; …) = PGCD (… ; …) car … − … = … .
Conclusion : PGCD (252 ; 144) = … .

Attention ! Il faut soustraire le plus petit nombre au plus grand.

- À vous de jouer ! Calculer avec cette méthode le PGCD de 493 et 377.

Sésamath Collection Mathenpoche

Activités de découverte

Activité 3 : Diviseurs communs, PGCD

1. On veut paver une surface rectangulaire avec des carrés identiques et sans coupe. La longueur du côté des carrés est un nombre entier de centimètres.

a. La surface rectangulaire mesure 12 cm par 18 cm.
Quelle peut être la longueur du côté des carrés ? Y a-t-il plusieurs possibilités ? Que représente(nt) ce(s) nombre(s) pour 12 et 18 ?
Mêmes questions lorsque la surface rectangulaire mesure 49 cm par 63 cm, puis 27 cm par 32 cm et enfin 21 cm par 84 cm.

b. Cherche les dimensions maximales d'un carré pouvant paver une surface rectangulaire de 108 cm par 196 cm.

2. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons.
Comment peux-tu les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes ?
Donne ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Explique ta démarche.

3. PGCD

a. Dresse la liste des diviseurs de 117 et celle des diviseurs de 273.
Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

On appelle ce nombre le PGCD de 117 et 273 et on le note : PGCD (117 ; 273) ou PGCD (273 ; 117).

b. Quel est le PGCD de 14 et 42 ? Que remarques-tu ? Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

Activité 4 : Vers la méthode des soustractions successives

1. Somme et différence de multiples

a. Sans faire de division, explique pourquoi 49 014 est un multiple de 7 et pourquoi 13 est un diviseur de 12 987.

b. Démontre la propriété suivante :

« Si d est un diviseur commun à deux entiers naturels a et b avec $a > b$ alors d est également un diviseur de $a + b$ et de $a - b$. ».

2. Vers la méthode des soustractions successives

a. Détermine le PGCD de 75 et 55 puis celui de 55 et 75 − 55.
Recommence avec celui de 91 et 130 et celui de 91 et 130 − 91.
Que peux-tu conjecturer ? Si cette conjecture est vraie, quel est son intérêt ?

b. La preuve
Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$. Soit d le PGCD de a et b et d' le PGCD de b et $a - b$.

- En utilisant la propriété vue au **1.**, explique pourquoi $d \leqslant d'$.
- Montre que d' est à la fois un diviseur de b, de $a - b$ et de a. Compare d et d'.
- Conclus.

c. Trouve le PGCD de 2 724 et 714 en utilisant plusieurs fois la propriété précédente.

Annexe3
Algorithme classique d'Euclide