Actes du 14e colloque de la CORFEM

ANTONY – VAL DE BIEVRE 21-22 JUIN 2007

UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE, IUFM DE VERSAILLES

Coordonnés par

Brigitte Grugeon-Allys

SOMMAIRE

Thème 1 : La statistique dans l’enseignement et la formation PLC2

Une vision prospective de l'enseignement de la statistique

Claudine Schwartz

Université Joseph Fourier, Grenoble, Laboratoire de Modélisation et Calcul, IREM

Résumé : Après avoir rappelé les enjeux de l'enseignement de la statistique, nous en proposerons une vision prospective, en termes de grands objectifs. Nous illustrerons, à travers des exemples, quelques aspects du monde de l'aléatoire qui peuvent fonder un enseignement, du primaire au lycée, dans diverses disciplines.

Nous évoquerons aussi les problèmes que cela pose, notamment pour la formation initiale et continue, et les dynamiques qu'on peut envisager de créer pour apporter des solutions.

Ce texte est le résumé d'une conférence dont le but était de soumettre à la réflexion de la communauté des professeurs des thèmes pour l'enseignement de la statistique.

A propos de la statistique et de son enseignement

Les thèmes d'enseignement qui seront proposés sont calés sur une vision de la statistique dont on dégage ci-dessous quelques éléments.

Le mot statistique est pris dans un sens large : statistique descriptive, modélisation, théorie des probabilités. La statistique préside au recueil de données (les « data »), à leur codage, leur représentation synthétique graphique ou numérique, leur mise en rapport et leur mise sous forme d'objets construits (indices) ; elle établit aussi des liens entre les données et la théorie des probabilités. Nous excluons cependant ce qui concerne les notions de probabilités subjectives utilisées autrefois pour décrire des degrés de croyance.

En ce sens élargi, la statistique est un mode (et un monde) de pensée, avec son langage, ses concepts, ses choix consensuels et discutables, ses processus de validation.

Le déploiement des outils de la description et de l'inférence statistique accompagne celui de l'informatique, tant au niveau du stockage des données que de leur traitement à l'aide de logiciels adaptés. Il convient de comprendre ces outils et techniques (tests, fourchette de sondage par exemple), tout en étant vigilant à ne pas limiter la statistique à leur utilisation.

La statistique est au carrefour d'un champ de la pensée empirico-inductive (description et interprétation des données) et d'un champ de pensée hypothético-déductif (celui de la théorie, celui des mathématiques achevées) : ce seul fait en rend l'enseignement déroutant tant pour les professeurs de mathématiques que pour les professeurs des sciences expérimentales (sciences de la vie et de la terre, physique chimie). Mais déroutant n'est pas impossible, et crée même un enjeu pédagogique particulièrement intéressant.

La statistique est aussi en tension entre la création de savoirs (notamment au niveau macro-social) et l'exercice de pouvoirs fondés sur l'usage d'outils qui encadrent l'action (choix de médicaments, d'une politique sociale) : là aussi cette tension est déroutante tant pour des professeurs de mathématiques qui vivent du coté du savoir et de la résolution *certaine* de problèmes que de celle des professeurs de sciences économiques et sociales qui travaillent sur des données complexes, avec des stratégies d'action basées sur des modèles mathématiques qui ne le sont pas moins.

La statistique propose des preuves, dont la nature spécifique peut- être éclairée par la locution anglaise « piece of evidence » ; la preuve statistique n'est qu'un éléments de preuve qui confirme ou infirme une hypothèse théorique, qui valide ou rejette un modèle. Ces éléments de preuve sont d'autant *plus puissants* qu'ils reposent sur l'analyse de données nombreuses ou particulièrement parlantes en regard des hypothèses en jeu. Comme la preuve statistique ne produit pas à elle seule un résultat « ferme et définitif », elle est élaborée sous une forme qui permet la décision (avec un niveau de confiance ou une quantification du risque). Les registres de la preuve en statistique (preuve *basée sur des faits* expérimentaux) et en mathématique (démonstration sans appel dans un monde théorique axiomatisé) opèrent dans des mondes distincts, et peuvent s'éclairer mutuellement.

Il convient à ce niveau de dire clairement que la statistique…..peut s'apprendre ! Et oui, c'est un scoop : on a plutôt tendance à la présenter comme un chemin parsemé d'embûches et de pièges où les meilleurs esprits s'égarent ; il en est ainsi précisément parce-qu'il n'y a pas eu apprentissage - et non parce qu'on serait face à une forme d'intelligence « naturelle » (!!) dont seuls quelques originaux auraient été dotés à la naissance. La confiance dans les nombres s'acquiert, la philosophie de la réalité que construit la statistique se discute et se confronte aux faits dont elle est issue. A l'inverse, la suspicion vis-à-vis de l'information chiffrée est enfant de l'ignorance et voir la statistique comme l'art du mensonge n'est souvent qu'une simple posture de confort pour qui ne cherche pas à savoir.

La statistique, en créant des outils performants de description du monde ouvre à de larges débats : l'enseignement se doit de permettre au plus grand nombre de pouvoir y participer.

Des objectifs d'enseignement

Pour l'école primaire

La pensée en milieu aléatoire gagne à être abordée tôt, les enfants y étant dès leur plus jeune âge confrontés. Mieux vaut faire en sorte d'encadrer l'élaboration de leurs premières intuitions et de les organiser, pour accueillir ultérieurement une construction régulière et continue de connaissances.

Les thèmes suivants peuvent être abordés à l'école primaire à travers diverses activités :

- Chances égales (inégales)
- Hasard équitable (pas équitable)
- Le dé n'a pas de mémoire (indépendance des expériences)
- La chance aux dés n'existe que pendant un temps court
- Histogrammes (« horizontaux » ?)
- « Hasard » :l'intervention du hasard ne rend pas la réflexion inutile

Il convient à ce niveau de laisser les élèves s'exprimer ; ainsi dans une classe de CM1, ils ont énoncé que les chances égales, c'était quand on faisait pas à pas le dessin (l'histogramme ci contre en est une étape) des lancers, il y avait toujours une face gagnante, mais cela pouvait être n'importe laquelle des six faces.

L'école primaire est un juste lieu pour expérimenter avec des dés pour deux raisons au moins :

- L'indépendance des résultats des lancers d'un dé y est vue sous l'angle « absence de mémoire» ; les enfants comprennent alors très vite que si on a obtenu deux fois de suite la face 3, les chances sont inchangées pour le lancer suivant. C'est d'autant plus simple à comprendre pour eux qu'ils n'ont pas d'image mentale associée à la loi des grand nombres, image qui fait paradoxe avec cette absence de mémoire (comment peut-il y avoir absence de mémoire et régulation des fréquences à long terme ?).

- de nouvelle calculatrices de poche ont une touche dé qui remplacera les dés pour les collégiens (ou alors les jeux de hasard seront directement vendus avec des dés électroniques). Avec un dé électronique, parler d'absence de mémoire au collège relève de l'argument d'autorité et non plus d'une expérience personnelle…

Pour plus de détails, on pourra consulter :
http://www.statistix.fr/spip/spip.php?rubrique15

Pour le collège

- l'enseignement de la statistique doit être partagé entre de nombreuses disciplines
- Le travail sur le discours oral et le discours écrit est important et participe de l'apprentissage de la langue française.
- Recueil simple de données par les élèves et mutualisation des résultats. On évitera le recueil de données personnelles (les notes en font partie). On pourra aussi travailler sur des extraits de gros fichiers trouvés sur Internet, chaque binôme ayant un sous-fichier différent : on observe ainsi la fluctuation des moyennes.
- Travail interclasse (classes de niveaux différents ou de sections différentes qui se communiquent leurs résultats)

- emploi du mot probabilité (3 chance sur 4, ou 6 chances sur 8, c'est pareil, c'est la probabilité 3/4) ;

-simulation avec des dés électroniques ; somme de deux dés

-simulation de promenades aléatoires

-représentations graphiques simples, lecture de tableaux à double entrée

-moyenne, étendue, médiane, quartile, déciles

Pour le lycée

Certains éléments du programme de seconde actuels seront traités au collège et on pourra alors aborder la notion de loi de probabilité dès la seconde. Dans le cadre d'un enseignement partagé entre les disciplines, on pourra introduire la loi de Gauss, la notion de processus, définir l'espérance de vie, la notion de norme statistique et de hors norme.

On trouvera des exemples de thèmes interdisciplinaires sur le site Statistix (http://www.statistix.fr).

En guise de conclusion :

La statistique actuelle est issue de la synthèse de différents courants, notamment celui de la statistique administrative et celui des probabilités. Il reste cependant encore un écart culturel entre les statisticiens universitaires ou ingénieurs et ceux de la statistique publique (INSEE[1] et INED[2] notamment). Un enseignement harmonieusement partagé entre les différentes disciplines statistiques, une formation des maîtres qui inclue théorie, modélisation et une bonne connaissance des sites de la statistique publique permettront à terme de réduire cet écart. L'INSEE et l'INED ont fait ces dernières années, à travers leur site, des efforts particuliers de pédagogie vis-à-vis du milieu enseignant. Comme ce sont des sites riches, l'habitude d'y circuler demande du temps ; c'est en formation initiale que cette habitude pourrait s'acquérir, si on veut que les enseignants en poste trouvent ensuite le temps de les exploiter avec leurs élèves.

[1] Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques
[2] Institut National des Etudes Démographiques

Enseigner la statistique : un problème de la profession

Yves Chevallard & Floriane Wozniak

IUFM de l'académie d'Aix-Marseille, Université de Provence, et UMR ADEF

IUFM de l'académie de Lyon et LEPS, université Lyon 1

Résumé :

Notre conférence se donnera pour objet de nourrir la réflexion sur les enjeux d'une formation des professeurs de mathématiques à l'enseignement de la statistique regardé comme un *problème de la profession*.

Dans un premier temps, nous présenterons certaines des contraintes auxquelles les professeurs sont soumis dans leur projet d'enseigner la statistique en classe de seconde. Après avoir défini un *modèle épistémologique de référence*, nous expliciterons alors un ensemble de conditions sous lesquelles un tel enseignement pourrait vivre en classe de mathématiques. Enfin, en prenant appui, notamment, sur le dispositif du *Forum des questions* mis en place à l'IUFM d'Aix-Marseille par Yves Chevallard, nous mettrons au jour certains besoins de formation, en présentant les lignes de force de ce que pourrait être une formation à l'enseignement de la statistique au collège et au lycée.

Écologie et économie didactiques

Dans des conditions et sous des contraintes données, tout fait didactique n'est pas possible. Il est des cas en effet où l'*écologie* didactique s'oppose à l'*économie* didactique souhaitée ; où le *projet d'enseignement* que l'on a formé ne trouve pas à se réaliser. S'il l'on veut alors que quelque chose advienne, on peut tenter

– soit de modifier le projet pour le rendre compatible avec l'écologie didactique régnante ;
– soit de modifier cette écologie ;
– soit de modifier l'un et l'autre de façon « bien combinée ».

Le premier cas est le plus fréquent : le projet s'adapte, de fait, aux conditions imposées, et en un sens les renforce. S'agissant de la *statistique*, ce processus d'adaptation conduit à sa *réduction arithmétique*, c'est-à-dire à la réduction du travail *statistique* à du travail *arithmétique*. En guise d'illustration de ce phénomène de réduction, voici un choix d'exercices proposés, pour la classe de 2de, par le serveur Wims ("WWW Interactive Multipurpose Server") [3].

[3] Voir http://wims.auto.u-psud.fr/wims/faq/fr/math.2.html.

Moyenne statistique

Exercice. Soit la série statistique suivante :

Valeurs	6.5	7	8	2.5	10.5	2	1	0.5	9.5	4.5	3	4	6	0	10.5	9.5	8.5	2	0

Calculer pour cette série statistique
- la moyenne :
- la valeur maximale :
- la valeur minimale :
- l'étendue statistique :

Effectif et fréquence

Exercice. Voici les âges recensés dans une population à la suite d'une étude :

39	40	42	39	42	41	43	39	40	39
42	43	40	43	43	40	41	41	40	43
42	41	43							

Compléter le tableau suivant

Ages	39	40	41	42	43
Effectif					
Fréquence					

Séries statistiques : taille

Exercice. Les tailles arrondies à un nombre entier de centimètres des 50 garçons d'un club de football sont les suivantes :

184	170	173	184	165	172	186	164	163	165
173	187	176	169	169	167	164	162	181	180
168	189	168	186	173	184	171	170	184	165
165	178	161	162	170	182	180	164	185	188
173	179	164	185	173	164	182	168	187	178

Compléter le tableau correspondant :

Tailles	[160, 165[	[165, 170[	[170, 175[	[175, 180[	[180, 185[	[185, 190]
Effectif						
Fréquence (%)						

On donnera les fréquences en arrondissant par excès à 0.1 près.

Modifier l'écologie didactique – c'est-à-dire le système des conditions et contraintes pesant sur le didactique – est une entreprise ambitieuse, mais souvent essentielle, comme ici. Car si la réduction arithmétique de la statistique est écologiquement possible, elle n'est guère *durable*, en ce sens que, se situant à un bas niveau mathématique, elle est peu significative d'une discipline spécifique supposée, « la statistique ». Si l'élève doit trouver la moyenne annuelle de Fanny, qui a eu 6,9 de moyenne au premier trimestre, 9,8 de moyenne au deuxième trimestre et 9,3 de moyenne au troisième trimestre, il peut effectuer mentalement le calcul suivant : $6{,}9 + 9{,}8 + 9{,}3 = (6 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}3) + 9 + 9 = (6 + 1{,}7 + 0{,}3) + 9 + 9 = 8 + 9 + 9$. Or ce calcul, loin d'être emblématique d'une science « à forte personnalité », relève en vérité de l'arithmétique scolaire la plus banale qui soit ! N'ayant pas de spécificité, n'étant pas significatif de quelque chose de spécifique, le « travail mathématique » correspondant tendra à se réduire à la portion congrue, voire à être escamoté : le fait de donner ce travail « en DM » ou de renvoyer les élèves au manuel pour qu'ils s'aident eux-mêmes à ce propos sont les effets les plus communs de cette dépréciation scolaire.

Pour dépasser cette dégradation mathématique, une autre direction peut alors être spontanément tentée : *complexifier* le travail *arithmétique*, l'ennoblir en introduisant de façon plus ou moins clandestine des thèmes d'étude plus « sophistiqués ». C'est ce phénomène que l'on constate lorsqu'on observe le succès (illicite), en classe de seconde, du thème des *effets de structure* : nombre de professeurs ont en effet trouvé dans l'étude de ce phénomène une manière d'épicer un enseignement jugé sans doute bien fade. Voici d'abord comment la notion d'effet de structure se trouve présentée sur le site Internet de l'INSEE [4].

Effet de structure

Définition

Lorsqu'une population est répartie en sous-populations, il peut arriver qu'une grandeur évolue dans un sens sur chaque sous-population et dans le sens contraire sur l'ensemble de la population. Ce paradoxe s'explique parce que les effectifs de certaines sous-populations augmentent alors que d'autres régressent : c'est l'effet de structure.
Par exemple, le salaire de chaque profession peut stagner (ou augmenter faiblement) alors que le salaire moyen augmente fortement ; cela arrive si les professions très qualifiées, les mieux payées, sont de plus en plus nombreuses et, réciproquement, les emplois non qualifiés, les moins payés, de plus en plus rares.
A contrario, la variation à structure constante se calcule comme une moyenne pondérée des variations des moyennes de chaque sous-population, les pondérations étant les masses de la grandeur pour chaque sous-population.

On notera que le dernier paragraphe décrit un type de situations – celui de la moyenne pondérée – qui est normalement au cœur du travail sur les moyennes au collège et en 2de, dans le cas d'une *même* structure des populations que l'on compare ou d'une population dont la structure demeure *inchangée* dans le temps. Voici à présent un témoignage de ces pratiques tel qu'il apparaît sur le site « L'île aux mathématiques » [5].

posté le 05/02/2006 à 14:08

[4] Voir http://www.insee.fr/fr/nom_def_met/definitions/html/effet-structure.htm.
[5] Voir http://www.ilemaths.net/forum-sujet-68197.html.

effets de structure
posté par : **adilelgh**

Salut, j'ai besoin d'une assitance pour cet exercice
Dans les deux entreprise E1 et E2, les salariés sont classés en deux catégories: employés et cadres. Les deux tableaux qui suivent donnent la répartition des employés en fonction de leur catégorie professionnelle et de leur salaire annuel S en milliers d'euros. Dans les calculs qui suivent, les sommes seront exprimés en euros et arrondis à l'euro inférieur, et on considérera que tous les élements d'une classe sotn situés en son centre.
Le tableau est à la fin...
……
…

Entreprise E_1			
	Salaires		
Catégories	$10 \leq S < 20$	$20 \leq S < 30$	$30 \leq S < 40$
Employés	170	100	0
Cadres	0	10	20

Entreprise E_2			
	Salaires		
Catégories	$10 \leq S < 20$	$20 \leq S < 30$	$30 \leq S < 40$
Employés	280	140	0
Cadres	0	40	40

Quelle « manœuvre » tenter pour contrer cette banalisation dépréciative engendrée par la réduction arithmétique du travail statistique ? La réponse la plus authentique et la plus efficace nous paraît consister à faire vivre dans la classe de mathématiques des *questions « de haut niveau »*, où se montre véritablement quelque chose de la spécificité de la discipline à enseigner : la statistique.

Pour donner une idée de ce qui *pourrait être* à cet égard, voici un scénario de *fiction didactique* inspiré de l'article de Christine A. Franklin et Madhuri S. Mulekar intitulé "Is Central Park Warming?" et paru dans le numéro de mai 2006 de la revue *The Mathematics Teacher* (vol. 99, n° 9, p. 600-605).

1. La question

Une classe décide, sous la direction de son professeur de mathématiques, d'étudier la question suivante : « est-il vrai que la température a augmenté au cours du siècle écoulé ? »

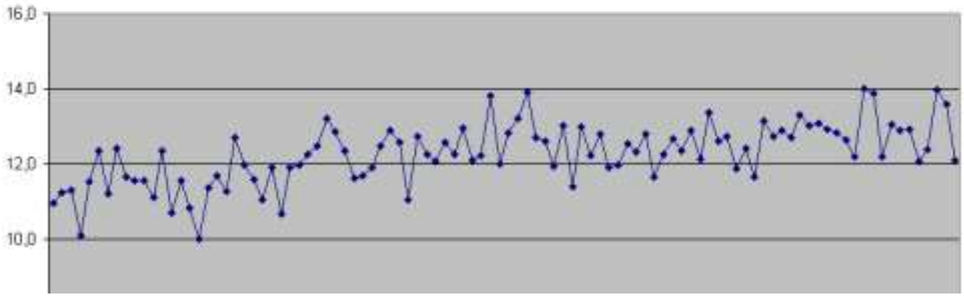
2. Les données

La classe recherche des données chiffrées relatives à la période 1901-2000. Elle les trouve : il s'agit des moyennes annuelles dans un lieu proche de l'établissement. (Dans chaque groupe de deux lignes successives, la première indique l'année, la seconde la température en degrés Celsius.)

1901	**1902**	**1903**	**1904**	**1905**	**1906**	**1907**	**1908**	**1909**	**1910**
11,0	11,3	11,3	10,1	11,5	12,4	11,2	12,4	11,7	11,6
1911	**1912**	**1913**	**1914**	**1915**	**1916**	**1917**	**1918**	**1919**	**1920**
11,6	11,1	12,4	10,7	11,6	10,9	10,0	11,4	11,7	11,3
1921	**1922**	**1923**	**1924**	**1925**	**1926**	**1927**	**1928**	**1929**	**1930**
12,7	12,0	11,6	11,1	11,9	10,7	11,9	12,0	12,3	12,5
1931	**1932**	**1933**	**1934**	**1935**	**1936**	**1937**	**1938**	**1939**	**1940**
13,2	12,9	12,4	11,6	11,7	11,9	12,5	12,9	12,6	11,0
1941	**1942**	**1943**	**1944**	**1945**	**1946**	**1947**	**1948**	**1949**	**1950**
12,7	12,3	12,1	12,6	12,3	13,0	12,1	12,2	13,8	12,0
1951	**1952**	**1953**	**1954**	**1955**	**1956**	**1957**	**1958**	**1959**	**1960**
12,8	13,2	13,9	12,7	12,6	11,9	13,0	11,4	13,0	12,2
1961	**1962**	**1963**	**1964**	**1965**	**1966**	**1967**	**1968**	**1969**	**1970**
12,8	11,9	12,0	12,5	12,3	12,8	11,7	12,3	12,7	12,4
1971	**1972**	**1973**	**1974**	**1975**	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**
12,9	12,1	13,4	12,6	12,7	11,9	12,4	11,7	13,2	12,8
1981	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**
12,9	12,7	13,3	13,0	13,1	12,9	12,8	12,7	12,2	14,0
1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**
13,9	12,2	13,1	12,9	12,9	12,1	12,4	14,0	13,6	12,1

3. Étude des données

La classe représente graphiquement les données ci-dessus. À examiner le graphique obtenu, il semble bien, en effet, qu'il y ait une tendance à l'augmentation de la température annuelle moyenne (v. ci-après).



4. Situation par rapport à la médiane

La médiane des 100 températures est trouvée égale à 12,35 ºC. On observe que, dans les 50 premières années du siècle, les températures annuelles sont 15 fois supérieures à la médiane, alors qu'elles le sont 35 fois dans les 50 années suivantes. Cela confirme l'observation « qualitative » du graphique.

5. Un test

Sur les 30 dernières années du siècle (de 1971 à 2000), les températures annuelles moyennes ont été 23 fois supérieures à la moyenne. La classe imagine le test suivant : supposons que la température annuelle moyenne soit tirée à pile ou face : dans le premier cas (pile) elle est supérieure à la médiane, dans le second cas (face), inférieure. L'événement observé, à savoir 23 fois la sortie de pile en 30 lancers, est-il assez fréquent ou est-il rare ? La classe s'attend à ce qu'une telle observation soit rare, voire rarissime.

6. Une simulation

Faute de disposer des notions utiles de la théorie des probabilités, la classe procède par simulation. Elle réalise ainsi 1200 simulations de 30 tirages à pile ou face, avec les résultats suivants (dont seuls les 500 premiers ont été reproduits ci-après).

12 ; 18 ; 18 ; 10 ; 13 ; 12 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 16 ; 20 ; 17 ; 15 ; 16 ; 15 ; 16 ; 15 ; 16 ; 18 ; 16 ; 16 ; 18 ; 16 ; 15 ; 16 ; 12 ; 13 ; 15 ; 13 ; 15 ; 11 ; 14 ; 13 ; 15 ; 15 ; 16 ; 13 ; 13 ; 22 ; 19 ; 13 ; 18 ; 16 ; 14 ; 10 ; 13 ; 18 ; 13 ; 18 ; 15 ; 15 ; 17 ; 12 ; 13 ; 18 ; 17 ; 12 ; 19 ; 11 ; 13 ; 19 ; 13 ; 15 ; 12 ; 13 ; 15 ; 13 ; 17 ; 11 ; 14 ; 20 ; 20 ; 12 ; 15 ; 10 ; 16 ; 15 ; 21 ; 11 ; 17 ; 20 ; 14 ; 14 ; 18 ; 20 ; 17 ; 16 ; 17 ; 17 ; 13 ; 15 ; 14 ; 18 ; 13 ; 15 ; 19 ; 17 ; 16 ; 17 ; 21 ; 17 ; 13 ; 14 ; 12 ; 18 ; 11 ; 14 ; 16 ; 14 ; 20 ; 11 ; 12 ; 16 ; 13 ; 18 ; 7 ; 17 ; 9 ; 16 ; 14 ; 11 ; 10 ; 16 ; 18 ; 14 ; 15 ; 17 ; 12 ; 12 ; 8 ; 16 ; 17 ; 19 ; 14 ; 15 ; 13 ; 11 ; 15 ; 16 ; 17 ; 16 ; 16 ; 14 ; 18 ; 12 ; 14 ; 20 ; 14 ; 20 ; 11 ; 14 ; 14 ; 17 ; 16 ; 13 ; 12 ; 14 ; 13 ; 16 ; 15 ; 16 ; 16 ; 13 ; 16 ; 10 ; 17 ; 14 ; 14 ; 14 ; 12 ; 13 ; 11 ; 13 ; 14 ; 16 ; 16 ; 18 ; 16 ; 12 ; 16 ; 16 ; 17 ; 16 ; 15 ; 11 ; 16 ; 16 ; 16 ; 15 ; 17 ; 14 ; 19 ; 16 ; 17 ; 17 ; 14 ; 15 ; 18 ; 20 ; 16 ; 18 ; 15 ; 12 ; 14 ; 20 ; 18 ; 11 ; 14 ; 15 ; 17 ; 12 ; 18 ; 16 ; 19 ; 18 ; 16 ; 17 ; 15 ; 13 ; 13 ; 18 ; 15 ; 15 ; 18 ; 19 ; 16 ; 17 ; 15 ; 14 ; 17 ; 9 ; 18 ; 20 ; 14 ; 14 ; 12 ; 16 ; 15 ; 18 ; 13 ; 17 ; 13 ; 21 ; 14 ; 11 ; 19 ; 15 ; 15 ; 12 ; 14 ; 16 ; 19 ; 12 ; 14 ; 13 ; 15 ; 18 ; 12 ; 15 ; 11 ; 14 ; 18 ; 13 ; 19 ; 13 ; 13 ; 16 ; 18 ; 17 ; 16 ; 14 ; 14 ; 16 ; 12 ; 12 ; 17 ; 15 ; 15 ; 11 ; 15 ; 15 ; 14 ; 11 ; 16 ; 16 ; 16 ; 14 ; 11 ; 18 ; 14 ; 14 ; 16 ; 16 ; 19 ; 19 ; 15 ; 14 ; 14 ; 14 ; 11 ; 12 ; 20 ; 13 ; 18 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 16 ; 17 ; 16 ; 14 ; 19 ; 15 ; 10 ; 12 ; 12 ; 15 ; 12 ; 17 ; 20 ; 15 ; 16 ; 13 ; 15 ; 14 ; 18 ; 16 ; 15 ; 20 ; 10 ; 19 ; 18 ; 14 ; 11 ; 17 ; 13 ; 15 ; 18 ; 11 ; 14 ; 14 ; 18 ; 16 ; 14 ; 13 ; 17 ; 12 ; 11 ; 18 ; 14 ; 13 ; 17 ; 12 ; 12 ; 16 ; 12 ; 11 ; 15 ; 14 ; 14 ; 10 ; 23 ; 15 ; 13 ; 14 ; 18 ; 21 ; 15 ; 16 ; 14 ; 11 ; 13 ; 19 ; 15 ; 14 ; 19 ; 15 ; 13 ; 15 ; 17 ; 17 ; 15 ; 16 ; 14 ; 18 ; 13 ; 17 ; 9 ; 14 ; 13 ; 12 ; 13 ; 16 ; 11 ; 14 ; 17 ; 18 ; 17 ; 10 ; 13 ; 18 ; 13 ; 13 ; 15 ; 12 ; 14 ; 14 ; 15 ; 16 ; 14 ; 16 ; 14 ; 19 ; 10 ; 15 ; 19 ; 16 ; 17 ; 13 ; 17 ; 17 ; 17 ; 13 ; 17 ; 15 ; 20 ; 19 ; 16 ; 13 ; 17 ; 15 ; 18 ; 20 ; 16 ; 16 ; 15 ; 15 ; 17 ; 11 ; 11 ; 15 ; 16 ; 13 ; 14 ; 16 ; 18 ; 15 ; 13 ; 14 ; 17 ; 18 ; 19 ; 19 ; 15 ; 15 ; 12 ; 18 ; 16 ; 14 ; 13 ; 14 ; 17 ; 13 ; 9 ; 10 ; 15 ; 24 ; 14 ; 13 ; 13 ; 14 ; 10 ; 12 ; 21 ; 13 ; 16 ; 8 ; 20 ; 13 ; 16 ; 10 ; 16 ; 15 ; 12 ; 13 ; 15 ; 14 ; 17 ; 16 ; 12 ; 15 ; 15 ; 11 ; 17 ; 13 ; 15 ; 14 ; 8 ; …

Dans les 1200 échantillons de taille 30 obtenus, 3 seulement comportent 23 sorties « pile », tandis qu'un seul comporte 24 sorties « pile » : la proportion d'échantillons comportant 23 sorties « pile » ou plus est donc de 4/1200, soit un peu plus de 0,003. (Le professeur indiquera que, selon la théorie des probabilités, la « fréquence théorique » est de 0,0026 environ.)

7. La conclusion

L'idée que le hasard pourrait expliquer à lui seul le réchauffement observé perd ainsi beaucoup de son crédit.

Enseigner avec la société

À l'instar de ce que suggère le scénario didactique précédent, un projet d'enseignement de la statistique doit faire apparaître nettement l'objet de cette science : l'étude de la *variabilité*. Y renoncer implique, à terme, sinon la disparition complète de l'enseignement correspondant, du moins sa dégradation et son régime indéfiniment végétatif, tant du moins que le corpus de savoir rassemblé sous l'étiquette de statistique n'aura pas conquis une identité claire, qui le distingue des autres parties du corpus mathématique enseigné tout en permettant de le situer par rapport à elles. Il s'agit là d'une « loi » curriculaire qui n'est pas propre aux mathématiques. Dans un ouvrage récent (*The Fight for English*, Oxford University Press, 2006), un spécialiste britannique réputé de la langue anglaise, David Crystal, consacre de longues pages à conter (et à analyser) la disparition de l'enseignement traditionnel de la grammaire anglaise, dont il constate le décès en 1965. Mais il note que, dès 1921, dans un rapport établi par une commission de travail du "Board of Education" (ministère de l'Éducation), on pouvait lire que, aux yeux des rédacteurs du rapport, il était devenu *"impossible at the present juncture to teach English grammar in the schools for the simple reason that no-one knows exactly what it is."* Semblablement, quelle définition pourrait-on donner, aujourd'hui, de la statistique à partir de la seule observation de son enseignement scolaire ? Gageons que les phénomènes transpositifs intenses, et dénaturants, que laissent voir tant les manuels que les classes ne permettraient guère de répondre à cette question cruciale de façon satisfaisante.

L'exigence d'identifier la statistique comme une discipline *sui generis*, irréductible à toute autre, ne doit pas être limitée à ce que nous nommons *la profession*, c'est-à-dire le collectif plus ou moins intégré constitué, en l'espèce, des professeurs de mathématiques, des formateurs de ces professeurs, des chercheurs sur l'enseignement des mathématiques et sur le métier de professeur de mathématiques ou sur la formation à ce métier, ainsi que des responsables officiels ou associatifs de l'enseignement, de la formation et de la recherche en question. Cette exigence doit en effet être partagée *avec les parents* ; ou, plus exactement, la reconnaissance de la spécificité de la discipline enseignée doit être partagée par la profession et *avec les élèves*, soit la génération qui se forme, *et avec les générations précédentes*.

Ce partage doit être pris en charge par la profession, en tant que *problème de la profession*. En d'autres termes, la profession doit chercher à faire évoluer sur ce point essentiel le système des conditions et contraintes à l'intérieur duquel les professeurs doivent opérer. La géométrie, l'arithmétique ou l'algèbre ont une image *spécifique* pour tous ceux qui ont eu une scolarité obligatoire complète : pour eux, la géométrie, qui est la science de la *« spatialité »*, ce sera au moins « des figures » ; l'arithmétique, science de la *« numérosité »*, ce sera des chiffres et des opérations ; l'algèbre, science de la *« calculabilité »*, ce sera des *x* et des *y*. Ces exemples suggèrent au reste que l'*identité* ne suffit pas : ces disciplines mathématiques gagnent à avoir aussi une réelle *attractivité*, qui suscite une véritable curiosité, certains parents (ou grands-parents) allant même jusqu'à *envier* leurs enfants (ou petits-enfants) d'avoir à étudier ce dont eux-mêmes, le cas échéant, auront été privés.

La science de la variabilité

L'un des grands obstacles à l'ambition d'un pacte sociétal et scolaire autour de l'enseignement de la statistique tient à ce fait que l'idée d'une *science de la variabilité* n'existe pas intensément dans la culture de la société française « éternelle » : fait massif, qui, aussi bien, touche les professeurs de mathématiques eux-mêmes. La *dénégation de la variabilité* est en effet la loi plutôt que l'exception. On tend ainsi à regarder toute grandeur comme *constante*, attitude dont le langage courant porte témoignage (on demandera facilement « combien ça pèse un lion », « combien il y a de pétales dans une rose », etc.). Or la première conquête collective à accomplir se trouve là : dans le fait *d'assumer la variation*. Cela consiste par exemple à ne pas dire que les conjoints violents (ou les violeurs) se recrutent dans tous les milieux sociaux en laissant croire (voire en croyant soi-même) qu'ils s'y recrutent *également*, pas davantage qu'on ne dirait « qu'on meurt (également) à tout âge ». Dès les débuts de la *Political Arithmetic* anglaise, dont John Graunt (1620-1674) et William Petty (1623-1687) sont les noms les plus connus, la science statistique s'inscrit en faux contre le « tout se vaut », qui conduit à croire, par exemple, qu'on peut mourir de ceci « aussi bien » que de cela. De quoi mourait-on ainsi dans la ville de Londres autour de 1650 ? Dans ses *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality* (1662), John Graunt présente les causes de mortalité à Londres pour diverses années. L'un des buts qu'il poursuit est de donner aux personnes des indications sur ce qui les conduira à quitter ce monde et, ce faisant, à se libérer de certaines inquiétudes répandues liées au « on peut mourir de tout » populaire. Il écrit à ce propos ceci :

In the next place, whereas many persons live in great fear, and apprehension of some of the more formidable, and notorious diseases following; I shall only set down how many died of each: that the respective numbers, being compared with the Total 229250, those persons may the better understand the hazard they are in.

Graunt dispose de données sur une période où la ville de Londres a vu mourir 229 250 personnes. Il présente alors à son lecteur la table des *notorious deseases* – des maux dont les gens craignaient le plus de mourir [6].

Apoplex: 1306 Bleeding: 069 Cut of the Stone: 0038 Burnt, and Scalded: 125 Falling Sickness [= Epilepsy]: 0074 Drowned: 829 Dead in the Streets: 0243 Excessive drinking: 002 Gowt: 0134 Frighted: 022 Head-Ach: 0051 Grief: 279 Jaundice: 0998 Hanged themselves: 222 Lethargy: 0067 Kil'd by several accidents: 1021 Leprosy: 0006	Lunatique: 0158 Murthered: 0086 Overlaid [Infants suffocated when their mother or nurse rolls over on them in bed], and Starved: 0529 Poysoned: 014 Palsy: 0423 Smothered: 026 Rupture: 0201 Shot: 007 Stone and Strangury [restricted urine flow. A difficulty of urine attended with pain]: 0863 Starved: 051 Sciatica: 0005 Vomiting: 136 Sodainly: 0454

On voit ainsi que, par exemple, la fréquence des décès du fait d'un *accident*, relativement élevée, est seulement de $\frac{1021}{229250} \approx 4{,}45$ ‰. À l'opposé des conclusions de Graunt, fondées sur des données chiffrées, l'assomption « théorique » *a priori*, souvent implicite, qu'il y aurait distribution à peu près *uniforme* (des causes de décès, etc.) apparaît souvent comme l'indice *d'un refus paradoxal de la variabilité*. Qui n'a entendu dire, par exemple, que les maris violents « se recrutent dans toutes les classes sociales » ? Le quotidien *Le Monde* écrivait ainsi, dans son édition datée du 9 août 2003 : « L'image […] de la femme battue dans un foyer pauvre par un mari alcoolique a vécu : la violence touche tous les milieux sociaux (8,9 % des femmes concernées sont des cadres, 3,3 % des ouvrières). L'article où figure ce passage se faisait ainsi l'écho d'un ouvrage alors récemment paru, et qui faisait grand bruit : *Les violences envers les femmes en France* (Maryse Jaspard *et al.*, La Documentation française, Paris, 2003). Une saine culture statistique aurait voulu que l'on fasse connaître au lecteur du quotidien, non pas seulement deux valeurs isolées, supposées emblématiques, mais *l'ensemble de la distribution des fréquences* à travers les « classes sociales », telle du moins que l'enquête de référence la faisait connaître. Or, lorsqu'on examine l'ouvrage cité, trois points soulèvent des

[6] Voir http://www.ac.wwu.edu/~stephan/Graunt/2.html.

interrogations sur l'information chiffrée apportée au lecteur du *Monde*. Tout d'abord, les chiffres indiqués (8,9 % et 3,3 %) semblent être, non des pourcentages de femmes cadres ou de femmes ouvrières dans l'ensemble des femmes victimes de violences conjugales mais des pourcentages de femmes victimes de violences conjugales parmi les femmes cadres, ou parmi les ouvrières, etc. Ensuite, on ne voit pas bien comment le premier chiffre (8,9 %) a été fabriqué : il semble qu'il provienne de l'addition erronée des pourcentages des « violences graves » (6,1 %) et des « violences très graves » (2,6 %) déclarées par les femmes cadres de l'échantillon. Enfin, on découvre que le pourcentage de 3,3 % pour les ouvrières (qui correspond aux « violences très graves ») doit être rapproché, non du chiffre de 8,7 % (ou 8,9 %), mais de 2,6 % : la conclusion mise en avant par l'article du *Monde* s'en trouve alors affaiblie.

Par contraste avec ces formes de refus de la variabilité, la vision statistique conduit à regarder les objets du monde naturel ou social, non comme le siège de grandeurs *fixes*, mais de grandeurs *variables*. À cet égard, la *connaissance du monde* s'égale, à un premier niveau, à la connaissance, pour chaque type d'« objets » et pour chaque grandeur qui lui est attachée, à la *distribution de fréquences* de cette grandeur. Dans un livre intitulé *Les conduites déviantes des lycéens* (Hachette Éducation, 2000), le sociologue Robert Ballion rend compte d'une enquête par questionnaire auprès de lycéens (9919 de ces questionnaires, recueillis entre avril et novembre 1997, ont été analysés). Les enquêtés étaient interrogés sur leur propre estimation de leur « valeur scolaire ». Si l'on interroge un individu pris au hasard, le fait qu'il estime avoir une bonne réussite scolaire ou non dépendra sans doute de beaucoup de facteurs. Mais voici ce qu'on trouve, à l'instar de John Graunt examinant les causes de mortalité à Londres, en réponse à la question que voici : qu'un lycéen déclare avoir des résultats « bons ou excellents », est-ce rare ? En fait, les élèves disant avoir des résultats bons ou excellents représentent 10,6 % de l'échantillon étudié ; ceux qui s'attribuent des résultats assez bons ou moyens sont en revanche 74,5 %, tandis que ceux qui jugent leurs résultats médiocres ou faibles sont 13,8 % (il y a 1,1 % de non-réponses). Il s'agit donc là d'un comportement relativement peu fréquent. Mais ce qui est remarquable encore, c'est la distribution des réponses des *parents* à la question de la réussite scolaire de leur enfant. Une enquête conduite par ailleurs, citée par le même auteur, montre que la part des parents jugeant leur enfant « excellent » n'est que de 7,3 % alors qu'ils sont 82,1 % à le juger « bon » ou « moyen ». Ceux qui, à l'opposé, estiment que leur enfant a « des difficultés » ou « de grosses difficultés » sont 8,2 % (il y a 2,4 % de non-réponses). Les auteurs de l'enquête concluent que les parents manifestent « une certaine réticence à placer leurs enfants aux extrémités de l'échelle scolaire, parmi les élèves excellents, ou parmi ceux qui ont de grosses difficultés ». Les deux distributions apparaissent en effet différentes.

On peut envisager aussi de distinguer, au sein de l'échantillon des lycéens interrogés par Robert Ballion, ceux qui fréquentent un lycée d'enseignement général et technologique (LEGT) et ceux qui fréquentent un lycée professionnel (LT). Les distributions correspondantes sont-elles semblables, voire superposables ? Voici.

	LEGT	LP
Disent avoir des résultats bons ou excellents	9 %	14 %
Disent avoir des résultats moyens	75 %	78 %
Disent avoir des résultats médiocres ou faibles	16 %	8 %

La comparaison de ces distributions sera peut-être une surprise pour le profane : la distribution est translatée *vers le haut* quand on passe des élèves de LEGT aux élèves de LP ! Le phénomène est connu des spécialistes, et l'auteur cité écrit à ce propos :
… les lycées d'enseignement professionnel proposent à leurs élèves des situations d'apprentissage qui favorisent le sentiment de réussite mieux que ne le font les lycées d'enseignement général et technologique. Comme l'écrit Bernard Charlot : « Le lycée professionnel, lycée de relégation au départ, devient en cours de route un lieu de reconstruction d'élèves en échec. »

On notera la différence entre appréciation subjective et réalité objective de la réussite scolaire : alors que (seulement) 39,7 % des élèves de LEGT ont redoublé durant leur scolarité, ce pourcentage passe à 82,3 % en LP – il fait plus que doubler.

Il est intéressant aussi de comparer filles et garçons. Les premières ont *objectivement* une meilleure réussite scolaire que les seconds : alors que 55,9 % des garçons ont redoublé au cours de leur scolarité, ce pourcentage tombe à 46,9 % pour les filles, soit 9 *points de moins*. Les distributions de fréquences sont les suivantes.

	Garçons	Filles
Disent avoir de bons résultats	11 %	10 %
Disent avoir des résultats moyens	74 %	76 %
Disent avoir des résultats faibles	15 %	14 %

Les distributions sont donc très voisines : objectivement, les filles se sous-estiment ou les garçons se surestiment. Ajoutons encore une touche à ce tableau, en distinguant, non entre garçons et filles, ou entre élèves de LEGT et élèves de LP, mais entre élèves *en fonction de l'âge*. Les différentes distributions de fréquences sont les suivantes.

Âge	*≤ 15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*≥ 20*
Déclarent de bons résultats (%)	15	12	10	9	9	8
Déclarent des résultats faibles (%)	13	14	13	14	17	21

L'auteur commente ces résultats dans les termes que voici :
Plus on avance en âge, et donc dans le cursus, plus la valeur de l'auto-estimation baisse : le taux des élèves qui estiment avoir de bons résultats faiblit, tandis qu'au contraire augmente celui des élèves à résultats faibles. On peut voir dans ce phénomène un indicateur de dégradation dans le temps de l'expérience scolaire, le fait d'éprouver un sentiment de réussite devenant de moins en moins fréquent au fur et à mesure que se déroule la scolarité.

Études statistiques

On situera la suite de cette présentation par rapport à un *modèle épistémologique de référence*, en sorte que nous pourrons rapporter à ce modèle les pratiques d'enseignement observables et interroger les conditions de son « implémentation didactique ». Le modèle de référence se rapporte, ici, au seul cas de la statistique *à une variable* (avec, pour théâtre principal de sa réalisation didactique, les classes de 3^{e} et de 2de). De façon volontairement restrictive, on appelle ici *étude statistique* l'étude d'une question Q d'un type dont les questions suivantes, à la formulation volontairement naïve, sont des spécimens significatifs (le *type* de ces questions sera formalisé un peu plus loin) :
- Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ?
- Un éléphant de deux tonnes, c'est un gros éléphant ou c'est un petit éléphant, ou c'est ni l'un ni l'autre ?
- Quand on dit qu'un joueur de foot a marqué beaucoup de buts dans une saison, ça veut dire qu'il en a marqué au moins combien ?
- Est-il exact que les trois derniers jours ont été exceptionnellement froids ?
- Cet article est-il cher pour ce que c'est ?

La conduite de l'étude suppose alors que l'on précise un certain nombre de données de base : il faut, en principe, indiquer la *population* Ω (les bébés, les éléphants, etc.) à laquelle on se réfère ; le *caractère* X (le poids, le prix, etc.) défini sur Ω ; enfin l'*échantillon* $E \subseteq \Omega$ sur lequel on va étudier la question Q. Voici, en guise d'illustration, une partie de la synthèse réalisée dans une classe de 3[e] mi-réelle, mi-imaginaire, sur laquelle nous reviendrons.

Collège Georges Bouligand
3e7 – Mathématiques
Synthèse : conduire une étude statistique
II. Les grands problèmes du travail statistique
a) Définir la population. Dans une l'étude statistique d'un caractère, on doit préciser ce qu'est la *population* sur laquelle on étudie le caractère : à quelle population d'élèves, ou de bébés, ou d'éléphants, ou de joueurs de football s'intéresse-t-on exactement ? Répondre à ce type de questions suppose une enquête dont l'objet n'est pas, en général, mathématique, mais à laquelle il faut tout de même procéder – de façon plus ou moins approfondie.
b) Définir l'échantillon. En général, on ne dispose pas de la valeur du caractère étudié pour chacun des « individus » de la population : on s'en tiendra à étudier ce caractère sur un ou plusieurs échantillons de cette population. L'idéal serait de disposer d'échantillons dits « représentatifs » de la population, c'est-à-dire qui « ressemblent » à la population. Mais on est souvent loin de cet idéal : on devra se contenter en général d'échantillons *disponibles*, c'est-à-dire pour lesquels on dispose des données utiles. Pour cette raison, une étude statistique est presque toujours partielle et provisoire.
c) Définir le caractère. De la même façon que la population est souvent indiquée de façon approximative (que ce soit celle des bébés, des footballeurs ou des éléphants), le caractère que l'on est censé étudier sur cette population est lui-même souvent *mal défini*. Qu'est-ce, par exemple, que la « longueur » d'une phrase ? Si on étudie le caractère « nombre d'occurrences de la lettre *a* » dans la population des « phrases françaises », va-t-on compter les occurrences de *à* et de *â* ? Comptera-t-on aussi les occurrences de *æ* ? Etc. Dans tous les cas, il conviendra de préciser le choix, en général *conventionnel*, que l'on aura fait.

Le type de tâches fondamental va porter sur la *série statistique* $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, où $x_i = X(\omega_i)$, qui correspond à l'échantillon étudié, $E = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \}$. Ce qui importe, ici, n'est pas la valeur de X sur tel « individu » $\omega \in E$, mais la *distribution des fréquences* sur E. Pour l'obtenir, on considère d'abord la *distribution des effectifs*, n_j ($1 \le j \le p$), des valeurs $v_1, \ldots, v_p$ prises par X sur E ; puis on considère la distribution des fréquences $f_j = n_j/n$. Notons que, si on connaît $n = \sum_{j=1}^{p} n_j$, on peut reconstituer la distribution des effectifs, puisque $n_j = N \times f_j$. Nous pouvons alors formaliser ce qui nous intéresse en définissant la *fonction de répartition* de X sur E, définie par

$$F_X(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\ \{ i \,/\, x_i \le x \} = \frac{1}{n} \sum_{v_j \le x} n_j.$$

Inversement, la connaissance de F_X entraîne la connaissance de la distribution des fréquences de X : si on suppose que l'on a $v_1 < \ldots < v_p$, il vient en effet $n_1 = F_X(v_1)$, $n_j = F_X(v_j) - F_X(v_{j-1})$ pour $j = 2, \ldots, p$. La fonction de répartition F_X a ainsi l'intérêt de condenser tout ce qu'on veut savoir à propos de X sur E : en un sens, la connaissance statistique (univariée) du monde consiste, pour chaque couple (E, X), à connaître la distribution des fréquences de X sur E ou, de façon équivalente, la fonction de répartition de X sur E.

Supposons ainsi qu'on veuille répondre à la question suivante : « Il est gros, cet éléphant, non ? » Si l'éléphant en question a un poids p tel que, disons, $F_X(p) = 0{,}32$, on pourra répondre *par la négative* : car 68 % des éléphants sont alors *plus « gros »* que l'éléphant considéré, qui ne peut donc guère être dit « parmi les plus gros ». Supposons maintenant que l'on veuille répondre à la question : « C'est quoi un gros éléphant ? C'est gros comment ? » La réponse n'est bien sûr *pas univoque* ; si par exemple, pour un certain poids p, $F_X(p) = 0{,}49$, on pourra répondre qu'un gros éléphant est certainement un éléphant dont le poids est supérieur à p. Si l'on décide qu'un éléphant sera dit « gros » s'il appartient à l'ensemble des 20 % les plus lourds, et si l'on sait que l'on a $F_X(p^*) = 0,80$, alors on dira qu'un gros éléphant est un éléphant de poids supérieur à p^*.

Considérons à présent les notes trimestrielles des élèves d'une classe de 3^e : 8,9 ; 10 ; 8,5 ; 13,7 ; 15,6 ; 6,9 ; 12,3 ; 16,9 ; 8,7 ; 8,2 ; 15,3 ; 13,3 ; **14,1** ; 7,4 ; 15,7 ; 11,1 ; 9,5 ; 17,0 ; 10,0 ; 7,3 ; 14,6 ; 10,4 ; 7,7 ; 18,9 ; 8,5 ; 15 ; 14,6 ; 9,3. La note de 14,1 sur 20 obtenue par l'un des élèves est-elle une note « élevée » dans cette classe et pour ce trimestre ? En ordonnant la série donnée par ordre croissant, on obtient ceci : 6,9 ; 7,3 ; 7,4 ; 7,7 ; 8,2 ; 8,5 ; 8,5 ; 8,7 ; 8,9 ; 9,3 ; 9,5 ; 10 ; 10 ; 10,4 ; 11,1 ; 12,3 ; 13,3 ; 13,7 ; **14,1** ; 14,6 ; 14,6 ; 15 ; 15,3 ; 15,6 ; 15,7 ; 16,9 ; 17,0 ; 18,9. On peut dire d'abord que *ce n'est pas une note basse*, puisqu'il n'y a que dix notes qui lui soient strictement supérieures (ce qui représente 35,7 % des notes environ). Mais pour faire partie des 20 % de notes les plus élevées, il faudrait ici (puisque 20 % × 28 = 5,6) que la note examinée fasse partie des 5 notes les plus élevées, c'est-à-dire qu'elle soit supérieure ou égale à 15,6 – ce qui n'est pas le cas.

Les considérations qui précèdent sont à l'origine de l'introduction de la fonction *quantile*, qui est en quelque sorte la fonction « inverse » de la fonction de répartition, et qui permet de répondre aux questions de type « au-dessus de quelle valeur x du caractère X ne trouve-t-on plus que 20 % de la population ? » ou « au-dessous de quelle valeur n'y a-t-il plus que 15 % de la population ? ». Généralisant le cas où il existe q tel que $F_X(q) = u$, on considère en effet la plus petite valeur q telle que $F_X(q) \geq u$; d'une façon générale, on définit alors la fonction quantile par $Q(u) = \inf \{ x \,/\, F_X(x) \geq u \}$, où $u \in [0; 1]$. On a ainsi $F_X(Q(u)) \geq u$, avec en outre, si $x < Q(u)$, $F_X(x) < u$. Le nombre $Q(u)$ est appelé u-quantile (ou u-fractile) ou quantile (ou fractile) d'ordre u. Comment déterminer un u-quantile ? Reprenons la série déjà rencontrée des notes trimestrielles d'une classe de 3^e ; trions-les par ordre croissant et déterminons la valeur de

$$F(x) = \frac{1}{n} \text{Card } \{ i \,/\, x_i \leq x \}$$

pour chacune des valeurs prises $x = v$; on obtient le tableau ci-après, qui fait apparaître notamment ceci : Q(10 %) = 7,4 ; Q(20 %) = Q(25 %) = 8,5 ; Q(30 %) = 8,9 ; Q(40 %) = 10 ; Q(50 %) = 10,4 ; Q(60 %) = 13,3 ; Q(70 %) = Q(75 %) = 14,6 ; Q(80 %) = 15,3 ; Q(90 %) = 16,9 ; Q(95 %) = 17 ; Q(100 %) = 18,9.

v	*6,9*	*7,3*	*7,4*	*7,7*	*8,2*	*8,5*	*8,7*	*8,9*	*9,3*
100 F_X	3,6	7,1	10,7	14,3	17,9	25	28,6	32,1	35,7
v	*9,5*	*10*	*10,4*	*11,1*	*12,3*	*13,3*	*13,7*	*14,1*	*14,6*
100 F_X	39,3	46,4	50	53,6	57,1	60,7	64,3	67,9	75
v	*15*	*15,3*	*15,6*	*15,7*	*16,9*	*17*	*18,9*		
100 F_X	78,6	82,1	85,7	89,3	92,9	96,4	100		

Les quantiles $Q(k/10)$, où l'entier k varie de 1 à 9, sont les *déciles* : Q(10 %) est le *premier* décile, …, Q(90 %) le *neuvième* décile. Les trois quantiles Q(25 %), Q(50 %), Q(75 %) sont les *quartiles*, respectivement le premier quartile, le deuxième quartile et le troisième quartile. On aura noté que le *deuxième quartile* ne correspond pas exactement (dans le cas précédent) à la *médiane* (qui, selon la convention adoptée en 2de, vaut ici 10,75).

On peut aussi procéder ainsi : n étant l'effectif de la série (dans le cas précédent, $n = 28$), $Q(u)$ est la valeur du terme de la série (supposée rangée par ordre croissant) dont l'indice est le plus petit entier supérieur ou égal à nu. Pour $u = 0,85$, par exemple, $nu = 23,8$: Q(85 %) est donc la valeur du terme de rang 24, à savoir 15,6.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*

6,9	7,3	7,4	7,7	8,2	8,5	8,5	8,7	8,9	9,3	9,5	10	10	10,4
15	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	***24***	*25*	*26*	*27*	*28*
11,1	12,3	13,3	13,7	14,1	14,6	14,6	15	15,3	**15,6**	15,7	16,9	17	18,9

Conditions de possibilité

L'implémentation didactique du modèle épistémologique de référence est-elle possible ? La réponse est certainement positive. En voici un exemple observée dans une classe de 3^{e} où a été conduite une séance d'initiation à l'étude statistique d'une question *Q* donnée. Voici d'abord le scénario de l'étude.

2. Étude des notes d'un devoir en classe
2.1. L'étude
Dans une classe de 3^{e} de 28 élèves a eu lieu un devoir surveillé. Les 28 notes attribuées sont reproduites ci-après :
15 ; 13 ; 11 ; 9 ; 4 ; 11 ; 13 ; 18 ; 9 ; 10 ; 14 ; 17 ; 13 ; 16 ; 11 ; 16 ; 12 ; 16 ; 9 ; 5 ; 13 ; 19 ; 16 ; 0 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7.
On dira qu'une note de cette série est *satisfaisante* si elle est supérieure ou égale à au moins 50 % des notes, soit à 14 notes de la série au moins.
Il revient au même de dire qu'elle est inférieure strictement à au plus 50 % des notes de la série, c'est-à-dire à 14 notes au plus.
Question 1. Lors du devoir, quatre élèves ont obtenu la note 11. Cette note est-elle satisfaisante ? Comment faire pour le savoir ?
Réponse 1. Un décompte à la main permet de constater que la note 11…
– … est supérieure ou égale à 13 notes, ce qui ne représente que $\frac{13}{28} = \frac{1300}{28}$ % ≈ 46,4 % des notes ;
– … est strictement inférieure à 15 notes de la série, ce qui représente $\frac{15}{28} = \frac{1500}{28}$ % ≈ 53,6 % des notes.
En conséquence, la note 11 *n'est pas satisfaisante*.
Question 2. Pour savoir si la note 11 est satisfaisante ou non dans la série des 28 notes observées, un élève a eu l'idée de ranger ces 28 notes par ordre croissant et de les numéroter. Comment le faire ? Comment cela permet-il de décider si la note 11 est satisfaisante ou pas ?
Réponse 2. On peut saisir ces notes dans la colonne A d'un fichier du Classeur, puis utiliser l'icône de tri croissant. On obtient alors ceci.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	***14***
0	4	5	7	9	9	9	9	10	11	11	11	11	**12**
15	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*
13	13	13	13	14	15	16	16	16	16	16	17	18	19

Pour que 11 soit une note satisfaisante, il faut et il suffit que la note numérotée 14 soit inférieure ou égale à 11. Ici, cette note est 12 : on retrouve donc que 11 n'est pas une note satisfaisante.
Question 3. Préciser la plus petite note satisfaisante dans la série des 28 notes.
Réponse 3. La plus petite note satisfaisante est celle qui a le numéro 14 : on a vu qu'il s'agit de la note 12.
Question 4. On dit qu'une note est *excellente* si elle est supérieure ou égale à 90 % des notes au moins. En utilisant à nouveau la série croissante et numérotée des 28 notes, déterminer les notes excellentes de la série.
Réponse 4. On a : 90 % × 28 = 25,2. Une note est donc excellente si et seulement si elle est supérieure ou égale à la note numérotée 26. D'après le tableau obtenu, la note numérotée 26 est 17. Les notes excellentes de la série sont donc 17, 18 et 19.

Question 5. On dit qu'une note est *remarquable* si elle est supérieure ou égale à au moins 70 % des notes. Déterminer les notes remarquables de la série.
Réponse 5. On a : 70 % × 28 = 19,6. Une note est donc remarquable si et seulement si elle est supérieure ou égale à la note numérotée 20. D'après le tableau, les notes remarquables sont donc les notes au moins égales à 15.
2.2. Le bilan de l'étude
Question. Qu'a-t-on appris, au fond, dans ce qui précède ?
Réponse. a) Étant donné une série statistique de longueur *n* et un pourcentage *k* %, on a appris à déterminer la plus petite valeur de cette série supérieure ou égale à au moins *k* % des valeurs de la série.
b) Pour cela, on a dû apprendre à mettre, à l'aide du Classeur, la série donnée sous la forme d'une série croissante.
c) Étant donné un pourcentage *k* %, on a calculé le premier entier supérieur ou égal *k* % × *n* : la plus petite valeur cherchée est celle qui a pour numéro cet entier.

Voici maintenant la ***synthèse*** issue de ce travail et de sa suite (portant sur d'autres questions).

Collège Georges Bouligand
3e7 – Mathématiques
Synthèse : conduire une étude statistique
III. Le type de tâches fondamental
a) Le type de tâches. Étant donné une série statistique de longueur *n* et un pourcentage *k* %, déterminer la plus petite valeur de cette série qui est supérieure ou égale à au moins *k* % des valeurs de la série.
b) La technique. On range la série par ordre croissant ; on calcule alors l'entier *N* qui est le plus petit entier supérieur ou égal au nombre *k* % × *n* (lequel, en général, n'est pas entier) ; la valeur cherchée est alors la valeur de rang *N* dans la série rangée par ordre croissant.
c) Exemple. On cherche la plus petite valeur *x* d'une série de longueur *n* = 162 telle qu'au moins 80 % des valeurs de la série soit inférieure ou égale à *x*. On a : 80 % × 162 = 129,6. Le plus petit entier *N* supérieur ou égal à 129,6 est 130. La valeur cherchée est donc celle qui occupe le rang 130 dans la série rangée par ordre croissant.
d) Justification & remarques. 1) Supposons que la série que l'on vient d'évoquer se présente ainsi :

Rang :	129	130	131	132	133
Valeur :	014	015	016	017	017

La valeur donnée par la technique est 15. Cette valeur est supérieure ou égale à 130 valeurs de la série, soit à $\frac{130}{162} = \frac{13000}{162}$ % ≈ 80,25 % de l'effectif de la série. La valeur immédiatement plus petite, 14, ne convient pas : elle n'est supérieure ou égale qu'à 129 valeurs de la série, c'est-à-dire à $\frac{129}{162} = \frac{12900}{162}$ % ≈ 79,63 % de l'effectif de la série.
2) Supposons que la série se présente ainsi :

Rang :	128	129	130	131	132
Valeur :	014	015	015	016	017

La valeur cherchée est toujours 15 ; mais on voit que la valeur classée au 129e rang convient aussi, puisque c'est la même ! Le rang qu'on a calculé (130) n'est donc pas le plus petit rang possible. Mais la *valeur* ayant ce rang est bien la plus petite possible. La valeur immédiatement plus petite, 14, est supérieure ou égale à 128 valeurs, ce qui ne représente que $\frac{128}{162} = \frac{12800}{162}$ % ≈ 79 % de l'effectif de la série.
3) Supposons enfin que la série se présente ainsi :

Rang :	129	130	131	132	133
Valeur :		14	015	015	015	016

La valeur cherchée est toujours 15 ; mais, ici, cette valeur, qui, dans les cas précédents, était la plus petite possible qui soit supérieure ou égale à « juste un peu plus » que 80 % des valeurs de la série, est en fait supérieure ou égale à « sensiblement plus » de 80 % des valeurs de la série, puisqu'on a en effet : $\frac{132}{162} = \frac{13200}{162}$ % ≈ 81,5 %.

4) On peut généraliser la justification précédente en utilisant des lettres : la valeur x cherchée occupe le rang N : elle est donc supérieure ou égale à $\frac{100\,N}{n}$ % de l'effectif de la population. Comme $N \geq k$ % $\times\, n$, on a $100\,N \geq k \times n$ et il vient donc : $\frac{100\,N}{n}$ % $\geq \frac{k \times n}{n}$ % $= k$ %.

La diffusion scolaire de ce modèle épistémologique (et son implémentation corrélative dans les classes) se heurte à divers obstacles, dont l'élimination est un problème que *la profession* doit contribuer à résoudre notamment – mais pas seulement – à travers la formation de ses membres (même si, bien entendu, elle doit rechercher des coopérations afin de résoudre les problèmes qui se posent à elles). Si l'on suppose acquise (ce qui n'est pas le cas aujourd'hui) l'acceptation large par la profession du point de vue selon lequel les études statistiques menées par les classes doivent partir de questions « effectives » et viser à leur apporter des réponses « significatives », même si elles demeurent partielles et provisoires, on peut ramener les autres problèmes à une question fondamentale : quelles sont les questions Q dont l'étude statistique 1) donne à voir la spécificité de l'apport de la science statistique à la compréhension du monde, et 2) se réfère à des populations Ω et à des variables X pour lesquelles il est possible et réaliste d'obtenir des échantillons E se traduisant par des séries statistiques $X(E)$ appropriées à l'étude à conduire ?

On s'arrêtera ici sur le second point de difficulté : le choix de Q de façon que des *données* appropriées soient *disponibles*. En nombre de cas, dans les études extrascolaires, une *enquête ad hoc* permet de recueillir un échantillon de données que l'on veut « représentatif » de la population Ω. Par exemple, dans l'étude précédente sur les lycéens, l'auteur a exploité 9919 questionnaires, recueillis dans six académies. Dans chacune d'elles, « les services statistiques ont constitué un échantillon d'une quinzaine de lycées et, dans chaque lycée, 100 à 150 élèves ont été soumis à la passation du questionnaire », cela en avril 1997 pour quatre des six académies, en novembre 1997 pour les deux autres. Dans l'étude sur les violences à l'encontre des femmes, l'enquête a été réalisée « par téléphone de mars à juillet 2000, auprès d'un échantillon représentatif de 6 970 femmes âgées de 20 à 59 ans, résidant en métropole et vivant hors institutions ». Cette technique est évidemment disponible dans les classes, mais son usage, souvent « coûteux », reste limité (même si l'on tente, au sein d'un établissement ou d'un groupe d'établissements, de mutualiser des données). Une autre technique consiste alors à rechercher des données disponibles *par ailleurs*, données que l'on utilisera au mieux dans la classe : en ce cas, la question Q étudiée sera choisie en fonction des données disponibles, telles par exemple qu'on peut en trouver sur le site Internet de l'INSEE [7]. Bien entendu, dans certains cas, il n'est pas entièrement déraisonnable d'engendrer – selon une loi déterminée – des données numériques sur lesquelles la classe travaillera.

Fluctuations et probabilités

[7] Voir http://www.insee.fr/fr/ppp/fichiers_detail/edufa03/telechargement.htm.

L'un des objectifs d'une éducation statistique « citoyenne » d'aujourd'hui est d'apprendre aux générations montantes à porter un regard juste sur la composition des « petits échantillons » : si l'on tire au sort 8 citoyens, et s'il en résulte un groupe de 6 femmes et de deux hommes, doit-on s'étonner en disant qu'il s'agit là d'un fait *rare* ? Doit-on penser que, « normalement », il aurait dû « sortir » une des compositions (4, 4), (5, 3), (3, 5) ? Comme on le voit, on retrouve ici la problématique illustrée par les études précédentes : contenir 6 femmes pour un groupe de 8 personnes tirées au sort dans une population dans laquelle on suppose réalisée la parité, est-ce beaucoup ? Pour répondre, la procédure consiste à créer des échantillons de taille 8 en grand nombre. Ainsi, pour 400 échantillons au hasard de taille 8, le tableau ci-après donne les effectifs des échantillons selon le nombre de femmes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	14	43	103	102	79	46	11	0

On voit que, *sur ces 400 échantillons* de taille 8, on a plus d'une chance sur 10 – exactement 11,5 chances sur 100 – de tirer un groupe contenant exactement 6 femmes, et même 14,25 chances sur 100 de tirer un groupe comportant *au moins* 6 femmes. Mais on a en même temps 14,75 chances sur 100 de tirer un groupe comportant *au plus* 2 femmes. Et on a 71 chances sur 100, donc environ 7 chances sur 10, de tirer un groupe contenant entre 3 ou 5 femmes.

Le type de travail statistique que l'on vient d'évoquer à propos des « petits échantillons » est en vérité très fragile au plan de l'écologie mathématico-didactique *actuelle*. En nombre de cas, en effet, la considération de petits effectifs est phagocytée par l'obsession du « passage à la limite » et de la « stabilisation des fréquences ». En d'autres termes, partant d'un échantillon de taille 8 (extrait de la population mentionnée plus haut), où il y aurait par exemple 5 femmes et 3 hommes, on va faire croître la taille comme pour montrer que, *en fait*, ce ne serait là qu'une « anomalie », laquelle s'estompe et disparaît peu à peu (non sans une certaine « résistance » cependant) quand on augmente la taille de l'échantillon. Ainsi, partant d'un échantillon de taille 8 où la proportion de femmes est de 5/8 = 0,625, on a obtenu les fréquences suivantes en augmentant la taille de l'échantillon comme le tableau ci-après l'indique.

8	20	50	100	200	250	400	500
0,625	0,55	0,58	0,49	0,5	0,516	0,525	0,524

En d'autres termes, on ne va pas « rester » sur un échantillon de petite taille, mais regarder celui-ci comme le début d'un échantillonnage indéfiniment recommencé. Le phénomène est connu et Guy Brousseau [8] n'a pas manqué de le souligner encore récemment dans les termes que voici :

L'introduction de la temporalité, de l'ordre, de l'évolution des données, préfigure la sortie des situations de description statistique et l'entrée dans les jeux de la prévision, auxquels est attachée une autre famille d'obstacles, ceux attachés à la pensée probabiliste mais qui vont largement déborder sur la statistique.

À titre d'illustration d'un tel phénomène dans les classes, voici un extrait d'un compte rendu d'observation d'une séance qui a eu lieu en mars 2002 dans une classe de seconde.

> « Allez, vous sortez vos cahiers de statistique ! Vous aviez à faire le premier exercice pour aujourd'hui ! » L'énoncé est le suivant :
> Un joueur lance un dé. S'il obtient un numéro différent de 6, il reçoit une somme égale au numéro obtenu (en francs). S'il obtient 6, il doit verser 6 F. Ce joueur joue cent fois de suite. Il obtient les résultats suivants :

---

[8] « Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique », *Balises en didactique des mathématiques*. Grenoble, La Pensée sauvage, Grenoble, p. 165-193. (Le passage cité se trouve p. 184.)

4, 6, 1, 2, 5, 2, 1, 2, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 6, 4, 2, 2, 1, 4
6, 4, 2, 6, 4, 3, 6, 4, 6, 3, 3, 4, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 5, 5
3, 3, 5, 4, 1, 3, 1, 3, 2, 4, 5, 6, 4, 4, 3, 6, 2, 6, 5, 6
3, 4, 6, 3, 4, 5, 3, 1, 5, 1, 3, 5, 6, 1, 5, 3, 4, 2, 2, 4
1, 5, 1, 4, 6, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 6, 1, 2, 3, 3, 3

1° Ordonner les données brutes ci-dessus. Préciser l'effectif et la fréquence de chaque modalité.
2° Quel est le mode de cette série ?
3° On s'intéresse maintenant au gain du joueur (noté négativement s'il s'agit d'une perte).
a. Construire un tableau montrant les gains et leurs effectifs.
b. Calculer le gain moyen par partie du joueur.

P appelle une élève au tableau et rappelle la consigne : ordonner les données brutes, etc. L'élève dessine un tableau. Précisant ce que c'est qu'ordonner les valeurs, P écrit :

$$\overbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}^{15}$$

$$\overbrace{2\ 2\ \ldots\ 2}^{15}$$

$$\overbrace{3\ 3\ \ldots\ 3}^{22}$$

$$\overbrace{4\ 4\ \ldots\ 4}^{18}$$

$$\overbrace{5\ 5\ \ldots\ 5}^{13}$$

$$\overbrace{6\ 6\ \ldots\ 6}^{17}$$

P vérifie si le travail demandé a été fait. Pendant ce temps, l'élève a progressé, remplissant le tableau qu'elle avait dressé et avançant dans le travail demandé :

1°)

Valeur dé	1	2	3	4	5	6
Effectif	15	15	22	18	13	17
Fréquence	$\frac{15}{100} \simeq 0{,}15$	$\frac{15}{100} \simeq 0{,}15$	$\frac{22}{100} \simeq 0{,}22$	$\frac{18}{100} \simeq 0{,}18$	$\frac{13}{100} \simeq 0{,}13$	$\frac{17}{100} \simeq 0{,}17$

2) le mode de cette série est 3

P contrôle avec la classe que le mode indiqué est exact. Puis on passe à la question 3 : P rappelle la règle du jeu. L'élève écrit :

3) les valeurs sont –6, 1, 2, 3, 4, 5

P : « On fait un tableau montrant les gains et les effectifs ». L'élève s'exécute :

Gain	– 6	1	2	3	4	5
Effectif	17	15	152	22	18	13

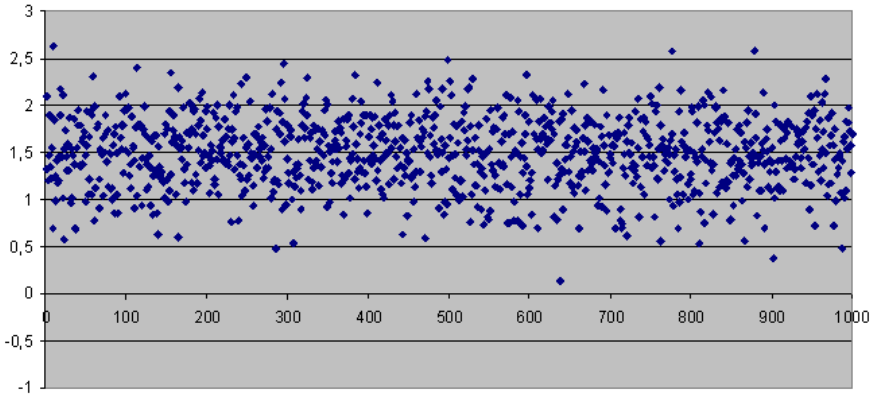
P : « Très bien !… Petit b, calculer le gain moyen, c'est-à-dire calculer la moyenne. Je sais qu'ici il y a des experts en moyenne !… » L'élève écrit :

Erreur ! = **Erreur !** = **Erreur !** = 1,46 $^{\text{Frs}}$

P confirme que le gain moyen est « appelé g barre » ; puis il conclut : « Si vous jouez, vous gagnez. Pas beaucoup, mais vous gagnez ! Y a-t-il des questions ? »

On retrouve ici, en apparence, la croyance en un monde « constant » : le résultat obtenu pour *cette* série de 100 parties est tenu pour *universel* : « Si vous jouez, vous gagnez. Pas beaucoup, mais vous gagnez ! » On saisit ici le rôle que joue la stabilisation des fréquences « fantasmée » : elle permet de chasser de façon imaginaire la variabilité d'un monde où la variation serait une pure et simple anomalie inessentielle.

Ici, il aurait été pertinent de simuler un grand nombre de fois une partie et d'en noter le gain : le graphique suivant montre un échantillon de 1000 parties de cent lancers de dé chacune tout à fait suggestif.



Le danger que fait courir la proximité « culturelle » (dans l'enseignement des mathématiques) de la notion de probabilité à l'existence d'un enseignement de la statistique comme science de la variabilité est liée à deux contraintes massives, l'une propre à la statistique, l'autre beaucoup plus large. La première est le *refoulement de la variation*, qui pousse à mettre en avant le « passage à la limite ». Le second est au moins aussi profondément enraciné dans la culture de la profession : de même que la « géométrie théorique » (dans le style euclidien), à travers ses rejetons contemporains, étouffe dans l'œuf la géométrie « expérimentale » *au lieu de naître d'elle*, de même la statistique théorique, fondée sur le concept de probabilité, asphyxie le travail statistique empirique et expérimental au lieu de le servir en proposant, à travers le fait central de la stabilisation des fréquences, une « algèbre des fréquences ». Le « socle commun de connaissances et de compétences » indiquant que « les élèves doivent connaître », « pour ce qui concerne l'organisation et la gestion de données et les fonctions », « les notions de chance ou de probabilité », le programme de 3^{e} qui entrera en vigueur en septembre 2007 comporte une initiation à la notion de probabilité. Il y a là, pour la profession, un grand combat à livrer.

Thème 1

Ateliers

Claudine Vergne

Formation des PLC2 en Statistique : Analyse de quelques situations

IUFM de Montpellier

Résumé :

Une première phase de l'atelier sera consacrée à la présentation d'une séance de formation effectivement proposée à des PLC2. Le choix des contenus et de la structure de cette séance est motivé par un travail de recherche qui sera brièvement résumé.
Dans une deuxième phase, les participants seront invités à échanger sur la ressource présentée et à faire part de leurs propositions.

~ INTRODUCTION ~

Ce document est la version écrite d'un atelier présenté au colloque CORFEM 2007 selon l'ordre du jour suivant :

PREMIERE PARTIE

Résumé d'un travail de recherche

Compte rendu d'une formation de PLC2 en statistique

DEUXIEME PARTIE

Discussion

Bilan d'un questionnaire relatif à cette formation

Les organisateurs m'ont demandé de rédiger un compte rendu "aussi détaillé que possible", ce que je me suis efforcée de faire. Le document revêt de ce fait une forme particulière, peu habituelle.

~ PREMIERE PARTIE ~

I Résumé d'un travail de recherche

En 2003/2004, dans le cadre d'un DEA (Master), j'ai été amenée à travailler sur l'enseignement de la statistique en classe de seconde, et à rédiger un mémoire ayant pour titre "La notion de variabilité dans le nouveau programme de seconde : étude de conditions de viabilité".
L'objectif était de déterminer si la notion de variabilité, et plus largement, la partie novatrice du programme de statistique de seconde, était viable, à sa sortie en septembre 2000, dans l'Enseignement Mathématique Secondaire Français (noté EMS). Le cadre théorique choisi est celui de la didactique des mathématiques ; l'étude de textes centrés sur l'**écologie** et l'**économie** des systèmes didactiques a permis de proposer une **liste de conditions de viabilité d'un objet d'enseignement** (dans EMS), puis une **grille d'observation et d'analyse** des conditions de viabilité d'un objet d'enseignement[9].

L'analyse, à l'aide de la grille, du programme de 2° et de son document d'accompagnement fait apparaître des obstacles majeurs à la viabilité du nouveau programme de statistique en 2°. L'étude, à l'aide de la même grille, de deux manuels scolaires édités en 2000 montre qu'ils présentent certaines faiblesses et que, de fait, ils apportent aux enseignants une aide limitée et peu fiable. Enfin, des observations de séquences menées dans des classes de seconde en 2003/2004 rendent compte des grandes difficultés qu'éprouvent certains enseignants, même chevronnés, à enseigner à cette partie du programme.

Cela confirme, si besoin était, que l'enseignement du nouveau programme de statistique de 2° (et plus largement d'une statistique plus réaliste, plus moderne) ne peut pas faire l'économie de la formation des enseignants. Quelle formation ? Bien sûr, celle-ci devra inclure des compléments théoriques. Mais certaines pertinences même dans les prescriptions du programme déstabilisent les pratiques des enseignants (par exemple *ne pas faire cours*, *adopter une démarche expérimentale, faire faire un cahier de statistiques*, …) Or, les observations effectuées permettent de penser qu'il est extrêmement difficile pour un professeur de modifier **à la fois** les contenus et les pratiques de son enseignement (plus il est mal à l'aise avec les contenus, plus il risque de se raccrocher à ses "manières de faire" habituelles).
C'est dire que, concernant l'enseignement de la statistique, une formation efficace, qui aide réellement les enseignants ne devrait pas porter seulement sur les contenus théoriques mais devrait aussi s'intéresser aux pratiques d'enseignement.
Notons aussi que du point de vue épistémologique, il y a un lien très fort entre l'enseignement de la statistique et la théorie des situations didactiques[10]. Il paraît pertinent de mettre en place, pour l'enseignement de la statistique, des situations adéquates.

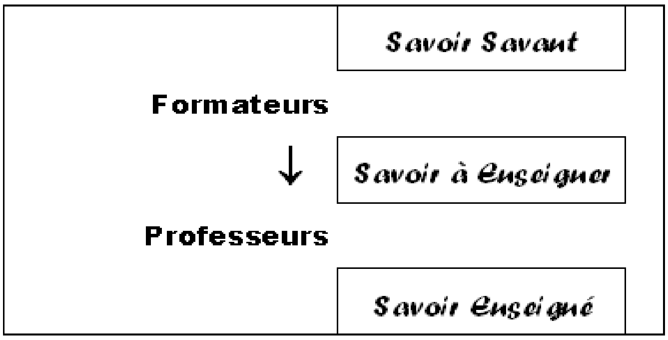
---

[9] Pour plus de précisions, on peut consulter VERGNE C. (2005), *La notion de variabilité dans le nouveau programme de seconde : étude de conditions de viabilité*, Mémoire de DEA, IREM de Montpellier.

[10] On peut lire à ce sujet : BROUSSEAU G., BROUSSEAU N., WARFIELD G. (2002), An experiment on the teaching of statistics and probability, *Journal of mathematical behavior*, 20.

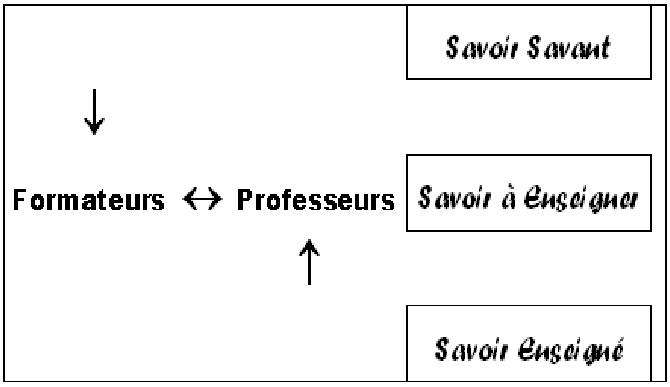
Pour ces raisons, on peut penser que dans ce cas, une formation continue qui se réduirait à des compléments théoriques, le plus souvent sur le mode transmissif, ne peut suffire.

Formation : Schéma 1



D'où la proposition d'un autre type de formation, où formateurs et professeurs travailleraient de façon collaborative à la mise au point de situations d'enseignement : le formateur garantit la validité d'un point de vue cognitif et épistémologique, apporte au besoin des compléments théoriques, tandis que le professeur, qui connaît les réalités du terrain, s'assure des conditions de faisabilité.

Formation : Schéma 2



II Compte rendu d'une formation en statistique des PLC2

1. Introduction

Depuis 2003, je suis amenée à animer, **en 3 heures**, une formation en statistique pour des groupes d'une vingtaine de PLC2.

Il s'agit cette fois de formation initiale et non de formation continue.
Concernant les contenus théoriques, le problème est à peu près le même qu'en formation continue ; la plupart des stagiaires n'ont pas de connaissances approfondies en statistique, rares sont ceux qui se sont spécialisés dans ce domaine durant leur cursus. Toutefois, ils manifestent en général moins d'hostilité vis à vis de la statistique que des enseignants de générations antérieures.
Concernant les pratiques, pour beaucoup de stagiaires, elles sont peu stables, parfois peu adaptées et même indigentes. Cette formation est une opportunité de promouvoir une démarche de type expérimental, démarche préconisée dans les programmes de la 6° à la terminale, et dans tous les domaines des mathématiques, pas seulement en statistique.

Il semble indispensable de parler du nouveau programme de seconde, car il est emblématique (au moins pour l'instant[11]) de la statistique qui doit vivre dans EMS et parce qu'il est clair que sa mise en œuvre pose problème. Toutefois, les stagiaires enseignent à des niveaux divers, certains au collège, d'autres en lycée et beaucoup ne connaissent pas ce nouveau programme. Il faudra donc décontextualiser suffisamment pour intéresser tout le monde, et apporter à chacun des éléments de formation assez consistants qu'il pourra réinvestir éventuellement.

---

[11] En septembre 2008, entrera en vigueur un nouveau programme de 3°, où est envisagée la "*notion de probabilité*".

Si l'on considère qu'une formation efficace en statistique est celle qui favorise sa viabilité dans EMS, la grille qui a servi à repérer des obstacles à son enseignement peut devenir, si on change de point de vue, un **outil de remédiation**. En effet, elle indique les points sensibles à travailler tout particulièrement en formation et suggère qu'il faudra

- vaincre certaines résistances relatives à la raison d'être de statistique dans EMS ;
- faire comprendre les intentions du nouveau programme ;
- convaincre que les organisations mathématiques prescrites permettent de faire faire des mathématiques aux élèves ;
- faire des propositions relatives au travail des techniques et à l'évaluation (exercices, devoir maison, devoir de contrôle) ;
- proposer des pistes pour pallier les difficultés repérées relatives à la gestion du temps, la gestion de la classe, l'utilisation des TIC, le contenu du cahier de statistique, etc. ;
- apporter éventuellement des compléments théoriques ;
- promouvoir une certaine façon d'enseigner qui s'appuie sur des (vraies) questions, qui permette aux élèves de prendre des initiatives, des responsabilités et qui les engage dans une démarche de type expérimental.

En 3 heures, il n'est bien sûr pas possible de travailler avec les participants à la mise au point de situations d'enseignement, mais il n'est pas non plus question pour moi de faire un cours.
Compte tenu de toutes ces contraintes, la séance est conduite sous formes d'échanges à partir de documents distribués (cf. annexes) et selon l'ordre du jour qui suit.

2. Ordre du jour

STATISTIQUES EN COLLEGE/LYCEE

http://www.irem.univ-montp2.fr/avostat

HASARD	vient de l'arabe	AZ-ZAHR	qui signifie	JET de DE
ALEA	vient du latin	ALEA	qui signifie	COUP de DE
CHANCE	vient du latin	CADERE	qui signifie	CHOIR, TOMBER

Bibliographie

I Point sur les programmes

II Spécificités de la classe de seconde

III Etude de quelques situations

Parité des sexes
Joueur A ou B
Une distribution de fréquence

IV Quelques simulations (travail en groupe)

Autres ...

En fait, je commence par la fin, c'est à dire par la bibliographie (cf. ANNEXE I), un peu par provocation mais surtout parce que je ne veux pas l'oublier à la fin de la séance. Je pense qu'à un certain niveau, et en particulier au niveau des stagiaires, toute formation contient une part d'auto formation, j'essaie par là même de les inciter en proposant des pistes. La bibliographie/sitographie est commentée rapidement, les stagiaires sont invités à consulter pendant la pause certains des ouvrages que j'ai apportés à cet effet.

J'ai dit plus haut que je ne voulais pas "faire un cours". Certes je vais exposer et parler beaucoup, mais je voudrais que les stagiaires interviennent et puissent poser des questions quand ils le souhaitent. Certains ne me connaissent pas, ne m'ont jamais vue. Pour installer cette possibilité d'échanges, je commence en racontant l'anecdote suivante, qui est véridique.

> *En septembre, lors du premier GAP (Groupe d'Accompagnement Professionnel), au cours d'une table ronde, une stagiaire PLC2 raconte la prise de contact avec son tuteur ; ils parlent de la progression en seconde ; le tuteur ouvre le livre à la table des matières, prend un crayon, barre le chapitre Statistique en disant " Ça, ce n'est pas la peine de le faire, ça ne sert à rien !"*

Je demande aux stagiaires ce qu'ils en pensent et il y a toujours des réactions ! A partir de ces réactions, il est possible de rebondir et de se demander quelle place occupent les statistiques dans le cursus du collège/lycée. C'est l'objet de la première partie "**Point sur les programmes**".

3. Point sur les programmes

Statistique en collège/lycée

Collège

Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
Tableaux à 2, plusieurs colonnes, double entrée. Lire et interpréter des graphiques. Diagrammes (bâtons, circulaire, demi-circulaire, cartésien)	Effectifs, fréquences, classes d'égale amplitude. Tableaux de données. Représenter, lire, interpréter. Diagrammes divers, Histogrammes amplitude constante Car. qualitatif (diag. tuyau d'orgue, bandes, secteurs) Car quantitatif (diag. en bâtons) Car. continu (histogramme égale amplitude)	Effectifs cumulés, fréquences cumulées. Moyennes pondérées. Initiation à l'usage des tableurs-grapheurs. Valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.	Caractéristique de position d'une série statistique. Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique. Initiation à l'utilisation des tableurs-grapheurs en statistique.
Nouveaux programmes		Anciens programmes	

Seconde

- Résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale (moyenne, médiane, classe modale, moyenne élaguée) et une mesure de dispersion (on se restreindra en classe de seconde à l'étendue).
- Définition de la **distribution des fréquences** d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement.
- **Simulation** et **fluctuation d'échantillonnage**.

Cycle terminal

	L	ES	S	STG
1°	-Diagramme en boite, intervalle interquartile - Variance et écart-type Pour l'interprétation des valeurs de ces paramètres, on gardera à l'esprit qu'ils **fluctuent** d'une série à l'autre	- Etude de séries de données - Lissage par moyennes mobiles - Histogrammes à pas non constants - Diagrammes en boites - Effets de structure - Intervalle interquartile, écart-type - Tableau à double entrée /…/	- Variance et écart-type - Diagramme en boite, intervalle interquartile - Influence sur l'écart-type et l'intervalle interquartile d'une transformation affine des données. /…/ - Lien entre loi de probabilité et	- Histogrammes - Diagrammes en boite, secteurs, bâtons - Tendance centrale (moyenne, médiane) - Dispersion (quartiles, déciles, intervalle interquartile, interdécile, écart-type) - Tableaux croisés d'effectifs /…./

	- Tableaux croisés	- Lien entre loi de probabilité et **distribution des fréquences** - Modélisation et **simulation**	**distribution des fréquences** Modélisation et **simulation**	- Probabilité (faire le lien avec les propriétés des **fréquences**) - Expérimentation et **simulation**
T.		- Série statistique à deux variables - Ajustement affine (moindres carrés) **- Simulation** - Conditionnement et indépendance -Modélisation (on retravaillera les expériences de référence vues en 2°) - Statistique et **simulation** (un exemple traitant de l'adéquation à une loi équirépartie) ….	- Conditionnement et indépendance - Statistique et modélisation (expériences indépendantes, répétitions d'expériences indépendantes) - Lois de probabilité - Statistique et **simulation** (un exemple traitant de l'adéquation à une loi équirépartie) …	- Série statistique à deux variables - Ajustement affine - Séries chronologiques … - Probabilité conditionnelle …

Le document ci-dessus est distribué aux stagiaires et commenté.
En collège (à ce jour, nouveau programme en sixième et cinquième, ancien programme en quatrième et troisième), pour l'instant, on trouve seulement des statistiques descriptives. Celles-ci sont reprises en 2°, mais en 2° il faut aussi parler de **distribution des fréquences**, **simulation**, **fluctuation d'échantillonnage**. Si l'on envisage le cycle terminal (seules sont envisagées ici les séries les plus fréquentées), on voit que ces thèmes sont présents. Le lien demandé entre distribution des fréquences et loi de probabilité permettra de faire en 1° une approche fréquentiste des probabilités, la notion de simulation est reprise, tout particulièrement à l'occasion de l'adéquation à une loi équirépartie en Terminale.
La classe de 2° apparaît comme une charnière entre les statistiques descriptives du collège et la prise en compte de l'aléatoire au lycée. C'est le lieu d'une première rencontre, ne pas la ménager priverait de sens l'enseignement de Statistique/Probabilité du cycle terminal. On ne peut donc pas affirmer comme dans l'anecdote citée plus haut que "*Ça ne sert à rien* !" Plus précisément, que prévoit le programme de 2° ? C'est l'objet de la deuxième partie "**Spécificités de la classe de seconde**".

4. Spécificités de la classe de seconde

Le document ci-dessous est distribué aux stagiaires et commenté. Il débute par la belle phrase de Claudine Schwartz "*L'esprit statistique naît lorsque l'on prend conscience de la fluctuation d'échantillonnage*" qui, de mon point de vue, éclaire tout le texte et les choix qu'il contient. La lecture commentée permet de mettre en exergue des passages importants, qui posent problème ou font débat *: consacrer 1/8 du temps à la statistique, voir la notion de fluctuation d'échantillonnage sous l'aspect de la distribution des fréquences, simuler à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice, d'une liste de chiffres au hasard.*

EXTRAITS DU PROGRAMME DE LA CLASSE DE SECONDE

L'esprit statistique naît lorsque l'on prend conscience de l'existence de fluctuation d'échantillonnage.
(*Claudine Schwartz*)

Introduction
Le programme est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonction, géométrie…A titre indicatif, le temps à consacrer aux différents chapitres pourrait être de **1/8 pour les statistiques**, le reste se répartissant équitablement entre les deux autres chapitres…
Un des apports majeurs de l'informatique réside dans la puissance de simulation des ordinateurs ; la **simulation** est ainsi devenue une pratique scientifique majeure : une approche en est proposée dans le chapitre statistique…
En seconde, le travail sera centré sur :

– la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;
– la notion de **fluctuation d'échantillonnage** vue ici sous l'aspect élémentaire de la **variabilité de la distribution de fréquences**.
– la **simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice**. La simulation remplaçant l'expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d'une **liste de chiffres.**
L'enseignant traitera des données en nombre suffisant pour que cela justifie une étude statistique ; il proposera des sujets d'étude et des simulations en fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité et de ses goûts.
La notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit pas faire l'objet d'un cours.

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale (moyenne, médiane, classe modale, moyenne élaguée) et une mesure de dispersion (on se restreindra en classe de seconde à l'étendue.	Utiliser les propriétés de linéarité de la moyenne d'une série statistique. Calculer la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes Calcul de la moyenne à partir de la distribution des fréquences.	L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur la nature des données traitées, et de s'appuyer sur des représentations graphiques pour justifier un choix de résumé. On peut commencer à utiliser le symbole Σ. On commentera quelques cas où la moyenne et la médiane diffèrent sensiblement. On remarquera que la médiane d'une série ne peut se déduire de la médiane de sous-séries. Le calcul de la médiane nécessite de trier les données, ce qui pose des problèmes de nature algorithmique.
Définition de la **distribution des fréquences** d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement. **Simulation** et **fluctuation d'échantillonnage.**	Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard.	La touche **random** d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure, qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de n chiffres (composant la partie décimale du chiffre affiché). Si on appelle la procédure un très grand nombre de fois, la suite produite sera sans ordre ni périodicité et les fréquences des dix chiffres seront sensiblement égales. Chaque élève produira des simulations de taille n (n allant de 10 à 100 suivant les cas) à partir de sa calculatrice ; ces simulations pourront être regroupées en une simulation ou plusieurs simulations de taille N, après avoir constaté la variabilité des résultats de chacune d'elles. L'enseignant pourra alors éventuellement donner les résultats de simulations de même taille N préparées à l'avance et obtenues à partir de simulations sur ordinateurs.

Passant sur le secteur I (*Résumé numérique …*) sur lequel pourtant il y aurait fort à dire, on aborde les contenus du secteur II en s'attardant sur les commentaires. Ils sont composés de deux parties. La première concerne la touche random ; je signale qu'il y a un problème et que nous en parlerons plus tard. La deuxième partie propose une méthode pour le regroupement d'échantillons ; ici aussi, il y a un problème, je ne précise pas lequel et je renvoie à plus tard.
Arrivés là, certains stagiaires sont tout à fait déstabilisés car ils ne savent pas de quoi on parle ! Aussi, quand je propose de présenter des séquences effectivement enseignées à des élèves de 2°, de rendre compte des réactions des élèves, ils acceptent avec empressement et parfois… soulagement !

Les trois situations qui suivent sont conçues pour couvrir l'ensemble des thèmes du secteur II du programme de 2°, avec une volonté affirmée de mathématiser cette partie du programme. Elles proposent des pistes pour la motivation des types de tâche demandées aux élèves, la gestion de la classe, le recueil de résultats. La première montre quel type de réponse peut apporter la statistique à une question posée. La deuxième illustre le fait qu'observer le hasard peut être source de connaissance, elle envisage sur un exemple la notion de sondages électoraux, ce qui paraît un objectif à atteindre en 2° si l'on veut participer à la formation du citoyen. La troisième est proposée comme devoir commencé en classe et terminé à la maison, elle aborde la notion de distribution de fréquences et peut être prolongée, avec les stagiaires, pas avec les élèves de 2°, pour travailler le lien entre distribution de fréquences et loi de probabilité.

On s'attaque à la première situation, étant entendu que les stagiaires peuvent poser les questions qu'ils jugent nécessaires et qu'il vaut mieux regarder les choses en détail plutôt que de tout survoler. A partir de là, on rentre dans un fonctionnement un peu schizophrénique, où, sous couvert de parler de l'enseignement proposé aux élèves, en fait, je veux faire de la formation pour les stagiaires, formation portant sur des contenus théoriques et aussi sur des pratiques d'enseignement. C'est l'artifice que j'utilise pour pallier le manque de temps. Dans la deuxième partie, la question de son efficacité sera posée.

5. Première situation "Parité des sexes"

a. Préambule

Dans l'assemblée que nous formons, la parité des sexes est-elle respectée ?

Où que l'on pose cette question, dans une classe, dans un groupe de PLC2, dans un atelier … du colloque CORFEM, la réaction des participants est toujours la même : ils se comptent, déterminent le nombre de femmes, le nombre d'hommes, les comparent à la moitié de l'effectif et le plus souvent … rejettent l'idée que la parité est respectée.
Ce comportement rend compte d'une conception arithmétique de la parité des sexes. Cette conception a le mérite d'être simple à appréhender mais quand l'effectif est impair, elle n'est pas opérationnelle. Dans ce cas, elle est corrigée en disant qu'il y a parité des sexes si le nombre de femmes, ou le nombre d'hommes est égal à la partie entière de la moitié de l'effectif.

Mais voyons, quand se détermine le sexe d'un individu ?

La plupart d'entre nous pense que c'est au moment de la conception, celui de la rencontre entre un spermatozoïde et un ovule. Est-ce qu'à ce moment-là le spermatozoïde et l'ovule ont une perception arithmétique du monde qui les entoure ? On peut penser que non ! Et alors, qu'est ce qui détermine le sexe de l'individu conçu ?
En l'absence d'autres informations ou de connaissances plus poussées, on est amené à considérer que ce phénomène est aléatoire ; en première approche, on peut considérer qu'à la surface de la terre, il naît autant d'hommes que de femmes (ce n'est pas tout à vrai). Du coup, on pourrait proposer une autre définition de la parité des sexes dans une assemblée, qui serait la suivante : il y a parité des sexes si, pour chaque individu, il y a autant de chance que ce soit un homme ou une femme.

Avec cette définition, pouvez-vous avoir une idée de la composition d'une assemblée de n personnes ?

Non, parce que cela dépend du hasard.
Pouvons-nous observer de telles assemblées préalablement constituées ?
Non.
Comment faire alors ?
Eh bien, il ne reste plus qu'à **simuler** de telles assemblées puis à observer leur composition.
Comment faire pour simuler un phénomène aléatoire qui n'a que deux résultats possibles, chacun ayant la même "chance" d'apparaître ?
"*Y a qu'à*" tirer à Pile ou Face et coder, par exemple : Face-Fille, Pile-Garçon !

C'est ainsi que commence dans ma classe de seconde l'étude des phénomènes aléatoires et de la première situation qui a pour titre "**Parité des sexes**".
L'expérience dont je rends compte dans la suite concerne une classe de 34 élèves ; P désigne "le professeur".

b. Pile ou Face

Après ce préambule, les élèves sont chargés de noter dans leur agenda un exercice à faire pour le lendemain, dont l'énoncé est le suivant :

> Simuler en tirant à Pile ou Face la répartition des sexes dans une assemblée de 34 personnes où la parité des sexes, au sens où nous l'avons définie, serait respectée (en codant Face-Fille et Pile-Garçon).

Ceci étant noté, on passe à un autre travail, qui concerne un autre chapitre. Une élève lance :

> Mais, il se peut qu'il y ait 99% de garçons !

Qu'en pensez-vous ?
Le lendemain, P fait circuler une feuille que les élèves renseignent pendant que le travail sur un autre chapitre se poursuit.
Le surlendemain, la feuille suivante est distribuée à chaque élève.

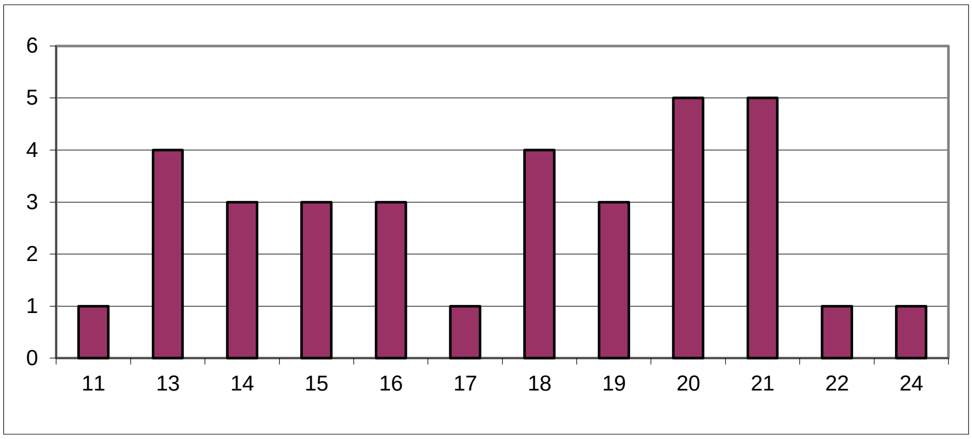
	34 lancers nombre de piles
Arnaud	18
Caroline	19
Brice	22
Laura	20
Elodie	16
Lydie	14
Mathilde	20
M-Charlotte	20
Lisa	19
Lucie	21
Emmanuelle	13
Chloé	14
Anne	15
Lirone	21
Cynthia	20
Elodie	16
Manon	17
Bertrand	15
David	13
Lise	21
Anaïs	18
Nicolas	19
Eve	18
Sylvain	24
Loïs	14
Elodie	13
Marine	20
Céline	18
Céline	11
Franck	13
Fanely	16
Olivier	21
Laure	15
Angélique	21

On commente les résultats. Les élèves sont étonnés des différences de résultats (de la **variabilité**). Pour mieux appréhender la variabilité, P propose d'étudier la série obtenue.

> Chaque élève a effectué un **échantillon** de taille 34et a compté le nombre de Pile. Ces nombres de pile forment une **série** de 34 nombres. Pour cette série, quels sont le mode ? la médiane ? la moyenne ? l'étendue ?

L'expérience m'a montré qu'il vaut mieux avoir retravaillé auparavant avec la classe, au moins rapidement, les notions de statistique descriptive du collège car certains élèves ne les ont plus du tout en tête. On obtient le tableau et le graphique suivants :

Dépouillement de la série														
Valeurs prises														
Effectifs														



Le graphique est commenté, les mots mode, moyenne, médiane, étendue prennent sens. C'est le moment d'institutionnaliser :

> *Quand une expérience dépend du hasard, les échantillons n'ont pas tous la même composition, il y a* ***fluctuation d'échantillonnage***.

Les élèves ne s'attendaient pas à autant de variabilité, de désordre. P peut alors déclarer que l'objet de la statistique c'est d'étudier cette variabilité et de dégager, à l'intérieur même de celle-ci, des propriétés, des régularités, dans la mesure du possible.

c. Mise en évidence d'un phénomène

P explique que pour observer un phénomène intéressant dans cette variabilité, il faudrait observer des échantillons de taille plus grande. Il n'est plus temps de lancer encore des pièces, d'où la question :

> *Pouvez-vous, à partir des résultats déjà obtenus par la classe, produire des échantillons de taille double ?*

A chaque fois, il se trouve un élève pour proposer de multiplier par 2, c'est à dire dupliquer. Or si on duplique un échantillon, on ne peut plus prétendre qu'il a été produit au hasard. Que faire ?

> *On peut* ***cumuler*** *des échantillons obtenus de manière* ***indépendante*** *pour obtenir un échantillon de taille plus grande.*
> *Si on duplique un échantillon, il n'est plus produit au hasard.*

"De manière indépendante" signifie ici que chaque élève a produit son échantillon indépendamment des autres élèves. On aborde ici un problème soulevé à la lecture des commentaires du programme de seconde (cf. II 4.) dans lesquels la question de l'indépendance des échantillons cumulés n'est pas

soulevée. P se trouve devant un choix difficile : ne pas évoquer l'indépendance des échantillons peut laisser croire aux élèves que le cumul peut se faire sans précaution, ce qui est faux ; parler d'indépendance sans la définir (c'est impossible ici) peut laisser croire que cette notion est intuitive et laissée à l'appréciation de chacun, ce qui bien sûr ne correspond pas du tout à la notion d'indépendance stochastique. Dans tous les cas, on risque de créer un obstacle didactique ; il faut faire un choix, qui n'a rien d'anodin.
Les élèves se groupent par 2 et forment des échantillons de taille 68. Puis chaque élève répond à la question suivante :

> Y a-t-il proportionnellement plus de Pile dans mon échantillon que dans celui de mon groupe ?

Ceci est l'occasion de passer aux fréquences pour la suite de la séquence.

> Pour comparer des échantillons de taille différentes, il est utile de passer aux fréquences.

P recueille les fréquences des échantillons de taille 68.
Le lendemain, la feuille suivante est distribuée à chaque élève. Dans la colonne A on trouve les fréquences produites par les élèves.

Fréquence de Pile dans 17 échantillons

	A de taille 68	B de taille 340 68×5	C de taille 1020 340×3	D de taille 1360 340+1020	E de taille 2000
1	**0,49**				0,49
2	**0,47**		0,50	0,49	0,50
3	**0,63**		0,48	0,49	0,50
4	**0,56**	0,51	0,48	0,51	0,52
5	**0,51**	0,49	0,51	0,48	0,49
6	**0,47**	0,66	0,49	0,50	0,47
7	**0,65**	0,49	0,55	0,50	0,50
8	**0,50**	0,48	0,46	0,47	0,49
9	**0,47**	0,46	0,50	0,51	0,50
10	**0,60**	0,51	0,49	0,54	0,49
11	**0,46**	0,49	0,50	0,49	0,52
12	**0,37**	0,51	0,50	0,50	0,49
13	**0,41**	0,47	0,49	0,48	0,50
14	**0,54**	0,52	0,52	0,48	0,50
15	**0,60**	0,54	0,51	0,48	0,50
16	**0,46**	0,56	0,50	0,50	0,49
17	**0,56**	0,50	0,49	0,51	0,50

> Colonne B : Dans les cases déjà remplies, les " fréquence de Pile " ont été obtenues par le professeur par des moyens qui seront explicités plus tard.
> Peut-on compléter les cases vides à l'aide des résultats de la classe ?

Il s'agit là encore de cumuler des échantillons obtenus de manière indépendante. Les élèves proposent de cumuler les 5 premiers, puis les cinq autres, puis les cinq suivants. Il y a ici un travail **d'algèbre** à mener sans précipitation pour que les élèves comprennent comment établir le calcul de la fréquence de Pile dans l'échantillon de taille 340 à partir des fréquences de Pile dans les échantillons de taille 68. Le fait que les échantillons de départ aient tous la même taille joue bien sûr un rôle important.

Colonne C : Peut-on compléter la case vide à l'aide des résultats de la classe ?

Les élèves proposent de cumuler les trois échantillons précédents B1, B2, B3 ; on calcule la nouvelle fréquence.

Colonne D : Peut-on compléter la case vide à l'aide des résultats de la classe ?

Beaucoup sont tentés de cumuler les échantillons C1 et B1. Mais….il y a un problème, ces deux échantillons n'ont pas été obtenus de manière indépendante, B1 ayant servi à construire C1 ! La réponse à la question est : non. Pour obtenir tout de même un échantillon de taille 1360, les élèves proposent de prendre C1 et B4 ; on peut aussi prendre C1 et B5, etc. Les élèves sont très étonnés de voir que chacun peut produire un échantillon différent, qu'il n'y a une réponse unique, la même pour tout le monde. En fait, le phénomène que l'on va mettre en évidence ne dépend pas des données individuelles. Ceci est inhabituel pour les élèves (et aussi pour la plupart des professeurs de mathématiques) !
Ce tableau va permettre de produire un **graphique** qu'il s'agit de construire pas à pas, pour que les observations prennent sens.

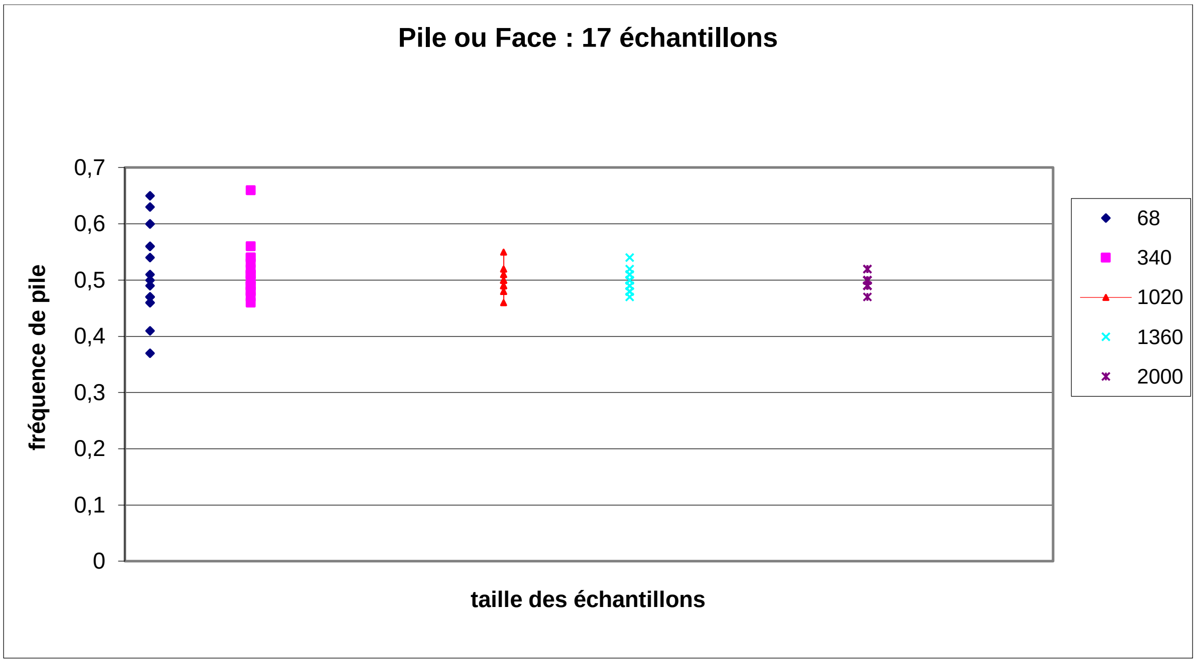
Dans un graphique, placer les points ayant pour abscisses la taille 68 et pour ordonnée les fréquences obtenues dans la colonne A. Qu'est-ce qui rend compte de la fluctuation d'échantillonnage sur le graphique ? Comment la mesurer ?

Certains élèves répliquent que la consigne est impossible à réaliser ! Pourquoi ?
Ces élèves ont étudié auparavant les fonctions et ont retenu (à la satisfaction de P) "*qu'à la verticale d'une valeur en abscisse, on ne peut trouver qu'un point*". Ceci est vrai lorsqu'on étudie un phénomène fonctionnel, et l'occasion est donnée de dire qu'ici, le phénomène n'est pas de ce type. On a ici un exemple de lien avec une autre partie du programme de seconde, ces liens contribuent à donner du sens à l'enseignement de notre discipline.
C'est justement le fait d'avoir plusieurs points sur la même verticale qui rend compte de la fluctuation d'échantillonnage et les élèves proposent, pour la mesurer, de calculer la différence entre la plus grande et la plus petite des fréquences, soit l'étendue de la série des 17 fréquences.

Dans le graphique précédent , placer les points ayant pour abscisses la taille 340 et pour ordonnée les fréquences obtenues dans la colonne B. Qu'est-ce qui rend compte de la fluctuation d'échantillonnage sur le graphique ? Comment la mesurer ?

Si l'on a accepté de passer du temps sur la question précédente, les élèves ont compris et vont cette fois beaucoup plus vite. On peut alors leur demander de terminer le graphique à la maison.

Terminer le graphique. Pouvez-vous faire des remarques ?



Les élèves n'ont aucun mal à interpréter le graphique, et il y a accord sur le constat suivant :

> *Il semble que l'ampleur des fluctuations diminue quand la taille des échantillons augmente.*

Ce graphique n'est pas dans les manuels scolaires de seconde. Je l'ai imaginé car les graphiques que j'y trouvais ne me satisfaisaient pas : ils illustraient plutôt la stabilisation de la fréquence quand la taille de l'échantillon augmente, ce qui n'est pas tout à fait la même chose et correspond plus exactement au programme des classes de première. Il me paraît important de signaler ceci aux stagiaires et de réfléchir un instant au statut des manuels scolaires, auxquels ils ont tendance à faire grandement confiance. L'occasion se présente ici de dire qu'il est nécessaire d'avoir toujours un point de vue critique sur les contenus des manuels, et qu'il ne faut hésiter à faire preuve de créativité pour construire "son" cours.

La suite de la séquence introduit des thèmes qui sont considérés comme facultatifs dans le programme. Ils auraient pu être passés sous silence, mais ils permettent d'une part de mathématiser de façon importante l'ensemble de la séquence, d'autre part de montrer quel type de réponse peut apporter une démarche statistique à un problème posé. C'est pourquoi ils ont été retenus.

Revenant au graphique et aux échantillons de taille 68, P affirme : "on démontre que la plupart des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{68}}\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{68}}]$" , plus précisément

> *95% environ des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle* $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{68}}\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{68}}]$.

Les élèves n'apprécient guère de voir apparaître une racine carrée, et s'empressent de chercher une valeur approchée à la calculatrice. Mais traîner 10 chiffres après la virgule n'est pas non plus très réjouissant et P propose de travailler avec deux chiffres après la virgule, **à la condition toutefois** que l'intervalle écrit avec des valeurs approchées ne soit pas "plus petit" que l'intervalle [

$\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{68}}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{68}}$]. Cette condition (justifiée par le fait que restreindre l'intervalle risquerait de faire oublier des fréquences) oblige à se poser des problèmes d'inclusion d'intervalles, à réfléchir à des questions d'ordre, à utiliser soit des troncatures, soit des valeurs approchées par excès. Cela n'a rien d'évident pour les élèves, ce travail est coûteux en temps mais il présente l'intérêt d'utiliser, en tant qu'outils, des objets du domaine **numérique**. Il faut beaucoup de temps pour arriver à un consensus :

> 95% environ des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle [0,37 ; 0,63].

L'intervalle [0,37 ; 0,63] peut être tracé verticalement sur le graphique.

On recommence avec les échantillons de taille 340 :

> 95% environ des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle
> $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{340}} ; \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{340}}]$.
> 95% environ des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle [0,44 ; 0,56].

Etc.
Lorsque les élèves ont bien compris, on peut énoncer la **propriété** :

> Pour un phénomène aléatoire dont on connaît la fréquence théorique p, on forme des échantillons de taille n. Dans environ au moins 95 % des cas, l'intervalle $[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ contient la fréquence observée dans l'échantillon (ceci est d'autant mieux vérifié que la taille ne des échantillons et le nombre de tirage sont plus élevés).

d. Retour à la question de départ

On peut enfin revenir à la question de départ, celle de la parité des sexes dans la classe et, après discussion, terminer sur cette conclusion :

> Si l'on considère qu'il y a parité des sexes quand chaque individu a autant de chances d'être un garçon ou une fille, au "niveau de confiance 0,95", on ne rejettera pas l'idée qu'il y a parité dans la classe si la fréquence de filles observée appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{34}} ; \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{34}}]$.

La réponse revêt une forme très différente de celle donnée au début.

e. Remarques

Il arrive, qu'en formation, lorsqu'on étudie cette situation, un stagiaire demande un complément d'information sur mode, ou médiane, etc. Si c'est le cas, il est utile de ménager une digression et d'étudier pendant quelques instants le document intitulé "**SERIE STATISTIQUE A UNE VARIABLE REELLE**" (cf. ANNEXE II) qui permet de faire une synthèse. Ce document pourrait très bien figurer dans le "cahier de statistique" de 2° pour être repris en 1° et complété par "écart type"et "variance". Cela confèrerait de la cohérence à l'enseignement dispensé aux élèves en lycée et ferait gagner du temps aux professeurs de 1°. Mais bien sûr, cela n'est possible que si les professeurs d'un même établissement travaillent en équipe et s'entendent sur des définitions et des notations communes….

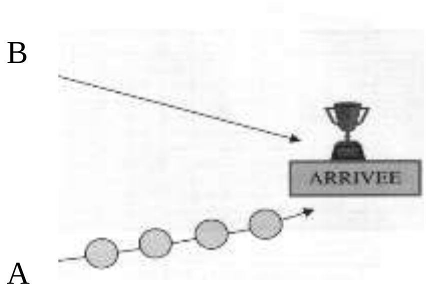
Le document présentant la situation "**Parité des sexes**" effectivement distribué aux stagiaires se trouve en ANNEXE III.

6. Deuxième situation : Vaut-il mieux être le joueur A ou le joueur B ?

a. Un jeu

La question suivante est soumise aux élèves.

Voici un jeu , pour lequel on utilise un dé à 6 faces, équilibré. On le lance.
• Si le dé tombe sur 6, le joueur B gagne directement la partie.
• Si le dé tombe sur 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5, le joueur A avance d'une case. On relance. Pour que A gagne la partie, il faut qu'il ait avancé 5 fois.
Vaut-il mieux être le joueur A ou le joueur B ?



Il est important de comprendre que l'objectif n'est pas de jouer à ce jeu mais de **prendre une décision.**

Les élèves ont du mal à s'approprier l'énoncé et il est nécessaire de faire quelques parties avec eux pour clarifier les règles du jeu . On peut utiliser une grille préparée à l'avance pour gagner du temps.

Lancer de dé	1	4	6	5	4	4	2	1	3	3	6	2

Lancer de dé	1	1	4	3	5	4	6	3	2	5	3

Lancer de dé	6	1	2	4	1	5	6	2	4	4	2

Comment savoir si le jeu est plus favorable à A ou à B ou bien s'il est équitable ?
Après réflexion et discussion, les élèves proposent de jouer un nombre assez grand de parties pour voir qui de A ou de B gagne plus souvent. Seulement il y a un problème, aucun n'a de dé ! P propose alors :

b. Un outil pour simuler le hasard : la touche random de la calculatrice

Après avoir repéré la touche random sur leur calculatrice, les élèves sont invités à l'actionner plusieurs fois de suite.

Suivant les modèles, il peuvent voir apparaître

.1216853324
.4930062012
.534806747
.6448564206

ou bien

0,153
0,25
0,287
0,533

Si on laisse les élèves décrire ce qu'ils voient apparaître, ils disent qu'ils voient des nombres décimaux, avec presque toujours le même nombre de décimales. On aborde ici un autre problème, laissé sous silence dans les commentaires (cf. II 4.). En fait, la calculatrice est programmée pour éditer un nombre fixe de décimales, mais elle est aussi programmée pour ne pas écrire les zéros "inutiles" dans une écriture décimale. Et dans les nombres qui semblent avoir moins de décimales, il faut toujours restituer les zéros manquants. Les parties décimales des nombres affichés fournissent une liste de chiffres, dont P doit préciser le statut.

> On admet que
> - On ne peut pas prévoir les chiffres qui vont apparaître (**imprédictibilité**)
> - La sortie d'un chiffre ne dépend pas des chiffres qui sont déjà sortis (**indépendance ... et répétition des chiffres possible**)
> - Sur un grand nombre de tirages, on observe une relative **équirépartition** des chiffres (à condition d'avoir restitué les zéros manquants!)

Avec le nouvel outil que constitue une liste de chiffres au hasard, comment simuler le lancer d'un dé ? Certains élèves devinent ce qu'il faut faire, mais rien dans leur culture antérieure ne leur permet d'être sûrs de leur procédure et P doit valider.

> Après avoir restitué les zéros manquants, on conserve les chiffres 1, 2, 3, 4 , 5 , 6 et on barre les autres. On admet que les chiffres restants simulent des lancers aléatoires d'un dé équilibré.

Certains élèves font remarquer, avec raison, qu'il ne servait à rien de restituer les zéros manquants puisque après, on les barre. C'est une faiblesse de cette situation qui propose en première utilisation de la liste de chiffres au hasard un cas où les zéros ne sont pas utiles.

c. Exercice

Chaque élève note dans son agenda l'exercice à faire pour la fois suivante.

> Simuler 10 parties du jeu et déterminer, dans l'échantillon obtenu, la fréquence de gain de A et la fréquence de gain de B.

Notons que le nombre de chiffres nécessaires pour simuler 10 parties ne peut pas être connu à l'avance, cela dépend des parties, et cet aspect présente une difficulté pour certains élèves.
Le lendemain, P relève les résultats de la classe, le surlendemain, la feuille récapitulative est distribuée à chaque élève.

Echantillons de taille 10	fréq. gain A	fréq. gain B
Chloé	0,3	0,7
Franck	0,3	0,7

Anne	0,6	0,4
Fanely	0,4	0,6
Lirone	0,4	0,6
Cynthia	0,4	0,6
Olivier	0,5	0,5
Laure	0,4	0,6
Elodie	0,6	0,4
Manon	0,1	0,9
Angélique	0,4	0,6
Bertrand	0,3	0,7
Celine	0,2	0,8
Marine	0	1
Lucie	0,5	0,5
M- Charlotte	0,2	0,8
Loïs	0,3	0,7
Mathilde	0,3	0,7
Sylvain	0,4	0,6
David	0,3	0,7
Caroline	0,5	0,5
Lise	0,4	0,6
Brice	0,4	0,6
Anaïs	0,2	0,8
Laura	0,2	0,8
Nicolas	0,2	0,8
Eve	0,4	0,6
Celine	0,3	0,7
Lydie	0,5	0,5
Emmanuelle	0,2	0,8
Elodie	0,4	0,6
Elodie G	0,2	0,8
Lisa	0,5	0,5
Arnaud	0,4	0,6
Echantillon de taille …	….	…..

A partir de ces résultats, on peut cumuler les échantillons pour obtenir un échantillon de taille 340, calculer la fréquence de gain de A grâce à une formule étudiée dans la première situation, remarquer qu'on obtient facilement la fréquence de gain de B par complémentaire à 1.
Pour autant, peut-on prendre une décision ? P peut alors énoncer un nouveau théorème qui diffère de celui de la première situation par le fait qu'ici on ne connaît pas la fréquence du phénomène étudié.

d. Propriété fondamentale et définition

On considère un phénomène aléatoire dont on ignore la fréquence p et pour lequel, dans un échantillon de taille n, ($n > 30$), on a observé une fréquence f ($0{,}3 < f < 0{,}7$).
Quelle que soit la valeur de p, dans au moins 95% des cas environ, l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contient p inconnue. Cet intervalle est appelé intervalle de confiance*, au niveau de confiance 0,95.
* ou fourchette de sondage

Cette propriété est appliquée dans les questions suivantes :

> A l'aide de l'échantillon obtenu par la classe, déterminer la fourchette au niveau de confiance 0,95 pour fréquence de A. Sur une droite graduée, construire l'intervalle.
> Déterminer la fourchette au niveau de confiance 0,95 pour fréquence de B. Sur la même droite graduée, construire l'intervalle.
> Pouvez-vous décider s'il vaut mieux être le joueur A ou le joueur B ?

Les deux fourchettes ne se recouvrent pas, les élèves concluent qu'il vaut mieux choisir le rôle de B. Il est important alors de demander :
▪ à partir de l'étude précédente, est-on sûr que le rôle de B est plus enviable ? (réponse "non", l'étude théorique faite en première ou terminale permettra de démontrer qu'il en est ainsi).
▪ vous êtes le joueur B, vous savez que son rôle est plus enviable, vous engagez une partie, êtes vous sûr de gagner ? (réponse "non" bien sûr, on est dans un domaine où aucune certitude n'est possible).

e. Prolongement

L'étude menée permet de terminer par cet exercice dont l'intérêt relativement à la formation du citoyen est incontestable.

> Lors d'une élection présidentielle, le candidat A et le candidat B sont en concurrence.
> 1) Une semaine avant l'élection, un journaliste annonce à la télévision : "**un sondage donne 51% d'intentions de vote pour A et 49% pour B**" . Ton frère te dit : "Je pense que A va être élu !" Le sondage a été réalisé sur un échantillon de taille 1000.
> a) Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat A et trace en rouge cette fourchette sur un axe. Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat B et trace en vert cette fourchette sur le même axe.
> b) Que réponds - tu à ton frère?
>
> 2) Le soir de l'élection à 20 h, un journaliste annonce à la télévision : "**un sondage donne 51% de voix pour A et 49% pour B**" . Ton frère te dit : "Je pense que A va être élu !" Le sondage a été réalisé sur un échantillon de taille 100 000.
> a) Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat A et trace en rouge cette fourchette sur un axe. Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat B et trace en vert cette fourchette sur le même axe.
> c) Que réponds - tu à ton frère?

Remarque : Le document présentant la situation "**Vaut-il mieux être le joueur A ou le joueur B ?** " effectivement distribué aux stagiaires se trouve en ANNEXE IV.

7. Troisième situation : Etude d'une distribution de fréquences

On s'intéresse au lancer d'un dé équilibré.

a. Distribution de fréquences dans deux échantillons de taille 10

Constituer un échantillon de taille 10 d'un lancer de dé et placer les résultats dans le tableau ci-dessous dans la ligne "Xavier".

Distribution des fréquences pour 10 lancers						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Echantillon de Xavier						
Echantillon d'Yves	**0**	**0,2**	**0,1**	**0,2**	**0,2**	**0,3**

Ici, chaque élève va travailler à partir de ses propres résultats.

Construire un diagramme en bâtons comparant l'échantillon X et l'échantillon Y. Constatez-vous une fluctuation d'échantillonnage ? Qu'est ce qui en rend compte sur le graphique.

Il est important de prendre le temps d'interpréter le graphique et de traduire en mots ce qu'il suggère.

Comment mesurer l'ampleur des fluctuations ?

Généralement, les élèves proposent de calculer les différences de fréquences pour chaque occurrence et d'en faire la somme. Il est facile de voir avec eux que les termes de cette somme peuvent être tantôt positifs, tantôt négatifs et que la somme peut être un nombre nul ou négatif, dont la signification n'est pas opérationnelle. On est vite amené à utiliser la **valeur absolue** des différences, qui garantit que chaque terme sera positif et on peut proposer comme mesure de l'ampleur des fluctuations la somme des valeurs absolues des différences de fréquences (suivant la réceptivité des élèves, on peut aussi proposer la moyenne des valeurs absolues des différences de fréquences ou bien même le maximum des valeurs absolues des différences de fréquences). A nouveau, un objet mathématique du **numérique** apparaît comme un outil efficace pour étudier une question de statistique.

Calculer la moyenne des points obtenus pour l'échantillon X et pour l'échantillon Y. Placer ces deux valeurs en abscisse.

Cette question est là pour faire apparaître que la fluctuation d'échantillonnage porte non seulement sur la distribution de fréquences, mais aussi sur les paramètres associés.
Une fois que les élèves ont bien compris cette étude, on peut donner la suite du travail en devoir maison.

b. Distribution de fréquences dans deux échantillons de tailles plus grandes

b1. Distribution des fréquences pour 100 lancers (Résultats arrondis à 10^{-2} près obtenus par simulation) :

	1	2	3	4	5	6
échantillon X	**0,11**	**0,13**	**0,16**	**0,15**	**0,21**	**0,24**
échantillon Y	**0,17**	**0,13**	**0,15**	**0,15**	**0,25**	**0,15**

Construire un diagramme en bâton comparant l'échantillon X et l'échantillon Y.
Constatez-vous une fluctuation d'échantillonnage ? Calculer une mesure de l'ampleur des fluctuations.
Calculer la moyenne des points obtenus pour l'échantillon X et pour l'échantillon Y. Placer ces deux valeurs en abscisse.

b2. Distribution des fréquences pour 1000 lancers (Résultats arrondis à 10^{-3} près obtenus par simulation) :

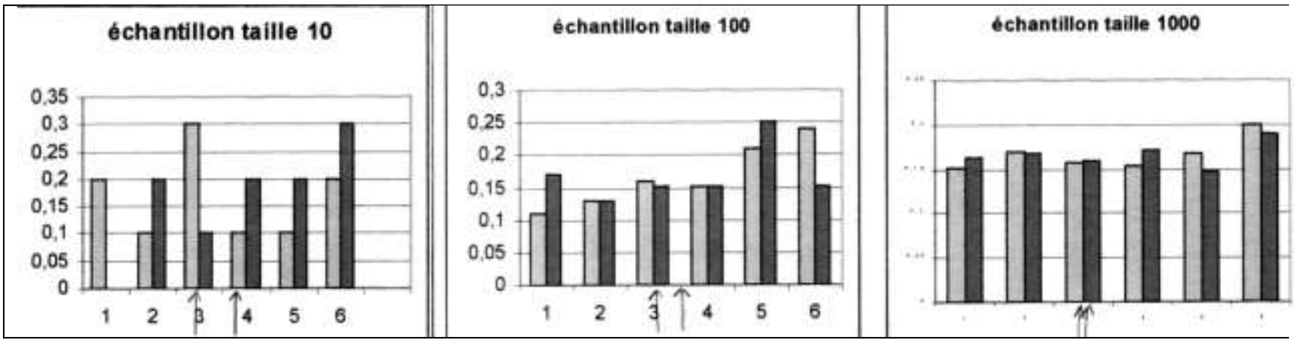
	1	2	3	4	5	6
échantillon X	**0,152**	**0,170**	**0,158**	**0,153**	**0,168**	**0,199**
échantillon Y	**0,164**	**0,167**	**0,160**	**0,172**	**0,148**	**0,189**

Construire un diagramme en bâton comparant l'échantillon X et l'échantillon Y.
Constatez-vous une fluctuation d'échantillonnage ? Calculer une mesure de l'ampleur des fluctuations.
Calculer la moyenne des points obtenus pour l'échantillon X et pour l'échantillon Y. Placer ces deux valeurs en abscisse.

b3. Quelles remarques peut-on faire en comparant les trois études précédentes?

b4. Blaise te propose un jeu : tu mises 3 euros, tu lances un dé, si le chiffre apparu sur le dé est x, tu remportes x euros. Es-tu prêt à jouer 1 fois, 10 fois, 100 fois, 1000 fois ? Pourquoi ?

Voici les résultats obtenus par un élève :



Ils sont aisément interprétables. Les élèves répondent à la question b3, avec des formulations plus ou moins heureuses. Par contre, la question b4, qui aborde sans le dire la notion d'espérance mathématique, est difficile pour eux.

c. Prolongement

Avec les stagiaires (non avec les élèves de 2°), on peut profiter de cette étude pour aborder le lien préconisé dans les programmes de 1ere entre distribution de fréquences et loi de probabilité et regarder l'extrait du document d'accompagnement du programme de 1ere qui suit.

Distribution de fréquences et loi de probabilité

Extrait du document d'accompagnement du programme de 1°S, ES

<table>
<tr><th colspan="5">Distribution de fréquences
sur E ={ $x_1, x_2, \dots x_r$}</th><th colspan="5">Loi de probabilité
sur E = { $x_1, x_2, \dots x_r$}</th></tr>
<tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_r</td><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_r</td></tr>
<tr><td>f_i</td><td>f_1</td><td>f_2</td><td>…</td><td>f_r</td><td>p_i</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>…</td><td>p_r</td></tr>
<tr><td colspan="5">$(f_1, \dots, f_i)$
$f_i \geq 0$; $\sum f_i = 1$
A$\subset$ E, fréquence de A : $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i$
Événement complémentaire : $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$
Événements A et B disjoints :
$f(A \cup B) = f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$
Cas numérique :
Moyenne empirique : $\bar{x} = \sum f_i x_i$
Variance empirique : $s^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$
Écart type empirique : $s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$</td><td colspan="5">$(p_1, \dots, p_r)$
$p_i \geq 0$; $\sum p_i = 1$
A$\subset$ E, probabilité de A : $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$
Événement complémentaire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Événements A et B disjoints :
$P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$
Cas numérique :
Espérance d'une loi P : $\mu = \sum p_i x_i$
Variance d'une loi P : $\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2$
Écart type d'une loi P : $\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}$</td></tr>
</table>

Remarque : Le document présentant la situation "**Une distribution de fréquences**" effectivement distribué aux stagiaires se trouve en ANNEXE V.

8. Quelques simulations

Si le temps le permet, mais c'est rarement le cas, la séance de formation de trois heures peut s'achever sur un travail de groupe au cours duquel les stagiaires produisent des simulations demandées, certains avec l'aide d'une liste de chiffres au hasard, d'autres avec une calculatrice. Il est intéressant, lors de la mise en commun, de comparer les méthodes et de constater que les connaissances mises en jeu dans l'un et l'autre cas sont de nature très différentes. Voici des exercices possibles :

1. Simuler 20 lancers de Pile ou Face d'une pièce équilibrée.

2. Dans une urne, il y a 3 boules rouges, et 7 boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne. Simuler 20 tirages.

3. Dans une urne, il y a 3 boules rouges, et 5 boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne. Simuler 20 tirages.

4. Dans une urne, il y a 3 boules rouges, et 2 boules vertes et 4 boules noires. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne. Simuler 20 tirages.

5. On lance deux pièces équilibrées et on regarde les marques. Simuler 20 lancers de ces deux pièces.

6. Simuler un tirage du loto.

7. Simuler le choix au hasard de 3 élèves parmi 30.

8. Dans un pays imaginaire, une politique nataliste est mise en place : les naissances dans chaque famille s'arrêtent soit à la naissance du premier garçon, soit à la naissance du quatrième enfant. Par exemple, G ou bien FFG, ou bien FFFF sont des compositions de famille possibles. Quelle conséquence peut-on prévoir sur la répartition entre les sexes ?

~ DEUXIEME PARTIE ~

L'exposé a été suivi d'une discussion à la fin de laquelle a été présenté le bilan qui suit.

Fin mai, par mail, un questionnaire a été soumis aux stagiaires PLC2 ayant participé à la formation en novembre 2006 ou en mars 2007 ; un quart des stagiaires environ a répondu.

> **Questionnaire**
>
> 1. Selon vous, en quoi devrait consister une formation en statistique à l'IUFM pour les PLC2 ?
>
> 2. Le …., vous avez assisté à un GFD sur l'enseignement de la statistique en collège/lycée. Quel est votre point de vue sur cette séance ? (forme, contenus, documents, autres, etc.)
>
> 3. Autre

Cette démarche n'a aucune valeur statistique, elle présente des biais importants. En particulier, les personnes qui répondent sont, le plus souvent, satisfaites de la formation. Concernant ceux qui n'ont pas répondu, on ignore s'ils étaient mécontents de la formation et pourquoi ou si, simplement, ils n'avaient pas envie de répondre.
Toutefois, les réponses exprimées présentent un certain intérêt, en voici une synthèse (en *italique* des extraits des réponses exprimées).

1. Selon vous, en quoi devrait consister une formation en statistique à l'IUFM pour les PLC2 ?

a. Compléments théoriques

- apporter des connaissances en stats
- rappeler les notions à connaître

b. Informations sur l'utilisation des statistiques dans la société

- montrer en quoi la statistique est utile
- comprendre le travail des statisticiens
- recevoir des statisticiens d'IPSOS ou autre pour qu'ils expliquent leur façon de travailler

pour

- que notre enseignement ait du sens, soit plus vivant
- permettre aux élèves de développer un esprit critique vis-à-vis des sondages, diagrammes dont ils peuvent être abreuvés au quotidien

c. Etude des programmes en statistique

- saisir l'esprit de ce que l'on nous demande d'enseigner
- travailler sur les liens à établir entre chaque classe pour qu'il n'y ait ni rupture ni répétition dans l'enseignement des statistiques entre collège et lycée
- mettre la statistique en relation avec les autres thèmes mathématiques

d. Promotion de la statistique

faire prendre conscience aux stagiaires qu'il s'agit une véritable branche des mathématiques, non plus une « sous-matière » que l'on traite rapidement en fin d'année.

e. Elaboration de séquences

- travailler sur des exemples d'activités que l'on pourrait donner aux élèves et les analyser
- montrer comment aborder ce thème avec les élèves
- réfléchir, sur des cas d'espèce, à la manière de l'enseigner
- sortir avec un large éventail de propositions spécifiques aux statistiques

f. Et aussi ...

J'ai fait un mémoire sur le test de Durbin Watson. Pour cela, on a simulé des nombres à l'aide d'ordinateurs via des lois et des outils de probabilités et statistiques. J'ai toujours beaucoup de difficulté à admettre qu'un ordinateur peut générer du "vrai" hasard. J'aimerais une formation qui nous permette de savoir comment ça fonctionne.

2. Le ...., vous avez assisté à un GFD sur l'enseignement de la statistique en collège/lycée. Quel est votre point de vue sur cette séance ? (forme, contenus, documents, autres, etc.)

a. Point de vue favorable

très bien, excellent, intéressant, concret, bien mené, utile, cohérent, instructif, pertinent,

Particulièrement sur :

- la bibliographie *: indispensable pour qui souhaite aller plus loin*
- le rappel sur les programmes, *car on ne les a pas toujours en tête*
- le tableau récapitulatif des compétences attendues en fonction des classes
- l'exemple sur la notion de parité, *bien que je pense que la parité homme/femme en politique n'est pas comparable à la parité pile/face d'une pièce*
- l'exemple sur les sondages
- le fonctionnement de la statistique avec la taille de l'échantillon et le niveau de confiance
- des traces écrites : *c'est très intéressant pour la suite de notre enseignement des statistiques surtout en classe de seconde*
- les exemples d'activité *pour intéresser les élèves, comment l'aborder et où les élèves allaient avoir des difficultés*
- la donnée d'une séance de cours complète
  une solide base de travail et de recherche pour fabriquer par la suite notre propre séance
  une séance clefs en main à mettre en place dans notre classe

b. Mais

▪ On aurait pu :

- réduire le temps de lecture des programmes
- nous demander de faire des propositions avant la séance de manière à mettre en connexion les lacunes propres de notre groupe et les réponses que l'ensemble pouvait apporter
- nous donner un cours de première et TS (ou ES) accompagné d'exercices types pour avoir un aperçu de ce vers quoi doit tendre l'enseignement des stat

▪ Trois heures, c'est trop court. Avec un temps de formation plus long, on pourrait :

- approfondir davantage *des points clés de l'enseignement des statistiques*
  leur utilisation dans la formation de l'esprit critique des élèves
- ménager une participation plus importante des stagiaires, *pour leur faire exprimer leur vision des statistiques, qui est souvent erronée, et leur permettrait de mieux comprendre vos propos*
- construire nous-même des préparations de séquences, les expérimenter, en rendre compte (sous forme de fil rouge).

c. Conclusion

▪ De l'enthousiasme

- J'ai appris ce que l'on pouvait faire en seconde.
- Je suis désormais convaincu de l'importance des statistiques dans l'enseignement !
- Je pense que plus de statistiques pourrait rendre les mathématiques moins "aride " (pour les élèves). En effet l'expérimentation est bien plus présente.

▪ A modérer !

Sur le coup, j'ai eu l'impression que l'on pouvait rendre cet enseignement des statistiques très simple. Je me suis dit que j'allais tenter de le faire en prenant vos polycops comme base de travail pour ma classe : l'activité de départ était très motivante, mais je me suis aperçu que personne n'était au même niveau concernant le vocabulaire de base (moyenne, médiane, etc.) alors j'ai choisi de clarifier ces termes pour tous [...].

J'ai également rencontré des problèmes pour justifier le tableau de fréquence de Pile dans 17 échantillons lors du passage à des échantillons de plus grande taille (II. 2).
Du coup, mon cours a pris une forme très différente, mais je ne suis pas sûre que ce soit satisfaisant par rapport aux programmes (je vous le joins, pour que vous puissiez me dire ce que vous en pensez...).

~ Bibliographie ~

ASSUDE T. (2004), *L'étude du curriculum de mathématiques entre changements et résistances. Liens entre Ecologie et économie didactique*. Document pour l'habilitation à diriger des recherches.

BROUSSEAU G., *Stratégies de l'analyse statistique*. LADIST Université Bordeaux I.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N., WARFIELD G. (2002), An experiment on the teaching of statistics and probability, *Journal of mathematical behavior*, 20.

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude, Cours1&3. Structures et fonctions. In Dorier JL et alii (ed) *Actes de la XI° Ecole d'été de didactique des mathématiques)*. La Pensée Sauvage.

CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques présidée par JP. Kahane), (2001), *Rapport d'étape "Statistique et Probabilités*"/ (2003), *Rapport d'étape "Statistique ".*

ESCOUFIER Y. (2000), La formation à la statistique. In Académie des Sciences, *La statistique*, rst n°8. Tec & Doc.

MEN (1999), *Programme de seconde*, B.O. Hors-Série n° 6 du 16 août 1999/ (2000), A*ccompagnement des programmes, Mathématiques, classe de seconde*. CNED.

ROBERT C. (1999), A propos de l'introduction de l'enseignement de la statistique dans les lycées. *Bulletin APMEP n°425.*

VERGNE C. (2005), *La notion de variabilité dans le nouveau programme de seconde : étude de conditions de viabilité*, Mémoire de DEA, IREM de Montpellier.

~ ANNEXE I ~

BIBLIOGRAPHIE

LIVRES

ROBERT C. (2003), *Contes et décomptes de la statistique*, Vuibert.
une approche plaisante de la statistique

SCHWARTZ D.(1997, 1°édition 1994), *Le jeu de la science et du hasard*, Flammarion.
présente quelques idées incontournables sur les statistiques, facile à lire

EKELAND I. (1991), *Au hasard*, Points Sciences.
des passages passionnants (chiffres au hasard, déterminisme, suites contingentes…)

LAHANIER-REUTER D.(1999), *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*, PUF.
où l'on définit 5 conceptions du hasard

BESSON et al.(1992), *La cité des chiffres*, Autrement.
un autre regard sur les statistiques, très intéressant

CII Statistique/Probabilités, *Autour de la modélisation en probabilités*, PUFC, Collection Didactiques.

DROESBEKE et TASSI (1990), *Histoire de la statistique*, Que sais-je.
pour se faire une idée de l'évolution des statistiques

VESSEREAU A. (20° édition 1999), *La statistique*, Que sais-je.
pour une première approche des contenus d'un point de vue théorique

BROCHURES

DUTARTE /PIEDNOIR (2001), *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes*, Irem Paris-Nord.
un excellent aperçu de "ce qu'il faut savoir" pour enseigner en lycée

GIRARD/GROS/PLANCHETTE/REGNIER/THOMAS (1998), *Enseigner la statistique du CM à la seconde. Pourquoi, comment ?*, IREM de Lyon.
des points de vue passionnants ; le point sur les histogrammes

REVUES

Tangente n° spécial 47 (sur les probabilités) et **Tangente n° spécial 77** (sur les statistiques).
certains articles sont intéressants

Dossier pour la science, *Le hasard*, et Dossier pour la science, *Les mathématiques sociales*. Belin.
certains articles sont intéressants

Sciences et Avenir (oct-nov 2001), *Dieu joue-t-il aux dés ?*
différents points de vue sur les probabilités

SITES

Centre de ressources, lieu de partage et de mutualisation pour l'enseignement de la statistique :
www.statistix.fr

Des simulations des thèmes statistiques de seconde :
http://www.irem.univ-mrs.fr
http://perso.wanadoo.fr/jpq

Des simulations dynamiques de quelques concepts de base en statistique :
http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm

GEPS :
http://www.ac-poitiers.fr/gtdmaths/
http://www.ac-strasbourg.fr/pedago/gtd/

Un logiciel pour la formation (articles, cours, simulation dynamiques) :
http://www.inrialpes.fr/sel/

~ ANNEXE II ~

STATISTIQUE A UNE VARIABLE REELLE

<table>
<tr><td></td><td colspan="7">Variable discrète</td><td colspan="6">Variable continue ou considérée comme telle</td></tr>
<tr><td></td><td>Série brute</td><td colspan="6">Série dépouillée (non chronologique)</td><td colspan="6">Regroupement par classe</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Données</td><td rowspan="4">Valeurs : v_1 , v_2 , …….,v_n
L'effectif est n.</td><td>Valeurs*</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_r</td><td></td><td>Classes*</td><td>$[a_0, a_1[$</td><td>$[a_1, a_2[$</td><td>….</td><td>$[a_{r-1}, a_r[$</td><td></td></tr>
<tr><td>Effectifs partiels</td><td>n_1</td><td>n_2</td><td>…</td><td>n_r</td><td>n</td><td>Effectifs partiels</td><td>n_1</td><td>n_2</td><td>…</td><td>n_r</td><td>n</td></tr>
<tr><td>Fréquences</td><td>$f_1 = \frac{n_1}{n}$</td><td>$f_2 = \frac{n_2}{n}$</td><td>…</td><td>$f_r = \frac{n_r}{n}$</td><td>1</td><td>Fréquences</td><td>$f_1 = \frac{n_1}{n}$</td><td>$f_2 = \frac{n_2}{n}$</td><td>…</td><td>$f_r = \frac{n_r}{n}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="6">*dans l' ordre croissant</td><td colspan="6">* sauf mention contraire dans certains cas pour les classes extrêmes</td></tr>
<tr><td>Représe n--tation graphique</td><td></td><td colspan="6">Diagramme en bâtons ou en barres :

A chaque valeur de x_i portée en abscisse, on fait correspondre un segment vertical de longueur proportionnelle à l'effectif n_i ou à la fréquence f_i.
L'épaisseur des segments est quelconque.</td><td colspan="6">Histogramme :
Ensemble de rectangles contigus, chacun ayant pour base la largeur de la classe et une aire proportionnelle à la fréquence de la classe (ou à l'effectif).
Chaque rectangle a une hauteur proportionnelle à la densité de fréquence $\frac{f_i}{a_i - a_{i-1}}$ (ou d'effectif).
L'aire totale de l'histogramme représente l'unité (ou l'effectif total).</td></tr>
<tr><td>Mode</td><td colspan="7">Toute valeur de la série qui a le plus grand effectif.</td><td colspan="6">Classe modale :
classe dont la densité de fréquence est la plus élevée.</td></tr>
<tr><td>Moyenne</td><td>Erreur ! = Erreur !</td><td colspan="6">Erreur ! = Erreur !
Erreur ! = $f_1x_1 + … + f_rx_r$</td><td colspan="6">Pour une valeur approchée, par convention : on remplace chaque classe par son centre* ($\frac{a_{i-1} + a_i}{2}$) que l'on nomme x_i puis on applique les formules ci-contre.
*sauf mention contraire dans certains cas pour les classes extrêmes.</td></tr>
<tr><td>Médiane</td><td colspan="7">La série est ordonnée par ordre croissant
► Pour les calculatrices :
▪ s'il y a un nombre impair de valeurs, la médiane est la valeur du milieu
▪ s'il y a un nombre pair de valeurs, la médiane est la ″demi-somme des valeurs du milieu″
► Il y a au moins 50% des valeurs qui sont inférieures ou égales à Me, il y a au moins 50% des valeurs qui sont supérieures ou égales à Me.</td><td colspan="6">Classe médiane :
première des classes pour laquelle la fréquence cumulée croissante atteint ou dépasse 0,5.</td></tr>
</table>

Etendue	$e = v_{max} - v_{min}$	$e = x_r - x_1$	
Ecart type	Noté s (standard déviation) ou σ ou σ_x (calculatrices) s = **Erreur !**	Noté s (standard déviation) ou σ ou σ_x s = **Erreur !** s = **Erreur !**	Pour une valeur approchée, par convention : on remplace chaque classe par son centre* que l'on nomme x_i puis on applique les formules ci-contre. *sauf mention contraire dans certains cas pour les classes extrêmes.
Variance	Le carré de l'écart type (s^2 ou V) $s^2 = \frac{v_1^2 + \ldots + v_n^2}{n}$ – **Erreur !**^{2}	Le carré de l'écart type (s^2 ou V) $s^2 = \frac{n_1x_1^2 + \ldots + n_rx_r^2}{n}$ – **Erreur !**^{2} $s^2 = f_1x_1^2 + \ldots + f_rx_r^2$ – **Erreur !**^{2}	Le carré de l'écart type (s^2 ou V)

~ ANNEXE III ~

SIMULATION

ET

FLUCTUATION D' ECHANTILLONNAGE

Dans votre classe, la parité des sexes est-elle respectée ?

I PILE ou FACE

1) Exercice (à faire pour demain)

Simuler en tirant à Pile ou Face la répartition des sexes dans une assemblée de 34 personnes (Face : fille ; Pile : garçon).

Remarque de Manon : mais , il se peut qu'il y ait 99% de garçons !

2) Recueil des résultats

Le lendemain, P. fait circuler une feuille que les élèves renseignent.

3) 34 échantillons de taille 34

(La feuille ci-contre est distribuée à chaque élève).

Chaque élève a effectué un **échantillon** de taille 34 et compté le nombre de Pile. On obtient une série de 34 nombres.

Pour cette série, quels sont le mode ?

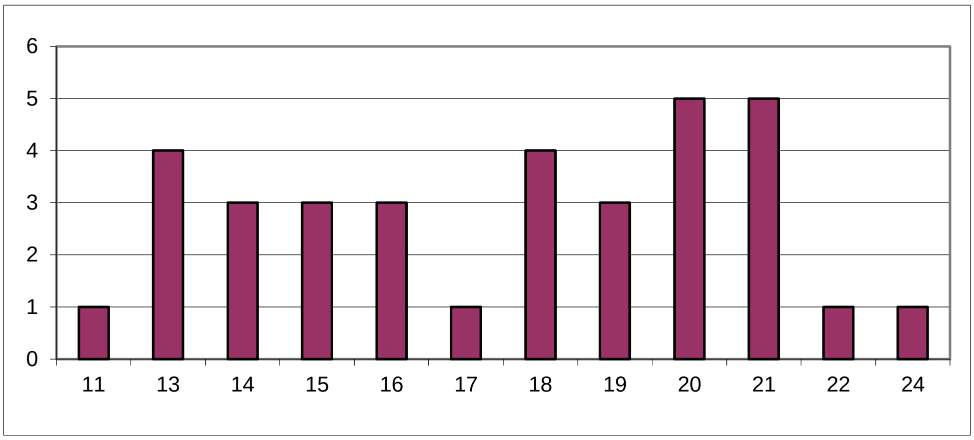
la médiane ?

la moyenne ?

l'étendue ?

	34 lancers nombre de piles
Arnaud	18
Caroline	19
Brice	22
Laura	20
Elodie	16
Lydie	14
Mathilde	20
M-Charlotte	20
Lisa	19
Lucie	21
Emmanuelle	13
Chloé	14
Anne	15
Lirone	21
Cynthia	20
Elodie	16
Manon	17
Bertrand	15
David	13
Lise	21
Anaïs	18
Nicolas	19
Eve	18
Sylvain	24
Loïs	14
Elodie	13
Marine	20
Céline	18
Céline	11
Franck	13
Fanely	16
Olivier	21
Laure	15
Angélique	21

Dépouillement de la série														
Valeurs prises														
Effectifs														



Remarques ? **Quand une expérience dépend du hasard, les échantillons n'ont pas tous la même composition, il y a "fluctuation d'échantillonnage".**

II MISE EN EVIDENCE D'UN PHENOMENE

1) Echantillons de taille 68

a) P. Pouvez-vous, à partir des résultats déjà obtenus, produire des échantillons de taille 68 ?

-

-

On peut cumuler des échantillons obtenus de manière indépendante pour obtenir un échantillon de taille plus grande.
Si on duplique un échantillon, il n'est plus produit au hasard.

b) Les élèves se groupent par 2 et forment des échantillons de taille 68. Puis chaque élève répond à la question suivante :
Y a-t-il proportionnellement plus de pile dans mon échantillon que dans celui de mon groupe ?

Pour comparer des échantillons de taille différentes, il est utile de passer aux fréquences.

2) Echantillons de plus grande taille (La feuille suivante est distribuée à chaque élève)

Fréquence de Pile dans 17 échantillons					
	A de taille 68	B de taille 340 68×5	C de taille 1020 340×3	D de taille 1360 340+1020	E de taille 2000
1	**0,49**				0,49
2	**0,47**		0,50	0,49	0,50
3	**0,63**		0,48	0,49	0,50
4	**0,56**	0,51	0,48	0,51	0,52
5	**0,51**	0,49	0,51	0,48	0,49
6	**0,47**	0,66	0,49	0,50	0,47
7	**0,65**	0,49	0,55	0,50	0,50
8	**0,50**	0,48	0,46	0,47	0,49
9	**0,47**	0,46	0,50	0,51	0,50
10	**0,60**	0,51	0,49	0,54	0,49
11	**0,46**	0,49	0,50	0,49	0,52
12	**0,37**	0,51	0,50	0,50	0,49
13	**0,41**	0,47	0,49	0,48	0,50
14	**0,54**	0,52	0,52	0,48	0,50
15	**0,60**	0,54	0,51	0,48	0,50
16	**0,46**	0,56	0,50	0,50	0,49
17	**0,56**	0,50	0,49	0,51	0,50

a) Colonne A : résultas obtenus par les élèves.

b) Colonne B:
Dans les cases déjà remplies, les « fréquence de Pile » ont été obtenues par le professeur par des moyens qui seront explicités plus tard.
Peut-on compléter les cases vides à l'aide des résultats de la classe?

c) Colonne C : Peut-on compléter la case vide à l'aide des résultats de la classe?

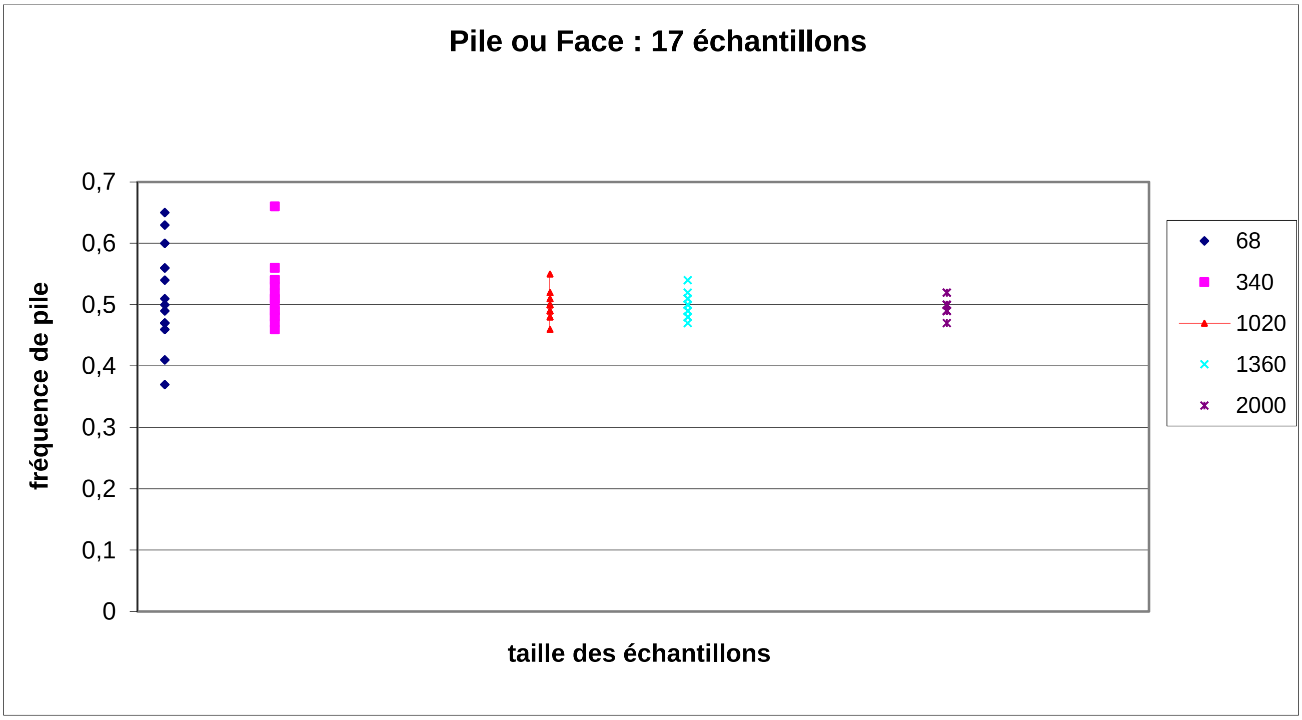
d) Colonne D : Peut-on compléter la case vide à l'aide des résultats de la classe?

3) Graphique

a) Dans un graphique, placer les points ayant pour abscisses la taille 68 et pour ordonnée les fréquences obtenues.
Qu'est-ce qui rend compte de la fluctuation d'échantillonnage sur le graphique ? Comment la mesurer ?

b) Sur le graphique précédent, placez les points ayant pour abscisse la taille 340 et ordonnée les fréquences obtenues.
Qu'est-ce qui rend compte de la fluctuation d'échantillonnage sur le graphique ? Comment la mesurer ?

c) Terminer le graphique. Pouvez-vous faire des remarques ?



Il semble que l'ampleur des fluctuations diminue quand la taille des échantillons augmente.

4) Plus précisément,

a) Taille 340 : la plupart des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{340}} ; \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{340}}]$

Taille 340 : ……………………………………………………………………[0,4457… ; 0,5542 …]
Taille 340: 95% environ des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle [0,44 ; 0,56]

b) Taille 1020 : la plupart des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{1020}} ; \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{1020}}]$

Taille 1020 : ……………………………………………………………………[0,468… ; 0,5313 …]
Taille 1020: 95% environ des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle [0,46 ; 0,54]

c) Taille 1360 : la plupart des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{1360}} ; \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{1360}}]$

Taille 1360 : ……………………………………………………………………[0,4428… ; 0,5271 …]
Taille 1360: 95% environ des fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle [0,44 ; 0,53]

d) etc….

5) Propriété fondamentale

Pour un phénomène aléatoire dont on connaît la fréquence théorique p, on forme des échantillons de taille n. Dans environ au moins 95 % des cas, l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contient la fréquence observée dans l'échantillon (ceci est d'autant mieux vérifié que la taille n des échantillons et le nombre de tirages sont plus élevés).

6) Application à la question de la parité des sexes

Si l'on considère qu'il y a parité des sexes quand chaque individu a autant de chances d'être un garçon ou une fille, au "niveau de confiance 0,95", on ne rejettera pas l'idée qu'il y a parité dans la classe si la fréquence de filles observée appartient à la fourchette $[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{34}} ; \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{34}}]$.

~ ANNEXE IV ~

SIMULATION
ET
FLUCTUATION D' ECHANTILLONNAGE

Vaut-il mieux être le joueur A ou le joueur B ?

1) Un jeu

On utilise un dé à 6 faces, équilibré. On le lance.
- Si le dé tombe sur 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5, le joueur A avance d'une case. Pour gagner une partie, il faut qu'il ait avancé de 5 cases.
- Si le dé tombe sur 6, le joueur B gagne directement la partie.

Préfères-tu être le joueur A ou le joueur B ?

Exemple :

1	4	6	5	4	4	2	1	3	3	6	2
1	6	4	3	6	4	3	3	2	5		

2) Un outil pour simuler le hasard : la touche random de la calculatrice.

Taper plusieurs fois sur la touche random

.1216853324	0,153
.4930062012	0,25
.534806747	0,287
.6448564206	0,533

On admet que :

- On ne peut pas prévoir les chiffres qui vont apparaître : <u>imprédictibilité</u>
- La sortie d'un chiffre ne dépend pas des chiffres qui sont déjà sortis : <u>indépendance</u> (… et répétition des chiffres possible)
- Sur un grand nombre de tirages, on observe une relative <u>équirépartition</u> des chiffres

3) Comment simuler le lancer d'un dé ?

random

. 5 3 4 8 0 6 7 4 7
. 6 4 4 8 5 6 4 2 0 6

Chiffres affichés										
Dé										
Chiffres affichés										
Dé										

4) Exercice maison : Chaque élève doit simuler 10 parties du jeu et déterminer, dans son échantillon, la fréquence de gain de A et la fréquence de gain de B.

5) Exploitation des résultats

échantillon de taille 10	fréq. gain A	fréq. gain B
Chloé	0,3	0,7
Franck	0,3	0,7
Anne	0,6	0,4
Fanely	0,4	0,6
Lirone	0,4	0,6
Cynthia	0,4	0,6
Olivier	0,5	0,5
Laure	0,4	0,6
Elodie	0,6	0,4
Manon	0,1	0,9
Angélique	0,4	0,6
Bertrand	0,3	0,7
Celine	0,2	0,8
Marine	0	1
Lucie	0,5	0,5
M-Charlotte	0,2	0,8
Loïs	0,3	0,7
Mathilde	0,3	0,7
Sylvain	0,4	0,6
David	0,3	0,7
Caroline	0,5	0,5
Lise	0,4	0,6
Brice	0,4	0,6
Anaïs	0,2	0,8
Laura	0,2	0,8
Nicolas	0,2	0,8
Eve	0,4	0,6
Celine	0,3	0,7
Lydie	0,5	0,5
Emmanuelle	0,2	0,8
Elodie	0,4	0,6
Elodie G	0,2	0,8
Lisa	0,5	0,5
Arnaud	0,4	0,6
échantillon de taille …		

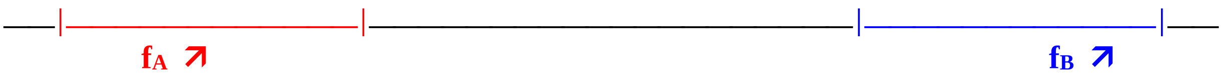
a) Comment P a-t-il calculé la fréquence de gain de A à partir des valeurs de la classe?
b) Pourquoi n'a-t-il pas calculé la fréquence de gain de B?

Propriété fondamentale et définition

On considère un phénomène aléatoire dont on ignore la fréquence p et pour lequel, dans un échantillon de taille n (n > 30), on a observé une fréquence f (0,3 < f < 0,7).
Quelle que soit la valeur de p, dans au moins 95% des cas environ, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient p inconnue.
Cet intervalle est appelé intervalle de confiance*, au niveau de confiance 0,95.
*** ou fourchette de sondage**

c) A l'aide de l'échantillon obtenu par la classe, déterminer la fourchette au niveau de confiance 0,95 pour fréquence de A. Sur une droite graduée, construire l'intervalle.
d) déterminer la fourchette au niveau de confiance 0,95 pour fréquence de B. Sur la même droite graduée, construire l'intervalle.

e) Peux-tu décider si tu préfères être le joueur A ou le joueur B ?



6) Prolongement

Lors d'une élection présidentielle, le candidat A et le candidat B sont en concurrence.
1) Une semaine avant l'élection, un journaliste annonce à la télévision : **"Un sondage donne 51% d'intentions de vote pour A et 49% pour B"**. Ton frère te dit : " Je pense que A va être élu !" Le sondage a été réalisé sur un échantillon de taille 1000.

a) Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat A et trace en rouge cette fourchette sur un axe. Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat B et trace en vert cette fourchette sur le même axe.
b) Que réponds - tu à ton frère ?
2) Le soir de l'élection à 20 h, un journaliste annonce à la télévision : **"Un sondage donne 51% de voix pour A et 49% pour B"**. Ton frère te dit : " Je pense que A va être élu !" Le sondage a été réalisé sur un échantillon de taille 100000
a) Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat A et trace en rouge cette fourchette sur un axe. Calcule une fourchette de sondage au niveau de confiance 0,95 pour le candidat B et trace en vert cette fourchette sur le même axe.
c) Que réponds - tu à ton frère ?

~ ANNEXE V ~

SIMULATION
ET
FLUCTUATION D' ECHANTILLONNAGE

Etude d'une distribution de fréquences

1) Distribution des fréquences dans deux échantillons de taille 10

Constituer un échantillon de taille 10 d'un lancer de dé et placer les résultats dans le tableau ci-dessous.

Distribution des fréquences pour 10 lancers						
	1	2	3	4	5	6
échantillon Xavier						
échantillon Yves	0	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3

Construire un diagramme en bâton comparant l'échantillon X et l'échantillon Y.
Constatez-vous une fluctuation d'échantillonnage ?
Comment mesurer l'ampleur des fluctuations ?
Calculer la moyenne des points obtenus pour l'échantillon X et pour l'échantillon Y.
Placer ces deux valeurs en abscisse.

2) Distribution des fréquences dans deux échantillons de taille 100

Résultats arrondis à 10^{-2} obtenus par simulation :

Distribution des fréquences pour 100 lancers						
	1	2	3	4	5	6
échantillon X	0,11	0,13	0,16	0,15	0,21	0,24
échantillon Y	0,17	0,13	0,15	0,15	0,25	0,15

Construire un diagramme en bâton comparant l'échantillon X et l'échantillon Y.
Constatez-vous une fluctuation d'échantillonnage ?
Comment mesurer l'ampleur des fluctuations ?
Calculer la moyenne des points obtenus pour l'échantillon X et pour l'échantillon Y.
Placer ces deux valeurs en abscisse.

3) Distribution des fréquences dans deux échantillons de taille 1000

Résultats arrondis à 10^{-3} obtenus par simulation :

Distribution des fréquences pour 1000 lancers						
	1	2	3	4	5	6
échantillon X	0,152	0,170	0,158	0,153	0,168	0,199
échantillon Y	0,164	0,167	0,160	0,172	0,148	0,189

Construire un diagramme en bâton comparant l'échantillon X et l'échantillon Y.
Constatez-vous une fluctuation d'échantillonnage ?
Comment mesurer l'ampleur des fluctuations ?
Calculer la moyenne des points obtenus pour l'échantillon X et pour l'échantillon Y.
Placer ces deux valeurs en abscisse.

4) Quelles remarques peut-on faire en comparant les trois études précédentes?

5) Blaise te propose un jeu : tu mises 3 euros, tu lances un dé, si le chiffre apparu sur le dé est x, tu remportes x euros. Es-tu prêt à jouer 1 fois, 10 fois, 100 fois, 1000 fois ? Pourquoi ?

Distribution de fréquences et loi de probabilité

Extrait du document d'accompagnement du programme de 1°S, ES

<table>
<tr><th colspan="5">Distribution de fréquences
sur E ={ $x_1, x_2,\dots x_r$}</th><th colspan="5">Loi de probabilité
sur E = { $x_1, x_2, \dots x_r$}</th></tr>
<tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_r</td><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_r</td></tr>
<tr><td>f_i</td><td>f_1</td><td>f_2</td><td>…</td><td>f_r</td><td>p_i</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>…</td><td>p_r</td></tr>
<tr><td colspan="5">$(f_1,\dots,f_i)$
$f_i \geq 0; \sum f_i = 1$
$A \subset E$, fréquence de A : $f(A) = \sum\limits_{x_i \in A} f_i$
Événement complémentaire : $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$
Événements A et B disjoints :
$f(A \cup B) = f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$
Cas numérique :
Moyenne empirique : $\bar{x} = \sum f_i x_i$
Variance empirique : $s^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$
Écart type empirique : $s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$</td><td colspan="5">$(p_1,\dots,p_r)$
$p_i \geq 0; \sum p_i = 1$
$A \subset E$, probabilité de A : $P(A) = \sum\limits_{x_i \in A} p_i$
Événement complémentaire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Événements A et B disjoints :
$P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$
Cas numérique :
Espérance d'une loi P : $\mu = \sum p_i x_i$
Variance d'une loi P : $\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2$
Écart type d'une loi P : $\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}$</td></tr>
</table>

Atelier Modélisation-Simulations en Lycée

Maurice Ocquidant

IUFM de Montpellier

Résumé :
L'atelier proposera un contenu de formation permettant de mener une réflexion sur les problèmes de la modélisation, de la simulation et de l'échantillonnage qui sous-tendent les programmes de statistiques du lycée et conduisent à la notion de probabilité. Cela nous conduira naturellement à l'utilisation du tableur pour aborder ces notions à travers des exercices et activités utilisables dans les classes du lycée.

Présentation de l'atelier

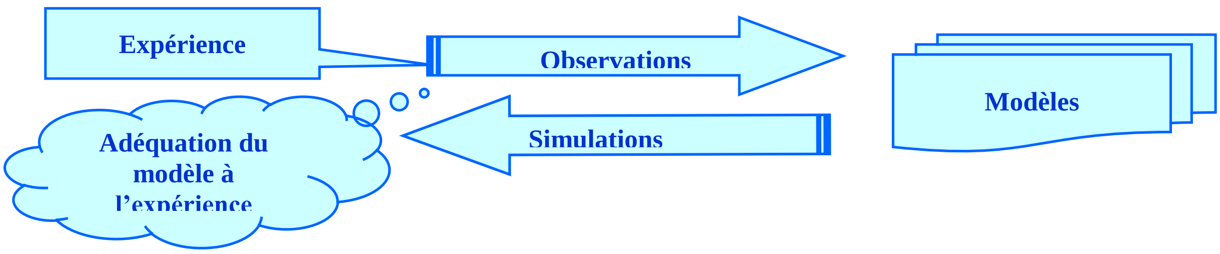
1. Les programmes

- Le chapitre des *probabilités-statistiques* a été profondément remanié dans les nouveaux programmes des Lycées (2000 en seconde…), non seulement dans ses contenus mais aussi dans son esprit.
- Dans les anciens programmes les probabilités apparaissaient comme un sous-produit de la combinatoire, avec une formule magique et presque unique : p(A)=card(A)/card(Ω). On faisait des probabilités pascaliennes : la probabilité était donnée « **a priori** » sans essayer de justifier son émergence.
- Actuellement l'esprit c'est celui des **statistiques inférentielles** où se rejoignent les statistiques et les probabilités. On fait donc du Bernoulli. La probabilité et la loi de probabilité sont données **« a posteriori »** comme limite d'une fréquence et d'une distribution de fréquence.
- C'est à l'articulation Seconde-Première que se situe la difficile tâche de faire émerger le concept de loi de probabilité à partir des distributions de fréquences de seconde.
- Il est recommandé dans les commentaires de traiter des données en nombre suffisant pour justifier une étude statistique.

2. Modélisation-Simulation

- La simulation **est l'expérimentation sur un modèle** : c'est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle (le modèle) du phénomène à étudier puis à étudier le comportement de cette reproduction en faisant varier certains paramètres puis induire ce qui se passerait dans la réalité.
- On peut rappeler l'évolution des programmes de **Seconde** qui introduisent après des statistiques descriptives une partie permettant une première sensibilisation à la modélisation, mais sans vraiment mettre le modèle en place.

- Les notions de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doivent pas faire l'objet d'un cours mais l'objectif de ce programme est de faire entrer dans l'enseignement l'observation, la modélisation et la simulation pour effectuer la démarche scientifique complète rappelée ci-dessus.
- Dans un deuxième temps, pour poursuivre la conceptualisation, il nous faudra **construire le ou les modèles** susceptibles de correspondre au problème étudié (le plus souvent il sera question de choisir une loi de probabilité mais seulement en Première).
- Dans un troisième temps, nous aurons à simuler les modèles pour tester ou vérifier leur bien-fondé. C'est le moment de la **confrontation au réel.**
- Simulations avec la touche « **Random** » de la calculatrice ou la fonction «=**alea**() » du tableur ou utilisation d'une **table de nombres aléatoires**.
- On va donc réintégrer dans ce chapitre une partie importante de la démarche scientifique qui est celle de l'expérimentation, des essais, des erreurs et des observations qui conduisent au modèle selon le schéma suivant.



3. Quelques illustrations

J'ai choisi de vous présenter quelques activités afin d'offrir une base et des illustrations à la critique de l'utilisation des TICE. Les situations pourront être utilisées soit dans le cadre de l'enseignement secondaire, soit dans le cadre de la future épreuve expérimentale du baccalauréat, soit dans le cadre des formations PLC1-PLC2.

*A dessin je me suis servi de deux types de logiciels différents dont l'utilisation est gravée dans le marbre des programmes officiels : le **tableur** bien entendu (Excel ici mais on peut faire l'équivalent avec Open Calc) et de **Géoplace** qui permet de donner du sens et surtout de rentrer dans les situations par les interactions ou l'aspect dynamique des situations géométriques utilisées (la fourmi qui marche sur l'arête d'un cube ou bien l'ivrogne aléatoire marchant dans New York ....). Cela a au moins l'intérêt de montrer la nécessité de la modélisation.*

a) **Pile ou Face :**

On commence par une situation simple avec une modélisation classique mais utilisant Géoplan. Les intentions **didactiques** sont claires :

- Modélisation citée dans les programmes
- Répétition de la simulation facilement
- Vision simultanée de 3 traductions imagées de l'expérimentation
- Approche simplissime et très visuelle de la stabilisation des fréquences
- On peut compléter, comparer avec un fichier tableur

b) **Mendel Gregor** :

Voici un Sujet que j'ai proposé en préparation à l'épreuve sur dossier du Capes. Les objectifs :

- Modéliser une situation expérimentale liée à l'hérédité et s'appuyant sur des données recueillies il y a presque un siècle et demi
- Activité pluridisciplinaire avec une référence historique
- Un sujet à vocation formative qui tente de faire un bon tour d'horizon sur la problématique de l'adéquation qui va un peu au-delà des programmes(ici la loi n'est pas équirépartie comme le souhaite le programme)…
- Construire une distribution de Khi2 (Voir Mendel_Khi2) à l'aide du tableur et qui permet de mener l'enquête sur l'honnêteté .scientifique de Mendel.

c) **La cible :**

Situation basée sur un exercice de première et terminale (voir ici les objectifs pédagogiques) qui se retrouve dans de nombreux manuels. On pourra lui donner un caractère plus expérimental en faisant retrouver le modèle qui se cache derrière la simulation.

d) **Sondages** :

J'ai essayé dans ce fichier de construire une situation expérimentale sur l'échantillonnage.

- ✓ On modélise une population (oui-non) avec choix possible de la taille (≤20 000) et d'une probabilité théorique que l'on dissimule aux élèves.
- ✓ Il est question alors de faire des échantillonnages : nous aurons, par l'intermédiaire d'un curseur, le choix de la taille des **échantillons**(k ≤1500). Ainsi nous pourrons simuler de nombreux phénomènes relevant de cette modélisation
- ✓ Pour bien visualiser, chaque expérience sera représentée par une cellule d'une plage 100x(n/100) et cette cellule aura un motif (vert=F ou ocre=P)
- ✓ On va ensuite procéder à des sondages dans cette population (échantillons de taille k) de 2 façons :
  - Par tirage global d'un bloc aléatoire de k cellules (tirages sans remise) : c'est l'**échantillon 2**
  - Par tirage aléatoire de k cellules (tirages avec remise) : c'est l'**échantillon 1**
  - Il est possible de multiplier les échantillonnages à l'aide de deux boutons.

e) **Pluie aléatoire** :

Une animation traitée avec Géoplan pour montrer que la géométrie peut aussi permettre de modéliser et de faire des statistiques.

- ✓ Pour commencer on peut mettre en évidence les pièges lorsqu'on veut faire une simulation s'appuyant sur des points aléatoires dans un disque : exemple 1 ; exemple 2 ;….
- ✓ Ce premier fichier permet de visualiser la situation du paradoxe de Bertrand d'une part, de retrouver la stabilisation d'une fréquence et de traiter le problème de la pluie aléatoire en offrant une approximation de pi. On peut comparer (ici) avec le traitement par tableur.
- ✓ Bertrand3. Il s'agit de faire comprendre le célèbre paradoxe de Bertrand et d'illustrer l'importance du choix du modèle. Voir (ici) les explications

f) Surbooking:

Pour finir un fichier qui essaye de traiter expérimentalement la problématique de la surallocation de réservations. On peut voir les intentions didactiques (ici). C'est un fichier très technique, il faudra l'utiliser comme une boîte noire et développer une activité s'appuyant sur ce fichier informatique soit comme objectif de formation en PLC2 soit pour une expérimentation en classe, ce qui n'a jamais été fait.

g) Quelques outils

- ✓ Loi normale : permet de retrouver rapidement les paramètres des intervalles de confiance avec une bonne visualisation de la signification (remplace finalement les tables)
- ✓ Loi binomiale : c'est un peu le même esprit que l'outil précédent avec, en plus, une bonne visualisation des rapports entre loi normale et binomiale.
- ✓ Intervalles de confiance : ayant eu beaucoup de mal à comprendre les rapports entre les 3 paramètres (taille de l'échantillon, degré de confiance et fourchette), la mise au point de cet outil m'a aidé (voir des explications ici)
- ✓ Boîte à moustache : je vous laisse le soin de juger de l'intérêt de cet outil
- ✓ Générateurs de nombres (pseudo)aléatoires : pour essayer de comprendre comment fonctionnent ces générateurs et pourquoi les nombres engendrés sont pseudo-aléatoires.

4. Conclusion

J'espère que les quelques pistes ouvertes ici vous aideront à avancer dans les différentes tâches nouvelles qui vous attendent dans vos exaltantes fonctions.

Je laisse à votre disposition les fichiers que vous avez visualisés et d'autres. Ce ne sont que des productions personnelles que vous pouvez modifier/adapter à vos besoins…il n'y a pas de copyright. Je ne souhaite qu'une chose, c'est que vous en fassiez profiter vos élèves, les étudiants, les stagiaires.

Présenter aux futur(e)s professeur(e)s une image positive de la statistique et de ses enjeux citoyens

Philippe Dutarte

Lycée Édouard Branly Créteil – IREM de Paris-Nord.

L'attitude de la communauté mathématique française à l'égard de la statistique et des probabilités n'a pas toujours été favorable. On peut par exemple citer les propos diamétralement opposés d'André Weil et d'Émile Borel. Alors que le premier ironisait (vers 1940) sur le fait que « *la statistique moderne paraît avoir enfin résolu le problème légendaire qui consistait, connaissant la longueur du navire et la durée de la traversée à calculer l'âge du capitaine…* », le second affirmait (vers 1910) que « *si la notion de vérité statistique devenait familière à tous ceux qui parlent ou écrivent au sujet de questions où la vérité statistique est la seule vérité, bien des sophismes et bien des paradoxes seraient évités.* »

Notre expérience de formateur à l'IREM de Paris-Nord nous a le plus souvent conduit à rencontrer des professeurs de mathématiques dont l'attitude face à la statistique était celle de la méfiance voire du dénigrement, sur le thème de la statistique comme « art suprême du mensonge », qui plus est, sous couvert de méthodes prétendues scientifiques. Dans ces conditions, on comprend avec quelle conviction ces professeurs enseignent les chapitres de statistique, considérés comme hors des mathématiques. Jean-Pierre Raoult, dans un récent article[12], affirme qu'on « *ne peut faire admettre par les enseignants de collège ou de lycée une matière d'enseignement si on ne les a pas au préalable convaincus de son statut de discipline scientifique et, éventuellement, de sa place comme sous-discipline par rapport à celle qui, à leurs yeux, fonde leur légitimité disciplinaire (en ce qui nous concerne ici, les mathématiques)* », ajoutant que pour beaucoup la statistique apparaît comme une « *technique rudimentaire, mystérieuse et suspecte* ».

Or il y a de bonnes raisons pour enseigner la statistique comme un ensemble de méthodes scientifiques (mathématiques) permettant d'accéder à la connaissance (une certaine connaissance à défaut d'une connaissance certaine), en particulier parce que les thèmes abordés en statistique motivent les élèves pour les mathématiques et participent fondamentalement à l'éducation du citoyen. Jean-Pierre Raoult cite dans son article plusieurs grands noms à l'appui de cette thèse, à commencer par Condorcet qui affirmait à propos de l'utilité des « mathématiques sociales » : « *on verra qu'aucun de nos intérêts individuels ou publics ne lui est étranger, qu'il n'en est aucun sur lequel elle ne nous donne des idées plus précises, des connaissances plus certaines* », ou Didier Dacunha-Castelle écrivant en 1996 dans « Chemins de l'aléatoire. Le hasard et le risque dans la société moderne » que « *le recours aux mathématiques du hasard donne un instrument pédagogique important qu'il faut utiliser pour porter en avant la réflexion sur les sondages, sur l'acte médical ou sur les risques du nucléaire* » ainsi que Jean-Pierre Kahane affirmant devant l'Académie des Sciences en 2000 : « *En France, à la différence d'autres pays européens, les citoyens n'ont pas une formation suffisante à la prise en compte du mode de pensée statistique* ».

---

[12] Jean-Pierre Raoult – « La statistique : une discipline mathématique à part entière ? » – APMEP Revue PLOT n° 18 – 2007.

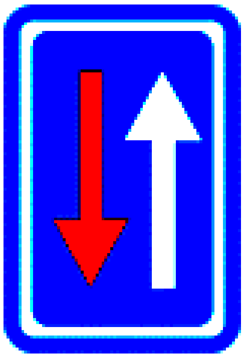
Il ne s'agit pas de feindre que les méthodes statistiques sont simples et sans danger (le développement de l'esprit critique est évidemment une priorité), mais il est certainement contre productif d'aborder la statistique sous l'angle du « méfiez-vous » avant d'être convaincu de son utilité et de son efficacité. Un ouvrage publié récemment par Nicolas Gauvrit[13] aux éditions Ellipse, se vend sous l'injonction « *Statistiques, méfiez-vous !* ». L'ouvrage est plutôt bien fait (quoique la majorité des exemples sont des constructions ad hoc), mais l'obsession des « pièges » et de la manipulation conforte dans ses opinions le lecteur ayant une image bien négative de la statistique. Ainsi, par exemple, le chapitre « *Statistique inférentielle : Qu'est-ce que c'est ?* » débute par (page 143) : « *Comme la statistique inférentielle est la partie la plus souvent utilisée des statistiques, mais aussi la plus dangereuse puisqu'elle permet de donner des conclusions affirmatives « prouvées » par l'expérience, il faut comprendre au moins l'idée générale qui se cache derrière elle pour en éviter les pièges.* », ou, trois pages plus loin, « *quel raisonnement nous cachent donc ceux qui affirment que la statistique a « démontré » que... ?* ». Oserons nous dire que la statistique ne sert pas qu'à tendre des pièges et que ces raisonnements prétendument cachés (s'agit-il d'un complot ?) commencent à s'enseigner (en théorie) en classe de seconde ?
Les activités présentées s'appuient sur une pratique des mathématiques « par l'expérience », facilitée par les moyens informatiques. Le choix d'exemples réalistes, en prise avec le monde et les questions de société, motive indéniablement les élèves, en particulier les « non matheux », permettant de mettre en évidence les implications de notre enseignement. Ce n'est pas que les exemples ludiques, comme les jets de pièces et de dés, soient sans intérêt ; bien au contraire, ils constituent un outil pédagogique essentiel à l'étude de l'aléatoire, mais ils ne peuvent, à eux seuls, en justifier les enjeux. Les études statistiques développées ici suscitent des interrogations, en décelant des « tendances » qui, sans trancher sur la causalité des phénomènes, suggèrent des lieux où aller regarder « ce qui a pu se passer ». Elles débouchent donc sur un dialogue qui, dans la classe, entre élèves et professeurs de mathématiques ou d'autres disciplines, et avec l'appui de sources documentaires telles qu'Internet, peut être analogue à celui que doivent mener de vrais utilisateurs de la statistique.

Les exemples étudiés permettront d'envisager une réponse aux questions suivantes :

- La proportion d'élèves d'origine populaire à l'École polytechnique était de 21% en 1950 et de 7,8% en 1990. L'ascenseur social est-il en panne?
- La campagne de la Fédération française de cardiologie du printemps 2007affirme que « 80% des victimes d'infarctus sont des fumeurs ». L'information montre-t-elle que le risque d'infarctus est plus important pour un fumeur ?
- Une petite ville des États-Unis a connu 9 cas de leucémies chez de jeunes garçons en l'espace de 10 années. Doit-on en « accuser le hasard » ?
- Comment aux États-Unis, la statistique a-t-elle permis de mettre en évidence une discrimination conduisant à casser un jugement ?
- Dans un village du Canada, entre 1999 et 2003, sur 132 naissances, il n'y a eu que 46 garçons. Est-ce très étonnant ? Est-ce inquiétant (sachant que de nombreuses usines chimiques se trouvent à proximité) ?
- Le dernier sondage de 2002 ne prévoyait pas la présence de Jean-Marie Le Pen au second tour. Le dernier sondage CSA d'avril 2007 plaçait J-M Le Pen devant F. Bayrou. Les sondages sont-il scientifiques ?
- Le magazine *Le Point* du 13/09/2002 écrit : « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ». Que faut-il en penser ?

[13] Nicolas Gauvrit – « Statistiques : méfiez-vous ! » - Ellipse 2007.

1 – Proportions et ascenseur social



L'exemple proposé ici a été cité par Jean-Louis Piednoir[14], en termes de proportions, pour illustrer le fait qu'il faut comparer ce qui est comparable et en particulier tenir compte de l'évolution de la constitution de la population sous-jacente. Le même exemple est beaucoup plus développé dans un ouvrage récent par Claudine Schwartz[15], en termes de probabilités conditionnelles, en particulier pour souligner le fait que la définition et les propriétés mathématiques d'un indicateur sont essentielles à connaître pour en comprendre le sens.

Chargé par le ministre Claude Allègre d'un rapport sur l'organisation des études supérieures, Jacques Attali, par ailleurs polytechnicien, citant une étude de Claude Thélot [16], concluait à une « dé-démocratisation » du recrutement des élites. Cette réflexion se fondait sur le tableau suivant :

Proportions d'élèves d'origine populaire	1951 - 1955	1989 - 1993
EP (École polytechnique)	21 %	7,8 %
ENA (École nationale d'administration)	18,3 %	6,1 %
ENS (Écoles normales supérieures)	23,9 %	6,1 %
HEC (Hautes études commerciales)	38,2 %	11,8 %
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	29 %	8,6 %

D'après le tableau précédent, le verdict semble sans appel... l'ascenseur social est en panne. Mais il faut comparer ce qui est comparable et le tableau suivant, extrait de l'étude de Thélot, montre que la composition sociale française s'est considérablement modifiée entre ces deux époques.

Proportion de la population d'origine populaire	1951 - 1955	1989 - 1993
parmi les 20-24 ans	90,8 %	68,2 %

Il s'agit donc de tenir compte des deux tableaux pour se forger une opinion.

Énoncé (niveau 3ème – 2nde)

On dispose du tableau suivant, donnant, parmi les élèves reçus à l'École polytechnique, la proportion de ceux issus de classes « défavorisées » (classes notées *D*) et ceux issus de classes « favorisées » (classes notées *F*), pour les périodes 1950 et 1990.

Proportions d'élèves reçus à l'École polytechnique	1950	1990
d'origine défavorisée *D*	21 %	7,8 %
d'origine favorisée *F*	79 %	92,2 %

[14] Piednoir (Jean-louis) – Dutarte (Philippe) – *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes* – IREM de Paris-Nord – 2001.

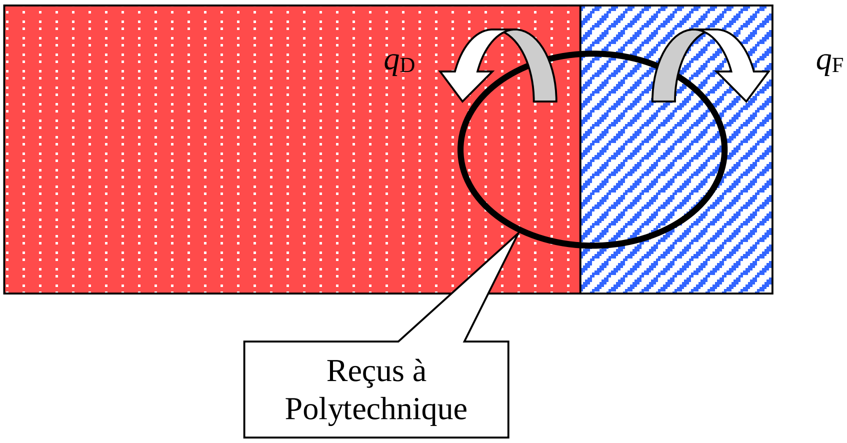
[15] Schwartz (Claudine) – *Pratiques de la statistique* – Vuibert 2006 – Chapitre 3 : *Des mots et des chiffres : probabilités conditionnelles, risques relatifs*. On consultera cet ouvrage pour mettre en perspective les activités proposées ici.

[16] Euriat et Thélot – *Le recrutement des élites scolaires depuis 40 ans* – Revue *Éducation et formation* juin 1995. Les chiffres cités ici proviennent de cet article.

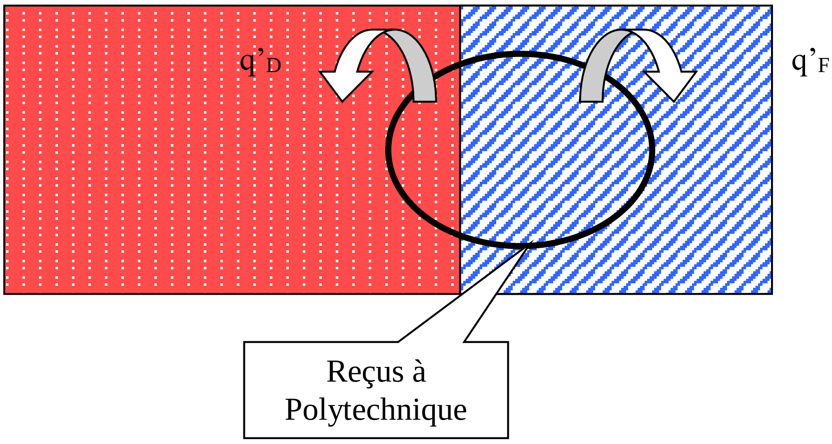
Pour étudier si la discrimination sociale est plus forte dans les années 1990 que dans les années 1950, il faut tenir compte de l'évolution de la composition de la société française entre ces deux périodes.

Proportions de la population des 20-24 ans	1950	1990
d'origine défavorisée D	90,8 %	68,2 %
d'origine favorisée F	9,2 %	31,8 %

1950 : population défavorisée | favorisée



1990 : population défavorisée | favorisée



1. Que signifie 21% dans le premier tableau ?
Que signifie 90,8% dans le second tableau ?
2. a) On note r le nombre de reçus à Polytechnique en 1950, exprimer en fonction de r le nombre de reçus à Polytechnique d'origine défavorisée en 1950.
b) On note p le nombre de jeunes de 20-24 ans en 1950.
Montrer que proportion q_D de reçus à Polytechnique parmi la population défavorisée en 1950 est $q_D = \dfrac{0{,}21 \times r}{0{,}908 \times p}$.
3. Donner, de même, l'expression de la proportion q_F de reçus à Polytechnique parmi la population favorisée en 1950.

4. On note $t = \dfrac{q_F}{q_D}$. Montrer que t □ 37.

On peut interpréter ce résultat en disant qu'en 1950 un jeune « favorisé » a 37 fois plus de chances d'entrer à Polytechnique qu'un jeune « défavorisé ».

5. Pour comparer avec la situation en 1990, on utilise les mêmes notations que ci-dessus, avec un ' . On considère donc $t' = \dfrac{q_F'}{q_D'}$.

Calculer t'.

Peut-on considérer que « l'ascenseur social » s'est amélioré entre 1950 et 1990 ?

6. On souhaite utiliser le tableur (selon l'image d'écran suivante) pour calculer les quotients t et t' dans les quatre autres cas de ce tableau :

Proportions d'élèves d'origine défavorisée (*D*)	1950	1990
ENA (École nationale d'administration)	18,3 %	6,1 %
ENS (Écoles normales supérieures)	23,9 %	6,1 %
HEC (Hautes études commerciales)	38,2 %	11,8 %
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	29 %	8,6 %

On pourra organiser les calculs (ici pour l'École polytechnique) selon l'image d'écran, de sorte qu'il suffise de modifier le contenu des cellules B2 et C2.

	A	B	C	D
1	Proportion d'élèves reçus	1950	1990	
2	D	**0,21**	**0,078**	
3	F	0,79	0,922	
4				
5	Proportion des 20-24 ans	1950	1990	
6	D	0,908	0,682	
7	F	0,092	0,318	
8				
9		t	t'	
10		37,1283644	25,3509111	
11				

Interpréter les résultats obtenus.

Éléments de réponse

2. Le nombre de reçus d'origine *D* est 0,21 □ r et le nombre de 20-24 ans d'origine *D* est 0,908 □ p.

3. On a $q_F = \dfrac{0{,}79 \times r}{0{,}092 \times p}$.

4. On a $q_D = \dfrac{0{,}21 \times r}{0{,}908 \times p}$. D'où $t = \dfrac{0{,}79}{0{,}092} \times \dfrac{0{,}908}{0{,}21}$ □ **37**.

5. On a $q_F' = \dfrac{0{,}922 \times r'}{0{,}318 \times p'}$ et $q_D' = \dfrac{0{,}078 \times r'}{0{,}682 \times p'}$. D'où $t' = \dfrac{0{,}922}{0{,}318} \times \dfrac{0{,}682}{0{,}078}$ □ **25**.

Pour ce qui concerne Polytechnique, on peut considérer que l'ascenseur social s'est (un peu) amélioré.

6. On peut entrer en B3 la formule =1-B2 puis la recopier vers la droite en C3.

On peut entrer en B10 la formule =(B3/B7)*(B6/B2) puis la recopier vers la droite en C10.

On obtient les résultats suivants (arrondis à l'unité).

	t	t'
ENA (École nationale d'administration)	44	33
ENS (Écoles normales supérieures)	31	33
HEC (Hautes études commerciales)	16	16
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	24	23

On peut considérer globalement que les inégalités sociales de recrutement de ces écoles sont importantes et ont peu évolué entre 1950 et 1990.
Il faut cependant préciser qu'il ne s'agit ici que des grandes écoles, le cas du supérieur en général est différent, en particulier avec la création des BTS et des IUT.

2 – Proportions et risque : tabac et infarctus

□ La campagne de la Fédération française de cardiologie du printemps 2007affirme que « 80% des victimes d'infarctus sont des fumeurs ». L'information montre-t-elle que le risque d'infarctus est plus important pour un fumeur ?

Énoncé (niveau 3ème – 2nde)

La Fédération française de cardiologie affiche l'information ci-contre dans une campagne de presse.

1. Parmi les victimes d'infarctus ayant moins de 45 ans, quelle est la proportion de non-fumeurs ?
2. Pourquoi l'information donnée permet de penser que fumer augmente le risque d'infarctus ?
3. On peut estimer qu'en France, parmi les moins de 45 ans, il y a environ 40% de fumeurs.
a) On note n le nombre de cas d'infarctus observés chez les moins de 45 ans.
Exprimer en fonction de n le nombre d'infarctus parmi les fumeurs.
b) On note p le nombre de personnes de moins de 45 ans.
Montrer que proportion q_F d'infarctus parmi les fumeurs est $q_F = \dfrac{0,80 \times n}{0,40 \times p}$.
4. Donner, de même, l'expression de la proportion $q_{\overline{F}}$ d'infarctus parmi les non-fumeurs.
5. Montrer que $\dfrac{q_F}{q_{\overline{F}}} \approx 6$.

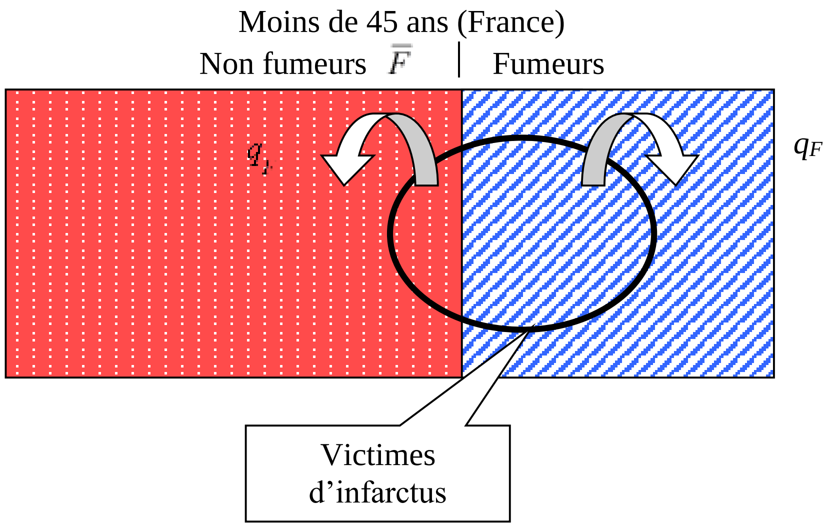
On peut interpréter ce résultat en disant que pour les moins de 45 ans, un fumeur a 6 fois plus de risques d'avoir un infarctus qu'un non-fumeur.

Sources :

Fédération française de cardiologie – www.tabac.gouv.fr – INSEE.

Pour la proportion des fumeurs en France, les estimations sont variables : aux alentours de 34% de la population. Le site tabac.gouv.fr affirme, à partir des données de l'INSEE, que la proportion de fumeurs dans la classe d'âge 18-25 ans était de 48% en 2000, 40% en 2003 et est remontée en 2005-2006.

Éléments de réponse



1. 20%.
2. On sait qu'il y a moins de 80% de fumeurs. On en déduit que les fumeurs sont sur-représentés parmi les cas d'infarctus.
3. $q_F = \dfrac{0{,}8\times n}{0{,}4\times p}$.
4. $q_{\overline{F}} = \dfrac{0{,}2\times n}{0{,}6\times p}$.
5. $\dfrac{q_F}{q_{\overline{F}}} = \dfrac{0{,}8\times 0{,}6}{0{,}4\times 0{,}2} = 6$.

2 – Inquiétudes à Woburn : jusqu'où croire au « hasard » ?

□ Une petite ville des États-Unis a connu 9 cas de leucémies chez de jeunes garçons en l'espace de 10 années. Doit-on en « accuser le hasard » ?

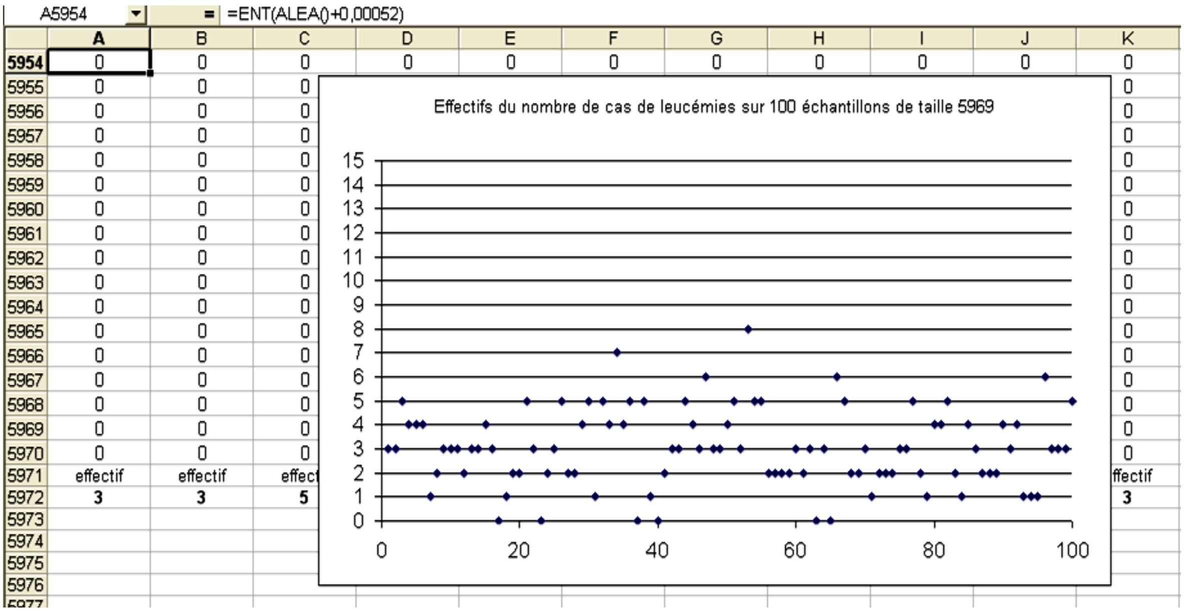
Cet exemple montre l'importance des enjeux de la méthode statistique.

Woburn est une petite ville industrielle du Massachusetts, au Nord-Est des Etats-Unis. Du milieu à la fin des années 1970, la communauté locale s'émeut d'un grand nombre de leucémies infantiles survenant dans certains quartiers de la ville. Les familles se lancent alors dans l'exploration des causes et constatent la présence de décharges et de friches industrielles ainsi que l'existence de polluants. Dans un premier temps, les experts gouvernementaux concluent qu'il n'y a rien d'étrange. Mais les familles s'obstinent et saisissent leurs propres experts. Une étude statistique montre qu'il se passe sans doute quelque chose « d'étrange ».

Le tableau suivant résume les données statistiques concernant les garçons de moins de 15 ans, pour la période 1969-1979 (Source : *Massachusetts Department of Public Health*).

Population des garçons de moins de 15 ans à Woburn selon le recensement de 1970 : *n*	Nombre de cas de leucémie infantile observés à Woburn entre 1969 et 1979	Fréquence des leucémies aux Etats-Unis *p*
5969	9	0,00052

La question statistique qui se pose est de savoir si le hasard seul peut raisonnablement expliquer le nombre de leucémies observées chez les jeunes garçons de Woburn, considérés comme résultant d'un échantillon prélevé dans la population américaine.
La population des Etats-Unis étant très grande par rapport à celle de Woburn, on peut considérer que l'échantillon résulte d'un tirage avec remise et simuler des tirages de taille *n* avec le tableur.
On peut aisément simuler sur le tableur 100 échantillons de taille $n = 5969$ prélevés au hasard dans une population où $p = 0{,}00052$ en utilisant l'instruction :
=ENT(ALEA()+0,00052) .
Sur chaque échantillon, en faisant la somme, on obtient le nombre de cas observés.
On peut représenter sur un graphique les 100 résultats observés sur les échantillons simulés.



Les simulations montrent que le nombre de cas observés à Woburn (9 cas) est extrêmement rare (moins de 1 % des simulations), si l'on ne considère que le hasard comme explication.
On ne peut donc pas raisonnablement attribuer au seul hasard le niveau très « significativement » élevé des leucémies infantiles observées chez les garçons de Woburn.
Ce taux anormalement élevé de leucémies est officiellement confirmé par le Département de Santé Publique du Massachusetts en avril 1980. Les soupçons se portent alors sur la qualité de l'eau de la nappe phréatique qui, par des forages, alimente la ville. On découvre ainsi le syndrome du trichloréthylène.

3 – Justice et discrimination : « preuve » statistique

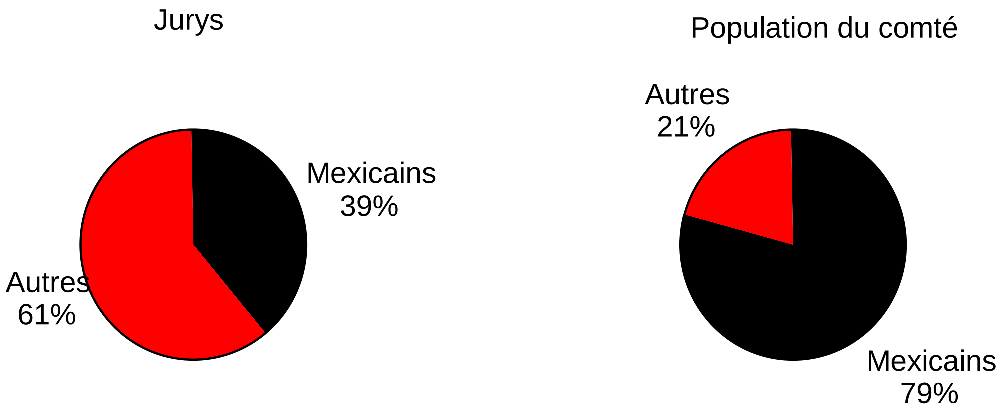
 Comment aux États-Unis, la statistique a-t-elle permis de mettre en évidence une discrimination conduisant à casser un jugement ?

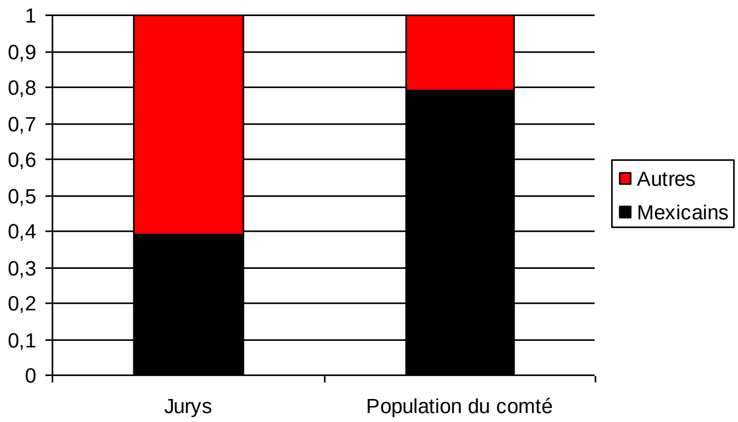
En fin de chapitre de statistique, la situation suivante a été proposée à des élèves de seconde. Après une recherche en salle informatique (50 minutes), un travail d'argumentation est demandé sous forme de devoir à la maison.
La grande liberté donnée dans les consignes (voir l'énoncé ci-dessous) a quelque peu déstabilisé les élèves (« Qu'est-ce qu'on doit faire ? ») mais a favorisé une grande diversité des réponses et l'utilisation d'un langage personnel. La correction a associé la professeure de français qui, après avoir visé le travail des élèves, a pu faire le parallèle avec les techniques d'argumentation en littérature (la seule différence véritable étant qu'ici les exemples sont des graphiques et des calculs au lieu de citations d'un texte).

Énoncé distribué aux élèves

L'affaire Castaneda contre Partida.
En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison.
Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 79,1% de la population du comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoqués pour être jurés lors des 11 années précédentes, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.
Produisez votre expertise statistique.
Devant la Cour Suprême, un expert statisticien produisit des arguments pour convaincre du bien fondé de la requête de l'accusé (les juges votèrent à 5 contre 4 en faveur de la requête).
En vous situant dans le rôle de cet expert, produisez à votre tour des calculs, des raisonnements, des graphiques... pour montrer que le hasard ne peut pas « raisonnablement » expliquer à lui seul la sous-représentation des américains d'origine mexicaine dans les jurys de ce comté.
 Vous commencez ce travail en binômes en utilisant les documents disponibles, la calculatrice, le tableur.
 Vous terminez la rédaction (arguments en français, calculs, graphiques...) en devoir individuel, à la maison.

Une première partie du travail sur tableur a consisté en une analyse descriptive des données conduisant les uns ou les autres à produire des tableaux croisés, des histogrammes ou des camemberts.

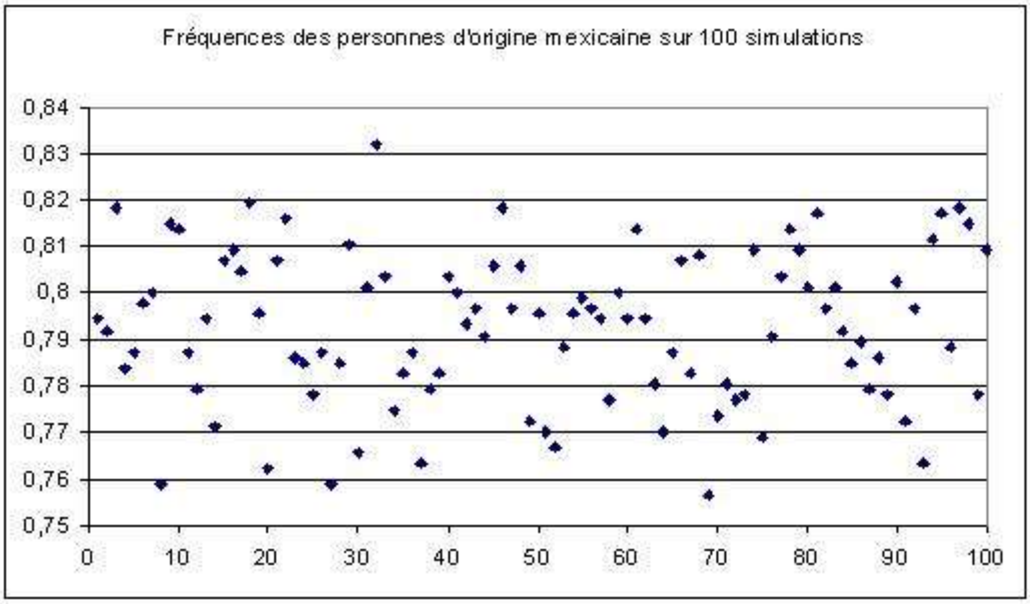




La seconde partie du travail devait consister à utiliser les moyens informatiques pour montrer que l'écart (important) observé ne peut raisonnablement pas s'expliquer par le seul hasard.
Pour cela, on peut simuler 870 tirages au sort dans la population du comté en utilisant la formule =ENT(ALEA()+0,791) . Certains ont ensuite raisonnés en effectifs, d'autres en fréquences de personnes d'origine mexicaine.
On peut vérifier que plus de 95 % des simulations fournissent une fréquence de personnes d'origine mexicaine comprise dans l'intervalle :

$[\, p - \frac{1}{\sqrt{n}}\, ,\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\,]$ c'est-à-dire $[0{,}791 - \frac{1}{\sqrt{870}}\ ;\ 0{,}791 + \frac{1}{\sqrt{870}}\,]$

c'est-à-dire environ [0,76 ; 0,82].
Voici un exemple de 100 simulations en fréquences des personnes d'origines mexicaines sur les échantillons de taille 870 :



La fréquence observée des personnes d'origine mexicaine dans les jurys est 0,39 qui est très éloignée de l'intervalle [0,76 ; 0,82]. Jamais les simulations n'ont permis d'observer un résultat aussi bas. Ceci permet de dire que le hasard n'est sans doute pas responsable de la sous représentation des personnes d'origine mexicaine dans les jurys.
Reste à rechercher les causes de cette sous représentation (l'une des raisons est la nécessité d'une bonne connaissance de l'anglais écrit et parlé).

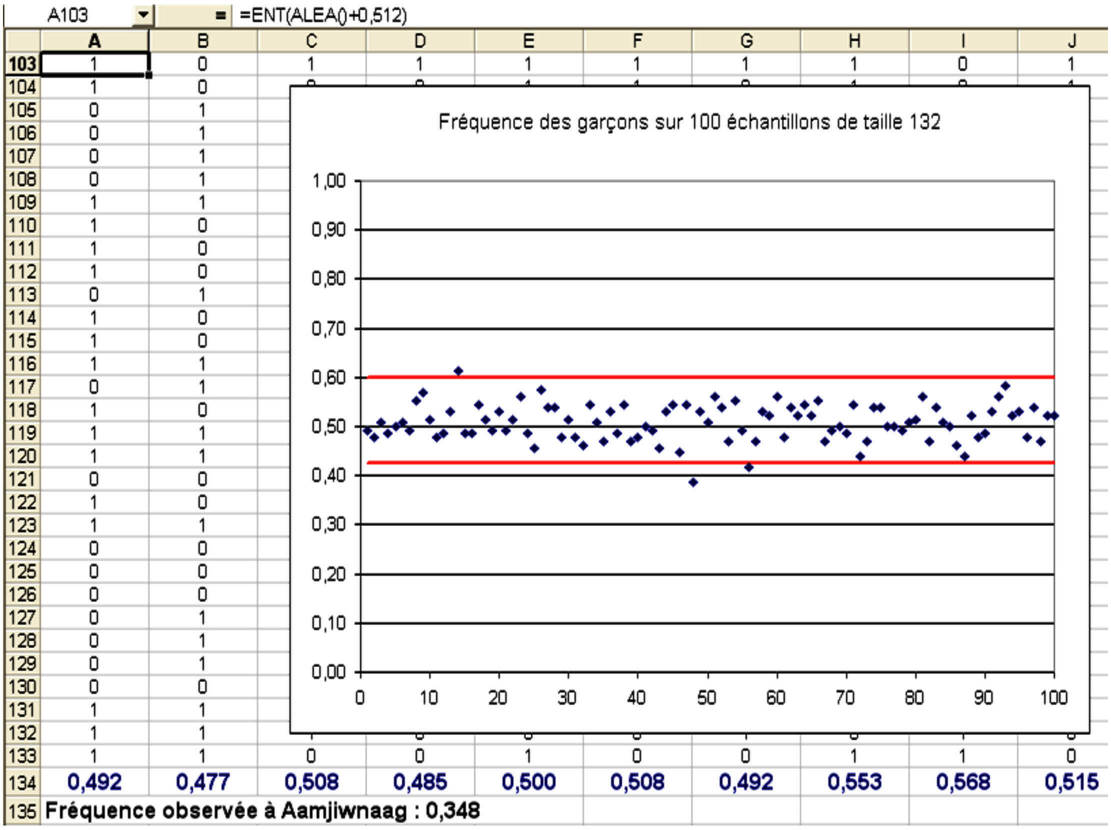
4 – Pollution et sex-ratio : « alerte » statistique

□ Dans un village du Canada, entre 1999 et 2003, sur 132 naissances, il n'y a eu que 46 garçons. Est-ce très étonnant ? Est-ce inquiétant (sachant que de nombreuses usines chimiques se trouvent à proximité) ?

Le « sex-ratio » est le rapport du nombre de garçons à celui des filles à la naissance. Sa remarquable stabilité est une des premières découvertes de la statistique. Il est habituellement de 105 garçons pour 100 filles, soit une fréquence de garçons de

$p = \frac{105}{105+100}$ □ 0,512.

Dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au Canada, il est né entre 1999 et 2003, 132 enfants dont 46 garçons (Sources : *Science et Vie* février 2006 – *Environnemental Health Perspectives* octobre 2005 – article en ligne). Cela donne une fréquence observée des garçons valant $f = \frac{46}{132}$ □ 0,348. C'est bien peu, mais dans l'absolu cela ne veut rien dire si l'on n'a pas étudié les fluctuations des échantillons de taille 132 sous l'hypothèse d'une fréquence « normale » valant $p = 0,512$.



Cette étude sur le tableur sera l'occasion d'expérimenter la « loi » selon laquelle, si la taille des échantillons n'est pas trop petite et la fréquence p pas trop faible plus de 95 % des échantillons fournissent une fréquence comprise dans l'intervalle $[0{,}512 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0{,}512 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ c'est-à-dire [0,424 ; 0,599], qui correspond, en quelque sorte, à l'intervalle de « variabilité naturelle » des échantillons de taille $n = 132$.

On constate que la fréquence des garçons observée, soit 0,348 , n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation de plus de 95 % des échantillon sous l'hypothèse $p = 0{,}512$. On dit que la fréquence observée présente une « différence significative » au niveau 0,95.

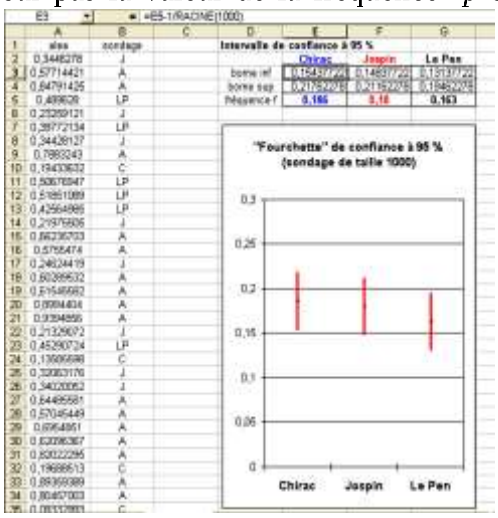
A la question « Que peut-on tirer comme conclusion ? », on peut seulement ici répondre que « cette étude pose question ». La statistique donne l'alerte, ce qui est déjà beaucoup. Le fait que la réserve soit située au cœur d'industries chimiques devient un élément troublant sur lequel on doit enquêter.

De façon générale, c'est la notion de « preuve statistique » qui est ici en jeu. Il ne s'agit pas d'une « preuve » au sens habituel mais d'un élément probant, d'une présomption. D'autres explications possibles du déséquilibre du sex-ratio pourraient être liées au mode de vie de ces indiens ou à leur patrimoine génétique. Une étude statistique comparative a été menée sur des indiens de la même tribu vivant dans un autre environnement et a (dé)montré que ce n'était (sans doute) pas le cas. En revanche l'influence de certains produits chimiques sur le sex-ratio a été établie « statistiquement » par d'autres études. Une recherche sur Internet permettra d'avoir d'autres éléments sur ce dossier (qui a fait polémique au Canada).

5 – Sondages

□ Le dernier sondage de 2002 ne prévoyait pas la présence de Jean-Marie Le Pen au second tour.
Le dernier sondage CSA d'avril 2007 plaçait J-M Le Pen devant F. Bayrou.
Les sondages sont-il scientifiques ?

L'attitude de l'opinion vis à vis des sondages est souvent sans nuance : on leur prête des pouvoirs de prédiction qu'ils n'ont pas (en omettant souvent de fournir les « fourchettes ») et (ou) on déclare qu'ils se trompent 9 fois sur 10.
On peut mettre en parallèle le dernier sondage publié par BVA et effectué sur 1000 électeurs :
Jacques Chirac **19 %**, Lionel Jospin **18 %**, Jean-Marie Le Pen **14 %**,
avec le résultat du premier tour :
Jacques Chirac **19,88 %**, Lionel Jospin **16,18 %**, Jean-Marie Le Pen **16,86 %**,
et poser la question « le sondage est-il faux ? ».
On a vu que si la fréquence dans la population est p, plus de 95 % des échantillons aléatoires de taille n fournissent une fréquence dans l'intervalle $[\, p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,,\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\,]$.
Quand on effectue un sondage, on ne connaît bien sûr pas la valeur de la fréquence p sur la population, on ne connaît que la fréquence f obtenue sur l'échantillon. On peut alors calculer la fourchette $[\, f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,,\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\,]$ et affirmer que ce procédé est fiable à plus de 95 % c'est-à-dire que plus de 95 % des fourchettes ainsi calculées recouvrent effectivement la valeur p que l'on veut estimer.
Il est fort instructif d'expérimenter ces fourchettes dans la situation du premier tour de l'élection de 2002.
On peut représenter les fourchettes des trois candidats en utilisant le « diagramme boursier » du tableur. Il faut pour cela avoir, dans cet ordre, la borne inférieure, la borne supérieure et le centre de la fourchette.



Sur l'image d'écran ci-contre, on a d'abord entré en E5 la formule
=NB.SI(B2:B1001;"C")/1000 puis en E3 la formule
=E5-1/RACINE(1000) et en E4 la formule =E5+1/RACINE(1000) .

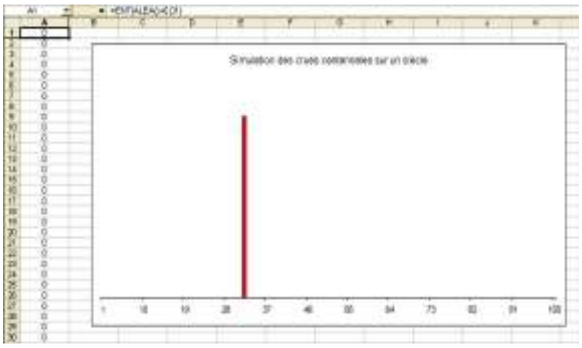
Le sondage suivant, effectué avant le premier tour de 2007, pose davantage de questions, en particulier quant aux méthodes de « redressement » utilisées.
Dernier sondage C.S.A. , effectué sur 1002 électeurs le vendredi 20/04/07 :
François Bayrou 16 % – Jean-Marie Le Pen 16,5 % .
Résultats du premier tour le dimanche 22/04/07 :
François Bayrou 18,57 % – Jean-Marie Le Pen 10,44 % .

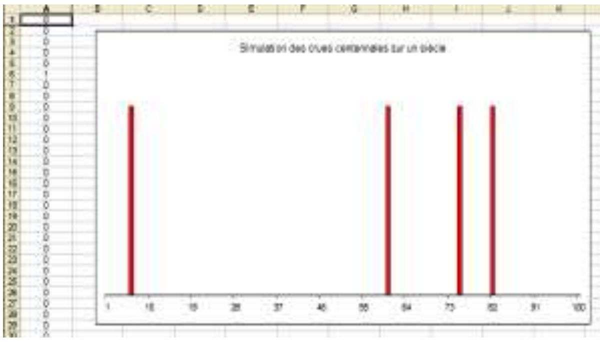
6 – Crues et notion de probabilité

 Le magazine *Le Point* du 13/09/2002 écrit : « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ». Que faut-il en penser ?

Dans une revue technique de juin 2003[17], des « spécialistes », ingénieurs et hydrologues, insistent sur le fait « *qu'informer les citoyens sur les risques d'inondation par des messages clairs et compréhensibles est un enjeu social et économique fort mais complexe* ». Lorsqu'on parle de crue centennale, cela signifie que chaque année elle a une chance sur 100 de se produire (indépendamment des années précédentes). Il faut se rendre compte que sur l'échelle d'un siècle, cela peut donner des situations très variables.

Il est utile au citoyen d'expérimenter les fluctuations d'échantillons de taille 100 (un siècle). Ce qui est très facile sur le tableur (ou une calculatrice).
On peut ensuite reconsidérer la déclaration du journaliste du *Point*.





[17] Revue *Ingénieries – eau, agriculture, territoires* n°34 juin 2003, article intitulé *Risque d'inondation : une notion probabiliste complexe pour le citoyen* de N. Gendreau, F. Grelot, R. Garçon et D. Duband.

Bibliographie succincte

- CHAPUS (Brigitte) & HENRY (Michel) éditeurs – Commission Inter-Irem Statistique et probabilités - APMEP – Brochure n° 156 – *Statistique au lycée* - volume 1 et 2 (à paraître).

- DOWEK (Gilles) – *Peut-on croire les sondages ?* – Le Pommier 2002.

- DUTARTE (Philippe), *L'induction statistique au lycée illustrée par le tableur*, Didier 2005.

- PIEDNOIR (Jean-Louis), DUTARTE (Philippe), *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes,* IREM Paris-Nord 2003.

- SCHWARTZ (Claudine) – *Pratiques de la statistique* – Vuibert 2006.

Internet

- www-irem.univ-paris13.fr/
  A partir du site de l'IREM de Paris-Nord, on peut accéder aux pages du groupe « statistique et citoyenneté ».
  Ou, plus directement,
  http://dutarte.club.fr/Sitestat/default.htm
- www.statistix.fr/

Le site « Statistix », coordonné par Claudine Schwartz, présente de nombreuses ressources pour les enseignants, avec souvent une dimension inter-disciplinaire.

Simulation informatique et modélisation
Simulation d'un sondage

Michel Henry
CII *Statistique et probabilités*
IREM de Franche-Comté, Besançon

Abstract :

In this work, we put the question of the didactical status of computational simulations of random phenomenon. The computer's power as random numbers generator allows an experimental approach of sampling fluctuations in the class room, and asks for numerical models to simulate random experiences. In this setting, we can introduce new experimental methods to solve probability problems.

I – Le statut didactique de la simulation

1.1. Quelques questions didactiques posées par la simulation informatique

Dans cet atelier, nous posons la question du statut didactique de la simulation informatique d'un échantillonnage aléatoire dans une population statistique.

L'option expérimentaliste très marquée de la présentation des programmes de statistique et probabilités des lycées pose de nombreuses questions pour l'organisation de cet enseignement. On peut notamment s'interroger sur l'efficacité didactique des situations nées de la présence massive de l'ordinateur dans la classe :

- simulation informatique de données statistiques, approche expérimentale de leur gestion et compréhension de concepts de base : prélèvements aléatoires dans une population, échantillonnage, caractères, distributions de fréquences, fluctuations d'échantillonnage,
- apports de l'ordinateur comme générateur puissant de nombres au hasard (suites de chiffres pseudo-aléatoires) et introduction à la modélisation probabiliste d'expériences aléatoires,
- résolution expérimentale de problèmes et savoirs théoriques impliqués.

1.2. Remarques sur la simulation informatique

Une définition :

> La simulation est *l'expérimentation sur un modèle.* C'est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle *(modèle)* du phénomène que l'on désire étudier, à observer le comportement de cette reproduction lorsque l'on fait varier expérimentalement les actions que l'on peut exercer sur celle-ci, et à en induire ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'actions analogues. (Encyclopédie Universalis).

Les programmes proposent de multiplier les observations de l'aléatoire par la simulation informatique. Le document d'accompagnement du programme de première précise page 72 :

> « …modéliser consiste à associer un modèle à des données expérimentales, alors que simuler consiste à produire des données à partir d'un modèle prédéfini. On parlera de simulation d'une loi de probabilité… ».

L'ordinateur est-il un véritable générateur de hasard ? Non. Actuellement, les chiffres pseudo-aléatoires que l'ordinateur ou la calculatrice fournissent sont déterminés, dès lors qu'il ont commencé un calcul sur la base d'une initialisation qui détermine à chaque fois des suites différentes de chiffres, en principe équirépartis[18]. Mais la complexité de leur calcul rend impossible leur prévision par tout autre moyen humain. « *On a alors le phénomène fortuit* » selon l'expression de Henri Poincaré. Tout se passe donc comme si les chiffres fournis par la fonction ALEA de l'ordinateur ou RANDOM de la calculatrice étaient issus d'un tirage au hasard de boules numérotées de 0 à 9 dans une urne.

Mais, par exemple, en "simulant" un sondage sur Excel, ayant introduit la valeur p de la proportion à estimer dans l'ordinateur comme paramètre d'une loi de Bernoulli à simuler, que pouvons-nous réellement obtenir ? On peut seulement vérifier que le résultat de l'estimation de p issue d'un échantillonnage confirme que le fabricant de l'ordinateur et le concepteur du logiciel ont bien rempli leurs cahiers des charges.

Cependant, ne négligeons pas l'intérêt de l'outil informatique. Dans notre exemple, il permet une approche expérimentale des situations de sondages, et si la proportion p est cachée aux élèves, nous avons un outil de résolution de problèmes jouant le même rôle que les calculettes graphiques quand elles tracent des courbes représentatives de fonctions données.

Mais notre question est plus fondamentalement didactique. L'ordinateur nous permet d'abord de travailler rapidement sur de vastes séries statistiques, ce qui donne aux résumés statistiques (moyennes, écarts types, etc.) toute leur importance. Il nous permet ensuite une présentation animée du fonctionnement et de l'interaction des notions de fréquence et de probabilité abordées auparavant, soit théoriquement, soit au travers d'expériences pratiques en nombre trop limité pour pouvoir déboucher valablement sur une bonne compréhension de la loi des grands nombres.

Même si, dans son fonctionnement réel, l'ordinateur se limite à exhiber les effets sur les fréquences affichées du principe d'équirépartition des chiffres pseudo aléatoires qu'il génère, l'usage que nous en faisons dans la classe, comme « pseudo-générateur de hasard », permet de faire comprendre *en actes* ces notions de fréquence, de fluctuations d'échantillonnages et de probabilité.

Mais on ne peut se satisfaire de la seule exploitation de la puissance et la rapidité de l'ordinateur pour exhiber des nombres aléatoires, permettant de présenter aux élèves une grande richesse de nouvelles expériences aléatoires, car cela n'aurait qu'un intérêt limité. Son intérêt didactique, en tant qu'outil de simulation, tient plus essentiellement en ce qu'il nous oblige à analyser la situation aléatoire en jeu, à émettre des hypothèses de modèle, notamment sur la loi de probabilité idoine pour représenter l'intervention du hasard dans l'expérience réelle (par exemple pour un sondage, sur le choix de la valeur de la probabilité p de Bernoulli à implanter), et à traduire ces hypothèses en instructions informatiques pour que l'ordinateur nous permette de résoudre des problèmes éventuellement inaccessibles par le calcul a priori.

De ce point de vue, cela suppose la compréhension du processus de modélisation. Cela suppose aussi une connaissance théorique permettant d'interpréter les résultats obtenus expérimentalement, rapportés aux hypothèses de modèle introduites. Simulant ainsi une expérience aléatoire réelle, l'ordinateur, au-delà de l'exploration statistique, devient un outil didactique majeur pour l'apprentissage de la modélisation en statistique et probabilités.

---

[18] La production de chiffres aléatoires équirépartis fait l'objet de l'article de Bernard PARZYSZ : *Quelques questions à propos des tables et des générateurs aléatoires* dans le 1[er] volume de *Statistique au lycée*, brochure APMEP n° 156, p. 181.

1.3. Un modèle de base en probabilités : l'urne de Bernoulli

Les situations aléatoires les plus élémentaires de la réalité consistent en la réalisation ou non d'un événement fortuit à l'issue d'une expérience aléatoire. Toutes ces situations, d'un point de vue probabiliste, peuvent être représentées par un *modèle d'urne de Bernoulli*. C'est une urne fictive, parfaite, en ce sens que les boules qu'elle contient sont conçues comme rigoureusement identiques, ne différant que par la couleur, blanche ou noire par exemple. *Tirer une boule de cette urne* est une expérience de pensée qui repose sur l'*hypothèse de modèle* que toutes les boules ont « la même chance » d'être tirées (équiprobabilité postulée). Dans le vocabulaire de la réalité, l'urne de Bernoulli est un objet idéalisé, muni de propriétés théoriques implicites. Je le qualifie de “ modèle pseudo concret ”.

Un seul paramètre caractérise une urne de Bernoulli : la proportion p des boules blanches parmi l'ensemble des boules.

La formalisation de ce modèle (son expression dans le registre symbolique des mathématiques) consiste à considérer un ensemble fini Ω, abstrait (si on veut, on peut considérer que ses éléments représentent les tirages éventuels des différentes boules de l'urne de Bernoulli), sur lequel on considère la distribution uniforme (équiprobabilité) de la probabilité, notée P et appelée à ce niveau « loi de probabilité sur Ω ». On distingue ensuite une partie A de Ω (représentant les boules blanches) et on traduit l'hypothèse de modèle par la donnée $\mathrm{Card}\,(A) = p.\ \mathrm{Card}\,(\Omega)$. L'axiomatique du modèle probabiliste général conduit alors à $\mathrm{P}(A) = p$. On a ainsi constitué un *modèle probabiliste* de la situation aléatoire donnée.

1.4. Processus de modélisation

Dans un processus de modélisation, je distingue trois étapes, pour l'analyse didactique. Chacune de ces étapes relève d'objectifs différents et donc de contrats didactiques différents.

Si l'on veut introduire en mathématiques une véritable démarche expérimentale, il convient de ne pas négliger la *première étape* de la modélisation au niveau de la situation concrète : l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants.

Cette description est déjà une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité, dans la mesure où certains choix sont faits, pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. Cette description est d'ailleurs pilotée par ce que j'appelle *un regard théorique*, c'est-à-dire une connaissance s'appuyant sur des modèles généraux pré-construits, pour apprécier justement ce qui se révélera pertinent.

La démarche expérimentale consiste aussi à pouvoir agir sur la réalité, afin d'en étudier les évolutions et les invariants. Il faut donc pouvoir mettre en œuvre une expérimentation programmée par un *protocole expérimental*, c'est-à-dire l'ensemble des instructions à suivre pour réaliser cette expérience et éventuellement la reproduire.

De nouvelles compétences sont alors attendues, qui peuvent être objet de formation : savoir décrire une situation porteuse d'un problème (par exemple, l'évolution des files d'attente devant les caisses d'un supermarché), savoir mettre en œuvre un protocole expérimental, et recueillir les effets obtenus, savoir organiser les données recueillies, savoir lire une statistique (par exemple, pointer les files à intervalles réguliers).

Puis il s'agit de traduire cette description en un système simplifié et structuré : c'est le niveau du modèle pseudo-concret. Cela se traduit par l'appel à un modèle général dont les conditions de transfert sont maîtrisées. En didactique, nous appelons cela *contextualisation* d'un savoir ancien.

Dans l'exemple précédent, il faut dégager les hypothèses pertinentes pour décrire les arrivées des clients, notamment le nombre moyen d'arrivées par unité de temps. Cette construction est guidée par un premier niveau de connaissances théoriques du phénomène étudié (processus de Poisson) et par les outils mathématiques disponibles. Elle conduit à poser des hypothèses de modèle (indépendance des arrivées...).

On peut alors passer à la *deuxième étape* : la mathématisation ou formalisation du modèle. Cela suppose que les élèves soient capables de représenter le modèle dans la symbolique propre aux mathématiques. Puis ils doivent savoir interpréter la question posée en un problème purement mathématique et savoir faire appel aux outils mathématiques adaptés pour résoudre le problème abstrait (logique, notions ensemblistes, fonctions de variables réelles, intégration, raisonnement par récurrence...).

Enfin, il convient, en *troisième étape*, de pouvoir revenir à la question posée pour traduire dans les termes du modèle pseudo-concret, les résultats mathématiques obtenus, leur donner du sens pour dégager des réponses et relativiser ces réponses par rapport aux hypothèses de modèle. Il faut ensuite interpréter ces réponses pour apprécier leur validité et leur étendue dans la situation concrète (par exemple, décider de l'ouverture ou de la fermeture d'une caisse pour réguler les files d'attentes). Ces compétences peuvent faire l'objet de formation dans diverses disciplines. Elles prennent un aspect spécifique en mathématiques du fait du caractère particulièrement abstrait des outils que l'on désire mettre en œuvre.

Pour illustrer ces considérations, nous allons construire sur tableur une simulation d'un sondage (actualité brûlante…), sans perdre de vue la question didactique : quels apprentissages une telle simulation permet-elle d'accompagner ?

Avec les organisateurs du colloque, on a choisi pour cet atelier de présenter cette simulation[19], l'une des plus simples à mettre en œuvre, qui peut faire l'objet d'un thème d'étude en seconde.

II – Situations de sondages

La situation des sondages aléatoires simples est une application la plus élémentaire de la loi des grands nombres. Si, dans une population statistique, des éléments en proportion p présentent une certaine propriété *M*, un prélèvement aléatoire d'un échantillon de taille n dans cette population peut renseigner sur p (on suppose que la population est assez vaste pour pouvoir considérer ce prélèvement comme non exhaustif, i.e. « avec remises »). Par exemple, *M* peut être le choix préférentiel d'un consommateur ou d'un électeur.

Le fait pour chaque élément observé e_i de cet échantillon, prélevé au hasard, d'avoir la propriété *M* est un événement *E* de probabilité inconnue p. De manière perceptive, on sait que lorsqu'on répète cette expérience un grand nombre n de fois, la fréquence f_n de réalisations de *E* « tend à se stabiliser », et f_n peut être *observée* aussi proche de p que l'on veut, pourvu que n soit assez grand. Ce phénomène permet de proposer expérimentalement des encadrements possibles de p à partir des valeurs observées des f_n (fourchettes d'échantillonnage) avec d'assez grandes chances de ne pas se tromper. Un thème d'études au programme de seconde propose de vérifier la formule qui suit pour déterminer de telles fourchettes, contenant effectivement p dans 95 % des cas : $]f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}[$.

III – Simulation d'un sondage

3.1 Données pour la simulation

En première étape, l'atelier commence par la réalisation de simulations d'un sondage aléatoire simple utilisant les propriétés de la fonction ALEA() d'un tableur. Cette fonction donne un ensemble de 15 chiffres aléatoires indépendants et équirépartis. Elle produit donc à chaque recalcul une observation d'une variable discrète uniforme sur [0 ; 1], avec probabilité $1/10^{15}$. On veut simuler des prélèvements d'échantillons de tailles variables n dans une population de taille N (où n/N < 1/100),

[19] Exposée dans l'article *Simulation d'un sondage. Fourchette d'échantillonnage et intervalles de confiance*, bulletin de l'APMEP n° 444, janvier-février 2003.

dans laquelle il y a une proportion p d'individus (statistiques) qui présentent le caractère *M*. Dans cette simulation, on peut mettre en évidence la variabilité des fréquences observées suivant les échantillons prélevés, de taille 100 d'abord puis de taille 1000 (fluctuations d'échantillonnage). Les fourchettes de sondages sont ensuite dégagées de multiples simulations puis calculées à l'aide de la formule ci-dessus.

Dans notre exemple, on a $N = 10^9$. On suppose que les N individus ont été numérotés. Le choix au hasard de l'un d'entre eux revient à produire par ALEA() un nombre entier x de 9 chiffres. Un nombre $p \in]0\,;1[$ étant donné (que l'on peut implanter dans une cellule cachée du tableur), on considère que si $x \times 10^{-9} < p$, l'individu est de caractère *M*. La loi uniforme simulée par ALEA() permet de dire que le prélèvement au hasard d'un individu de caractère *M* est de probabilité p.

La fréquence f_n des individus de caractère *M* observés dans un échantillon de taille n donne une estimation de la proportion p. Bien sûr, on s'intéresse à la précision de cette estimation, c'est-à-dire à un encadrement *de confiance* de p à partir de cette valeur observée de f_n (fourchette de sondage), tel qu'un pourcentage *significatif* d'échantillons (95 %) fournissent une fourchette qui contient effectivement p. La formule « magique » $]f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}[$ donne de telles fourchettes théoriques, pour des valeurs de p pas trop éloignées de 0,5 (entre 0,3 et 0,7) ; on peut facilement justifier ce résultat et l'étendre à toute valeur de p différente de 0 ou 1. En produisant un certain nombre d'échantillons, les élèves peuvent vérifier que pour environ 95 % d'entre eux l'encadrement de p précédent est vérifié.

3.2 Réalisation sous Excel

Le tableau qui suit est un extrait d'une feuille de calcul.

- La colonne A est obtenue à partir de la fonction « =ALEA() » d'Excel qui donne des chiffres pseudo-aléatoires équirépartis, sous la forme de décimales d'un nombre de [0, 1].

- La partie entière du produit de ces nombres par 10^6 permet de simuler le prélèvement au hasard d'éléments dans une population de taille 1 000 000 (colonne B : =ENT(A1*1000000)).

- Une valeur pour p ayant été introduite (cellule cachée F14), la comparaison de chacun de ces nombres avec $p \times 10^6$, traduite en 1 ou 0 (colonne C) par la fonction logique =SI(ENT(100*A1)<100F14;1;0) , simule l'observation des éléments prélevés relativement au caractère *M*, le choix 1 étant en proportion p dans la population.
- En totalisant par paquets de 100 la colonne C, on obtient les fréquences observées du 1 dans ces divers échantillons, 10 d'entre elles sont présentées en colonne D (« =SOMME(C1:C100)/100 », puis (C101:C200) etc.).

- Les bornes des fourchettes d'échantillonnage sont données dans les colonnes F et G (dans ce cas : $]f - 0{,}1\,;\, f + 0{,}1[$), à titre de comparaisons.

- Les 10 échantillons étant regroupés, on obtient un échantillon de taille 1000, avec une fourchette plus étroite (cellules F12 et G12), l'intervalle de confiance théorique étant calculé à partir de la formule indiquée en dessous (cellules F13 et G13), dont la démonstration fait l'objet du développement qui suit.

	A	B	C	D	E	F	G
1	0,49716356	497163	**0**	0,43	ECHANTILLONS, TAILLE N=100	0,53	0,53
2	0,85464871	854648	**0**	0,32		0,22	0,42
3	0,71631158	716311	**0**	0,36	fourchettes de sondages :	0,26	0,46

4	0,10738629	107386	**1**	0,31		0,21	0,41
5	0,85212683	852126	**0**	0,33	]f-1/√n ; f+1/√n[	0,23	0,43
6	0,94887578	948875	**0**	0,33		0,23	0,43
7	0,12033745	120337	**1**	0,38		0,28	0,48
8	0,04542526	45425	**1**	0,44		0,34	0,54
9	0,33275705	332757	**1**	0,28		0,18	0,38
10	0,21831516	218315	**1**	0,33		0,23	0,43
11	0,28453486	284534	**1**	ECHANTILLON DE TAILLE 1000, F =		**0,351**	
12	0,62820339	628203	**0**	fourchette simplifiée :		0,319	0,383
13	0,79683387	796833	**0**	intervalle de confiance :		0,321	0,381
14	0,91677761	916777	**0**	Probabilité théorique introduite, p =		0,37	
15	0,88421451	884214	**0**				
16	0,08202963	82029	**1**	A = 1000 nombres au hasard équirépartis			
17	0,82429676	824296	**0**	B = échantillon de 1000 personnes parmi 1 000 000			
18	0,62983241	629832	**0**	C = préférences de ces 1000 personnes			
19	0,79539564	795395	**0**	D = fréquences du choix 1 par échantillons de tailles 100			
20	0,79191754	791917	**0**	] F; G [: fourchettes de sondage simplifiées			
21	0,63348029	633480	**0**	et intervalle de confiance (niveau 0,95) :			
etc …	Jusqu'à 1000…	…	**…**	$]f - \frac{1,96\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1,96\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}[$			

IV – Estimation de p par intervalle de confiance

4.1 Le modèle probabiliste

Introduisons le modèle probabiliste de cette situation de sondage. Le prélèvement au hasard d'un élément de la population est représenté par une variable aléatoire de Bernoulli X_0, variable parente de l'échantillonnage, qui prend la valeur 1 pour les éléments présentant la propriété *M* (*E* est réalisé), avec probabilité p, et 0 avec probabilité 1 – p sinon, d'espérance $E(X_0) = p.1+(1–p).0 = p$ et de variance $Var(X_0) = p\ (1–p)$.

Le prélèvement de l'échantillon des n éléments e_i est représenté par le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, où les X_i sont les répliques successives indépendantes de X_0. Ce sont des variables aléatoires de même loi de Bernoulli $\boldsymbol{B}(1, p)$ que X (à condition de considérer que les prélèvements des e_i ne changent pas notablement la proportion p de ceux qui sont de modalité *M* dans la population). On va considérer de plus que les X_i sont indépendantes pour exprimer l'hypothèse que la réalisation ou non de l'événement *E* lors des prélèvements des premiers e_i n'a pas d'effet sur la probabilité de réalisation de *E* pour les suivants.

La moyenne $F_n = \frac{1}{n}\sum X_i$ dépend de l'aléa du prélèvement. C'est une variable aléatoire d'espérance $E(F_n) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = p$ et de variance $Var(F_n) = \frac{1}{n^2}\sum Var(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}$ (l'indépendance des X_i permet l'additivité des variances).

Sa valeur f_n observée sur l'échantillon est la fréquence des éléments de modalité *M* dans l'échantillon (nombre des X_i prenant la valeur 1 divisé par n). En application de la loi des grands nombres (ici, le théorème de Bernoulli énoncé plus loin), elle est prise pour estimer la valeur de la proportion p inconnue (estimation ponctuelle).

L'écart $|f_n - p|$ dépend aussi de l'aléa du prélèvement. On ne peut donc espérer obtenir qu'un contrôle probabiliste a priori de $|F_n - p|$, majorant l'erreur que l'on fera en prenant pour p la valeur f_n de la fréquence de l'événement E dans l échantillon qui sera prélevé.

4.2 Le théorème de Bernoulli

Pour cela, on a un outil théorique simple : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, résultat important de la théorie des probabilités :

Soit Y une variable aléatoire de loi quelconque mais dont l'espérance E(Y) et la variance Var(Y) existent. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité que Y s'écarte de E(Y) de plus que ε est contrôlée par la dispersion de Y. On a :

$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(Y)}{\varepsilon^2}.$$

Appliquée à la fréquence F_n, cette inégalité donne pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2},$$

probabilité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On dit que « la fréquence F_n tend vers p en probabilité ». C'est le théorème de Bernoulli, forme la plus simple de la loi (faible) des grands nombres.

4.3 Intervalle de confiance

En passant à l'événement contraire, cette inégalité s'écrit :

$$P(F_n - \varepsilon < p < F_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

La valeur $\alpha = \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$ est la probabilité (appelée « le risque ») de se tromper en annonçant que p sera dans l'intervalle $]F_n - \varepsilon, F_n + \varepsilon[$, « intervalle de confiance pour p de niveau $1 - \alpha$ ».

En majorant grossièrement $p\,(1 - p)$ par 1/4, un majorant ε de l'écart $|F_n - p|$ étant donné, $\alpha = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ est aussi petit que l'on veut pourvu que n soit assez grand. On a donc a fortiori un intervalle de confiance simplifié de niveau $1 - \alpha$, aussi proche de 1 que l'on veut :

$$P(F_n - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{n}} < p < F_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{n}}) \geq 1 - \alpha.$$

Une fois l'échantillon prélevé, un niveau de confiance étant donné (par exemple 0,95), l'intervalle observé $]f_n - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{n}}\ ;\ f_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{n}}[$ est une interprétation théorique de *la fourchette de sondage* statistiquement obtenue si l'on répète un grand nombre de fois cet échantillonnage (pour environ 95 % des échantillons, on trouve effectivement p dans la fourchette). Au niveau de confiance $1 - \alpha$, l'approximation de l'estimation de p par f_n est majorée par $\frac{1}{2\cdot\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{n}}$ (pour = 0,05, cela donne une demi fourchette de $\frac{2,23}{\sqrt{n}}$). On voit que plus le niveau de confiance souhaité sera proche de 1, moins bonne sera la précision de l'estimation proposée. On remarque aussi que celle-ci est en $1/\sqrt{n}$.

4.4 Approximation normale, le théorème de Moivre-Laplace

Mais, d'une part, la majoration de p (1 – p) par 1/4 peut paraître trop grossière. Le lien entre la précision souhaitée ε et la taille de l'échantillon n suppose le calcul exact de
$P(]F_n - \varepsilon, F_n + \varepsilon[)$ et ce calcul met en jeu la loi binomiale ***B***(n, p) avec ses C_n^k hors d'atteinte pour n grand.

D'autre part, l'inégalité théorique de Bienaymé-Tchebychev, ne faisant pas intervenir la loi de F_n, est trop générale et ne peut être intéressante dans la pratique : si $\alpha = 0,05$, il faudrait 50 000 observations pour estimer p à 1 % près.

Le théorème de Moivre-Laplace (forme particulière d'un théorème puissant des probabilités, le *théorème limite central*) permet d'améliorer grandement la performance. Ce théorème dit que :

pour n > 50 et pour p pas trop voisin de 0 ou de 1 (ce qui n'est pas trop demander), on fait une erreur négligeable sur la valeur de la probabilité
$P(|F_n - p| < \varepsilon)$ en considérant que F_n suit une loi normale ***N***$\left(p \,;\, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, ou encore que
$\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$ est normale, centrée réduite.

Mais, dans notre situation de sondages, p est inconnu. La variance $\frac{p(1-p)}{n}$ de la loi de F_n peut alors être obtenue en estimant ponctuellement p par la fréquence f_n. On fait alors une erreur négligeable (au second ordre près quand n est grand) dans le calcul des probabilités liées à F_n.

En réduisant donc F_n sous la forme $U = \frac{F_n - p}{\sqrt{F_n(1-F_n)}}\sqrt{n}$, la condition de confiance
$P(|F_n - p| < \varepsilon) = 1 - \alpha$ s'écrit :

$$P\left(|U| < \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{F_n(1-F_n)}}\right) = 1 - \alpha.$$

où l'on peut considérer que la loi de U est assez proche de celle d'une variable normale centrée réduite.

Si $u_{\alpha/2}$ désigne le *quantile* de cette loi tel que $P(|U| < u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$, on obtient l'intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1 - \alpha$:

$$\left]F_n - u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} \,;\, F_n + u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}}\right[.$$

Une fois l'échantillon prélevé, la fréquence observée de l'événement *E* étant f_n, l'encadrement proposé pour p est alors :

$$\left]f_n - u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{f_n(1-f_n)}}{\sqrt{n}} \,;\, f_n + u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{f_n(1-f_n)}}{\sqrt{n}}\right[.$$

Avec $\alpha = 0,05$, on a $u_{\alpha/2} = 1,96$ très voisin de 2. En majorant comme précédemment
$f_n(1 - f_n)$ par 1/4 quand f_n n'est pas proche de 0 ou 1 ($0,3 < f_n < 0,7$), on perd un peu en précision

mais on simplifie notablement l'expression de la fourchette de sondage théorique : le demi écart $\varepsilon = u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{f_n(1-f_n)}}{\sqrt{n}}$ de l'encadrement de p est alors majoré par $\frac{1}{\sqrt{n}}$. On peut donc donner pour fourchette de sondage, au niveau de confiance $1 - \alpha = 0{,}95$, l'intervalle proposé dans le thème d'étude du programme de seconde :

$$]f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\ [.$$

Dans ces conditions, il suffit d'un échantillon de taille n > 10 000 (c'est encore cher) pour estimer p à 1 % près, avec une probabilité 0,95 de ne pas se tromper. Si on accepte une estimation de p à 3 % près, il suffit que n > 1 112, taille approximative des sondages les plus courants.

Le tableau suivant donne une idée des précisions (demi-écarts des fourchettes) obtenues pour différentes tailles d'échantillons et différents niveaux de confiance.

n / α	500	800	1 000	2 000	10 000
0,1	3,7	2,9	2,6	1,8	0,8
0,05	4,4	3,5	3	2,2	1
0,01	5,7	4,5	4	2,9	1,3

Quelques références bibliographiques

Commission Inter-IREM Statistique et probabilités : *Statistique au Lycée*, vol. 1, brochure APMEP n° 156, octobre 2005.

Commission Inter-IREM Statistique et probabilités : *Autour de la modélisation en probabilités*, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001.

Dress, F. : *Probabilités, Statistique, rappels de cours, questions de réflexion, exercices d'entraînement*, Dunod, Paris, 1997.

Dutarte P. : *Pour une éducation à l'inférence statistique au lycée*, Repères-IREM n° 60, juillet 2005.

Dutarte P. : *L'induction statistique au lycée illustrée par le tableur*, Didier, 2005.

Dutarte P., Piednoir J.-L. : *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes*, Commission inter-IREM Lycées techniques, brochure n° 112, 2001.

Groupe Probabilités & statistique de l'IREM de Besançon : *Lois continues, tests d'adéquation, une approche pour non spécialistes*, Presses universitaires de Franche-Comté, 2005.

Girard, J. C. & Henry, M., Modélisation et simulation en classe, quel statut didactique ? *Statistique au lycée*, vol. 1. CII Statistique et probabilités ed., brochure APMEP n° 156, juillet 2005, p. 147-159.

Henry, M., Simulation d'un sondage. Fourchette d'échantillonnage et intervalles de confiance, *Bulletin Vert* de l'APMEP n° 444, janvier-février 2003, p. 88-96.

Saporta, G. : *Probabilités, Analyse des données et Statistique*, Technip, Paris, 1990.

A paraître en octobre 2007, avec une partie sur les sondages :

Commission Inter-IREM Statistique et probabilités : *Statistique au Lycée***,** vol. 2, brochure APMEP n° 163.

Les histogrammes : quel enseignement au collège et au lycée ?

Éric Roditi

Université Paris Descartes, Laboratoire EDA
Groupe IREM Didactique de l'Université Paris Diderot [20]
CII Didactique

L'enseignement des statistiques vise simultanément la formation mathématique et l'éducation citoyenne. Celui des graphiques, à cause de leur présence importante dans les médias, est très valorisé. Une simple consultation des programmes et des manuels scolaires permet en effet de constater que les diagrammes « en bâtons » ou « à bandes » sont des objets d'enseignement depuis le cycle 3 de l'école élémentaire jusqu'au lycée, c'est-à-dire au premier et au second cycle. Ces diagrammes figurent aussi dans l'enseignement supérieur, et dans les ouvrages, le nombre de pages accordées à la statistique descriptive est d'autant moins important que le niveau mathématique des étudiants est élevé. La place accordée dans l'enseignement à ces diagrammes statistiques que nous qualifierons de « rectangulaires » semble donc suffisante.

Un constat pourtant vient questionner ces premières impressions : les professeurs de mathématiques trouvent généralement peu d'intérêt à cet enseignement, sinon pour saisir une occasion de faire fonctionner la proportionnalité de deux grandeurs : la fréquence (ou l'effectif) d'une valeur et la hauteur du rectangle associé. Une remarque enfin, les programmes du secondaire et les documents d'accompagnement laissent entendre que l'histogramme est un objet mathématique plus difficile à comprendre et à utiliser qu'il n'y paraît, notamment à cause du cas où les classes de valeurs de la variable ne sont pas toutes de la même amplitude. Ce cas n'est d'ailleurs pas au programme du collège, et il n'est à traiter au lycée que dans la circonstance particulière où les classes extrêmes sont les seules à avoir une longueur différente de celle des autres classes.

Les membres du groupe didactique de l'IREM de Paris Diderot (Paris 7) enseignent du collège à l'université, ils ont mené une recherche sur l'histogramme. D'abord sur l'objet mathématique lui-même, sur sa définition comme sur l'utilisation et l'interprétation de ce diagramme. Sur son enseignement ensuite. Cela comprend une interrogation de type écologique sur l'objet de savoir « histogramme » dans les programmes, c'est-à-dire d'une part sur les relations que cet objet de savoir entretient avec les autres savoirs au programme, et d'autre part sur sa fonction d'outil pour résoudre des problèmes liés aux savoirs mathématiques au programme. Cela comprend aussi une étude de son enseignement et de son apprentissage en distinguant sa lecture, son interprétation et sa construction à partir d'une série ou d'une distribution statistique. Cela comprend enfin une analyse des choix possibles pour la programmation de cet enseignement au collège et au lycée.

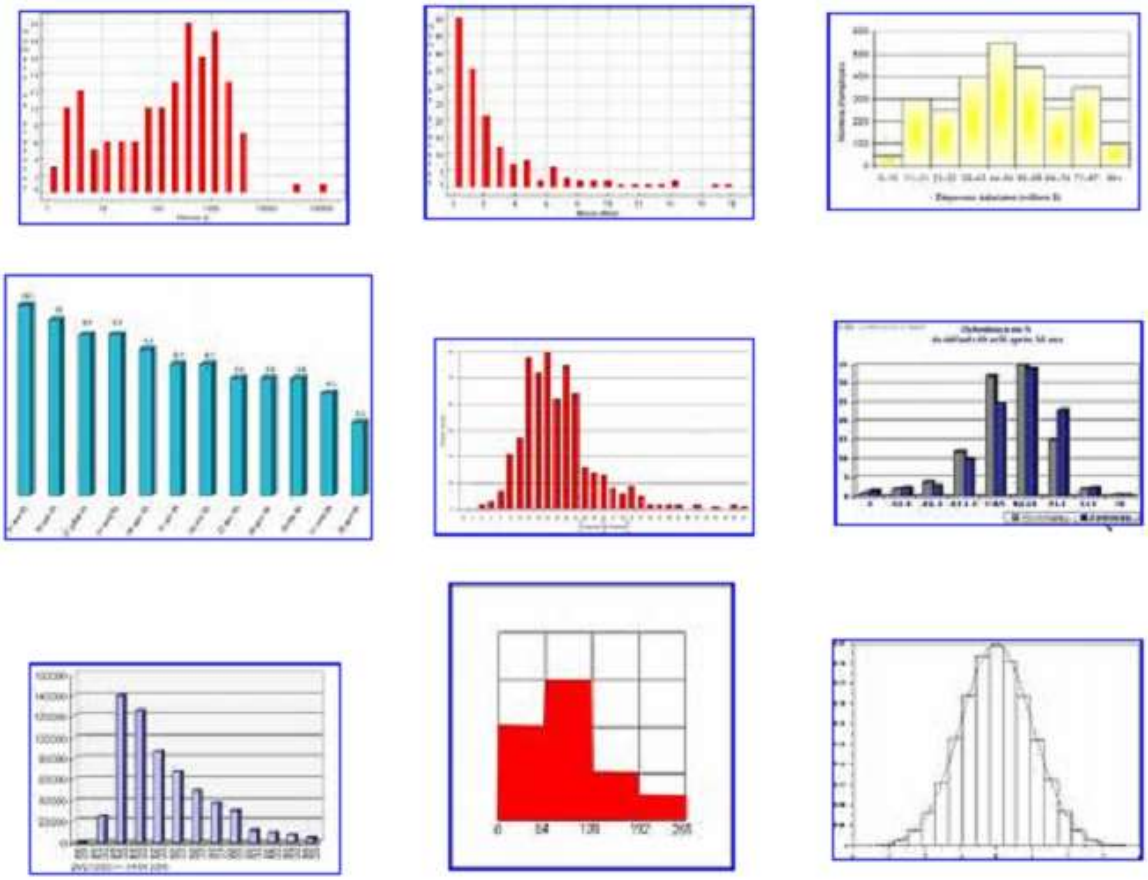
Le compte rendu de ce travail est organisé en deux parties. Dans la première sont exposés les résultats concernant l'étude de l'objet mathématique histogramme, la seconde traite des questions d'enseignement et d'apprentissage.

1. L'histogramme : quelle représentation graphique ?

Lorsqu'on effectue une requête avec le mot-clef « histogramme » dans une base de donnée d'images en ligne, on peut « apprécier » la diversité des diagrammes qui sont associés à cette dénomination ! Nous avons fait l'expérience avec le moteur de recherche *Google* et nous avons obtenu ces diagrammes dès la première page affichée.

---

[20] Au sein du groupe Didactique, ont particulièrement contribué à ce travail : Fabienne Cissé, Stéphanie Colin, Christine Mémier et Françoise Pilorge, professeures des académies de Créteil et Paris.



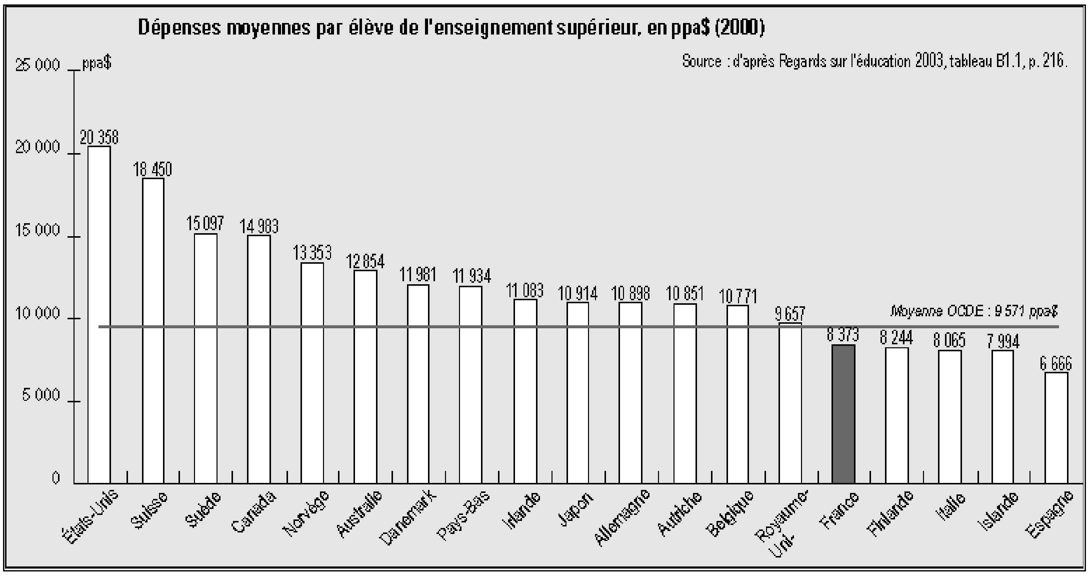
Les diagrammes sont composés de rectangles, contigus ou non, ils comportent un axe des abscisses gradué où les valeurs sont indiquées soit de manière habituelle sous les graduations soit par des intervalles entre les graduations. Un polygone est parfois présenté qui joint les milieux des largeurs supérieures des rectangles. Tous ces diagrammes sont-ils des histogrammes à proprement parler ? Sinon c'est que l'usage courant est différent de l'usage en statistique. Il conviendra alors de s'interroger sur l'intérêt, parmi tous ces diagrammes « rectangulaires », d'en distinguer certains qu'on appelle histogrammes, en mathématiques comme pour la classe de mathématiques.

1.1 L'histogramme parmi les différents diagrammes « rectangulaires »

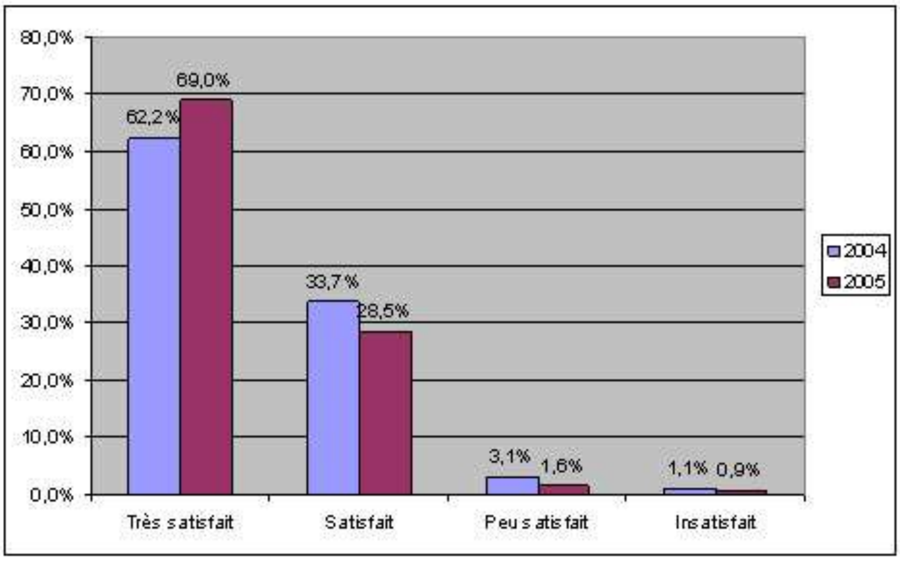
Les critères de classement des diagrammes tiennent aux procédés de représentation des variables représentées. Voici, à partir de la comparaison de cinq exemples de diagrammes « rectangulaires », des critères permettant de reconnaître les histogrammes.

1.1.1. Représentation d'une série ou d'une distribution

En focalisant sur ce que représentent les diagrammes, on pourrait distinguer ceux dont l'axe des abscisses représente les individus de ceux dont il représente les valeurs de la variable étudiée sur la population.
Ainsi, dans ce diagramme, les individus, en abscisse, sont des pays de l'OCDE auxquels est associée la valeur de la dépense moyenne par élève de l'enseignement supérieur, l'unité étant la parité de pouvoir d'achat en dollars.



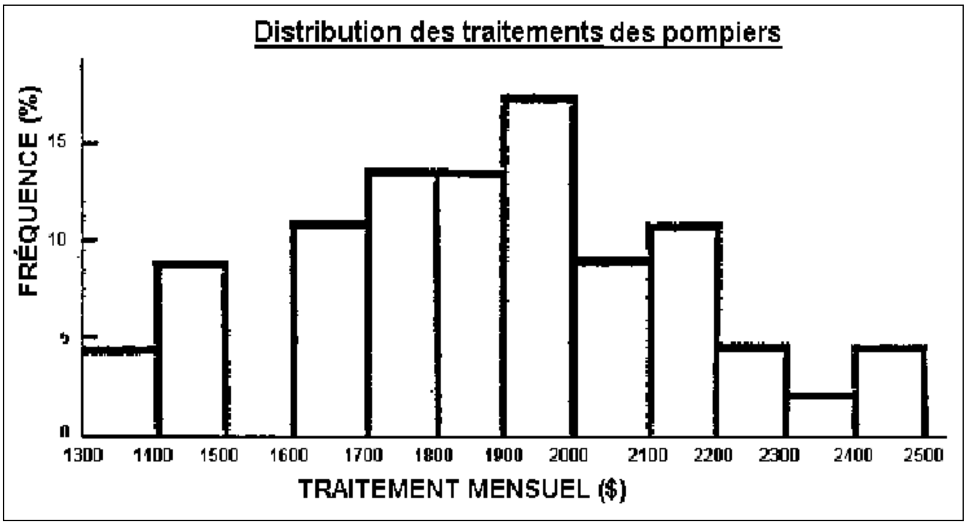
De façon courante, puisque les individus ne sont pas ordonnés, ils sont représentés sur le diagramme par ordre croissant ou par ordre décroissant de leur valeur.
Dans le diagramme suivant, ce sont les valeurs (on dit aussi les modalités de la variable ou du caractère) qui sont en abscisse alors que l'axe des ordonnées indique leur fréquence en pourcentage. Il y a en fait deux diagrammes superposés qui présentent, en 2004 et en 2005, la répartition des valeurs de satisfaction émises par des jeunes après un séjour organisé par l'association « Aventure scientifique ».



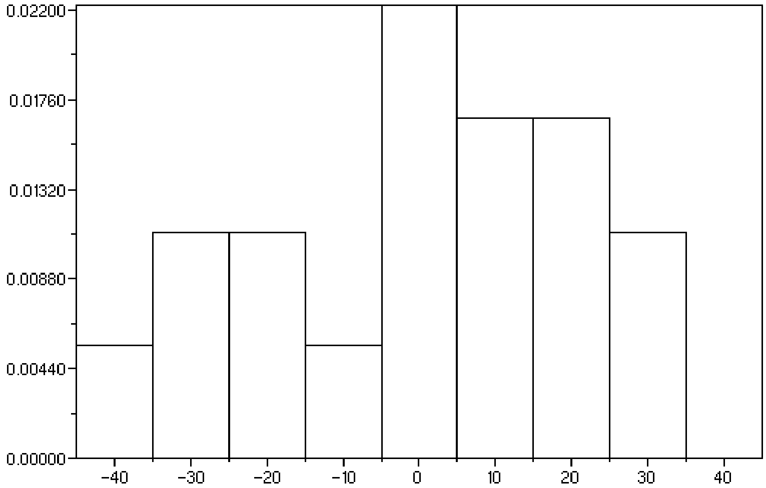
La distinction entre les représentations « rectangulaires » des séries statistiques (tableaux individus – valeurs) ou des distributions statistiques (tableaux valeurs – fréquences) ne nous apparaît pas pertinente pour classer les diagrammes eux-mêmes car, justement, elle ne porte pas sur les diagrammes mais sur les variables représentées. Ainsi, dans un contexte cinématique, une courbe peut représenter la distance parcourue en fonction du temps, une autre courbe peut représenter la vitesse du déplacement en fonction du temps. Et les deux graphiques sont bien des courbes.

1.1.2. Représentation de la fréquence ou de la densité de fréquence

Dans le diagramme précédent, la variable étant ordinale et discrète, les valeurs sont ordonnées sur l'axe des abscisses et les rectangles ne sont pas contigus. Ce n'est pas le cas dans le diagramme suivant qui représente la distribution des salaires mensuels, en dollars canadiens, des pompiers québécois : la variable est dite numérique et continue. Et cela même si certaines valeurs au sein de la classe ne sont pas prises, même si le nombre de valeurs étant nécessairement fini, leur ensemble est par conséquent discret. La variable est qualifiée de continue car, a priori, toutes les valeurs sont considérées comme possibles.



Le dernier exemple représente la distribution des résidus dans une régression linéaire. Pour chaque point du nuage des données, la différence entre son ordonnée et celle de son projeté sur la droite de régression linéaire est un résidu. Dans cet exemple, les résidus sont groupés par classes de longueur 10 à partir de l'origine –45.

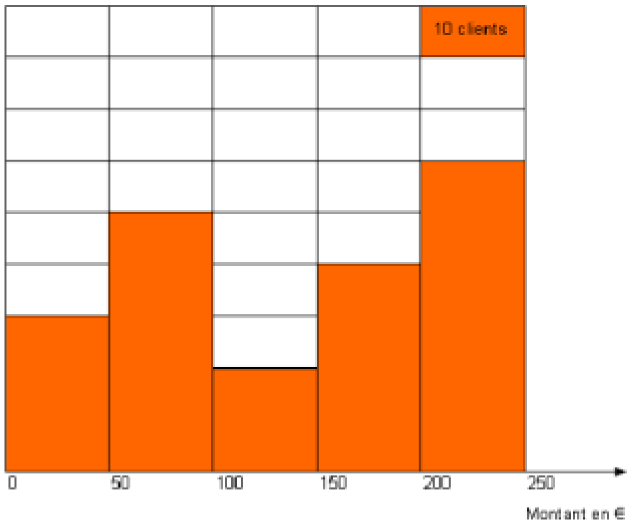


Dans les diagrammes de satisfaction des jeunes comme dans le diagramme des salaires des pompiers québécois, la somme des ordonnées est la somme des fréquences des modalités de la variable, elle est égale à 1 ou 100%. Dans le dernier graphique en revanche, la somme des ordonnées prises par chacune des classes n'est pas égale à 1 mais manifestement à 0,1. Comme la longueur des classes est précisément égale à 10, on en déduit que l'axe des ordonnées n'est pas l'axe des fréquences, mais l'axe des densités de fréquence. D'une manière analogue à la définition de la densité de probabilité, une densité de fréquence se définit comme une fréquence par unité des valeurs de la variable. Sur l'exemple ci-dessus, pour toute valeur comprise entre –5 et 5, la densité de fréquence est 0,022 c'est-à-dire 2,2% par unité de longueur des résidus. Ainsi la fréquence de la classe [–5 ; 5[est égale à $2{,}2 \times 10 = 22\%$.

Ce diagramme diffère fondamentalement des précédents, il s'agit de bien comprendre en quoi. Le diagramme rectangulaire des salaires des pompiers québécois indique que 14% des pompiers ont un salaire compris entre 1 700 et 1 800 dollars. Il n'indique pas que pour chaque salaire compris entre 1 700 et 1 800 dollars, la fréquence est 14%. Et heureusement, sinon en ajoutant les fréquences des salaires 1 700 $, 1 701 $, 1 702 $, etc. on obtiendrait une somme de beaucoup supérieure à 100% ! Ainsi malgré la contiguïté des rectangles, le diagramme des salaires des pompiers québécois est analogue à celui des satisfactions des jeunes après leur séjour de loisirs scientifiques : il s'agit d'un diagramme en tuyaux d'orgue dont la hauteur indique la fréquence de chaque classe. Ce graphique n'est pas celui d'une fonction dont les valeurs de la variable sont les salaires (variable continue) mais sont les classes (variable discrète). Il en va tout autrement dans le diagramme des résidus, la densité de chaque résidu compris entre –5 et 5 est 2,2 % par unité. Le graphique est celui d'une fonction dont les valeurs de la variable sont tous les résidus. En définitive, le fait que la variable soit continue est en quelque sorte « assumé » par le graphique des résidus, alors qu'il ne l'est pas par le graphique des salaires. Pour terminer ce paragraphe, remarquons que l'aire de la surface totale composée par les rectangles du diagramme est égale à 1 ou, ce qui revient au même, à 100%.

1.1.3. Des diagrammes « rectangulaires » sans axe des ordonnées

Le dernier diagramme, qui permet de faire l'inventaire des types de diagrammes rectangulaires rencontrés, représente la distribution des effectifs des dépenses effectuées sur un site Internet par un échantillon de 200 consommateurs. La variable est continue et les rectangles sont contigus. Ce qui distingue le diagramme présenté de ceux qui ont été étudiés jusqu'à présent est qu'il ne possède pas d'axe des ordonnées. Une légende indique l'aire correspondant à 10 clients.



En forçant un peu notre imagination, nous voyons apparaître un axe des ordonnées à ce graphique : le rectangle de la légende a pour largeur 50 euros (parallèlement à l'axe des abscisses), comme son aire est 10 clients, c'est que sa hauteur (parallèlement à l'axe des ordonnées) est 10 clients pour 50 euros c'est-à-dire 0,2 client par euro. L'axe des ordonnées représente bien une grandeur associée à la variable « montant de la dépense en euros » : sa densité d'effectif. Ainsi finalement, ce cinquième diagramme, malgré l'absence de l'axe des ordonnées, ressemble fort au quatrième : il « assume » la continuité de la variable et il représente la densité. La surface composée par l'ensemble des rectangles a pour aire 200 clients, c'est-à-dire 1 ou 100% si l'on convertit cet effectif total en fréquence totale.

1.1.5 Bilan et définitions d'un histogramme

Pour terminer l'étude de ces diagrammes, nous avons consulté de nombreux ouvrages : dictionnaires, encyclopédies, manuels scolaires et manuels universitaires. Les définitions sont hétérogènes, néanmoins, en cohérence avec nos analyses des exemples de diagrammes, deux catégories de diagrammes rectangulaires se dessinent.

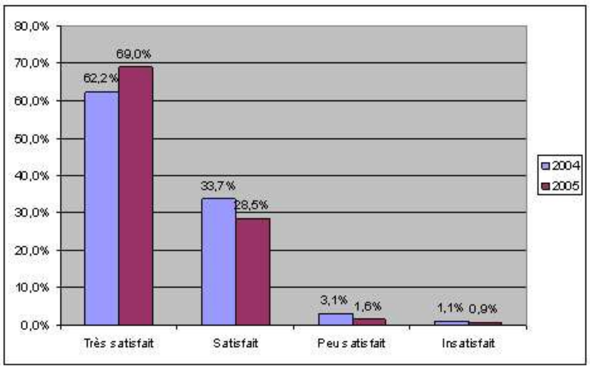
Les diagrammes de la première catégorie sont des diagrammes « à bandes rectangulaires » contiguës ou non, ces bandes rectangulaires s'appellent couramment tuyaux d'orgue, elles pourraient simplement être des bâtons. En effet, le procédé de représentation du diagramme en tuyaux d'orgue repose sur la proportionnalité entre la hauteur du rectangle tuyau et la valeur associée que ce rectangle représente. Ainsi lorsqu'un tel diagramme représente une série statistique (tableau individus – valeurs), chaque rectangle représente un individu et la valeur qui lui est associée, la hauteur du rectangle est proportionnelle à la valeur. Lorsqu'un tel diagramme représente une distribution statistique (tableau valeurs – fréquences), chaque rectangle représente une valeur (ou une classe de

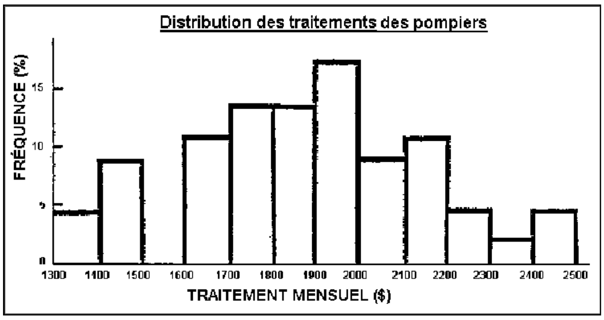
valeurs) et sa fréquence (ou son effectif), la hauteur du rectangle est proportionnelle à la fréquence (ou à l'effectif, ce qui revient au même). On pourrait finalement regrouper tous ces diagrammes sous le même terme générique de *diagramme en bâtons* en admettant toutes les apparences des bâtons : segments et rectangles contigus ou non. Les trois premiers graphiques analysés sont des exemples de ces *diagrammes en bâtons*.
Les diagrammes de la seconde catégorie, les histogrammes, sont aussi des diagrammes « à bandes rectangulaires », mais les rectangles sont nécessairement contigus. Dans un histogramme, l'axe des abscisses est l'axe des valeurs, il est impossible qu'il soit l'axe des individus. L'histogramme repose sur la proportionnalité entre la hauteur de la bande et la densité de fréquence associée à toutes les valeurs du caractère qui, réunies dans un intervalle, forment la largeur de la bande rectangulaire. En reprenant la terminologie des fonctions, un histogramme est la représentation graphique de la fonction qui à toute valeur du caractère associe sa densité de fréquence. Il en résulte, comme dans les exemples que nous avons vus, que le graphique obtenu est celui d'une fonction en escalier dont l'apparence est bien celle d'un diagramme à bandes rectangulaires. Jean-Claude Régnier (2005) propose que ne soient plus représentés les côtés des rectangles parallèles à l'axe des ordonnées, et que la représentation de l'histogramme devienne ainsi davantage conforme à sa définition : graphe d'une fonction en escalier. On retrouve la propriété qui est utilisée dans le cinquième graphique comme procédé de représentation : dans un histogramme, l'aire de chaque bande rectangulaire est proportionnelle à la fréquence (ou à l'effectif) de la classe qu'elle représente.
Pour conclure ce paragraphe, indiquons que ces définitions ne se retrouvent pas dans tous les ouvrages consultés, loin de là ! La définition de l'histogramme que nous présentons est conforme à celle qui se trouve dans les ouvrages de statistique rédigés par des statisticiens mathématiciens et dans certains ouvrages pour les sciences humaines. On la trouve aussi dans le dictionnaire *Le petit Robert* : « *Graphique représentant la densité d'un effectif en fonction des valeurs d'un caractère, et formé par une série de rectangles dont la base constitue un intervalle de variation de ces valeurs et la surface l'effectif correspondant*. » La définition où les classes ont la même longueur et où l'axe des ordonnées représente les fréquences de ces classes se trouve dans les ouvrages de vulgarisation ou dans les autres ouvrages pour les sciences humaines. C'est aussi celle qu'on trouve dans le dictionnaire *Larousse* : « *Représentation graphique des classes d'une variable statistique, associant à chaque classe un rectangle proportionnel par sa longueur à l'amplitude, par sa hauteur à l'effectif de cette classe*. » C'est encore celle qui est implicite dans les tableurs comme Excel. Enfin signalons que la définition qui présente l'histogramme comme un diagramme où les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences se rencontre presque uniquement dans des manuels ou sur les sites relatifs à l'enseignement secondaire. Nous interprétons cette définition comme un produit de la transposition didactique, lorsque la densité n'est pas enseignée.
Le lecteur remarquera comme nous que les différentes définitions ne sont pas cohérentes mais que certaines ne sont pas non plus totalement contradictoires. Comment trancher ? Suivant la proposition de Gérard Vergnaud (1991) « *la connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas* », nous nous proposons, afin de répondre à la question, de poursuivre par l'étude de l'activité relative à ces graphiques.

1.2. La question des activités relatives aux diagrammes rectangulaires

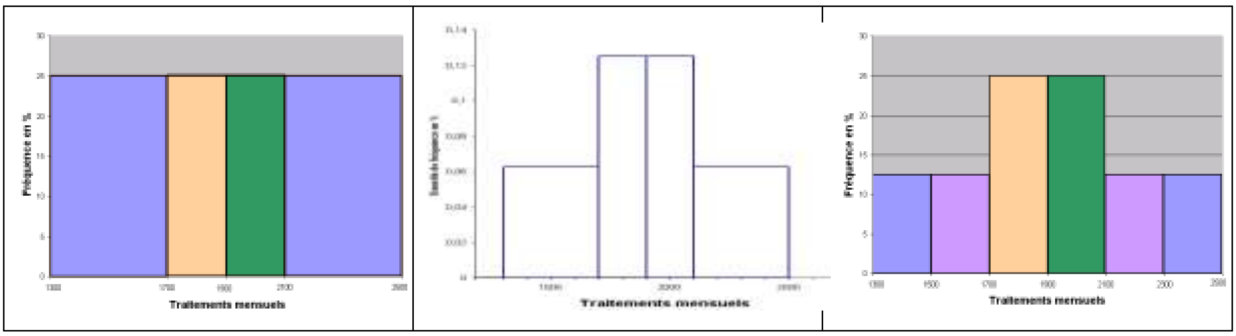
Les recherches menées en didactique des mathématiques sont plus nombreuses à aborder la question des activités relatives aux dessins et aux figures géométriques qu'elles ne le sont à traiter celle des activités relatives aux graphiques et aux diagrammes.
En nous inspirant à la fois des travaux de Raymond Duval (2005) qui décrit quatre niveaux d'activité sur les figures géométriques (botaniste, arpenteur, constructeur et inventeur-bricoleur) et des travaux de Dominique Lahanier-Reuter (2005) qui portent sur l'histogramme et des difficultés que rencontrent les élèves avec ce diagramme, nous proposons de distinguer deux types d'activités :
- les activités « iconiques » où le sujet reconnaît et/ou interprète le diagramme pour sa forme ;
- et les activités « graphiques » où le sujet réalise et/ou étudie le diagramme par des calculs, des mesures, des constructions ou des comparaisons.

Illustrons notre propos en reprenant les graphiques présentés précédemment.
Une activité de type iconique portant sur le diagramme représentant les niveaux de satisfaction des jeunes après leur séjour scientifique conduit à dégager à la fois le grand niveau de satisfaction des jeunes ainsi que la croissance de cette satisfaction de 2004 à 2005. Le diagramme des traitements mensuels des pompiers québécois, pour le sujet qui possède quelques connaissances de la loi normale, évoquera, dans le cadre d'une activité de type iconique, l'allure gaussienne de la répartition avec un salaire mensuel moyen et un écart-type approximativement égaux à respectivement 1 900 $ et 300 $. Ce type d'activité conduira aussi à remarquer l'absence de salaires compris entre 1 500 et 1 600 dollars canadiens.





Une activité de type graphique portant sur le même diagramme pourrait conduire à regrouper les salaires en quatre classes : [1 300 ; 1 700[, [1 700 ; 1 900[, [1 900 ; 2 100[et [2 100 ; 2 500[car la fréquence de chaque classe est approximativement égale à 25%. Si le graphique est un diagramme en bâtons (en tuyaux d'orgue), alors l'axe des ordonnées est l'axe des fréquences et le graphique obtenu est celui représenté ci-après à gauche. La lecture de ce graphique est ambiguë : l'égalité des ordonnées permet de lire l'égalité des fréquences mais d'une part cette égalité des fréquences est mal perçue tant les rectangles apparaissent comme différents, et d'autre part, il a perdu sa forme en cloche. Si le graphique est un histogramme, alors l'axe des ordonnées est l'axe des densités de fréquence et le graphique obtenu est celui du centre, qui rend mieux compte de l'égalité des fréquences grâce à la ressemblance des rectangles et qui conserve la forme en cloche du premier graphique. La différence entre ces deux graphiques disparaîtrait en partageant les deux classes extrêmes du premier en deux pour obtenir non plus quatre classes d'amplitudes inégales mais six classes de même amplitude, c'est ce que montre le graphique de droite.



En définitive, dans l'histogramme central, on pourrait aussi choisir de représenter la classe des salaires compris entre 1 700 $ et 2 100 $ et avoir ainsi trois classes de même amplitude 400 $. La classe centrale représentant 50% des salaires et les deux classes latérales 25% chacune. Le lecteur comprendra ainsi pourquoi, seule la définition des histogrammes comme représentation de la densité de fréquence est compatible avec des activités de type graphique conduisant à regrouper ou à scinder des classes : réunir deux classes adjacentes d'un histogramme conduit à réunir les rectangles qui les représentent, cela ne change pas la forme de l'histogramme. Ce n'est pas le cas pour un diagramme en tuyaux d'orgue, sauf à imposer que les classes soient toutes de la même longueur c'est-à-dire à

empêcher en partie l'activité graphique sur ce diagramme. Une dernière remarque à ce sujet : la définition proposée dans certains manuels de l'enseignement secondaire (aires proportionnelles aux fréquences) convient également pour mener ces activités de type graphique, est en effet cohérente avec celle qui repose sur la densité de fréquence, mais elle évite (vraisemblablement à dessein) d'introduire cette notion.
Indiquons enfin que le choix du nombre de classes lors de la construction d'un histogramme relève bien d'une activité de type graphique. Comme l'expose Dominique Lahanier-Reuter dans le cours de statistique qu'elle donne à l'université Lille 3, le choix du nombre de classes n'est pas indépendant de l'interprétation qu'on veut produire de la distribution. Le graphique initial des salaires des pompiers québécois évoque une courbe gaussienne. Comme l'ont montré les graphiques précédents, en diminuant le nombre de classes à quatre, l'histogramme présente une répartition des salaires qui peut s'interpréter en évoquant les parts équivalentes des salaires faibles, plutôt faibles, plutôt élevés et élevés. Avec un nombre pair de classes, on est en effet conduit à opposer les salaires faibles et les salaires élevés. En choisissant un nombre impair de classes, trois classes par exemple, on est conduit à dégager une classe centrale autour de laquelle s'opposent les classes latérales : la moitié des pompiers touche un salaire moyennement élevé compris entre 1 700 $ et 2 100 $, un quart d'entre eux touche un salaire faible compris entre 1 300 $ et 1 700 $ et le dernier quart touche un salaire élevé compris entre 1 700 $ et 2 100 $.
Les recherches en didactique des mathématiques ont montré qu'il est indispensable que les élèves comprennent comment utiliser les dessins et les figures pour qu'ils puissent résoudre des problèmes géométriques. Et pour cela, l'enseignement doit leur proposer des activités sur ces dessins et ces figures. De même, nous pensons qu'il est nécessaire que les élèves développent des activités de type iconique et de type graphique sur les diagrammes afin qu'ils puissent les utiliser pour résoudre les problèmes qu'ils rencontreront dès qu'ils auront à analyser ou à communiquer des données. En ce qui concerne l'histogramme et son utilisation, la définition référant à la densité de fréquence permet les activités de type graphique que les élèves devraient développer, la confusion avec le diagramme en tuyaux d'orgue empêche au contraire ces activités.

2. Questions sur l'enseignement et sur l'apprentissage de l'histogramme

Quels sont les choix de l'institution scolaire quant à l'enseignement de l'histogramme ? Quels sont les types de tâches proposés aux élèves ? Comment les élèves les réussissent-ils ? Les réponses à ces interrogations montrent-elles que les élèves apprennent, au long de la scolarité, à interpréter, construire, et utiliser les histogrammes ? La seconde partie de ce texte aborde ces questions et propose un développement quant à un enseignement possible des histogrammes favorisant les deux types d'activités, iconiques et graphiques.

2.1. L'enseignement de l'histogramme

Commençons par identifier, à travers quelques citations des programmes et documents d'accompagnement, les choix actuels de l'institution scolaire française quant à l'enseignement de l'histogramme. Nous examinerons alors les propositions des auteurs de manuels scolaires et les choix globaux des enseignants du secondaire.

2.1.1 Quelques repères sur les programmes d'enseignement

Voici quelques extraits des programmes en cours en 2007-2008, les références sont indiquées en bibliographie.
L'enseignement des diagrammes à bandes est programmé dès la fin de l'école élémentaire :

> À l'école primaire, les élèves sont amenés à lire, interpréter et utiliser divers modes de représentations de données (liste, tableaux, diagrammes, graphiques). Ce travail se poursuit au collège dans le domaine des statistiques. A l'école, comme au collège, l'analyse critique des informations communiquées à travers de tels supports participe à la formation du citoyen.

Cet enseignement se poursuit donc au collège dans le cadre de l'enseignement de l'organisation des données et de la statistique.

> Lire et interpréter des informations à partir d'un tableau ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogrammes). Présenter des données sous la forme d'un tableau, les représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un histogramme. Le choix de la représentation est lié à la nature de la situation étudiée. Pour les données relatives à un caractère qualitatif trois types de représentations graphiques sont utilisés : le diagramme en tuyaux d'orgue, le diagramme en bandes (ou diagramme linéaire), le diagramme à secteurs (circulaires ou semi-circulaires). Pour les données à caractère quantitatif discret (ou à valeurs discontinues) le diagramme utilisé est le diagramme en bâtons ; pour les données à caractère continu, un histogramme est utilisé (en se limitant au cas de classes d'égale amplitude).

Puis au lycée, en classe de 1re dans la série scientifique et dans la série économique et sociale, le cas des histogrammes comportant des classes d'amplitudes différentes est abordé.

> Les histogrammes à pas non constants ne seront pas développés pour eux-mêmes, mais le regroupement en classes inégales s'imposera lors de l'étude d'exemples comme des pyramides des âges ou de salaires.

Pour l'ensemble des programmes, parallèlement à la transmission de ces savoirs en statistique, les professeurs sont explicitement chargés de l'éducation citoyenne de leurs élèves tant par les thèmes abordés dans les problèmes que par l'enseignement même de la lecture d'images.

2.1.2. Propositions des auteurs de manuels scolaires

Tenant compte de ces prescriptions, les auteurs des manuels scolaires du secondaire proposent à la fois des informations sur la notion d'histogramme et des exercices pour mettre en œuvre cette notion. Les manuels scolaires indiquent tous (au moins implicitement) que les histogrammes représentent la distribution d'une variable numérique continue, que les bandes rectangulaires qui le composent sont contiguës, ils peuvent néanmoins se distinguer en deux catégories suivant la définition proposée :

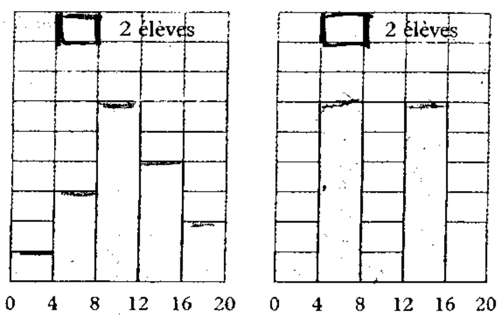
- soit la définition repose sur la proportionnalité des hauteurs des bandes rectangulaires aux effectifs ou aux fréquences des modalités, avec contrainte d'égalité des largeurs des bandes ;
- soit la définition repose sur la proportionnalité des aires des bandes aux effectifs ou aux fréquences, sans contrainte alors sur l'égalité des largeurs des bandes rectangulaires. Dans ce dernier cas, l'axe des ordonnées est absent et l'unité est représentée à l'aide d'une surface rectangulaire, comme sur le cinquième exemple étudié dans le paragraphe précédent. En revanche, les auteurs précisent que si les bandes rectangulaires ont la même largeur, alors les effectifs ou les fréquences sont aussi proportionnelles aux hauteurs des bandes.

Nous constatons cependant que ces choix ne sont pas justifiés, ni questionnés, et que certains auteurs pourraient même décourager d'avance la réflexion des lecteurs (élèves ou professeurs) quant à la signification de l'axe des ordonnées d'un histogramme dont les bandes rectangulaires sont de largeurs inégales (cf. Hachette, col. Terracher, 2nde, édition 1994).

> ■ L'histogramme (*cf.* exemple 3)
> Dans un histogramme, les effectifs (ou les fréquences) et les aires des rectangles sont proportionnels. Et donc, *lorsque les classes ne sont pas de même amplitude,* il est parfaitement « imbécile » de proposer une unité quelconque sur l'« axe des ordonnées ».

Les tâches proposées dans les exercices portent principalement sur le passage des données tabulaires aux données graphiques et vice-versa. Après le travail de traduction, les questions portent souvent sur la détermination de paramètres de position (cf. Didier, col.Math'*x*, 2nde, édition 2005 et Nathan, col. Transmath, 2nde, édition 2004).

2 On a représenté ci-dessous les résultats de deux classes au dernier contrôle de maths :



1. Donner le tableau des effectifs des deux séries de notes ainsi représentées.

2. L'une des série peut être qualifiée de « bimodale ». Laquelle et pourquoi ? À quoi cela correspond-il concrètement dans la classe ?

Classes et histogrammes

18 Voici les tailles en cm des 30 élèves d'une classe de Seconde : 1,62 ; 1,62 ; 1,73 ; 1,84 ; 1,56 ; 1,64 ; 1,69 ; 1,74 ; 1,74 ; 1,70 ; 1,66 ; 1,68 ; 1,71 ; 1,72 ; 1,79 ; 1,60 ; 1,62 ; 1,78 ; 1,79 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,71 ; 1,74 ; 1,78 ; 1,84 ; 1,65 ; 1,69 ; 1,68 ; 1,68 ; 1,66.

1. Recopiez et complétez le tableau suivant, dans lequel toutes les classes ont une amplitude de 5 cm.

classe	[155 ; 160[	[160 ; 165[	...	[180 ; 185[
effectif	1	...	...	...

2. Quelle est la classe modale de cette série ainsi classée ?

3. Construisez l'histogramme de cette série classée.

2.1.3. L'histogramme dans les classes de collège et de lycée

Nous savons que l'écart peut être grand entre ce qui figure dans les manuels et ce qui est effectivement proposé en classe (dans un sens comme dans l'autre d'ailleurs). Bien que nous n'ayons pas enquêté de manière organisée auprès des professeurs, les avis exprimés indiquent que la notion n'est pas intéressante pour poser des problèmes mathématiques, mais qu'elle permet néanmoins de proposer des situations d'application de la proportionnalité. La durée de l'enseignement de la notion est très courte, souvent moins d'une heure.

Les professeurs savent que quelque chose de difficile est en jeu dans la définition de l'histogramme à cause du cas où les largeurs des bandes rectangulaires ne sont pas de longueurs égales, mais la connaissance de la notion de densité de fréquence n'est pas connue par tous les professeurs de l'enseignement secondaire, même ceux qui enseignent les probabilités au lycée.

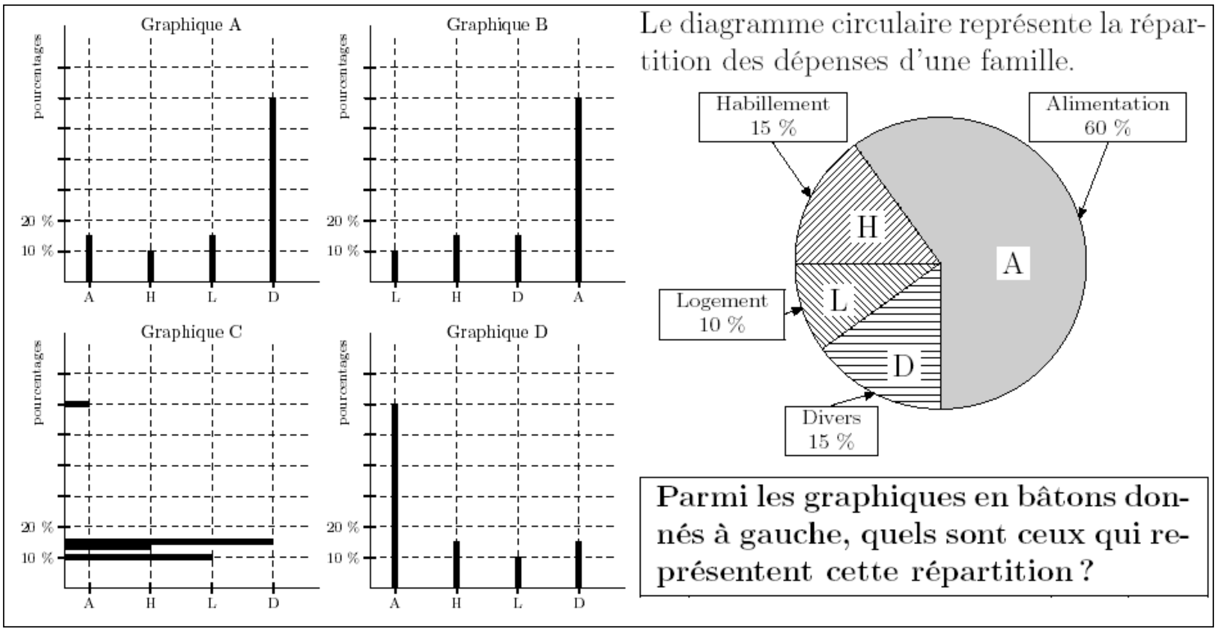
Citons comme témoignage du manque d'intérêt pour la notion, l'article de Claudine Schwartz & Jacques Treinerla (2006) consacré à la lecture de l'histogramme publié par le site « *Statistix* » dédié à l'enseignement de la statistique au secondaire et animé par une équipe de l'INRP proche de l'institution scolaire. Le titre même de la page est évocateur : « Que dire d'un histogramme ? » Tout comme le texte situé sous le lien vers l'article : « *Cette question est souvent posée par des professeurs en charge d'un enseignement de statistique descriptive.* » L'article propose une maïeutique entre le narrateur S et un maître M qui, ayant obtenu un histogramme après collecte de données auprès de ses étudiants, ne sait quoi en dire. S parvient à ce que M change de demande, il lui propose entre autres de ne pas chercher à interpréter un histogramme, mais plutôt à en comparer plusieurs…

2.2. La question de l'apprentissage

Nous n'avons pas mené d'enquête systématique sur l'apprentissage de la notion d'histogramme car l'étude préliminaire a montré que nous pouvions nous attendre à ce que les connaissances des élèves soient limitées à ce qui est principalement enseigné c'est-à-dire les traductions entre données tabulaires et des données graphiques. Deux questions posées dans les évaluations menées par l'APMEP (disponibles en ligne sur le site EVAPMIB référencé en bibliographie) montrent que les élèves ne sont pas familiers des activités sur les histogrammes. Une analyse de copies d'étudiants en 2e année de Licence de mathématiques appliquées aux sciences sociales (MASS) montre que beaucoup d'étudiants possèdent mal cette notion.

2.2.1. Confusion entre tâche iconique et tâche graphique

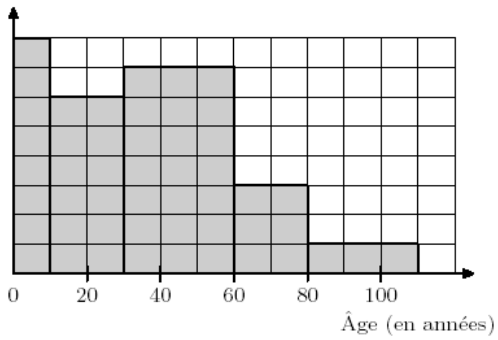
Bien qu'elle ne concerne pas directement les histogrammes, une question posée en 1990 aux élèves de la classe de 5e lors d'une évaluation menée par l'APMEP a retenu notre attention car elle montre que la capacité à interpréter des graphiques nécessite un enseignement pour être acquise (référence permettant d'accéder à la question sur le site : clé = 482). Il s'agissait de reconnaître les diagrammes en bâtons correspondant à un diagramme circulaire.



La réponse correcte, B et D, est proposée par seulement 45% des élèves, la plupart de ceux qui échouent proposent la réponse A et D. Comment interpréter cette réponse trop fréquente pour être considérée comme accidentelle ? Les professeurs de l'association proposent une explication peu convaincante : les élèves auraient choisi les graphiques symétriques. En interrogeant leurs élèves à ce sujet, les professeurs du groupe didactique de l'IREM de Paris ont obtenu une interprétation qui montre mieux comment la tâche est réalisée par ceux qui proposent cette réponse A et D. Dans le graphique circulaire, on observe une très grande part ainsi qu'une petite part comprise entre deux parts plus grandes. Sur les graphiques A et D, la situation est la même : un très grand bâton, et à côté, un petit bâton compris entre deux plus grands. Autrement dit les élèves auraient recherché à reconnaître la forme du diagramme circulaire dans le diagramme en bâtons. Ils ont développé une activité iconique et non une activité graphique. Une telle activité aurait permis, par exemple, de remarquer que dans le graphique A ce n'est pas la part « Logement » qui est la plus petite, alors que c'est le cas dans le diagramme circulaire et dans le graphique D. De nombreux élèves n'ont donc pas tenu compte, pour réaliser cette tâche, des informations portées sur les axes ou en légende, et ont retenu seulement des caractéristiques liées à la forme des graphiques proposés.

2.2.2. L'absence d'axe des ordonnées rend la lecture difficile

Une question (référence permettant d'accéder à la question sur le site : clé = 713) de lecture graphique a été posée en 1991 à des élèves en classe de 2nde, il s'agissait « simplement » de déterminer la fréquence d'une classe correspondant à une bande sur un histogramme ne comportant pas d'information sur l'axe des ordonnées.



Cet histogramme représente la répartition des âges des habitants d'un quartier.

Quel est le pourcentage des habitants de ce quartier dont l'âge est compris entre 30 et 60 ans ?

Réponse :

....

Une analyse rapide de la tâche permet de repérer que les élèves doivent d'abord déterminer qu'un carreau représente 2% de la population en constatant que la population est entièrement représentée par les 50 carreaux du graphique. Cela leur permet de trouver que la fréquence de la classe [30 ; 60[qui en comporte 21 est égale à 42%. L'absence d'indication quant à la valeur d'un carreau a sûrement déstabilisé les élèves à qui l'histogramme a été présenté seulement avec la contrainte d'égalité des largeurs des bandes rectangulaires et avec un axe des ordonnées qui indique les effectifs ou les fréquences. Ainsi seulement 31% des élèves déterminent le pourcentage demandé.
De nombreux élèves échouent car ils tiennent compte de la hauteur seulement (ils comptent 7 carreaux et annoncent une fréquence de 70%) ou de la largeur (ils comptent 3 carreaux et annoncent une fréquence de 30%). Certains attribuent la valeur 100% soit à la hauteur maximale (ils calculent alors 7/8 de 100% et annoncent une fréquence de 87,5%) soit à la largeur totale (ils calculent alors 3/11 de 100% et annoncent une fréquence de 27%). Enfin certains ne tiennent pas compte de la longueur des classes et associent la valeur 100% au cumul des hauteurs des bandes rectangulaires (ils obtiennent alors une hauteur totale de 8+6+7+3+1=25, ils calculent 7/25 de 100% et annoncent une fréquence de 28%).
Les procédures des élèves montrent d'une part qu'ils ne manquent pas de ressources en calcul pour aborder ces questions, ils seraient donc vraisemblablement capables d'utiliser une information sur l'axe des ordonnées comme « Densité de fréquence : % pour 10 ans » avec les valeurs 2, 4, 6, 8, etc. à chaque graduation. Mais encore faudrait-il que la notion de densité de fréquence soit enseignée.
Nous retrouvons ce que mentionnait Dominique Lahanier-Reuter (2005) que nous avons déjà citée et que nous interprétons de la façon suivante : l'absence d'indication de la densité de fréquence sur l'axe des ordonnées nuit à lecture d'un histogramme.

2.2.3. Confusions à propos de l'histogramme en L2 MASS

L'enseignement secondaire de l'histogramme porte essentiellement sur la traduction entre diagramme et tableau de valeurs. Les manuels proposent essentiellement ces tâches. Les professeurs déclarent les donner à leurs élèves pour mettre en œuvre la proportionnalité et pour répondre à la demande ministérielle d'éducation citoyenne. Ces éléments laissent penser que les élèves qui ont suivi sans échec l'enseignement de mathématiques du secondaire savent au moins construire un histogramme à partir d'un tableau et inversement. Néanmoins, la durée d'enseignement que les professeurs déclarent semble tellement limitée, que nous avons souhaité savoir si les élèves sortis « par la grande porte » du système scolaire savent effectivement réaliser un tel diagramme et, pour ceux qui n'y parviennent pas, connaître leurs difficultés.
Un enseignant chercheur, chargé du cours de statistique en L2 de mathématiques appliquées aux sciences sociales et qui déclare avoir le souci de l'enseignement de la statistique descriptive, a proposé une question portant sur l'histogramme dans ses sujets de devoir et d'examen. Les deux fois, un tableau avec de nombreuses données était fourni, un résumé graphique par un histogramme était demandé. Nous avons étudié les 79 copies de ces étudiants. Nous avons accepté les représentations correspondant aux deux définitions rencontrées dans l'enseignement secondaire : représentation de la distribution des fréquences ou des effectifs par un diagramme à bandes rectangulaires contiguës de même largeur et dont les hauteurs sont proportionnelles aux fréquences ou aux effectifs, ou bien par

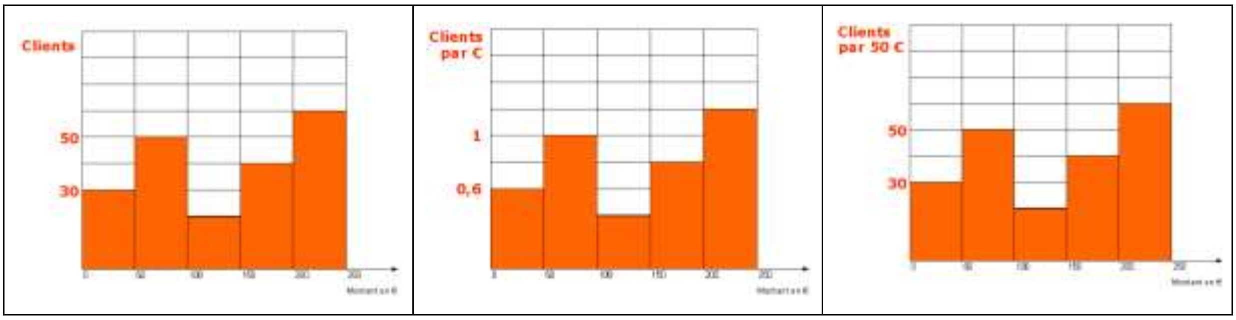
un diagramme à bandes rectangulaires contiguës dont les aires sont proportionnelles aux fréquences ou aux effectifs.
Nous avons obtenu seulement une moitié de réponses correctes (42 soit 53%) dont une seule propose un histogramme où ni les fréquences, ni les effectifs ne figurent sur l'axe des ordonnées : une unité d'aire est indiquée sur le graphique. Aucune des réponses ne représente la densité des fréquences ou des effectifs de la variable. Aucune réponse ne représente des classes d'amplitudes différentes. Certains étudiants (7 soit 9%) proposent un diagramme correct quant à la hauteur des bandes rectangulaires, mais elles ne sont pas contiguës, l'axe des abscisses n'est pas gradué, les intervalles de valeurs correspondant à chaque bande sont indiqués sous la bande. D'autres étudiants (8 soit 10%) représentent la série statistique et indiquent par conséquent chaque individu et sa valeur par une étroite bande rectangulaire, les individus étant rangés par ordre d'apparition dans le tableau de valeurs. Enfin, parmi les autres étudiants (22 soit 28%), quelques-uns proposent un diagramme en bâtons et la plupart d'entre eux s'abstiennent de répondre alors que la question compte pour leur évaluation.
Ces résultats ont été jugés très décevants par l'enseignant chercheur qui pensait que les contenus de l'enseignement secondaire étaient acquis par davantage d'étudiants. Une réflexion s'est engagée quant à un éventuel approfondissement de son cours de statistique descriptive en MASS. Ces résultats, sans doute bien supérieurs à ceux que nous aurions obtenus sur un échantillon d'étudiants moins intéressés par les mathématiques, nous montrent que les objectifs de lecture et de réalisation de graphiques ne sont pas atteints à l'issue de l'enseignement secondaire.

3. Pour un enseignement des histogrammes au collège et au lycée

Dans ce dernier paragraphe, nous souhaitons tirer un bilan de l'étude menée et en discuter les résultats pour proposer des tâches mathématiques pour l'enseignement des histogrammes réparti entre le collège et le lycée, des tâches qui permettent aux élèves de s'engager dans des activités iconiques et graphiques.

3.1. L'histogramme, un objet à définir ?

Après avoir montré la diversité des graphiques qui sont, au sens courant, regroupés sous le terme d'histogramme, nous avons développé une analyse de ceux qui sont proposés pour l'enseignement secondaire. Deux définitions divergentes émergent. Selon les deux définitions, les histogrammes sont des diagrammes à bandes rectangulaires contiguës. En revanche, selon la première définition, l'histogramme représente la distribution des fréquences (ou des effectifs) d'une série statistique dont le caractère est numérique et continu ; l'axe des abscisses est l'axe des valeurs du caractère et l'axe des ordonnées celui des fréquences (des effectifs). Selon la seconde définition, l'histogramme représente la densité de fréquence d'une variable statistique numérique et continue.
Afin de mieux comprendre les conséquences de ces définitions, nous avons envisagé l'activité d'un sujet qui lit, construit, analyse ou interprète un histogramme. Nous avons distingué les activités « iconiques » où le sujet reconnaît et/ou interprète le diagramme pour sa forme des activités « graphiques » où le sujet réalise et/ou étudie le diagramme par des calculs, des mesures, des constructions ou des comparaisons.
Le bilan auquel nous parvenons est que la première définition permet une activité iconique à la condition que les classes soient de même amplitude, en revanche, une activité graphique n'est réellement possible qu'avec la seconde définition. D'autre part, nous avons indiqué qu'un histogramme réalisé avec la première définition et des classes de même amplitude pouvait s'interpréter facilement avec la seconde définition. Développons cette affirmation en reprenant le cinquième exemple présenté dans la première partie de l'article, l'histogramme représente la distribution des effectifs des dépenses effectuées sur un site Internet par un échantillon de 200 consommateurs. Le diagramme de gauche où l'axe des ordonnées indique des effectifs peut s'interpréter comme l'histogramme proposé au centre où l'axe des ordonnées indique une densité d'effectif (analogue à ce qu'on obtient de manière automatique avec un logiciel de statistique), ou plus simplement comme celui proposé à droite avec une autre unité pour cette densité.



Comme on sait que le nombre de clients qui constituent l'échantillon est 200, on peut aussi représenter la densité de fréquence de la variable plutôt que sa densité d'effectif ; la valeur correspondant à une graduation est alors 0,1 % par € c'est-à-dire 5% pour 50 euros. Dans le graphique de droite, la légende serait remplacée par « % pour 50 € » le nombre 30 serait remplacé par 15 et le nombre 50 par 25.
Pour en terminer sur la définition de l'histogramme, il nous semble qu'un compromis acceptable est de ne pas définir cet objet en fonction de ce qu'il représente mais en fonction de son procédé de représentation. Ainsi, nous appelons histogramme tout diagramme à bandes rectangulaires contiguës qui est caractérisé par deux axes de coordonnées. Nous réservons les qualificatifs « en bâtons » et « en tuyaux d'orgue » aux diagrammes pour lesquels les bandes rectangulaires ne sont pas contiguës ; ces deux diagrammes se distinguant seulement par la largeur des bandes rectangulaires, qui est nulle pour le diagramme en bâtons et qui ne l'est pas pour le diagramme en tuyaux d'orgue. Suivant ce qu'on veut représenter, le choix de tel ou tel graphique est adapté. On choisit un diagramme en bâtons ou en tuyaux d'orgue pour représenter une série statistique ou pour représenter la distribution d'une variable discrète. Les valeurs d'une variable continue étant regroupées en classes, on choisit un histogramme pour représenter sa densité ou sa distribution. Dans le dernier cas, afin d'éviter toute ambiguïté graphique, on choisit des classes de même amplitude, et à défaut d'en disposer, on préfèrera représenter sa densité.

3.2. Propositions de tâches pour le collège et pour le lycée

Les activités graphiques, comme nous l'avons montré, reposent sur la notion de densité. Les grandeurs quotients étant difficiles à acquérir et la notion de densité étant très abstraite, il ne nous semble pas raisonnable de l'envisager au collège. Ainsi, nous envisageons que l'enseignement propose des tâches conduisant à des activités iconiques au collège et à des activités des deux types au lycée.

3.2.1. Des tâches d'interprétation et de critique dès le collège

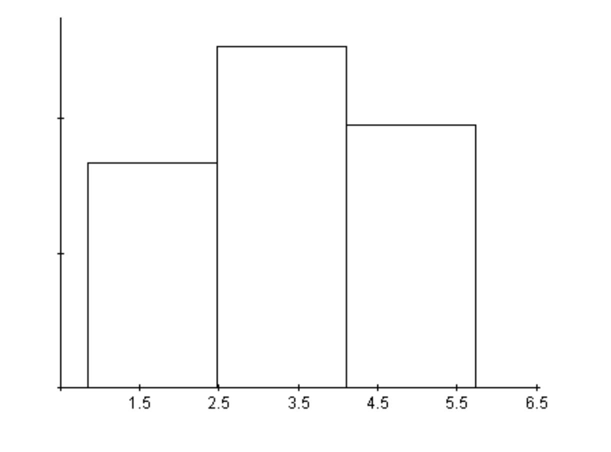
Dès le collège, nous envisageons un enseignement qui conduit les élèves à la réalisation comme à l'interprétation des histogrammes, qui pose la question de la fidélité du graphique, par exemple, en interrogeant le choix des classes. Les élèves apprendront comment lire et interpréter un graphique :

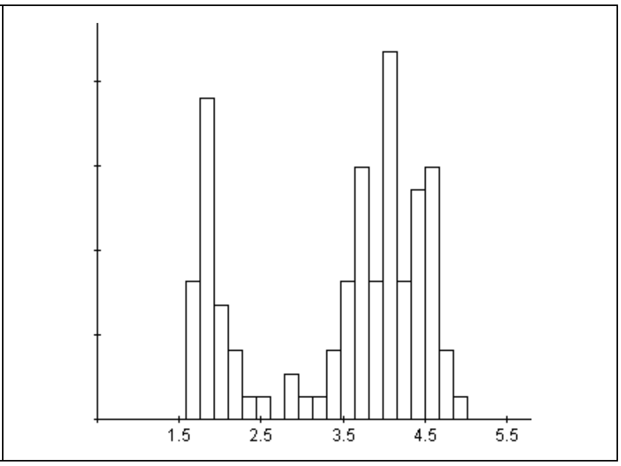
- identifier les grandeurs indiquées sur les axes et les unités ;
- repérer et attribuer une signification aux zones hautes, basses et étendues horizontalement, puis aux variations des hauteurs ;
- examiner la symétrie ou l'asymétrie de la forme globale constituée par l'ensemble des rectangles ;
- disposer d'histogrammes de référence pour interpréter un histogramme d'après sa forme globale par comparaison à des phénomènes déjà identifiés (distribution sur un échantillon d'une population où les valeurs du caractère sont équiréparties ou distribuées normalement, distribution sur mélange de deux échantillons issus de deux populations de paramètres différents, etc.)

Lorsqu'ils réalisent un histogramme, les données non classées pourront leur être confiées pour qu'ils apprennent à choisir le nombre de classes et leur amplitude. La situation suivante montre l'intérêt d'un tel travail.

> Dans un collège, il y a possibilité pour les élèves en difficulté d'assister librement à des études dirigées. Les progrès des élèves ont été relevés par le nombre de points d'augmentation de leur moyenne générale.

La même série statistique conduit en effet à ces deux histogrammes.





Le premier graphique montre que le dispositif a fait progresser les notes des élèves de manière variable, le plus fréquemment de 2,5 à 4 points. Le second graphique laisse apparaître deux groupes qui progressent différemment, l'un de 2 points environ et l'autre de 4 points environ. Les élèves assistant librement au dispositif de soutien, on peut se demander si les deux groupes ne sont pas précisément les assidus et les autres qui assisteraient à ces séances seulement à l'approche des évaluations…

3.2.2 Introduction à la notion de densité au lycée

Au lycée, nous envisageons de poursuivre par l'enseignement des histogrammes à partir de problèmes conduisant toujours à la réalisation d'histogrammes, à leur interprétation et à leur comparaison, ainsi qu'à la réflexion sur le choix des classes en fonction de la fidélité du résumé graphique.
Nous proposons également d'étendre ces activités aux mesures, aux calculs et aux constructions. En particulier, comme nous l'avons montré par l'étude des cinq exemples dans la première partie de ce texte, les situations conduisant à regrouper et à scinder des classes permettent d'engager une réflexion sur la stabilité du graphique. En référence à la situation, cette réflexion conduit à envisager la proportionnalité de la fréquence d'une classe à l'aire de la bande qui la représente et pas à sa hauteur. Enfin, l'interrogation sur l'axe des ordonnées conduit à la notion de densité de fréquence qui pourra servir de support à l'introduction des densités de probabilité le moment venu.

Pour conclure, indiquons que des expérimentations de scénarios d'enseignement sont en cours de réalisation pour évaluer la portée de nos propositions. Notre façon d'aborder cette question de l'enseignement et de l'apprentissage de l'histogramme repose sur une analyse mathématique approfondie du savoir à transmettre, mais pas seulement. Elle repose aussi sur une analyse conjointe du savoir et de son utilisation dans des problèmes accessibles aux élèves au niveau où le savoir est enseigné. Elle repose enfin sur une prise en compte des contraintes du métier de professeur de mathématiques. Il est en effet difficile d'enseigner une notion très isolée dans l'ensemble des programmes et pour laquelle les types de tâches proposés conduisent seulement à des activités de traduction. Nous proposons de relier cet enseignement à celui plus général des représentations graphiques dans l'enseignement secondaire, en indiquant des types de tâches propices au développement d'activités iconiques et graphiques variées : lecture, interprétation, critique, mesure, calcul, comparaison, synthèse, construction, etc.

Bibliographie

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, p. 5-53.

EVAPMIB, une base de questions d'évaluation en mathématiques.
http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapmib/siteEvapmib/

LAHANIER-REUTER D. (2005), Quelles informations porte l'axe des ordonnées, *Statistiquement Vôtre*, n°6.
http://www.sfds.asso.fr/groupes/statvotre/StatVotre_6_2005.htm

REGNIER J.-C. (2005), Histogramme : Réflexion sur une représentation graphique particulière parfois abusivement utilisée tant dans l'enseignement que dans l'application de la statistique. *Statistiquement Vôtre*, n°6.
http://www.sfds.asso.fr/groupes/statvotre/StatVotre_6_2005.htm

SCHWARTZ C. & TREINER J. (2006), Que dire d'un histogramme ?, *in STATISTIX*.
http://www.statistix.fr/spip/spip.php?article18

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10/2.3, p.133-170.

Liens vers les programmes mentionnés dans l'article

Programme du cycle 3 de l'enseignement primaire
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2007/hs5/hs5_approfondissement.pdf

Programme du cycle central de l'enseignement secondaire
http://www.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?Ref=755A2821

Documents d'accompagnement des programmes de mathématiques au collège : organisation et gestion de données (2007)
http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_organisation_donnees.pdf

Programmes des classes de première de l'enseignement secondaire
http://www.cndp.fr/archivage/valid/73275/73275-13626-17261.pdf

Thème 2 : Les résistances et les changements dans les pratiques d'enseignement en formation initiale

La « clinique de l'activité » : une démarche réflexive et développementale de professionnels. Un terrain parmi d'autres : les professeurs de mathématiques en collège

Danielle Ruelland-Roger

Équipe de clinique de l'activité
Centre de Recherche sur le Travail et le Développement. EA 4132.
Conservatoire National des Arts et Métiers

L'expérience à laquelle ont participé deux groupes de travail de professeurs et moi-même, membre de l'équipe de clinique de l'activité dirigée par Y. Clot au Cnam, est une recherche fondamentale de terrain[21]. Ellea visé en effet aussi bien à développer le pouvoir d'agir au travail de professionnels, ici professeurs du second degré, qu'à alimenter une réflexion théorique en cours sur les modalités et les invariants d'un tel développement[22]. Au cours de cette recherche nous n'avons pas examiné précisément la question de la transmission du métier et des instruments de son développement à des stagiaires et néo-titulaires. Ce problème a été abordé dans les échanges que nous avons eus avec les responsables de la formation des PLC2 de mathématiques à l'IUFM de Besançon (partenaire de cette recherche), mais est trop peu élaboré encore. Nous nous en tiendrons donc à ce que nous avons réalisé : le travail commun d'un chercheur et de quelques professeurs de mathématiques en collège, les uns dans l'académie de Besançon, les autres dans celle de Créteil, travail portant sur le métier d'enseignant, dans le cadre théorique et méthodologique de la clinique de l'activité.

1. Action, activité réalisée, activité réelle.

Action et activité.

Le cadre théorique de la clinique de l'activité s'appuie sur les concepts d'action et d'activité. Interroger les métiers en général, et celui d'enseignant en particulier, en termes d'action et d'activité, et non en termes de pratiques professionnelles, n'est pas propre à la clinique de l'activité. Elle concerne divers courants de recherche. On peut s'en faire une idée non exhaustive dans un numéro de la revue *Raisons éducatives* parue en 2001[23]. Ce n'est pas le lieu ici de s'étendre sur ce qui rapproche ou ce qui

[21] Cette recherche s'est effectuée dans le cadre de l'ACI « Travail » du ministère de la recherche : Litim, M., Prot, B., Roger, JL., Ruelland, D., Yvon, F., Clot, Y. (2005) *Enjeux du travail et « genre » professionnel dans la recomposition en cours des métiers de la fonction publique. Le cas des professeurs du secondaire et des personnels de gérontologie*. Paris : cnam.
[22] On trouvera des éléments sur la question de la recherche fondamentale de terrain dans Roger, J-L (2007) *Refaire son métier. Essai de clinique de l'activité*. Toulouse : Erès,.
[23] Baudouin, JM. & Friedrich, J. (2001) *Théories de l'action et éducation*. Bruxelles : De Boeck Université.

différencie ces courants. Notre propos portera donc uniquement sur ce qui nous semble être déterminant pour mieux comprendre en quoi ces concepts peuvent intervenir dans le développement du pouvoir d'agir des professionnels et son analyse.
Dans l'ouvrage évoqué ci-dessus, J. Friedrich expose quelques-unes des ses « réflexions » sur ce qu'elle appelle « le caractère énigmatique de l'action »[24] et parmi celles-ci elle parle de l'intentionnalité de l'action en ces termes : « le postulat de l'intentionnalité de l'action surdétermine considérablement le questionnement auquel les théories de l'action cherchent à donner une réponse. » (p. 97**)** Aussi attire-t-elle l'attention sur ce que le philosophe A. Schütz[25] propose dans ses travaux comme réponse à la question : « qu'est-ce qui fait être l'action ? »et qu'elle expose en ces termes : « l'action d'un sujet trouve sa source non pas dans la connaissance projective ou rétrospective… [mais] dans la capacité … à entrer en action et à maintenir celle-ci …. Le trait principal d'une action serait donc de produire des possibilités ouvertes et problématiques qui l'entretiennent, qui la font vivre.… Au lieu d'expliquer les actions à partir des intentions préalables, l'action est [à penser] dans son lien inséparable avec le devenir du sujet, devenir qui est dépendant de la capacité de celui-ci à faire se détacher chaque fois une action libre … ». (p. 105) Autrement dit, elle retient des analyses de Schütz que l'émergence de l'action dépend des possibilités qu'a le sujet de conformer cette action à son propre devenir, aux possibilités qu'il gardera d'agir à nouveau.

Certes, J. Friedrich a une approche philosophique de l'action, mais cette approche philosophique nous semble très féconde pour comprendre certains phénomènes relatifs au pouvoir d'agir des enseignants et à son développement. Il nous semble en effet que l'examen de la question de l'intentionnalité surdétermine le plus souvent dans le domaine de la recherche, mais aussi dans celui de la formation, l'analyse de l'action. Il en découle de nombreuses interrogations relatives à la connaissance qu'a, ou que devrait avoir, l'enseignant de ce qu'il a fait, va faire et de ses intentions dans ce cadre-là Par suite se pose la question du savoir savant qu'il faudrait lui dispenser pour qu'il puisse développer cette connaissance afin d'être un bon professionnel.

Pour sa part, Y. Clot réinterroge le concept d'action en s'appuyant sur les travaux de L.S. Vygotski. Il le met en rapport avec celui d'activité qu'il ne restreint pas à l'activité réalisée –l'action effective, observable-. Pour bien marquer le contour qu'a l'activité, il parle de réel de l'activité ou encore d'activité réelle. Il attire en particulier l'attention sur une caractéristique essentielle de cette activité à savoir qu'elle est triplement adressée : à son objet bien sûr, aux autres qui partagent le même objet d'activité, et au sujet lui-même. C'est en ce sens qu'il parle d'une « triple vie de la même activité », faite de discordances entre les trois adresses, l'objet, les autres et soi-même, et à l'intérieur même de chacun de ces trois pôles. Et de ce fait, comme le précise Y. Clot : « au bout du compte, l'action … émerge d'un conflit dans le réel, que celui-ci soit technique, social ou personnel.… L'action sort de l'activité… Résultat d'un conflit, l'action rappelle, et dans le meilleur des cas se subordonne ses supports instrumentaux et subjectifs»[26] (p 188). Ce qui distingue donc pour lui activité et action, c'est que l'activité, qu'il qualifie de réelle, recouvre tout ce qui anime le professionnel dans l'exercice de son métier, alors que l'action, c'est-à-dire ce qui est réalisé, ne révèle qu'une partie de cette activité réelle. Clot parle encore de réel de l'activité, il désigne ainsi les conflits qui sont au cœur de l'activité de tout professionnel.

Entendons-nous bien sûr ce que nous appelons conflit d'activité. Pour nous, il s'agit d'une tension intérieure qu'à un moment donné du cours de son action, tout professionnel affronte. Ainsi, en ce qui concerne les enseignants, il est inévitable qu'ils se trouvent plongés, de manière plus ou moins

[24] Friedrich J., (2001) Quelques réflexions sur le caractère énigmatique de l'action, in *Théories de l'action et éducation, op. cit.* pp. 93-112.
[25] Schütz, A. (1998). Choisir parmi des projets d'action. In A. Schütz, *Éléments de sociologie phénoménologique* (T. Blin, trad., pp. 53-87). Paris : L'Harmattan.
[26] Clot, Y. (2002) *La fonction psychologique du travail.* Paris : PUF.

sensible, dans des situations où se catapultent des phénomènes contradictoires. Assez contradictoires pour inciter celui qui doit agir, à faire, dans le même instant soit d'une manière, soit d'une autre, soit d'une troisième, etc.. Ce sont des conflits intérieurs propres à soi, qui se vivent plus ou moins consciemment, et le plus souvent plutôt moins que plus. On en trouvera de nombreux exemples dans l'ouvrage issu de nos travaux de recherche[27]. L'exemple le plus banal est celui du conflit que peut vivre tout enseignant de mathématiques, qui, à un instant donné a, d'un côté, à faire comprendre un raisonnement à un élève particulier, d'un autre côté, à maintenir l'attention de la classe, d'un troisième, à être rigoureux dans ses propos, et pourquoi pas, d'un quatrième, à faire taire un autre élève, tout cela dans le cours d'une action tendue vers l'objectif d'apprentissage prévu pour la séance ?

Conflits d'activité et réalisations possibles inaccomplies.

La clinique de l'activité prend appui sur cette conceptualisation théorique du rapport entre action et activité. Elle le conçoit comme un rapport vivant, intérieur au sujet, vécu de manière plus ou moins consciente par le sujet lui-même. C'est un rapport qui , tranché d'une certaine façon dans l'action, produit ce qu'on peut appeler « des résidus », qui sont d'autres réalisations qui auraient été possibles mais qui n'ont pas été accomplies pour diverses raisons. Dit autrement, pour nous, toute action accomplie, tout acte réalisé, n'est qu'une des réalisations possibles du sujet. C'est en ce sens que toute « action produit des possibilités ouvertes et problématiques », si l'on reprend les mots de J. Friedrich cités ci-dessus.
De tels « résidus » jouent un très grand rôle dans le devenir de l'action professionnelle. Nous avons de nombreuses traces de ce phénomène dans nos données de terrain. En effet, une fois l'acte effectué, l'activité du professionnel n'en a pas pour autant fini avec les possibilités non réalisées. Dans le cours de l'action ultérieure, à plus ou moins long terme, d'autres conflits réactivent les actes réalisés mais aussi ceux qui ont été suspendus. Ainsi, ce que fait le professionnel, à un moment donné, n'est en aucune façon indépendant de ce qu'il a fait et ce qu'il n'a pas fait précédemment. Il ***peut alors*** essayer de faire ce qu'il aurait voulu faire sans y parvenir, essayer de ne pas refaire ce qui lui semble avoir été un obstacle, renoncer à faire ce qu'il voulait faire sans y être parvenu ou encore décider de le remettre à plus tard dans d'autres conditions, etc. On sait bien, quand on enseigne, que ce qu'on n'a pas fait en cours continue, tout autant et même parfois plus que ce qu'on a fait, à nous occuper, qu'on y pense et repense, que parfois même ça nous envahit. On sait bien que c'est ça qui, au bout du compte**,** nous anime, nous dynamise ou, au contraire, nous inhibe. C'est en cela que ce phénomène mérite qu'on s'y arrête si l'on veut le développement du pouvoir d'agir professionnel à venir.

Telles sont les questions que nous tentons de traiter en clinique de l'activité. Nous constatons dans nos interventions de terrain que ces phénomènes, intérieurs au professionnel, ont plusieurs devenirs possibles. Ou bien l'enseignant, pour surmonter les tensions plus ou moins fortes mais inévitables nées des conflits d'activité, s'accroche à des manières de faire installées depuis plus ou moins longtemps. Il peut alors mettre en place un enkystement de l'action avec toutes les conséquences que l'on imagine, pour les élèves, comme pour lui. Ou bien, au contraire, il cherche à réduire les tensions qu'il vit et crée ainsi du développement qui se manifestera par d'autres actes réalisés. Cette dernière alternative peut d'autant plus se réaliser que le professionnel se trouve dans un contexte qui lui facilite le retour réflexif sur les résidus de son action, retour qui lui permet d'en faire quelque chose qui élargira, peut-être, ses possibilités d'agir.
Dans la réalité de l'enseignement aujourd'hui, cette conjoncture favorable se rencontre plus ou moins d'un établissement à un autre, d'une conjoncture à l'autre**.** Mais c'est plutôt rare, globalement. Du coup, le risque d'être déstabilisé dans le cours de son action quotidienne toujours soumise à des tensions incontournables, encourage chacun à s'installer, autant que possible, dans les mêmes manières de faire. Là est tout l'enjeu de notre recherche fondamentale de terrain : d'une part, créer un

[27] Roger, JL. (2007) *Op.cit.*

contexte qui favorise pour les enseignants l'élargissement de leurs possibilités d'action et d'autre part, repérer les modalités et invariants de cet élargissement.

2. Subjectivité et métier[28]

2.1. La clinique de l'activité : rapatrier la subjectivité dans l'activité.

La notion d'activité sur laquelle s'appuie la clinique de l'activité et les démarches qu'elle met en œuvre se différencient de celles qui prévalent le plus souvent chez les psychologues cliniciens. Pour ceux-ci, dès lors qu'on dit clinique, il s'agit de la clinique d'une subjectivité comprise comme un certain contraire de ce qu'on peut voir et observer des comportements, de ce qu'on peut toucher du doigt, de ce qu'on peut décrire. L'engagement d'un sujet dans ses actes ne se ramène certes pas à ce qu'on peut observer de ses actes. Mais ces cliniciens ont une tendance extrêmement forte à considérer qu'il faut se placer du côté du vécu, de la parole, voire de l'inconscient, et non de ce qui est fait ou non fait, simple manifestation de phénomènes plus décisifs. D'un autre côté, celui des ergonomes entre autres, on a par contre tendance à envisager l'activité comme ce qui s'observe, peut se décrire, voire se mesurer. Reste la question de l'engagement subjectif de celui qui agit et ses effets.

Pour sa part la clinique de l'activité, est une tentative, au plan théorique comme dans sa mise en œuvre, de sortir de cette dualité qui fait de la subjectivité quelque chose d'externe à l'activité et de l'activité le champ des opérations observables, cernables. Pourquoi ? Parce que finalement, si comme ça a été dit ci-dessus l'activité englobe l'action mais ne s'y réduit pas, tout ce qui n'est pas réalisé, soit parce que c'est réalisable mais pas encore fait, soit parce que c'est irréalisable, enfin en tout cas c'est impossible sur le moment, tout ceci est très réel, pèse très lourd dans le psychisme de chacun. Au fond, sur le plan théorique, la clinique de l'activité, c'est une tentative de rapatrier la subjectivité dans l'activité. On touche là fondamentalement la question du sens, pour le professionnel, de son activité, car avec la question de l'activité possible, réalisée, ou impossible, donc non réalisée, on est dans ce que l'activité a peut-être d'essentiel, c'est-à-dire son efficacité, mais aussi son devenir, son destin, ses possibles et impossibles. Du coup, on comprend bien que parler de l'activité professionnelle et parler des pratiques professionnelles, ce n'est pas la même chose, surtout quand ces dernières sont envisagées comme le détail ou la somme de ce qui est, en apparence, fait, observable, analysable en tant que tel –mais par qui ?-.

Plus précisément, la clinique de l'activité vise à remettre au travail ce que nous avons désigné plus haut comme des résidus de l'action. Elle vise à mettre au point des dispositifs grâce auxquels les enseignants peuvent trouver un contexte qui les aide à revenir sur ce qui leur pose problème dans ce qu'ils ont fait, sur ce qui ne les satisfait pas, ce qui ne les convainc pas, dans ce qu'ils font, pour qu'ils puissent en faire quelque chose d'autre. « C'est seulement quand l'expérience sert à faire d'autres expériences que l'on conserve la main sur son histoire, non pas en la niant mais par l'entremise de son développement. »[29] C'est seulement ainsi que les professeurs peuvent tenir à distance usure au travail, souffrance et angoisse. Autrement dit, l'obsession de la clinique de l'activité, ce n'est pas le vécu, c'est garder le vécu vivant, pour que le travail reste défendable pour les sujets. Car quand le travail n'est plus défendable, on en fait « une maladie », comme le dit très justement l'expression populaire.

---

[28] On s'inspire ici de l'article de Clot, Y,. (2007) De l'analyse des pratiques au développement des métiers. *Education et didactique,* n°1, PUR, pp. 83-94.

[29] Clot, Y,. (2001) Editorial. *Education Permanente,* n° 146 spécial « clinique de l'activité ».

2.2. Les quatre dimensions du métier.

L'activité, telle que nous l'envisageons, s'exerce dans le cadre de métiers que nous définissons comme la combinaison de quatre dimensions.

- Une dimension personnelle. De ce point de vue-là, aucune façon de faire son métier n'est superposable à la façon personnelle d'un collègue de travail. Un métier, c'est irréductiblement personnel.
- Un métier, c'est aussi interpersonnel. En effet, toute activité professionnelle est adressée, à soi-même personnellement certes, mais aussi à l'activité de quelqu'un d'autre, ou de quelques autres. Pour avoir du sens, il faut qu'elle ait des destinataires.

Mais pour nous, on ne peut pas s'arrêter à cela. Deux dimensions paraissent tout aussi centrales dans et pour le développement de l'activité professionnelle :

- Un métier, c'est également impersonnel. Parce qu'un métier assume nécessairement un rôle social, il est cadré par des missions et des tâches définies indépendamment -institutionnellement par exemple- de chacun des professionnels concernés. Cependant il faut considérer que ce qui est impersonnel dans un métier est aussi un objet de transformation, que ce n'est pas défini une fois pour toutes. Ce n'est pas parce que c'est impersonnel que c'est intangible. Entre autres facteurs, cette dimension impersonnelle n'est pas inaccessible au collectif de ceux qui travaillent.

- Mais, pour que l'impersonnel reste, du fait des professionnels, ouvert à une autre histoire que celle dans laquelle il est pour le moment arrêté, il faut que s'exerce une quatrième dimension du métier. Nous l'appelons transpersonnelle, c'est-à-dire une histoire « générique », ce qu'un collectif de travail retient comme obligations partagées et qui lui donne le sentiment de vivre la même histoire. Quand cette dimension s'étiole, il se développe un sentiment de solitude professionnelle, qui prive chacun de la possibilité d'utiliser les ressources collectivement construites face à un réel qui reste toujours difficile. Chacun est alors mis en position d'essayer plus ou moins, selon ses ressources personnelles, de se débrouiller tout seul pour trouver une issue aux problèmes qu'il rencontre, tâche aventureuse et risquée. En outre, toute fragilisation de la dimension transpersonnelle produit comme autre effet que le milieu professionnel a alors fort peu de chances d'assumer sa fonction collective de transformation de l'impersonnel. Massivement il se met à subir la définition formelle des missions et des tâches, celle d'en haut, sans pouvoir s'en approprier le sens. Il devient problématique de remplir le rôle social assigné au métier.

Cette conceptualisation du métier s'est imposée à nous pour comprendre les obstacles que rencontrent certains enseignants pour transformer des manières de faire qui pourtant ne les satisfont pas, parfois même provoquent en eux un sentiment d'échec, voire de culpabilité.

3. La fonction psychologique du collectif

3.1. Le nécessaire travail collectif

Parmi ces obstacles, l'un des principaux, dans la situation actuelle, est que les enseignants, particulièrement les jeunes, se trouvent trop souvent exposés seuls face aux enjeux des situations vécues, et aux conflits de toutes sortes induits par le travail. Autrement dit la dimension transpersonnelle est défaillante. Dans cette conjoncture problématique, ils sont pris entre, d'un côté, les repères qu'ils se sont construits à partir de leur expérience d'élève, leur formation, leur parcours de professeur et, de l'autre, des prescriptions institutionnelles plus ou moins adaptées. Le problème c’est que pour faire face, ils manquent souvent de ressources collectivement élaborées par le milieu professionnel. Nos recherches de terrain nous ont révélé de manière récurrente des blocages, des freins. Plus précisément nous avons rencontré de jeunes enseignants, mais aussi de moins jeunes, complètement déconcertés par les manières de faire prescrites par l'institution, par les conflits du travail qu’ils rencontrent, sans moyens pour en faire quelque chose qui ait du sens pour eux, quelque chose qu'ils puissent s’approprier, transformer, améliorer, rendre efficace.

Mais, nous avons aussi remarqué et relevé comme un phénomène important et sans doute fondamental, que lorsque ces enseignants découvrent la diversité des actes professionnels de collègues - et des leurs propres aussi, en se confrontant aux autres -, lorsqu'ils peuvent en parler librement entre eux, il se produit à l'intérieur d'eux-mêmes un travail psychique de dé-liaison et re-liaison de leurs représentations et de leurs manières de faire. Les actes professionnels, aussi bien ceux qu’ils voient faire par leurs collègues, que ceux qui sont prescrits par l’institution, que ceux aussi qui émanent de leur milieu professionnel, tous ces actes professionnels cessent d'être, pour eux, des normes pour devenir des ressources dans lesquelles ils peuvent puiser pour agir. Au lieu de chercher à faire « comme on doit », ou au contraire de faire « de la seule manière qui lui convienne », l'enseignant s'engage alors le plus souvent, c'est ce qui s'est passé dans notre expérience, dans un enrichissement de sa palette d'actes réalisables dans le cours de sa propre action.

Une forme de travail collectif s’avère donc indispensable. Ce travail collectif joue un rôle psychologique qui consiste à susciter et alimenter pour chacun le travail intérieur de dé-liaison et de re-liaison mentionné ci-dessus. Le collectif est d'abord une ressource pour se tirer des situations compliquées dans lesquelles tous se trouvent placés parfois, et plus souvent encore ceux qui débutent. Il soutient l’effort de chacun pour se sortir des situations complexes, quand c'est possible. Chacun découvre ensuite dans le collectif des choses auxquelles il n'avait pas pensé et son activité peut se transformer à cette occasion-là.

Ainsi, la clinique de l'activité est conçue pour transformer le pouvoir d'agir des professionnels concernés, pour le développer. En 2001, à l'occasion du colloque de la revue « Education Permanente » consacré à la clinique de l'activité[30], Y. Clot disait : « Les travailleurs qui cherchent en formation de quoi étendre leur rayon d’action, le mesurent bien. Ils sentent que leur pouvoir d’agir sur le milieu et sur eux-mêmes, reliant santé et efficacité, a une double racine : le développement du sens de leur expérience et celui de son efficience…C’est précisément ce que, depuis 1997, on appelle, en clinique de l’activité, le pouvoir d’agir, dont l’extension est l’objet des efforts consentis par les protagonistes de la recherche… L’analyse du travail se révèle comme un instrument de formation des sujets à la condition de chercher à devenir un instrument de transformation de l’expérience. Ce qui est formateur pour les travailleurs, c’est-à-dire ce qui accroît leur pouvoir d’agir, c’est de rencontrer la possibilité de changer le statut de leur vécu : d’objet d’analyse, le vécu doit devenir un moyen de vivre d’autres vies. »

3.2. Un « travail sur le travail »

À ce jour, les recherches effectuées dans l'équipe de clinique de l'activité dans des milieux professionnels divers, même si elles ont révélé des obstacles sérieux pas toujours aisément surmontables aussi bien du côté des chercheurs que du côté des professionnels, confirment ce qui a été dit à ce colloque. Il en est de même pour les recherches que nous avons menées avec les professeurs du second degré pas seulement en mathématiques au collège, mais aussi en histoire-géographie au lycée et en philosophie. Ainsi, Th. M., une des professeurs de philosophie, qui a participé à ces recherches, analyse ce qu'elle a vécu comme une réponse adaptée à son besoin de

[30] Clot, Y,. (2001) Art. cit. p. 15.

formation que, pourtant, elle qualifie elle-même de contradictoire. Elle écrit : « *Le besoin de formation est une exigence qui vient du cœur de l'exercice du métier. D'abord les certitudes suffisent, les prescriptions inconscientes ou institutionnelles qui accompagnent une entrée dans le métier. Les aménagements avec la réalité se font au gré de l'expérience, apprentissage hasardeux que notre réflexion essaie de rationaliser. Mais l'expérience a des limites… Or les offres de formation qui sont faites aux professeurs sont pauvres ou vaines. Elles consistent en effet à mettre le professeur dans une situation de faux-apprenti, passif, susceptible de recevoir de bons conseils. Une formation donc en toute extériorité avec sa pratique réelle et personnelle. Elle nie l'expérience et la réflexion développées par chacun… Le professeur ne peut pas être réceptif à ce qui ne part pas de lui, du moment professionnel qui est le sien. Autrement dit, j'arrivai à la réflexion qu'il n'y a de formation qu'auto-formation.*
Cette idée peut sembler contradictoire : nous le disions, les limites de l'expérience et de la réflexion personnelles sont réelles et palpables pour chacun… Quelle réalité se cache dès lors derrière ce terme d'auto-formation ? Une formation dont je serais l'actrice et en même temps le résultat, par l'intermédiaire d'un autre que moi qui me ramènerait cependant à moi. C'est précisément ce que la clinique de l'activité m'a permis de pratiquer. »

L'idée que cette collègue énonce, qu'elle a été à la fois actrice et résultat de sa formation, à partir du moment professionnel qui était le sien, montre qu'elle a effectué un travail sur son travail. Celui-ci lui a permis de s'appuyer sur ses expériences vécues pour vivre d'autres expériences plus larges, différentes dont elle précise que c'est « par l'intermédiaire d'un autre que moi qui me ramènerait cependant à moi ». Elle aurait pu tout aussi bien écrire autres au pluriel, puisqu'elle désigne en réalité non seulement le chercheur mais aussi les autres membres du collectif des professeurs de philosophie, avec lesquels elle a vécu cette expérience. Elle pointe là un des résultats de nos recherches avec les enseignants : le pouvoir d'agir d'un enseignant est étroitement dépendant du dynamisme d'un collectif, car un tel collectif a une fonction psychologique essentielle pour son développement. Autrement dit, développer le pouvoir d'agir passe par la restauration de *la fonction psychologique du collectif*.

Entendons nous bien sur ce que nous appelons collectif. On a l'habitude de dire que nous vivons chacun individuellement dans des collectifs (les collègues, les associations, les organisations, etc.). En réalité pour exercer son métier sans usure excessive, il faut surtout que le collectif soit intérieur à soi, participe à son propre dialogue intérieur sur son travail, à la fois comme soutien, et comme partenaire vraiment engagé dans la même histoire difficile. C'est peut-être une étrange manière de dire les choses, et pourtant c'est une manière de dire qui éclaire bien sur ce qui se passe dans certains établissements scolaires où ces collectifs n'existent pas, où chacun travaille dans une très grande solitude, avec une fatigue excessive. On appartient véritablement à un collectif lorsqu'on partage de manière consciente et engagée une même histoire. On fait souvent comme si nous étions dans des collectifs, mais en réalité nous sommes bien plus dans des collections, c'est-à-dire nous sommes dans des équipes où nous sommes juxtaposés, où nous cheminons en parallèle les uns avec les autres. Mais nous n'avons que très rarement une histoire commune.
Un collectif qui remplit sa fonction psychologique, c'est pour nous un collectif dont les membres vivent une histoire au cours de laquelle ils travaillent vraiment sur leur travail, une histoire où, parce qu'ils sont ensemble pour ce travail sur le travail, ils *refont leur métier*.[31]

4. La clinique de l'activité comme méthodologie : Installer un cadre d'observation dialogique pour sa propre activité.

4.1. Extérioriser le dialogue intérieur.

[31] Roger, JL. (2007) *Op. cit.*

Pour mettre en œuvre un véritable travail sur le travail, il faut inventer des instruments de développement du pouvoir d'agir des professionnels. C'est en faisant cela qu'on produira aussi les matériaux nécessaires aux chercheurs sur la question des invariants du fonctionnement et du développement de l'activité professionnelle.

Ce qui nous est apparu, c'est que cet objectif peut être atteint si l'on engage les sujets professionnels concernés à devenir les interprètes de leur propre activité au travers d'un dialogue visant à « faire parler le métier ». Pour ce faire, on considère l'activité la plus ordinaire –l'activité réalisée, observable et l'activité non réalisée, possible, impossible, ravalée, etc.- non pas comme simple objet d'analyse, ce qui est assez classique, mais comme point de départ d'une possible activité dialogique. Qu'entend-t-on par « faire parler le métier » ? Cela consiste à interpréter sa propre activité, dans le cadre réglé d'un groupe restreint de pairs (cinq ou six). On cherchera alors à analyser les situations de travail qui sont problématiques, pour tous souvent, pour certains plus particulièrement parfois, c'est-à-dire les situations de travail où il est difficile de trouver des manières de faire qui, d'une part, soit suffisamment efficaces et, d'autre part, soit satisfaisantes pour ce qu'on attend soi-même de son métier.

Avant de présenter précisément les dispositifs que nous utilisons, il faut souligner l'importance que nous attachons à l'activité dialogique personnelle, au dialogue intérieur. Henri Wallon relevait que, même lorsqu'il s'agit d'une simple observation : « *L'attention que le sujet sent fixée sur lui, semble, par une sorte de contagion très élémentaire, l'obliger à s'observer. S'il est en train d'agir, l'objet de son action et l'action elle-même sont brusquement supplantées par l'intuition purement subjective qu'il prend de son propre personnage. C'est comme une inquiétude, une obsession de l'attitude à adopter. C'est un besoin de s'adapter à la présence d'autrui qui se superpose à l'acte d'exécution*.[32]» Ainsi, même si ce n'est pas sa visée, une simple observation produit chez l'observé un dialogue intérieur : le professionnel se met à penser, sur le moment, et ensuite, à ce qu'il a fait, à ce qu'il fait d'habitude. En tout cas, l'observation par un autre -chercheur ou pair- fait qu'on se pose des questions sur ce qu'on a fait, sur ce qu'on aurait dû faire, sur ce qu'on a montré de soi-même en se disant que le collègue, peut-être, n'aurait pas fait pareil, en se demandant ce qu'il va penser de ce qu'on a fait, etc.

Notre méthodologie consiste à permettre le développement d'un tel dialogue intérieur et à lui donner un destin. Pour cela il faut instaurer un constant aller et retour entre dialogue intérieur et dialogue extérieur, avec un ou plusieurs autres sujets. Concrètement on procède en plusieurs étapes.

La première phase est consacrée à la constitution de groupes de travail de professionnels volontaires. Puis on organise la présence d'un intervenant-clinicien lors de diverses situations d'exercice du métier afin de déterminer ensuite, avec le groupe, à la détermination d'une séquence commune pertinente. Celle-ci fera ultérieurement l'objet d'un enregistrement vidéo. Au cours de cette première phase, il ne s'agit pas d'« observer » au sens habituel du terme, mais d'amorcer et de développer le dialogue intérieur à chacun dans le cadre d'un dialogue interpersonnel. Les analyses sont portées au niveau du collectif pour faire l'objet d'une élaboration. On redécouvre chaque fois que le sujet porte et transporte une histoire et une expérience qu'une observation extérieure confond trop vite avec un ensemble d'automatismes et de routines. Ceux-ci sont en réalité supportés par des choix et un engagement subjectif. C'est cette redécouverte de l'expérience, de sa richesse mais aussi de ses limites et de ses dilemmes que la première phase cherche à instruire individuellement et collectivement, à la recherche d'un objet « difficile à expliquer », autour duquel peut se dérouler la confrontation entre « connaisseurs ».

[32] Wallon, H. (1941/1965). *L'évolution psychologique de l'enfant*. Paris : Armand Colin.

Une seconde phase se déroule en trois étapes. Pour commencer, on fait l'enregistrement vidéo de la séquence de travail retenue. On constitue par là même des traces de l'activité, plus précisément de ce qui est réalisé de l'activité elle-même, qui, elle, reste inaccessible. Ces traces font ensuite l'objet d'analyses répétées d'abord au cours d'une confrontation du professionnel concerné à l'enregistrement en présence de l'intervenant (Autoconfrontation simple), puis, à une seconde confrontation du même professionnel au même enregistrement, en présence d'un intervenant et d'un pair qui s'est lui aussi confronté à ses propres séquences d'activité (Autoconfrontation croisée). On cherche à obtenir que les professionnels s'interrogent sur le détail de ce qu'ils se voient faire. Autrement dit, qu'ils décrivent le plus précisément possible les gestes et opérations observables sur l'enregistrement vidéo jusqu'à ce que les limites de cette description se manifestent, jusqu'à ce que la vérité établie soit prise en défaut dans la véracité du dialogue, par l'authenticité dialogique. La décomposition des gestes par le professionnel acquiert de la sorte un tout autre statut. Au lieu d'isoler des éléments de l'activité dont le clinicien aurait à recomposer la logique, le sujet défait et refait les liens entre ce qu'il se voit faire, ce qu'il y a à faire, ce qu'il voudrait faire, ce qu'il aurait pu faire ou encore ce qui serait à refaire, etc. Autrement dit, le résultat de l'analyse ne débouche pas d'abord sur une connaissance de l'activité, mais souvent sur des étonnements autour d'évènements difficiles à interpréter dans les canons du discours convenu. La mise à jour de ces moments de l'action, qui résistent à une interprétation plus ou moins banalisée, permet, à l'un et à l'autre, c'est-à-dire au chercheur (ou à l'intervenant-clinicien) et au professionnel qui se regarde faire, de tourner leurs commentaires vers ces moments-là. Le commentaire devient alors l'instrument d'une élaboration psychique d'abord personnelle puis interpersonnelle. Le commentaire croisé oriente dans un second temps les dialogues sur la confrontation des manières de faire différentes pour atteindre les mêmes objectifs ou s'en fixer d'autres. Les travailleurs concernés font alors l'expérience du plurilinguisme professionnel. D'autres gestes possibles, restés insoupçonnés, peuvent être imaginés dans cette confrontation à soi et à l'autre. Ils peuvent être « pris à l'autre » On assiste, quand on parvient à « tenir bon » sur ce cadre dialogique à l'ouverture de *zones de développement potentiel* du pouvoir d'agir.

La troisième phase permet de déplacer la confrontation et de la faire « monter » ou « descendre » à d'autres étages, c'est-à-dire soit au niveau du collectif professionnel de départ, soit à celui d'un comité de pilotage de l'intervention, soit à celui d'un collectif professionnel élargi, autrement dit l'ensemble des pairs affrontés aux mêmes épreuves professionnelles. C'est le moment de la restitution des analyses au collectif à l'aide des documents vidéos de travail. La confrontation entre les différents milieux que la démarche traverse (intervenants compris) se trouve encore réveillée par les limites du travail d'interprétation de l'activité concrète qui maintient tous les protagonistes à découvert. Ou plutôt qui les expose aux plaisirs éventuels de la découverte. Ce mouvement de confrontation dialogique sur l'activité de travail n'a, a priori, pas de limites. Le dernier mot ne peut pas être dit. Mais ce mouvement interprétatif doit se mesurer à de nombreux obstacles, notamment en trouvant sa place dans l'histoire du milieu et du collectif professionnel.

4.2. Faire l'apprentissage de la limite des mots usuels pour penser les choses.

Comme on le voit, il ne s'agit pas, dans les dispositifs que nous mettons en place, de se tenir à distance, en disant par exemple au professionnel qu'on ne veut pas le déranger. L'objectif est qu'il soit « affecté » par ce qu'il découvre et analyse ce qu'il fait dans les dialogues auxquels il participe. Les moments les plus fructueux sont ceux où la parole hésite, où l'on n'arrive plus à comprendre, où l'on cherche à comprendre et où peu à peu le dialogue reprend en même temps qu'on fait de nouvelles interprétations dans le vif de l'activité dialogique.

Que se passe-t-il exactement dans ces moments-là ? On est en fait devant un conflit très intéressant car la parole est dans une sorte de lutte interminable entre deux processus. Un processus *centripète* du « déjà dit » et un processus *centrifuge* du « pas encore dit ». Le dialogue hésite continuellement en effet entre les histoires qu'on se raconte, les vérités catégoriques auxquelles on ne déroge pas pour ne pas se mettre à découvert ou en situation de risque, et les énoncés qui tentent de ne pas tricher avec le réel, qui cherchent à attraper ce qu'on se représente avec difficulté, ce qui est difficile à dire. La clinique de l'activité, c'est fait pour que les professionnels trouvent les mots pour dire d'autres choses que ce qu'on a dit jusqu'à maintenant. Ce passage du « déjà dit » au « pas encore dit » semble décisif pour que les professionnels fassent l'expérience de la limite des mots habituels pour penser les choses, de la nécessité d'autres mots, et la fassent personnellement dans un cadre collectif.

La voie que nous incitons le professionnel à suivre consiste donc à ne jamais renoncer à s'emparer de l'objectivité du métier, à la recherche de ce qu'on n'a pas encore fait, de ce qu'on n'a pas encore dit. Il s'agit de faire reculer non pas les limites de sa subjectivité individuelle mais, ce qui n'est pas du tout pareil, les limites des façons de faire son métier et du métier en général. Pour ce faire, l'activité dialogique installée par les autoconfrontations d'abord simples, puis croisées, rapatriées ensuite dans le collectif, a pour but de faire naître de la controverse professionnelle. En effet ce qui peut produire du développement du pouvoir d'agir, c'est que le dernier mot ne soit jamais dit, qu'il n'y ait pas une seule pratique possible mais plusieurs et que cela se discute. C'est pour ces raisons qu'il importe de construire et de stabiliser un collectif de professionnels uni sur une idée, à savoir que c'est la différence des façons de faire et les controverses, au bon sens du terme, sur cette différence qui sont motrices. Un collectif qui vive de l'accord de tous pour faire un travail sur le possible, l'impossible, le non-réalisé.

En bref, on peut dire que la méthodologie de la clinique de l'activité n'est pas conçue pour savoir pourquoi ce qui est fait est fait. Nous pensons en effet que cette « vérité » n'est pas accessible et ne le sera jamais. La finalité du dispositif, c'est que les professionnels s'interrogent sur ce qu'ils se voient faire, s'interrogent aussi les uns les autres sur ce qu'ils font. Comme l'écrit Y. *Clot*[33], « le genre dialogique de l'autoconfrontation croisée [et des échanges et controverses dans le collectif] vise surtout à contaminer l'activité ordinaire, non pour la soumettre à des canons qui ne sont pas les siens mais pour l'affranchir de tout ce qui est conventionnel, nécrosé, ampoulé, amorphe, de tout ce qui freine sa propre évolution ». En cela, il rejoint Bakhtine[34] pour qui « il reste toujours un excédent d'humanité non réalisée ».

Nous nous sommes interrogés sur les réticences que provoquent chez les enseignants, et aussi chez les stagiaires, certains dispositifs qui s'attachent à développer ce qu'on appelle parfois la professionnalisation du métier enseignant. Nous nous demandons si les difficultés rencontrées ne sont pas à chercher dans le rapport qu'entretiennent connaissance, action sur le terrain et développement du métier. Les données recueillies au cours de nos propres démarches semblent attester que ce n'est jamais la connaissance en tant que telle qui engendre les modifications de l'action. Au contraire, l'interprétation d'une situation à partir d'un cadre théorique préalable provoque inévitablement un silence de la part des professionnels. Silence qui ne surprend pas vraiment si on fait l'hypothèse, avec Vygotski, que « la pensée ne prend pas naissance dans une autre pensée »[35] mais dans la confrontation aux dilemmes du réel. Ce ne sont donc pas directement l'interprétation, les représentations et les idées qui peuvent produire du développement. Par contre, la confrontation aux conflits du métier peut amener celui qui agit *à s'expliquer* avec la connaissance, *explication* active qui peut participer à l'ouverture de nouvelles issues dans des situations complexes ou difficiles, qui peut « contaminer l'activité ordinaire », pourrait-on encore dire.

---

[33] Clot, Y. (2004b) L'autoconfrontation croisée en analyse du travail : l'apport de la théorie bakhtinienne du dialogue. In Fillietaz, L., Bronckart, J.P. *L'analyse des actions et des discours en situation de travail*. Bruxelles : De Boeck Université.

[34] Bakhtine. M. (1978*) Esthétique et théorie du roman*. Paris : Gallimard. p. 470.

[35] Vygotski, L.S. (1934-1997) *Pensée et langage*. Paris : la Dispute. p. 493.

Pour conclure on peut dire qu'en clinique de l'activité, nous ne visons pas l'expression d'une subjectivité qui confesserait ses limites. La voie proposée aux professionnels, c'est de ne jamais renoncer à s'emparer de l'objectivité du métier, à la recherche de ce qu'on n'a pas encore fait, de ce qu'on n'a pas encore dit, pour faire reculer non pas les limites de sa subjectivité, mais les limites du métier. Car c'est ça qui fait du bien comme le souligne Georges Canguilhem[36]. Et c'est aussi ça qui permet de bien faire son métier, de faire qu'il remplisse son rôle social.
Du coup, à nos yeux « la bonne pratique », c'est la capacité de développement du pouvoir d'agir. C'est la controverse professionnelle, c'est le fait que le dernier mot ne soit jamais dit, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas une seule manière de faire possible mais plusieurs, que ça se discute et que cette discussion fasse partie du métier. Ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas à un moment donné des accords . Il peut y avoir, entre professionnels, des ententes sur les bonnes manières de faire. Mais il faut qu'elles soient raccordées de l'intérieur au fait que le dernier acte n'est jamais accompli et que le dernier mot n'est pas dit, que même ce qui semble marcher se discute. Pour cela il faut du collectif mais à la fois un collectif réalisé, celui de l'accord, et un réel du collectif, c'est-à-dire celui du travail sur le possible, l'impossible, le non réalisé, un collectif qui passe finalement par un travail d'observation des différences et des controverses.

Est-ce à dire que nous nous limitons à être de simples intervenants de terrain ? Non. Pour nous transformer les possibilités d'action des professionnels c'est aussi se donner les moyens de comprendre les lois du développement du pouvoir d'agir**.** L'objectif de départ des recherches de Y. Clot et de l'équipe de clinique de l'activité était de mettre en place des méthodes d'analyse du travail qui diffèrent quelque peu de ce qui prévalait dans la tradition de l'ergonomie francophone. Pour celle-ci comprendre vise à transformer une situation, à déboucher sur des préconisations et des modifications des modalités du travail. Il y avait eu, et il y a toujours beaucoup de discussions à ce sujet. Ainsi le courant anglophone continue de penser que la fonction du chercheur, c'est de connaître, éventuellement de comprendre, en tous les cas de produire des savoirs qui vont constituer un patrimoine pour que les décideurs décident. L'ergonomie francophone s'est opposée radicalement à cette position en choisissant de ne s'engager dans un travail de connaissance que s'il était finalisé sur la transformation. Les recherches en clinique de l'activité sont conformes à cette tradition. Mais, ce qui les distingue des recherches qui se font en ergonomie francophone, c'est qu'elles reprennent la thèse vygotskienne selon laquelle en psychologie comprendre pour transformer implique de transformer pour comprendre, comme on le fait depuis longtemps pour les sciences de la nature.

Montage vidéo présenté lors de la conférence.

Ce texte a été rédigé avec la participation de Yolande Allognier, Lydia Barthod, Laurent Danne, Christine Grandjean, Marie-José Houssin, Géraldine Jacquin, Fabrice Madkaud, David Maréchal, Christelle Serra.

[36] Canguilhem, G. (1966) *Le normal et le pathologique.* Paris : Puf.

Pour cette conférence, nous avons choisi de montrer un montage vidéo de deux autoconfrontations croisées entre deux enseignants qui étaient l'un, F., professeur stagiaire et l'autre, M., sa tutrice, quand la recherche a commencé. La première autoconfrontation s'est déroulée au début de l'expérience. Nous n'en rapporterons que les questionnements de F. et ses surprises, sans nous étendre sur les réponses de M.. En effet ce qui nous semble intéressant, c'est ce qu'il cherche à comprendre lorsqu'il voit faire sa tutrice et comment il le dit dans ce contexte particulier, qui évacue toute évaluation.
La deuxième autoconfrontation s'est déroulée à la fin de la recherche, après de nombreuses réunions du collectif, au cours desquelles les uns et les autres ont confronté leurs interprétations des images de leurs cours et de leurs autoconfrontations. Au moment de cette deuxième autoconfrontation, F. avait déjà exercé son métier dans plusieurs classes. Il y avait acquis une expérience plus large et plus concrète des situations de travail. Aussi cette deuxième autoconfrontation entre M. et F. sur les mêmes images de cours, celles de l'année de la première autoconfrontation , a-t-elle produit une controverse professionnelle plus dense et plus précise. Nous n'en présenterons ici qu'une partie, celle qui concerne un aspect particulier du métier, à savoir le travail en groupes dans la classe.

F. et M. ont été filmés dans une classe de cinquième. Ils avaient choisi de travailler l'un et l'autre sur les pourcentages, chacun l'envisageant à sa manière sans réflexion préalable commune. Il se trouve que M. a organisé son cours en trois phases repérables par trois dispositifs différents. La première phase a consisté en un exercice en temps limité très court, un test qui lui a apporté une connaissance rapide de ce que les uns et les autres de ses élèves avaient retenu du cours précédent, où elle avait vu avec sa classe les méthodes et opérations relatives au pourcentage. La deuxième phase fut un moment de classe collective où M. a repris un exercice d'application portant sur des données statistiques à organiser en classes d'individus. Cet exercice avait été commencé au cours précédent et devait avoir été poursuivi à la maison. Enfin la troisième phase fut une poursuite en classe de cet exercice dans le cadre d'un travail en groupes. Cette diversité des dispositifs a été évidemment propice au questionnement du stagiaire.

1. Première autoconfrontation croisée.

1.1. Un questionnement un peu formel du stagiaire.

Le stagiaire F. avait déjà assisté à maintes reprises à des cours de sa tutrice M.. Il connaissait donc déjà certaines de ses façons de faire. Mais le dispositif d'observation dialogique, dans lequel il se trouve placé, à la fois l'aide et le pousse à interroger sa tutrice, et donc à lui poser des questions qu'il a peut-être retenues jusque-là, ou qui émergent à cette occasion particulière.
Des échanges entre M. et F., nous ne rendrons compte ici que du questionnement de F., car il nous informe sur ce qui étonne un stagiaire, sur ce qui lui semble compliqué, sur ce qu'il n'arrive pas à faire et qu'il voudrait faire, aussi sur ce qu'il pense devoir faire. Bien sûr, il n'est pas possible de généraliser à partir d'un seul cas. Il n'empêche qu'on a là des informations qui peuvent fournir des éléments de réflexion sur ce qui est difficile pour un professeur débutant.

F. : Dans la manière dont tu procèdes, j'ai remarqué que tu fais souvent ça : c'est-à-dire tu interroges un premier élève, puis ensuite tu fais réagir d'autres élèves et puis pour conclure, tu reviens à l'élève de départ pour qu'il

M. : Pour qu'il valide

F. : Pour qu'il valide ce qu'il avait dit ou qu'il invalide ce qu'il avait dit. En fait je n'ai pas vraiment de questions par rapport à ça, mais j'imagine que c'est à la fois pour l'ensemble qui en profite et surtout pour l'élève que tu as interrogé en premier, qu'il s'entraîne à avoir du recul par rapport à ce qu'il dit ?

M. : Oui si je reviens à lui en dernier …..

………………

F. : Est-ce que l'élève que tu choisis en particulier, c'est le hasard de la situation qui fait que c'est celui-là ou bien est-ce qu'il y a des moments où tu choisis un élève parce que tu as une idée derrière la tête. Enfin, tu le choisis intentionnellement lui et pas simplement par hasard ? parce qu'il faut en choisir un, tu comprends ce que je dis ?

M. : Mais c'est rare que ce soit au hasard parce que ou bien …..

………………

F. : Et comment, parce que ça c'est quelque chose que je trouve difficile, comment mettre en confiance un élève qui a des difficultés en mathématiques pour qu'il puisse intervenir face aux autres, parce que il y a très souvent comme ça des élèves qui sont très introvertis qui n'osent pas intervenir, d'une part parce qu'ils se sentent en difficulté, d'autre part parce qu'ils ont peur que les autres se moquent d'eux. Alors, comment ? comment dire ? Comment est-ce que tu arrives à instaurer un climat de confiance ? un climat de confiance tel que l'élève ose intervenir vraiment ?

M. : Eh bien, je crois que pour certains élèves, je n'y arrive pas. Ça c'est quelque chose qu'on ne peut pas réussir à 100%.....

………………..

F. : Qu'est-ce qui fait que tu passes plus rapidement auprès de certains groupes ou bien que tu t'attardes plus pour d'autres ?

M. : Tout à l'heure au début, je me suis attardée plus……

………………..

F. : Et à quel moment tu décides d'intervenir par rapport à ce qu'ils font et à ce qu'ils ne font pas, parce que lorsqu'on fait une activité, comme ça en principe, il y a la mise en commun. Donc à ce moment-là, on n'intervient pas trop par rapport à ce que les élèves font. S'ils partent sur une fausse piste, on essaie de les faire réfléchir, mais réfléchir par rapport à ce qu'ils font, mais sans pour autant corriger, mais

M. : Là ça n'était pas une activité, c'était plutôt une application des calculs de pourcentage et à la fois d'arrondis. Et c'était quelque chose de beaucoup plus classique comme exercice, bien que ce soit un travail de groupe, mais ce n'était pas une activité de découverte…

Exemples d'évolutions et de résistances de PLC2 de mathématiques dans leurs pratiques d'enseignement de l'algèbre

Agnès LENFANT

IUFM Champagne Ardenne

Equipe AEP[37] de l'Université Reims Champagne Ardenne.

Les résultats présentés au cours de cette conférence sont issus d'une recherche (Lenfant, 2002) portant sur l'étude de la constitution et de l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de professeurs stagiaires de mathématiques (PLC2). Ce travail a mis en évidence l'existence de régularités dans la constitution et l'évolution du rapport à l'algèbre des PLC2 avec qui nous avons travaillé. Il a également fait apparaître une grande diversité des évolutions. Nous présenterons le contexte général de cette recherche dans une première partie.
Au cours de la conférence, nous avons centré notre regard sur l'analyse des pratiques de trois stagiaires enseignant au même niveau, mais dans des conditions de travail différentes. Nous avons cherché à identifier des exemples d'évolutions et de résistances dans leurs pratiques relatives à l'enseignement de l'algèbre (partie II de notre article) et des raisons qui permettent d'expliquer des évolutions ou des résistances (partie IV). Nous avons également présenté un dispositif vidéo" qui a permis de déclencher des questionnements nouveaux chez l'un des trois professeurs stagiaires présentés (partie III).

I – Présentation de la recherche :

> *Des problèmes posés par la formation initiale des enseignants de mathématiques nous ont conduite à étudier la constitution de pratiques professionnelles chez les professeurs de mathématiques débutants afin de déterminer quelles entrées pourraient être plus efficaces. Nous avons centré notre travail autour de l'étude la construction d'un rapport professionnel de professeurs stagiaires à l'algèbre élémentaire, domaine central en mathématiques. Cette recherche a été globalement organisée autour de quatre questions : comment se construit et évolue la vision des enjeux de cet enseignement chez des professeurs stagiaires de mathématiques ? Comment se construit et évolue leur vision des élèves, de leurs difficultés, des obstacles qu'ils doivent surmonter ? Comment élaborent-ils des stratégies d'enseignement et quelles sont leurs priorités dans cette élaboration ? Comment analysent-ils leurs pratiques, les difficultés éventuelles qu'ils rencontrent, les décalages entre leurs attentes et la réalité de la classe ?*

Le cadre théorique de cette recherche articule deux types de travaux : certains plus particulièrement centrés sur l'enseignant et d'autres plus spécifiques à la didactique et l'épistémologie de l'algèbre élémentaire.
En ce qui concerne l'enseignant, nous nous sommes appuyée sur deux cadres théoriques en didactique des mathématiques :

- la théorie anthropologique du didactique qui définit, notamment, un cadre d'analyse des pratiques enseignantes à travers l'étude d'organisations mathématiques et didactiques (Chevallard, 1999) ;
- la double approche des pratiques enseignantes (Robert, Rogalski, 2002) dont l'objectif est de contribuer à l'analyse et à la compréhension des pratiques des enseignants. De ce cadre nous avons retenu des hypothèses relatives aux pratiques enseignantes, qui nous semblaient primordiales à prendre en compte dans l'étude des questions que nous nous posions : les pratiques enseignantes sont complexes, stables et cohérentes et elles résultent de recompositions personnelles à partir de connaissances, de représentations, d'expériences des enseignants.

En prenant en compte notre problématique et ces hypothèses, nous avons choisi une méthodologie qualitative basée sur la triangulation de données diverses, associées à différents gestes professionnels et recueillies sur un long terme. Deux dispositifs méthodologiques ont été élaborés : le premier consistait en un suivi individuel de plusieurs stagiaires, enseignant à différents niveaux, organisé autour d'entretiens réguliers et du recueil de diverses données (leurs notes personnelles, les textes de contrôles, des copies et des cahiers d'élèves…). Le second était un dispositif "vidéo" dans le but d'obtenir des données complémentaires relatives aux pratiques des stagiaires en classes, à leurs

[37] Analyse et Evaluation des Professionnalisations.

pratiques de préparation d'une séance et aux analyses qu'ils faisaient de leurs propres pratiques. Nous préciserons ce dispositif dans la partie III de cet article.

L'étude de l'évolution du rapport à l'algèbre des enseignants avec qui nous avons travaillé s'est effectuée à travers l'analyse de leurs gestes professionnels (élaboration d'une progression, d'un cours, d'activités, d'évaluations, gestion du travail des élèves…). Elle a été menée selon deux approches : une analyse des contenus algébriques proposés par ces enseignants et de leur organisation et une analyse de gestes professionnels plus transversaux. (voir (Lenfant, 2005) pour un développement de la méthodologie adoptée).

Passons maintenant à l'étude d'exemples d'évolutions et de résistances chez trois professeurs stagiaires.

II – Trois exemples de stagiaires :

Dans ce paragraphe, nous présenterons des exemples d'évolutions et de résistances dans les pratiques d'enseignement de l'algèbre de trois professeurs stagiaires (Marie, Benjamin et Julien), enseignant en classe de seconde. Nous avons choisi de sélectionner des stagiaires confrontés à des conditions de travail différentes afin d'en mesurer, si possible, les effets sur les évolutions et résistances. Marie et Benjamin ont ainsi effectué leur stage en responsabilité dans des lycées au centre de grandes villes et ont semblé ne rencontrer aucun problème lié à la gestion de leur classe. Julien, quant à lui, a enseigné dans un lycée technique et a exprimé, au début de son stage en responsabilité, de réelles difficultés à gérer ses élèves. Nous commençons par développer l'exemple de Benjamin.

II.1 – L'exemple de Benjamin :

Benjamin est un stagiaire qui enseigne dans de bonnes conditions et qui a su mettre en place, dès le début de l'année, une atmosphère de travail qui lui convient bien. Dès les premiers jours, il a développé des stratégies qui font que sa classe tourne. L'étude de ses pratiques a montré de vrais points forts que nous décrivons ci-dessous.

- *Benjamin est un stagiaire qui se place immédiatement dans une posture d'enseignant réflexif :*

Ce professeur stagiaire est curieux et très ouvert. Ceci apparaît notamment à travers l'attention qu'il porte à l'expertise d'autres enseignants, ce qui se traduit par une prise en compte effective des divers conseils ou informations que peuvent lui apporter son conseiller pédagogique ou les formateurs de l'IUFM, ainsi que par sa volonté de vérifier ces informations.

La première rencontre avec Benjamin montre que, dès le début de l'année, il se place dans une position d'enseignant. Ceci est notamment révélé par sa vision de l'algèbre, qui passe très rapidement d'une vision centrée sur l'algèbre étudiée à l'Université à une vision dans laquelle il intègre les objets de l'algèbre élémentaire étudiée dans le secondaire. Il adopte aussi, dès le début d'année, une posture réflexive et se pose diverses questions concernant ses propres responsabilités envers les élèves, le rôle d'un enseignant de mathématiques, la construction d'un cours, les problèmes que rencontrent ses élèves, le choix de stratégies adaptées pour les prendre en charge… Et il intègre à cette réflexion divers éléments obtenus lors de discussions avec son conseiller pédagogique ou avec les formateurs.

Ce positionnement rapide dans une posture d'enseignant se repère également à travers une cohérence, qui émerge dès le début d'année, dans les stratégies didactiques adoptées et dans les gestes professionnels.

Notre étude a montré, par exemple, une réflexion intéressante, dès le début de l'année, relativement aux deux gestes professionnels "choisir des exercices pour travailler une technique" et "prendre en charge les difficultés des élèves". Pour le premier de ces gestes, l'étude des pratiques de Benjamin a montré sa rigueur lors de l'organisation du travail de techniques et une cohérence certaine lors du choix des exercices (prise en compte des difficultés d'élèves, ainsi que de diverses variables didactiques). L'existence de cette cohérence dès le début de l'année semble montrer qu'une réflexion sur le geste professionnel "choisir des exercices" était déjà en germe avant la rentrée. Enfin, une cohérence apparaît également rapidement au niveau des stratégies de prise en charge des difficultés des élèves. En effet, dès le début de l'année, il met en place deux grandes stratégies : la réexplication en cas de problème et le passage au numérique. Ces stratégies sont restées privilégiées jusqu'à la fin de l'année, même si la première a montré des limites et même si l'évolution de sa vision quant aux difficultés des élèves a contribué à l'évolution de ses systèmes de prise en charge, comme nous le verrons plus loin.

- *Benjamin est un stagiaire qui porte une attention particulière aux élèves :*

En début d'année, Benjamin a l'impression que l'algèbre paraît plus simple aux élèves que d'autres domaines des mathématiques, notamment la géométrie. Pour lui la simplicité de l'algèbre réside dans le fait que c'est un domaine situé dans la continuité du numérique, sur lequel les élèves travaillent depuis longtemps et qu'ils maîtrisent. Il est toutefois tout à fait conscient, dès le début de l'année, que ses élèves peuvent rencontrer en algèbre des difficultés qu'il doit prendre en compte. Il est, en particulier, sensible au fait qu'il doit les aider à donner du sens aux notions étudiées, à se les approprier. Les aides qu'il apporte sont alors différentes selon que le travail porte sur de l'ancien ou du nouveau. Pour les objets anciens, Benjamin ne prévoit pas de reconstruction a priori du sens, mais il prend en charge au fur et à mesure les problèmes que ses élèves rencontrent. En revanche, pour les objets nouveaux, il a la volonté d'organiser d'abord un moment consacré à la construction du sens (via des activités introductives, par exemple). D'une manière générale, Benjamin se montre, dès le début de l'année, très sensible aux difficultés que ses élèves rencontrent en algèbre et, lors du premier entretien, il décrit déjà très précisément certaines d'entre elles.
Son attention particulière aux élèves apparaît aussi dans le souci qu'il a d'aider les élèves à disposer de méthodes, à acquérir des réflexes. En effet, Benjamin met rapidement en place une stratégie d'enseignement consistant à écrire des "fiches-méthodes" sur lesquelles sont explicitées des techniques que les élèves vont ensuite appliquer sur différents spécimens de tâches. Cette stratégie sera ensuite reprise lors des différents chapitres consacrés à l'algèbre.
Enfin, le travail des techniques traduit également bien cette attention qu'il porte aux élèves : le choix des exercices montre un réel souci de les aider à s'approprier les techniques étudiées. De plus, le travail technique est bien souvent commencé en classe. Ce dispositif est un moyen pour Benjamin d'être présent pour aider les élèves à s'approprier les règles ou les techniques à appliquer. Dans les cas où les premiers exercices d'application sont donnés à préparer à la maison, Benjamin choisit des exercices simples qui ne devraient pas susciter trop de difficultés chez les élèves.

- *Benjamin est un stagiaire qui laisse une certaine place aux élèves :*

> *Au cours des moments de travail technique, Benjamin a clairement la volonté de laisser une réelle place à ses élèves : il leur laisse du temps pour chercher, il les envoie au tableau, il prend en compte leurs réponses et leurs difficultés et il leur laisse quelques responsabilités relativement à l'amélioration de techniques. Notons que ce dispositif de travail lui permet de disposer d'un observatoire des difficultés des élèves et donc de les prendre en charge.*

L'analyse des pratiques de ce stagiaire fait également apparaître des points faibles notamment en ce qui concerne la place laissée aux élèves lors de l'élaboration de techniques, le traitement de types de tâches plus complexes, la motivation de certaines études. Par exemple, il leur laisse peu de responsabilités à propos de l'élaboration des fiches-méthodes que nous avons évoquées ci-dessus. L'explicitation des méthodes à appliquer reste complètement à sa charge, qu'il s'agisse de méthodes déjà rencontrées par les élèves ou de méthodes nouvelles, et il ne ressent pas le besoin de les amener à travailler sur l'élaboration de techniques. Cette caractéristique de l'enseignement de Benjamin se retrouve tout au long de l'année. C'est seulement au cours du dernier chapitre mettant en jeu de l'algèbre, celui sur les fonctions, qu'émergera un questionnement tardif sur le sens que les élèves peuvent donner à ses méthodes. Nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie de cet article.
Par ailleurs, lors d'activités qui lui semblent plus difficiles, Benjamin choisit une gestion qui laisse également peu de responsabilité aux élèves : soit il prend lui-même en charge la résolution du problème en veillant à les faire participer, soit il envoie un élève au tableau et le guide par un ensemble de questions. Ce dispositif permet de faciliter la tâche des élèves.
Néanmoins, ces points faibles ne viennent pas bouleverser le bon déroulement de la classe et accentuent, bien au contraire, le sentiment de confort que doivent avoir les élèves. Benjamin a donc trouvé assez rapidement un équilibre professionnel pouvant conduire à faire l'hypothèse qu'il n'y a

pas de grands bouleversements à attendre relativement à ses pratiques. Mais, de par son attitude réflexive, son ouverture d'esprit envers les pratiques de son conseiller pédagogique comme envers la formation, de par l'attention particulière qu'il porte aux élèves favorisée par des stratégies de travail qui lui permettent de voir des choses, il se questionne régulièrement à propos de ses propres pratiques et, en particulier, à propos des problèmes que ses élèves rencontrent. Ce questionnement va le conduire à quelques évolutions dans ses pratiques, que nous développons ci-dessous.

- *Une évolution dans l'interprétation des difficultés des élèves :*

L'évolution la plus flagrante concerne l'interprétation des difficultés de ses élèves. En effet, lors du premier entretien, Benjamin semble parfois désemparé devant certaines d'entre elles et ne semble pas avoir de moyens pour les interpréter, les comprendre. Puis, au cours de l'année, son regard va évoluer pour aboutir à un système explicatif relativement expert, comme le montre l'exemple suivant lié à la compréhension des difficultés des élèves à utiliser les lettres en algèbre. Au début de l'année, Benjamin tient un discours relativement vague sur le blocage des élèves face à l'utilisation des lettres qu'il interprète comme un manque d'habitude. Mais la résistance de certains problèmes à ses stratégies de prise en charge, notamment lors du travail sur la valeur absolue[38], le pousse à se questionner davantage. Pendant le travail sur les équations de droites, il va repérer que ses élèves rencontrent des difficultés liées aux changements de statut de la lettre suivant les différentes tâches algébriques. Il intègre donc cette dimension dans son système explicatif. Il la prendra également en compte pour l'introduction des fonctions, où il choisira une activité qui lui semble favoriser l'appréhension de la notion de variable.

- *Une évolution dans l'organisation du travail des techniques :*

Une deuxième évolution plus subtile marque l'un des points forts des pratiques de Benjamin : l'organisation du travail technique. Comme nous l'avons vu précédemment, sa stratégie de choix des exercices n'a jamais changé, mais nous notons une évolution en ce qui concerne la gestion de ce travail. En effet, lors de l'étude du premier chapitre, nous avions repéré que le travail technique associé à un type de tâches spécifique était peu étalé dans le temps. A partir du deuxième chapitre, le travail technique devient beaucoup plus étalé.

Les réflexions de ce stagiaire sur ses pratiques vont également favoriser, en fin d'année, l'émergence d'un nouveau questionnement concernant l'apprentissage des méthodes, ce que nous développerons Dans la troisième partie de cet article.
L'étude des pratiques de Benjamin met donc en évidence une cohérence de fonctionnement stable, qui se met rapidement en place dès le début de son stage, avec des points forts, mais aussi des points faibles. Nous avons expliqué cette stabilité par le fait que Benjamin a su rapidement faire "tourner" sa classe (Robert, 1996). Mais, certains aspects de sa logique personnelle, en particulier son ouverture d'esprit et sa posture réflexive, vont le conduire à quelques subtiles évolutions. L'on peut alors se demander si un stagiaire ayant les mêmes conditions de travail que Benjamin évoluerait de la même manière. C'est ce que nous nous proposons d'étudier dans la partie suivante en étudiant l'exemple de Marie.

II.2 – L'exemple de Marie :

---

[38] Au cours du premier entretien, Benjamin, assez désemparé, nous relate ainsi un incident critique survenu au moment de l'introduction de la valeur absolue, en particulier après l'énoncé de la propriété "*Lorsque x est positif :* $|x| = x$*, lorsque x est négatif :* $|x| = -x$" : « *Et quand je suis passé dans les rangs, c'est là qu'un sur deux m'interpellait : vous avez dit que la valeur absolue c'est positif, là il y a un signe moins. Bon ça je m'y attendais, mais cela a été au-delà de mes espérances. Alors à chaque fois je leur réexpliquais. Je reprenais l'exemple numérique et cela allait. Mais là, x négatif, cela ne passe plus. Alors là, moi après je ne sais plus quoi dire. Alors j'ai laissé couler. Bon quand ils me demandaient, je réexpliquais. Bon au bout d'un moment ils disent qu'ils ont compris soit par politesse, soit parce qu'ils en ont ras le bol.* »

Marie exerce aussi dans un milieu favorable et ne rencontre pas de problèmes particuliers dans sa classe. L'étude de ses pratiques montre qu'elle a développé, en début d'année, des stratégies didactiques présentant des points communs avec celles élaborées par Benjamin et que les pratiques de ces deux stagiaires ont des caractéristiques communes. En effet, tout comme Benjamin, Marie se positionne dès le début d'année dans une posture d'enseignante et met en place, dès les premières séances, des stratégies didactiques qui font que sa classe tourne. Ces stratégies resteront-elles aussi relativement stables tout au long de l'année. L'étude des gestes professionnels de Marie : "construire un cours" et "choisir des exercices" montre ainsi une réelle cohérence dans la construction de ses cours qui apparaît d'emblée. Dès les premières séances, elle a des objectifs bien précis en ce qui concerne la conception de son cours : elle souhaite, par exemple, d'abord "bien" reprendre les différentes règles de calcul déjà étudiées au collège pour remettre en place les connaissances anciennes et pour que les élèves aient les bases nécessaires pour la suite du travail algébrique en seconde. Cet objectif se traduit par un retour sur la définition de notions et de certains types de tâches ou par un rappel systématique des différentes règles de calculs déjà étudiées au collège. Elle ne justifie aucun résultat mais se montre attentive à l'aide qu'elle peut apporter aux élèves pour qu'ils s'approprient les propriétés et les techniques retravaillées dans ce chapitre : elle fournit, pour ce faire, dans le cours de nombreux exemples d'utilisation et laisse du temps à ses élèves pour qu'ils les étudient. Ce souci restera présent tout au long de l'année : pour chacune des notions étudiées, le cours est le lieu de la mise en place, sur des exemples, de techniques destinées à traiter des types de tâches relatifs à ces notions. Pour certaines notions, son objectif est alors de présenter un catalogue le plus exhaustif possible des types de tâches que les élèves peuvent rencontrer.

La volonté de Marie d'aider ses élèves à s'approprier les règles de calcul étudiées, repérée dans ses stratégies d'élaboration d'un cours, apparaît aussi dans sa façon de structurer ses séances : après le rappel de règles associées à une notion particulière, elle propose aussitôt un travail de la technique à travers un ensemble d'exercices. Ce travail est le plus souvent débuté en classe, ce qui lui permet d'être présente pour aider les élèves à s'approprier les techniques en jeu. Son objectif pour ce travail technique est de présenter, comme dans le cours, une panoplie de toutes les variantes que les élèves peuvent rencontrer. Pour un type de tâche donné, le travail technique se fait alors sur un nombre important de spécimens et elle choisit des exercices qui conduisent à une complexification progressive de ce travail. Cette technique de choix des exercices semble avoir été en germe avant même que Marie ne prenne une classe en responsabilité puisque cette caractéristique est particulièrement frappante dans une fiche qu’elle a distribuée dès la première séance de l'année.

Une comparaison du travail technique proposé par Marie et de celui proposé par Benjamin montre donc le même souci de proposer un nombre non négligeable de spécimens pour chacun des types de tâches étudiés et de proposer une complexification progressive de ce travail en jouant sur différentes variables didactiques.

L'étude comparative des pratiques de ces deux stagiaires met également en évidence des comportements proches lorsqu'il s'agit d'aider les élèves à s'approprier les techniques étudiées. En effet, comme chez Benjamin, nous trouvons chez Marie le désir d'aider les élèves à s'approprier les différentes techniques étudiées, en débutant le travail technique lors de séances d'exercices en classe. Dans le cas où ce travail débute à la maison, elle a, comme Benjamin, le souci de choisir des exercices simples ou donne des indications pour aider les élèves. Par ailleurs, comme Benjamin, Marie ne laisse pas de responsabilités aux élèves pour l'élaboration des techniques, mais fonctionne par ostension.

Benjamin et Marie sont donc deux stagiaires exerçant dans des milieux favorables et qui ne rencontrent pas de difficultés particulières avec leurs élèves. Ils ont tous les deux développé, très vite, des stratégies didactiques qui ont des points communs évidents. Cependant, ce sont des stagiaires dont les pratiques présentent également des différences, que nous précisons maintenant.

L'étude de la logique personnelle de Marie met en évidence un premier niveau de différence entre son profil et celui de Benjamin : il apparaît, d'une manière générale, qu’elle se questionne beaucoup moins que lui et semble, dès le début de l'année, avoir plus de certitudes que lui. Dès le premier entretien, elle semble ainsi assez sûre d'elle : par exemple, ceci apparaît dans la construction de sa progression annuelle pour laquelle, contrairement à la majorité des stagiaires suivis, elle se détache du manuel de la classe en choisissant une progression différente et ne s'appuie visiblement pas non plus sur celle de son conseiller pédagogique. Pour cette élaboration, Marie ne le rencontrera que pour lui poser des questions précises au sujet de son projet déjà défini (elle avait besoin d'aide pour déterminer le temps à passer sur chaque partie de la progression).

Par ailleurs, au début de l'année, Marie se montre plus autonome par rapport à la formation didactique dispensée à l'IUFM. Elle n'est pas convaincue que certains aspects de la formation étaient vraiment utiles pour enseigner. Et, même si elle nous dit que ce qui a été fait dans une séance, consacrée à l'étude d'un ensemble d'exercices d'algèbre, lui a semblé plus adapté que le reste de la formation didactique en général, elle prend visiblement ses décisions en dehors de ce qui est travaillé en formation. En fait Marie se montre docile vis-à-vis de la formation, même si elle n'en perçoit pas bien l'utilité.

Un deuxième niveau de différence entre les deux stagiaires réside dans le fait que, d'une manière générale, elle semble se poser moins de questions que lui et paraît moins encline que lui à réfléchir sur ses pratiques : nous avons pu constater, à travers les entretiens, que, dès que nos questions dépassaient la simple description de ses pratiques et nécessitaient plus de réflexion, elle restait souvent bloquée.

Une troisième différence peut être notée quant à l'attention portée aux difficultés des élèves qui semble moins grande chez Marie qui ne sera jamais aussi précise que Benjamin dans ses descriptions. Certes, elle signale dès le premier entretien que certains de ses élèves rencontrent des difficultés en algèbre, mais cela ne semble pas avoir trop perturbé son enseignement puisqu'elle nous expliquera à la fin de l'entretien qu'elle est globalement satisfaite de ce qui s'est passé lors du travail en algèbre et qu'il n'y a que de "petites choses" qui n'ont pas marché. Tout au long des trois entretiens, Marie signalera quelques difficultés que ses élèves ont mais cela ne semble concerner qu'une minorité de ses élèves et c'est peut-être pour cette raison que Marie ne se questionne pas plus profondément sur l'interprétation et la prise en charge de ces difficultés. Elle interprète, ainsi, les quelques difficultés de manipulation qu'elle signale lors du premier entretien comme des difficultés dues au fait que ses élèves ne connaissent pas les formules à appliquer. La stratégie de prise en charge qu'elle met en place en début d'année est alors de reprendre les formules, de redonner une tâche semblable à exécuter ou de réexpliquer. Néanmoins, au cours de l'année, Marie va repérer une difficulté particulière qui la pousse à s'interroger sur ses pratiques. Cette difficulté a été rencontrée lors du travail sur les valeurs absolues pendant lequel elle se rend compte que des élèves manipulent la notation comme s'il s'agissait de parenthèses et elle les soupçonne de ne pas donner de sens à la notion, comme elle nous l'explique lors du deuxième entretien :

> M : Je crois qu'ils ne se rendent pas vraiment compte de ce qu'est la valeur absolue, finalement. Sur des exercices techniques, comme on fait souvent les mêmes, ils reprennent la méthode, ça va. Mais, dans le fond, est-ce qu'ils ont vraiment compris le sens ? Je ne sais pas.

Une telle constatation aurait pu l'amener, à ce moment de l'année, à s'interroger sur les limites du travail technique qu'elle propose, sur le sens que les élèves donnent aux écritures algébriques et sur le travail à mener pour les aider à le construire. Mais elle ne semble pas pousser plus loin cette réflexion car elle paraît rassurée par le fait que même des enseignants experts rencontrent également des difficultés lors de l'enseignement de cette notion :

> M : J'en parlais avec les autres professeurs du lycée. C'est un peu ce qu'ils disaient aussi. La notion de valeur absolue, c'est quelque chose de difficile pour eux.

Il apparaît que Marie s'est visiblement moins interrogée que Benjamin sur les difficultés rencontrées par ses élèves et les prises en charge envisageables. Cette différence de posture se retrouve en ce qui concerne la réflexion sur la question du sens en algèbre. La discussion autour de la notion de valeur absolue est, en fait, le seul moment de l'année où elle évoque explicitement une réflexion relative au sens que ses élèves peuvent donner à des écritures algébriques. Pourtant, comme chez Benjamin, nous notons dans la pratique de Marie des gestes qui pourraient contribuer à aider les élèves à donner du sens aux notions étudiées, mais sa sensibilité à l'aide qu'elle peut apporter aux élèves pour la construction du sens pour les notions étudiées est moindre que celle de Benjamin. Elle a également la volonté de revenir sur les définitions de notions déjà rencontrées ou de types de tâches. Mais, contrairement à Benjamin[39], tout ceci reste au niveau du discours. En effet, le travail algébrique est quasiment exclusivement axé sur l'application de règles de calcul et Marie ne semble pas s'interroger sur le sens que les élèves peuvent donner aux notions travaillées.

Nous pouvons donc pointer que Marie est une stagiaire qui évolue dans un contexte favorable et qui, dès la rentrée, s'est installée dans une posture d'enseignante. L'étude de ses pratiques en algèbre montre la mise en place très rapide de stratégies cohérentes qui conduisent visiblement à une atmosphère de travail agréable et qui ont l'adhésion de la classe. Ses stratégies possèdent des points forts comme l'organisation du travail technique, le temps laissé aux élèves pour ce travail. Mais, elles présentent aussi des faiblesses évidentes : le travail algébrique quasiment uniquement centré sur l'application de techniques avec peu de réflexion sur le sens que les élèves peuvent donner à ce type de travail, le peu de questionnement sur les difficultés qu'ils peuvent rencontrer en algèbre, le peu de responsabilités laissées aux élèves en ce qui concerne l'élaboration de techniques.

Nous avons noté précédemment que l'attitude réflexive de Benjamin l'avait conduit à différents questionnements, même s'ils n'avaient pas tous influé sur ses pratiques. Tout en étant moins encline que Benjamin à s'interroger sur ses pratiques, Marie va, elle aussi, questionner certains gestes professionnels, ce qui va conduire à deux évolutions que nous présentons ci-dessous : la première relative à l'introduction d'activités préparatoires pour l'introduction de notions nouvelles, la seconde relative à l'organisation du travail des techniques.

En début d'année, Marie n'a jamais proposé d'activité préparatoire pour le travail sur les objets anciens : elle abordait toute étude directement à partir d'un cours. Puis, progressivement, elle a commencé à proposer des activités de découverte pour l'introduction de notions nouvelles. C'est visiblement la prise en compte d'un conseil de son tuteur qui l'a conduite à choisir cette nouvelle stratégie. Mais elle ne semble pas convaincue du bénéfice que ce type de stratégie apporte :

> M : Le problème des activités préparatoires c'est... Enfin, j'ai l'impression que cela prend beaucoup de temps à mettre en place et j'ai l'impression de perdre du temps.

Ce sentiment de perte de temps s'explique sans doute aussi par le fait que Marie ne semble pas s'être interrogée suffisamment sur l'articulation entre le cours et les activités. En effet, lorsque Marie introduit une activité préparatoire, le lien entre cette activité et le cours est rarement visible.

Tout comme pour Benjamin, nous notons également une évolution subtile en ce qui concerne l'étalement dans le temps du travail technique associé à un type de tâches particulier. Alors qu'en début d'année, il était centralisé sur quelques jours, en fin d'année, ce travail est plus étalé et un type de tâches particulier peut être repris plusieurs fois dans le chapitre où il a été étudié.

L'analyse des entretiens de suivis met en évidence, quant à elle, deux questionnements : l'un sur texte du savoir, l'autre sur le type d'exercices à proposer. Mais ils n'influeront pas sur les pratiques de Marie. Le questionnement relatif à sa façon de concevoir les cours émergera lors du deuxième entretien lors duquel elle regrette que le début de son cours sur les systèmes d'équations linéaires soit trop théorique :

> M : Mais si cela était à refaire, je pense que je ferais un cours moins théorique, plus ciblé sur des exemples. Disons que quand j'ai écrit tout ça… Bon, ils sont gentils parce qu'ils recopient ce que je fais. Mais je n'ai pas eu l'impression que cela serve à grand-chose. Est-ce qu'ils ont vraiment compris ce qu'on a fait ? Je ne sais pas non plus.

De fait, pour ce chapitre, Marie commence directement par un cours dans lequel elle consacre un premier paragraphe à la redéfinition des notions d'équation à deux inconnues, de système linéaire de deux équations à deux inconnues, de solution d'un tel système et le type de tâches "résoudre un

---

[39] Par exemple pour la notion de solution d'une équation, Benjamin a proposé à ses élèves des exercices pouvant contribuer à un changement de rapport des élèves à cette notion.

système de deux équations à deux inconnues". Au cours de ce paragraphe, elle ne fournit qu'un seul exemple : un couple de nombres solution d'un système donné. Puis, elle aborde dans un deuxième paragraphe la question de l'interprétation graphique et le théorème concernant l'existence et l'unicité des solutions de tels systèmes. Pour cette partie, tout se fait également de manière théorique sans aucun exemple.

Malgré ce questionnement, nous retrouvons la même caractéristique dans certains paragraphes du cours sur les fonctions qui a lieu pratiquement deux mois après celui sur les systèmes, notamment dans le paragraphe consacré au sens de variation d'une où Marie propose une accumulation de définitions qu'il n'est pas forcément nécessaire d'institutionnaliser, sans motivation, en classe de seconde. Marie est tout à fait consciente de cette caractéristique de ses pratiques puisque, dans le deuxième entretien, elle nous expliquera aussi :

> M : Là, j'ai refait l'erreur finalement. Tout ce qui est notion de croissance, décroissance, cela parait... Même si je m'étais fort appuyée sur l'activité où je leur avais fait déduire que là cela montait donc la fonction était croissante. On avait pris deux réels dans un intervalle, on voyait que leurs images étaient rangées dans le même ordre et donc on a écrit cela dans le cours. Finalement dans le cours c'est finalement assez théorique, cela a été assez long. […] Mais je ne voyais pas comment l'amener autrement. Pour moi il fallait quand même que ces définitions soient écrites quelque part.

Même si elle s'est interrogée sur l'intérêt d'un tel texte, le comportement de la classe dans laquelle elle exerce ("ils sont gentils") ne l'a pas amenée à évoluer au cours de l'année.
Le deuxième questionnement, qui n'a également pas influé sur ses pratiques, porte sur le choix des exercices à proposer. Il apparaît dès le premier entretien pendant lequel Marie s'interroge sur la forme des exercices proposés jusqu'alors en algèbre :

> M : Dans les exercices que je donne, c’est souvent un petit peu la même chose. Des exercices d’application. Il faudrait peut-être que je varie un peu plus. Et puis, éventuellement, donner des exercices un peu plus de recherche.

Malgré cette interrogation qui est présente assez tôt dans l'année et l'existence d'au moins un moment dans l'année (lors du travail sur la valeur absolue) qui aurait pu conduire à une réflexion sur le sens que les élèves peuvent construire à travers un travail algébrique centré sur la technique, Marie n’a pas modifié ses premières pratiques. Outre le fait que le travail proposé semblait tout à fait convenir à ses élèves[40] et conduisait à un climat tout à fait agréable dans la classe, plusieurs raisons peuvent expliquer que ses pratiques n'aient pas évolué. Une première raison est que Marie semble avoir calqué sa pratique sur celle de son conseiller pédagogique, comme elle nous l'explique dans le dernier entretien :

> M : C'est-à-dire que mon CP faisait finalement des cours très classiques et, au niveau des modules, il ne faisait pas de choses particulières. En fait, c'était comme une heure de TD. Du coup, j'ai fait un peu la même chose et je crois que finalement, dans les modules, c'est toujours pas mal de faire des exercices différents des exercices habituels. Bon mais c'est toujours pareil cela prend du temps.

La deuxième raison apparaît également à travers cette citation : tout au long de l'année, Marie a eu l'impression que certains exercices allaient lui faire perdre du temps. Une autre raison est qu’elle trouvait que certains de ces exercices étaient parfois difficiles et qu'elle ne savait pas toujours comment aider ses élèves, notamment pour les problèmes conduisant à des modélisations. Elle nous l'explique lors du troisième entretien :

> M : C'est vrai que, quand il y a une modélisation, pour certains exercices c'est facile à expliquer. Mais, pour certains exercices, je ne vois pas comment leur dire, comment leur expliquer qu'on arrive à telle fonction. Pour ceux qui y arrivent c'est bien, mais pour ceux qui ne trouvent pas cela pose un problème.

---

[40] Lors du dernier entretien, Marie nous explique : " Cette année, mes élèves étaient contents de ce qu'ils ont fait avec moi et c'est aussi un peu ce qu'ils attendaient, j'ai l'impression."

En conclusion, Marie a su instaurer dans sa classe une atmosphère de travail confortable pour elle et pour les élèves. L'étude des deux questionnements qui sont apparus en cours d'année mais qui n'ont pas influé sur ses pratiques montre bien que le comportement de ses élèves ne l'a pas poussée à modifier ses pratiques, même si elle n'était pas forcément satisfaite de certaines d'entre elles. On peut alors se demander comment aurait évolué son rapport professionnel à l'algèbre dans des conditions moins favorables.

L'étude des pratiques de Julien, qui a connu des débuts bien plus difficiles que Benjamin et Marie, va montrer que les conditions de travail peuvent effectivement jouer un rôle sur l'évolution de ce rapport professionnel.

II.3 – L'exemple de Julien :

Julien enseigne dans un lycée technique d'une grande ville, devant une classe de seconde uniquement composée de garçons se destinant à des filières techniques et cette classe lui pose des difficultés de gestion et de discipline. L'analyse de ses pratiques en début d'année permet d'identifier certains facteurs qui expliquent, en partie, les difficultés qu'il rencontre. Tout d'abord, Julien semble avoir du mal à se positionner en début d'année dans une posture d'enseignant et il rencontre des difficultés évidentes à passer du statut d'étudiant à celui d'enseignant. Ainsi, nous avons l'impression qu'en début d'année Julien a plutôt un rapport de type élève / professeur avec son conseiller pédagogique, qu'il prend plus ses conseils comme des injonctions et qu'il se sent en faute quand il ne les a pas suivis.

Contrairement à Benjamin et à Marie, il est difficile de trouver une cohérence dans ses pratiques en début de stage. Il semble qu'il cherche ses marques lors de ses premières semaines d'enseignement. Ceci apparaît, d'abord, à travers un changement de pratiques au bout d'une semaine d'enseignement : Julien consacre la première semaine au chapitre 1 ("Calculs numériques") dans lequel il aborde une notion nouvelle (les ensembles de nombres) et il reprend deux notions anciennes (les puissances, les racines carrées). Les séances sont alors essentiellement consacrées au cours dans lequel Julien définit ou redéfinit ces notions et dans lequel il rappelle les règles de calculs relatives aux puissances et aux racines carrées déjà étudiées au collège. Suite à ces cours, Julien propose des exercices à préparer à la maison, mais il y a peu d'articulation entre le cours proposé et le travail demandé aux élèves. Ainsi, suite au cours sur les racines carrées, Julien propose trois exercices dans lesquels les élèves doivent effectuer des calculs sur des fractions et aucun exercice portant sur les racines carrées ne sera traité.

Dès le deuxième chapitre, ses pratiques se modifient : il laisse toujours une large place au cours, mais les exercices censés être préparés à la maison sont désormais en relation avec les notions étudiées en cours. Mais, il arrive également que Julien propose des exercices à préparer à la maison portant sur des notions nouvelles qui n'ont pas encore été abordées en classe.

Un deuxième élément permet d'expliquer les difficultés que Julien rencontre avec l'enseignement de l'algèbre : il a du mal au début de son stage à évaluer le niveau mathématique de ses élèves et à anticiper les difficultés qu'ils peuvent rencontrer en algèbre. Cet aspect apparaît clairement lors du travail de révision de certaines règles de calculs déjà étudiées au collège. En effet, lors de ses premiers cours consacrés à ces révisions, Julien a visiblement le souci d'aider ses élèves à comprendre les différentes règles rappelées, comme il l'exprime lors du premier entretien :

> J : Je décomposais : a^n, c'est a fois a fois a, n fois. a^p, etc. On obtient a^{n+p}. Je trouvais cela bien, car souvent ils utilisent ces règles sans savoir ce qu'ils font. Je leur dis : "Si vous ne vous souvenez pas, n'écrivez pas n'importe quoi. Dites ce qu'est a^n, ce qu'est a^p. Du coup, on compte, il y en a n+p". Mais ils faisaient toujours l'erreur après.

Julien fait ici référence aux difficultés des élèves à simplifier l'expression **Erreur !** lors d'un devoir surveillé. Notons qu'entre le cours (où quelques exemples élémentaires avaient été proposés) et cette évaluation, Julien n'a plus proposé de travail technique consacré à l'application des règles de calcul sur les puissances, ce qui explique au moins partiellement les difficultés de ses élèves. Pour cette notion, Julien n'a donc pas anticipé les difficultés de ses élèves et, même s'il est sensible au fait que les élèves ne donnent pas forcément de sens aux manipulations des formules sur les puissances, il ne propose pas un travail algébrique qui permettrait de prendre en charge les difficultés des élèves et de faire évoluer leur rapport à la notion de puissance.

A partir du deuxième chapitre, cependant, les pratiques de Julien changent. Mais, le travail algébrique qu'il propose possède des caractéristiques qui ne favorisent pas toujours l'apprentissage des élèves et qui ne lui permettent pas d'avancer dans sa connaissance sur les élèves. La comparaison de ses pratiques avec celles de Benjamin et Marie fait apparaître une première différence : au cours du premier mois d'enseignement, les élèves de Julien n'ont quasiment traité aucun exercice en classe. Pendant cette période, Julien n'en a proposé que cinq (ils sont beaucoup moins nombreux que ceux proposés par Marie ou Benjamin). Ces cinq exercices ont été traités au cours des quatre premières séances. Le travail sur des exercices en classe ne reprendra qu'après les vacances de Toussaint, soit deux mois après la rentrée, suite à la première visite de sa tutrice qui lui a alors conseillé de faire des cours moins longs et de proposer plus de travail mathématique à ses élèves pendant les séances.

Une deuxième conséquence de ce choix de pratiques est que Julien n'accompagne pas ses élèves lors des premières prises de contact avec le travail de la technique. Ceci constitue une autre différence avec les pratiques de Benjamin et Marie, qui portaient une grande importance à ces phases de travail en classe : c'était un moyen pour eux d'être présents pour aider les élèves à s'approprier les règles ou les techniques à appliquer.

Les pratiques de Julien pour choisir les exercices qu'il propose à ses élèves diffèrent, en revanche, peu de celles de Benjamin et Marie : pour un type de tâches donné, il choisit des exercices dans son manuel de manière à faire travailler les élèves sur un nombre assez important de spécimens et de manière à proposer des tâches de plus en plus complexes. Mais, contrairement à Benjamin et Marie, il étale beaucoup moins ce travail technique dans le temps et la complexification n'est pas du tout progressive.

En conclusion, au cours de ses deux premiers mois d'enseignement, Julien est dans une situation bien plus problématique que celles de Benjamin et Marie. Il rencontre des difficultés de gestion de classe et des difficultés à enseigner l'algèbre. Ces difficultés s'expliquent en partie par le fait que Julien n'a pas anticipé en début d'année les problèmes que ses élèves pouvaient rencontrer en algèbre. Par ailleurs, l'analyse de ses pratiques fait apparaître de réelles faiblesses en ce qui concerne les moments d'élaboration des techniques et l'organisation du travail des techniques.

Néanmoins, l'analyse des pratiques de Julien en début d'année fait apparaître une certaine réflexion relativement à l'enseignement de l'algèbre qui nous semble tout à fait pertinente. En effet, l'étude du premier entretien et des premières stratégies d'enseignement relativement à l'algèbre nous amène à pointer des traces de réflexions, menées autour de la question du sens en algèbre et d'un questionnement sur les responsabilités à laisser aux élèves, qui nous semblent pertinentes et qui vont contribuer ensuite à une évolution des pratiques de Julien.

Comme nous l'avons vu lors de l’exemple de son cours sur les puissances, Julien est sensible au fait que les élèves ne donnent pas toujours de sens aux règles algébriques. Contrairement à Benjamin et Marie, il apporte plus d'éléments technologiques dans ses cours de révision du collège. Par ailleurs, l'analyse de certains exemples ou exercices choisis par Julien montre qu'ils peuvent conduire à une réflexion sur la forme d'écritures algébriques et sur les informations qu'elles apportent quant au choix des méthodes à appliquer. Un tel travail peut également contribuer à la construction du sens, et des écritures et des manipulations algébriques. De plus, les difficultés que Julien rencontre lors de l'enseignement de l'algèbre le conduisent à s'interroger sur les moyens à employer pour faciliter la tâche des élèves en algèbre, notamment en limitant les calculs. Il évoque, alors, dans le premier entretien la possibilité d'articuler le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques pour traiter certains types de tâches algébriques qui lui semblent trop complexes si les élèves doivent les traiter uniquement dans le registre des écritures algébriques :

> J : Puis le signe de ax+b, je le traiterai avec les fonctions comme c’est proposé dans le livre de la classe. Je me suis dit que, si je le traitais en algèbre pure avec les comparaisons de carrés, d’inverses, de racines carrées, cela n’allait pas bien passer parce qu’ils ne sont pas bons en algèbre. C’est pour cela que j’ai commencé par les généralités sur les fonctions pour pouvoir faire "fonctions affines".

Cette réflexion sur la question du sens en algèbre s'accompagne également d'un questionnement sur les responsabilités à laisser aux élèves. Au début de son enseignement, Julien laisse très peu de responsabilités à ses élèves. Toutefois, lors du premier entretien, il nous semble que sa vision de la place à laisser aux élèves évolue. En effet, à la fin du mois de novembre, il met en place, avec un de ses collègues stagiaires, une séance de module pendant laquelle les élèves doivent montrer des égalités et dégager eux-mêmes des méthodes

> J : On a fait une séance pour établir des méthodes pour montrer une égalité. On leur a donné une liste d'égalités et on leur demandait de les montrer. On ne voulait pas leur donner les méthodes. Dans le livre, ils donnent la méthode. Mais, nous, on voulait qu'ils trouvent eux-mêmes la méthode. Et s'ils ne la trouvaient pas, on voulait qu'ils soient demandeurs de la méthode.

La description de cette séance, au cours du premier entretien, montre encore une fois que Julien n'a pas su trouver les moyens didactiques adéquats pour gérer ce type de travail et qu'il s'est alors, de nouveau, retrouvé en difficulté. Mais nous jugeons cette première réflexion intéressante. Soulignons qu'elle n'est jamais apparue chez Marie et que Benjamin ne s'est interrogé sur cette question que beaucoup plus tard dans l'année.

Un deuxième aspect qui peut également avoir contribué à l'évolution de Julien est son ambition mathématique qui le conduit à consulter des ressources didactiques autres que les manuels scolaires. Les difficultés, non prévues, que rencontrent ses élèves en début d'année réduisent ces ambitions. Mais, il souhaite tout de même que ses élèves apprennent à raisonner. Au bout de deux mois d'enseignement, il propose ainsi un devoir à préparer à la maison dans lequel il place des exercices qui vont demander plus de recherche aux élèves. A travers ce dispositif, Julien souhaite proposer un travail mathématique qui sort de l'application de techniques aux élèves qui veulent travailler ("Au moins que ceux qui veulent le faire puissent le faire").

Comme pour Benjamin et Marie, les pratiques de Julien vont elles aussi évoluer et différents aspects que nous venons de développer ci-dessus vont contribuer à ces évolutions, que nous présentons maintenant.

Une première évolution concerne la conception des cours. Julien devient, en effet, progressivement plus attentif à l'établissement d'un lien entre le cours proposé et les types de tâches effectivement étudiées dans le chapitre. Un deuxième aspect qui nous montre cette évolution est le souci d'amener les élèves à découvrir des notions ou des propriétés avant de les institutionnaliser. Ce souci est perceptible dans le chapitre de généralités sur les fonctions[41] à travers le choix de Julien de commencer ce chapitre par des activités préparatoires. Mais, à ce moment de l'année, le lien entre les activités et le cours proposé n'est pas évident. Dans les chapitres sur les fonctions affines et les fonctions usuelles, Julien choisit de nouveau de consacrer les premières séances à des activités préparatoires et l'analyse des cours fait apparaître un lien plus clair entre activités et cours. Pour la notion de fonction affine, Julien organise d'abord une re-rencontre à travers l'étude de deux activités préparatoires proposées dans lesquelles deux situations de la vie courante y sont modélisées par une fonction linéaire f et une deuxième fonction affine g. Les questions posées dans ces activités conduisent les élèves à tracer les représentations graphiques de ces fonctions, à retrouver deux propriétés de ce type de fonction (nature des représentations graphiques, proportionnalité des accroissements). Suite à ces activités, Julien commence le cours par la définition d'une fonction affine. Il établit alors un lien avec les activités en illustrant cette définition par les fonctions f et g et en reprenant les deux propriétés étudiées. Cette nouvelle caractéristique apparaît aussi dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

---

[41] Précisons la progression annuelle choisie par Julien pour l'enseignement de l'algèbre : chapitre 1 "Calcul numérique" (période du 11/09 au 18/09), chapitre 2 "Transformations d'écritures" (du 21/09 au 13/10), chapitre 3 "Les intervalles de $\mathbb{R}$" (du 16/10 au 20/10), chapitre 4 "Fonctions, généralités" (du 16/10 au 13/11), chapitre 5 "Les fonctions affines" (du 4/01 au 22/01), chapitre 6 "Fonctions usuelles" (du 2/03 au 29/03), chapitre 7 "Inéquations" (du 11/05 au 21/05), chapitre 8 "Les systèmes d'équations" (du 21/05 au 1/06).

L'analyse des pratiques de Julien montre également des évolutions en ce qui concerne l'explicitation de techniques et l'organisation du travail technique. Il se montre progressivement beaucoup plus attentif à l'aide qu'il peut apporter à ses élèves lors de la découverte de nouveaux types de tâches et de nouvelles techniques. Il choisit d'abord une stratégie d'ostension des techniques que les élèves s'approprient ensuite à travers des exercices qui se complexifient progressivement. Ses pratiques en ce qui concerne l'explicitation des techniques tendent donc à se rapprocher de celles de Benjamin et Marie. Par ailleurs, il semble bien que la responsabilité laissée aux élèves quant à l'élaboration de ces techniques soit très limitée. Puis, Julien commence à percevoir que ses élèves ont du mal à donner du sens aux méthodes présentées ostensivement. Ainsi, lors du deuxième entretien, il évoque des difficultés de certains élèves lors de la mise en pratique de la technique d'étude des variations d'une fonction :

> J : Souvent quand je leur dis "comment vous avez fait ? ", ils déballent leurs calculs. Ils ont du mal à dire leur méthode, à dire : "j'ai pris deux réels rangés dans un certain ordre, je veux voir si les images sont rangées dans le même ordre". Ils ont du mal. Je crois que cela montre qu'ils ne maîtrisent pas bien la méthode. Ils n'arrivent pas à la synthétiser.

Suite au chapitre sur les fonctions, Julien commence le chapitre sur la géométrie analytique dans lequel il aborde la notion d'équation de droite. Il repère que ses élèves ont du mal à donner du sens à cette notion. Sa réflexion sur cette difficulté le pousse alors à s'interroger sur les limites d'un travail uniquement centré sur l'application de techniques, comme il nous l'explique lors du troisième entretien :

> J : Pour les équations de droites, c'est surtout un problème de sens. A la rigueur ils savent dire : "Ah, ça c'est une équation de droite". Mais ils ne savent pas à quoi cela correspond. Je leur ai demandé : "Qu'est-ce que ça veut dire que ax+b égale machin est une équation de droite ? ". Ils ne savaient pas dire que... Et même quand je leur ai dit, cela n'avait pas l'air de leur sembler évident que x et y étaient les coordonnées des points de la droite.
>
> AL : Ils savent déterminer une équation de droite mais ils ne savent pas à quoi cela correspond ?
>
> P : Oui, voilà c'est ça. Un problème de sens. Cela m'a frappé sur les équations de droites. Finalement c'est embêtant. Je me dis que c'est parce qu'ils ont dû voir des méthodes, beaucoup de calculs. Et puis finalement...

Il perçoit ici que les élèves peuvent savoir appliquer des règles, utiliser des techniques sans pour autant avoir construit du sens pour les objets qu'ils manipulent et que cette construction est nécessaire. Finalement, en fin d'année, ses pratiques pour l'introduction de nouvelles techniques ont profondément évolué. Ceci apparaît très clairement lors de l'étude du signe d'un produit, pendant laquelle Julien n'introduit pas tout de suite les tableaux de signes comme l'avaient fait Benjamin et Marie. Il cherche d'abord à ce que ses élèves s'approprient le problème et recherchent une technique pour étudier le signe d'une telle expression :

> J : Et puis ensuite je leur ai donné un exemple où il y avait un produit et je les ai laissés se dépatouiller : "Qu'est-ce qu'on pourrait faire ? ".[…] Au début, il y en a un qui a développé. Alors je lui ai dit : "Ouais et tu sais faire le signe de ça ? – Ah non, il y a un carré". Déjà j'ai dit : "Bon c'est bien, on ne sait pas. Donc ce n'est pas bon de développer". Je leur ai fait se rendre compte qu'il ne fallait pas développer. Apparemment ils ont bien compris. Et puis je les ai laissés chercher et il y en a un qui a dû trouver qu'on avait un produit.

Une troisième grande évolution dans le rapport professionnel de Julien à l'algèbre concerne le repérage, la prise en charge et l'interprétation des difficultés que les élèves rencontrent en algèbre. Alors qu'en début d'année son système interprétatif de certaines difficultés de manipulation de ses élèves était essentiellement centré autour du fait que ses élèves ne connaissaient pas leurs formules, il semble avoir pris conscience qu'en travaillant sur le sens de certaines écritures on peut aider les élèves sans se limiter à leur demander de retenir par cœur certaines formules du cours. Cette réflexion semble découler d'une prise de conscience des difficultés de ses élèves à donner du sens à la notion d'équation de droite. Lors du dernier entretien, nous notons que cette réflexion s'est élargie à d'autres objets (la notion de solution d'une équation, par exemple) ou aux manipulations algébriques, comme la manipulation de puissances.

Son système de prise en charge des difficultés de ses élèves repose, quant à lui, sur l'articulation du registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques. Julien avait déjà évoqué cet aspect lors du premier entretien pour prendre en charge certaines difficultés en utilisant les représentations graphiques de fonctions (par exemple, l'oubli de la solution négative de l'équation $x^2 = a$ avec a positif). Dans la suite du travail algébrique qu'il propose, cet aspect prendra une large place et, lors du dernier entretien, il nous explique qu'il est tout à fait satisfait du travail mené avec ses élèves :

> J : Moi je suis assez content de la tactique de partir avec les représentations graphiques. Je trouve que c'est pas mal. Surtout avec les élèves que j'avais : ils ne savent pas additionner deux fractions sans faire une erreur. Donc, algébriquement, je me suis rendu compte que j'aurais plein de problèmes. Enfin ce n'est pas une raison pour ne pas le faire. Je préférais aborder d'abord l'aspect graphique et leur montrer ensuite que quand on était limité avec le graphique, on n'avait pas le choix, il fallait le faire algébriquement.

De fait, Julien ne limite pas le travail de ses élèves à des types de tâches qui peuvent se traiter uniquement dans le cadre graphique et il propose des types de tâches à traiter dans le cadre algébrique, comme il nous l'explique dans le deuxième entretien :

> J : Pour le sens de variation on regarde d'abord le graphique pour savoir s'il faut montrer qu'elle est croissante ou décroissante. Après, si on veut monter qu'elle est croissante, on va manipuler les inégalités. Là on n'a pas le choix, il y a des choses à savoir.

Ce travail sur l'étude des variations lui permet, par ailleurs, de prendre conscience d'un problème que Marie n'a visiblement pas repéré et auquel Benjamin n'a été sensibilisé que lors de la séance filmée : la difficulté de certains élèves à utiliser les lettres pour prouver une propriété. Julien nous l'explique dans le deuxième entretien :

> J : Il y en a pas mal qui ont du mal à manipuler les lettres. Souvent ils veulent prendre des valeurs particulières. Pour la croissance, au début je leur ai dit : "on va prendre deux réels, mais a priori il faut le montrer pour tous les réels de l'intervalle". Mais je leur dis : "Si on prend 2 et 3, on va montrer que ça marche pour 2 et 3. Après il faudrait prendre 4 et 5, etc... Il faudrait faire ça avec tous les réels. C'est pas possible. Donc, ce qu'on fait en maths à ce moment-là : on prend deux réels mais on ne présume pas de ce qu'ils sont, donc on les appelle par une lettre." Il y en a quand même qui veulent prendre des exemples.

> *Il est donc confronté ici à l'un des niveaux de rationalité en algèbre décrits par B.Grugeon (Grugeon, 1995) où les justifications restent du côté du numérique. Nous notons que la prise en charge de ces difficultés est toujours située autour d'un discours relatif à la tâche et Julien ne leur montre pas à travers des contre-exemples la nécessité d'utiliser les lettres. En outre, nous notons qu'il ne semblait pas s'attendre à de telles difficultés et qu'il n'a pas proposé de stratégies pour les prendre en charge.*

Son système d'interprétation de ce type de difficulté est centré autour des différents statuts de la lettre mais il a encore du mal à expliquer son point de vue, comme le montre la citation suivante :

> J : La lettre, elle sert à cacher la particularité du nombre. Là, je prends l'exemple de la démonstration. On n'a pas le même problème quand on fait du calcul algébrique, avec des identités remarquables... Là la lettre, ils le comprennent mieux : c'est un nombre. Alors que quand on fait une démonstration, cela peut-être n'importe quel nombre. C'est la même chose et pourtant c'est deux aspects différents, je n'arrive pas bien à l'expliquer.

Il a donc conscience de l'existence de différents statuts de la lettre en algèbre mais cela reste également confus pour lui. Par ailleurs, ses propositions de prises en charge sont également très peu claires : il reste encore au niveau du discours et ne propose pas de moyen pratique pour mettre en place ces stratégies. Il nous l'explique ci-dessous :

> J : Je pense que ce serait bien de bien montrer pourquoi on prend la lettre. On pourrait prendre un nombre et ensuite prendre une lettre et dire qu'on cache la particularité du nombre. Je ne sais pas, on peut prendre un nombre pair et qu'on utilise sa parité et on peut arriver à des conclusions fausses. Je ne sais pas si c'est possible.

En conclusion, Julien est un stagiaire pour qui le début de l'enseignement de l'algèbre est fortement problématique. L'analyse du travail algébrique qu'il propose en début d'année fait apparaître des similarités avec ce qui est proposé par Benjamin et Marie. En revanche, contrairement à ces deux stagiaires, nous trouvons très tôt dans l'analyse des pratiques de Julien des traces de réflexion sur la question du sens en algèbre et sur la responsabilité à laisser aux élèves. Mais la gestion du travail technique mise en place et la difficulté de négocier certains aspects de ce travail "minent" les potentialités de ces réflexions pertinentes. Ce qui lui laisse un sentiment d'échec et surtout ne lui permet pas d'avancer dans la connaissance de ses élèves.

En fait Julien est très ouvert et est demandeur de conseils. Il a su, en particulier, prendre en compte ceux de sa tutrice lors de la première visite au cours du premier trimestre. Ceci lui a permis d'établir dans sa classe une atmosphère de travail plus satisfaisante et, surtout, de mieux comprendre les difficultés de ses élèves, ce qui l'a amené en retour à adapter ses pratiques. A partir de ce moment, nous pouvons noter une nette évolution de son rapport professionnel à l'algèbre qui tend à se rapprocher de celui de Benjamin : l'introduction d'activité préparatoire pour introduire les notions nouvelles, une stratégie d'ostension des techniques, une vision positive des élèves et une réflexion plus poussée sur les difficultés qu'il rencontre. Mais, la réflexion de Julien sur le sens en algèbre et sur les responsabilités à donner aux élèves va se poursuivre, ce qui conduira à une nouvelle évolution de son rapport à l'algèbre.

Dans la partie suivante, nous allons décrire un dispositif "vidéo", testé dans le cadre de notre recherche, qui a permis de faire naître chez Benjamin de nouveaux questionnements sur ses pratiques.

III –D'autres questionnements chez Benjamin :

Dans le but d'obtenir des informations complémentaires sur les pratiques en classe de PLC2 et sur les analyses qu'ils étaient susceptibles d'en faire, nous avons mis en place au cours de notre deuxième année d'expérimentation un dispositif "vidéo", qui a concerné cinq professeurs stagiaires dont Benjamin[42]. Au cours du second trimestre, nous avons demandé à ces cinq personnes d'élaborer une séance d'algèbre que nous sommes allée filmer dans leur classe. Parallèlement à ce film, nous avons organisé trois rencontres avec chacun des PLC2 concernés : une première, qui avait lieu quelques jours avant la séance au cours de laquelle le stagiaire devait donc nous présenter sa séance. Au cours de cet entretien, nous avions également fait le choix de donner notre avis sur la séance et de proposer quelques modifications, si cela nous semblait nécessaire. Précisons qu'il ne s'agissait pas pour nous d'essayer de modifier la logique des séances prévues, mais, ayant constaté dans les analyses concernant ces stagiaires les difficultés qu'ils rencontraient généralement à donner une réelle responsabilité mathématique à leurs élèves, nos questions et suggestions éventuelles visaient à essayer de rendre le professeur stagiaire plus sensible à cette dimension et à l'aider à accroître, si besoin, cette responsabilité, localement, sans perturber pour autant l'architecture de la séance. La deuxième rencontre avait lieu aussitôt la séance filmée. Au cours de cet "entretien bilan", notre objectif était de recueillir les premières réactions à chaud et les premières analyses du stagiaire. Puis, environ trois mois après les séances filmées, nous avons de nouveau rencontré individuellement chacun des PLC2 et nous avons visionné ensemble le film, le but de cette troisième rencontre étant d'accéder à l'analyse qu'ils faisaient, en fin d'année, de ce qu'ils avaient vécu.

Le travail mené avec Benjamin, via ce dispositif, a conduit à l'émergence de deux nouveaux questionnements qui n'étaient pas encore apparu lors des entretiens réguliers que nous avions avec lui. Dans la suite de cette partie, nous présentons la séance filmée et les analyses menées par Benjamin.

III.1 - L'étude de la séance filmée :

Cette séance se déroule au cours du chapitre sur les fonctions, dans lequel Benjamin a déjà introduit les définitions de la représentation graphique d'une fonction, des notions de croissance, de

[42] Les suivis individuels de Marie et Julien se sont déroulés lors de la première année d'expérimentation.

décroissance, de parité et d'imparité[43]. Il y a également proposé un ensemble d'exercices conduisant sa classe à travailler différents types de tâches relatifs à ces notions. Pour la séance filmée, l'objectif de Benjamin est double : il veut à la fois amener les élèves à étudier la fonction "carré" et profiter de cette étude pour institutionnaliser un plan d'étude d'une fonction que les élèves pourront réinvestir lors de l'étude des autres fonctions usuelles du programme. Conformément à sa vision de l'introduction de méthodes que nous avons explicitées précédemment, Benjamin choisit d'écrire une "fiche-méthode" à compléter :

Plan d'étude d'une fonction
1 – Recherche de l'ensemble de définition
2 – Etude de la parité éventuelle
Méthode :
3 – Etude des variations
Méthode :
Remarques :
4 – Tableau de valeurs
5 – Tracé de la courbe

Il envisage alors de commencer par faire remplir cette fiche (il pense demander aux élèves de rappeler les différentes techniques à utiliser), puis de les amener à étudier les points du plan pour la fonction "carré" (pour chacun de ces points, il prévoit de laisser un moment pour que les élèves mettent en œuvre les techniques rappelées). Après l'étude de chaque point, un bilan dans le cours est prévu pour institutionnaliser au fur et à mesure les propriétés de cette fonction.

- *Analyse du scénario prévu :*

A travers le travail de préparation de cette séance mené par Benjamin, nous retrouvons des caractéristiques qui sont apparues lors de l'analyse de ses pratiques : un scénario qui met en évidence sa volonté de faire participer ses élèves à l'étude de la fonction carré, le souci de les aider à disposer de méthodes à travers l'établissement de la fiche relative au plan d'étude d'une fonction.

Par ailleurs, la gestion prévue pour cette séance ne laisse pas réellement de grandes responsabilités à sa classe. En effet, en distribuant le plan d'étude d'une fonction, Benjamin prend de nouveau à sa charge l'élaboration d'une technique. Par la suite, la gestion choisie pour l'étude de chacun des points figurant sur ce plan limite également les responsabilités puisque, pour chacun d'entre eux, il compte amener les élèves à se remémorer les techniques à appliquer avant de les mettre en œuvre pour la fonction carré. A travers ce type de pratiques, la tâche des élèves nous paraît donc très encadrée et simplifiée.

Enfin, sa sensibilité aux difficultés des élèves se retrouve lors du premier entretien pendant lequel Benjamin s'est longuement attardé sur une analyse a priori des problèmes susceptibles d'être rencontrés au cours de cette activité et sur les prises en charge envisageables. Toutefois, il apparaît qu'il lui manque encore des éléments pour prévoir et analyser certaines difficultés notamment lors de l'étude de la parité de la fonction. En effet, il ne perçoit pas que, pour ce type de tâches nécessitant la mise en jeu de l'algèbre comme outil de preuve, l'on peut s'attendre à des difficultés à utiliser les lettres et à des études menées uniquement à partir d'exemples numériques. En outre, l'étude de la parité met en jeu la substitution de par $-x$ dans l'expression "$f(x) = x^2$", ce qui peut aussi poser problème aux élèves, mais chez Benjamin ce geste est complètement naturalisé et il ne prévoit pas que ce type de tâches algébrique peut être problématique chez un élève de seconde, comme le montre la citation suivante :

> B : Et pour la parité, on calcule f(-x), c'est du calcul algébrique assez simple en général.

[43] Le suivi de Benjamin a eu lieu lors de l'année 1999-2000 et ces notions faisaient encore partie des programmes de la classe de seconde.

Il est clair que si Benjamin guide trop fortement sa classe lors de l'étude de la parité de la fonction "carré", il risque de ne pas prendre conscience de ces problèmes.

Au cours de l'entretien de préparation, nous avons donc fait le choix de perturber un peu son projet afin qu'il donne plus de responsabilités à ses élèves. Dans cette rencontre, nous sommes d'abord revenue sur son choix de faire rappeler systématiquement les techniques pour l'étude de différentes propriétés d'une fonction avant de les mettre en œuvre pour la fonction carré :

AL : D'accord, tu veux déjà leur faire dire la méthode et l'appliquer après ?

B : Oui… Tu pensais que j'allais leur demander d'étudier la parité et, après quand tout le monde aura un peu cherché, on dégage la méthode ?

AL : Peut-être...

B : C'est vrai que je ne l'avais pas vu comme ça, ouais.

AL : En fait, moi je pense qu'il faut les laisser un peu chercher dans chacune des questions.

B : Oui, si on commence déjà par leur donner la méthode, le travail est mâché. […] Donc oui, c'est peut-être... Pour les faire réinvestir ce qu'on aura vu […], les laisser partir d'eux-mêmes et dégager la méthode après. Essayer de la leur faire dire, la méthode.

Suite à notre première question, Benjamin s'est donc tout de suite interrogé sur la gestion qu'il avait initialement envisagée et ce questionnement l'a conduit à pointer que ce choix va conduire à simplifier la tâche des élèves. Il envisage alors rapidement une autre gestion qui, cette fois, laisserait plus de responsabilité.

Puis, à la fin de l'entretien, nous sommes revenue sur son choix de distribuer a priori le plan d'étude d'une fonction :

AL : Mais, par rapport à ce que tu as prévu, je les laisserais parler sur ce qu'ils pensent qu'il faut étudier sur une fonction.

B : Oui c'est pas mal. C'est vrai que c'est directif ça.

AL : Toi, tu sais pourquoi tu utilises ce plan. Eux ils ne le savent pas. […] Cela serait bien de justifier ce que tu leur fais faire.

A travers cette intervention, notre but était de l'amener à modifier le début de son scénario afin de laisser un peu de responsabilités aux élèves lors de l'élaboration de la technique d'étude d'une fonction. Benjamin semble ici assez réceptif à cette proposition. Mais, nous n'avons pas voulu réécrire avec lui un nouveau scénario, notre but étant de repérer comment il allait réagir à ces deux perturbations.

- *Analyse du déroulement effectif de la séance :*

Visiblement sensible à la discussion que nous avons eue lors de l'entretien de préparation, il a modifié son scénario initial et commence cette séance par un premier épisode de huit minutes consacré à l'élaboration collective, puis à l'explicitation d'un plan d'étude d'une fonction. A la fin de cette première phase, Benjamin institutionnalise ce plan en distribuant la fiche présentée précédemment. Puis les différents points sont étudiés les uns après les autres. Pour chacun d'entre eux, il laisse un temps de recherche plus ou moins long, pendant lequel il circule, s'adresse aux élèves et prend en charge leurs problèmes éventuels. Une correction est ensuite menée par Benjamin lui-même ou par un élève envoyé au tableau et la propriété cherchée est institutionnalisée.
L'analyse de cette séance confirme certaines caractéristiques relevées lors de l'étude des pratiques de ce stagiaire à travers les chapitres consacrés à l'algèbre : l'attention particulière qu'il porte à ses élèves, la volonté de les faire participer, la prise en charge de leurs difficultés, le souci de les amener à donner

du sens à certaines notions. L'étude de certains épisodes de cette séance met en évidence les gestes qu'il adopte en classe pour mener à bien ce projet :

- Benjamin choisit une gestion des interventions des élèves qui leur laisse une certaine place,
- il n'ignore pas les idées qui n'entrent pas dans son projet,
- il porte une attention particulière à amener les élèves à comprendre leurs erreurs,
- il laisse des responsabilités aux élèves dans l'application de techniques.

L'analyse de ses pratiques avait également fait apparaître des points faibles concernant, en particulier, la place laissée aux élèves lors de l'élaboration ou de l'explicitation de techniques. Cette caractéristique se retrouve au cours cette séance. En effet, même s'il a été sensible au fait de laisser une place aux élèves lors de l'élaboration du plan d'étude d'une fonction, il garde sous sa responsabilité l'explicitation de celui-ci. Suite à une discussion entre lui et sa classe, les différents points à étudier sont apparus dans l'ordre suivant : représentation graphique de la fonction, tableau de valeurs, tableau de variations, étude de la parité, détermination de l'ensemble de définition (c'est-à-dire dans l'ordre inverse du plan prévu par Benjamin). Il propose alors sans éléments de justification l'ordre suivant :

> B : Et bien faire l’étude d’une fonction, c’est chercher toutes ces choses là mais exactement dans le sens inverse où c’est marqué. On commence par chercher l’ensemble de définition pour savoir où on travaille, ensuite on va chercher la parité, le tableau de variation, le tableau de valeurs et on termine par la courbe.

III.2 - L'analyse de Benjamin :

Cette analyse s'est déroulée en deux temps : suite à la séance, nous avons pris un moment avec Benjamin pour recueillir ses impressions à chaud sur ce qui venait de se passer et ses premières analyses. Puis, nous nous sommes rencontrés environ trois mois après le tournage pour visionner ensemble le film. Le but de ce troisième entretien était d'accéder à l'analyse que faisait Benjamin avec une certaine prise de recul. Au cours de ces deux entretiens nous avons vu naître deux questionnements nouveaux chez lui : le premier est relatif à l'élaboration des techniques et aux responsabilités à laisser aux élèves lors de ce moment didactique, le second concerne l'apprentissage de la notion de contre-exemple.

Le premier apparaît suite à une réflexion menée sur le scénario choisi. Lors de l'analyse à chaud, Benjamin regrette d'avoir explicité trop vite le plan figurant sur la fiche distribuée aux élèves. Après le visionnement de la bande vidéo, il confirmera cette impression de vitesse et expliquera que, dans la mesure où il avait déjà rajouté cet épisode, il avait peur de ne pas avoir assez de temps pour terminer l'étude de la fonction. Au cours de l'entretien qui suit immédiatement la séance, il regrette aussi de ne pas avoir pris de temps pour justifier l'ordre des points à aborder lors de l'étude d'une fonction figurant sur cette fiche. Mais, il constate alors qu'à ce moment de la séance, la justification de certains points était problématique :

> B : Bon c'est pareil, ce que j'aurais bien aimé, c'est montrer le lien plus précisément entre les deux[44] : d'abord l'ensemble de définition pour savoir où est-ce qu'on calcule... Bon je ne pouvais pas donner la justification de la parité à ce moment-là, parce que je n'avais pas encore dit que cela nous permettait de travailler sur une moitié d'intervalle, c'est dommage aussi.

Ce questionnement le conduit alors aussitôt à envisager un nouveau scénario qui laisserait plus de place aux élèves :

> B : J'ai pensé que cela serait pas mal de consacrer une séance complète où ils font l'étude en vrac. […] Suivre en fait l'idée des élèves. Tu vois, faire un peu ce qu'on avait dit au début : on va commencer par quoi, etc. Et puis à la fin construire la fiche ensemble.

[44] Il fait référence ici à ce qui est ressorti de la discussion avec les élèves lors du premier épisode de la séance et le plan figurant sur la fiche distribuée.

Benjamin considère qu'un tel scénario lui éviterait d'inciter les élèves à étudier certains points et que l'ordre s'établirait alors naturellement à la fin de l'étude de la fonction carré, mais il émet une réserve quant à la mise en place d'un tel scénario. En effet, contrairement à ce qu'il fait habituellement, ce scénario conduit à une séparation entre le moment d'élaboration d'une technique et l'institutionnalisation et il pense que cela occasionnerait une certaine perte de temps :

> B : Mais bon ça fait perdre deux heures. Parce qu'après il faut quand même qu'ils aient l'étude de x^2 propre. Il faut la remettre en ordre après.

Au cours de l'entretien qui a lieu après le visionnement de la bande vidéo, il nous fait part d'un incident critique qui s'est déroulé quelque temps après la séance filmée et pendant lequel il prend conscience que certains élèves n'ont pas saisi l'intérêt d'étudier les différents points dans l'ordre proposé sur la fiche :

> B : Bien que j'aie essayé de leur faire construire eux-mêmes le plan d'étude d'une fonction, quinze jours après quand je leur ai demandé : maintenant qu'est-ce qu'on fait ? On étudie la parité. Pourquoi ? Parce que c'est marqué sur la fiche méthode. Ça c'est décevant. Pour eux les cinq ou six minutes n'ont servi à rien. Soit il fallait pas les faire du tout, mais je ne pense pas, soit il fallait y passer plus de temps. […] En tout cas il ne fallait surtout pas passer très vite comme je l'ai fait à la fin.

Ce constat le conforte donc dans l'idée qu'il est passé trop rapidement à l'explicitation du plan lors de la séance filmée et que la justification de l'ordre méritait qu'il s'y attarde. Il confirme alors la possibilité de fabriquer un scénario qui laisserait plus de responsabilité aux élèves. Néanmoins, en cette fin d'année de stage, il semble avoir encore des réticences à mettre en place une telle situation :

> B : Je ne sais pas si je me sentirais d'attaque pour les laisser partir comme je te disais. J'ai peur c'est que, pour eux, une fois que c'est écrit… On l'a fait une fois en module, donc on peut se permettre de le refaire plus tard. C'est une sorte de module brouillon et j'ai peur que pour eux ce ne soit pas clair.

Il est clair qu'en cette fin de stage, même s'il semble avoir perçu un certain intérêt à laisser plus de responsabilité aux élèves, Benjamin éprouve encore des appréhensions face à ce type de situation. Nous repérons deux raisons qui peuvent expliquer ce sentiment. La première concerne le fait que, dans ce type de situation, les élèves sont moins cadrés et l'enseignant maîtrise moins ce qui peut se passer. Il s'avère que Benjamin avait déjà précisé qu'il n'aimait pas improviser lors des premiers entretiens de suivi, il ne semble donc pas encore prêt à "lâcher" sa classe en cette fin de stage. La seconde réside dans le fait que la mise en place de ce type de situation entraînerait un bouleversement du schéma didactique qu'il a mis en place dès le début d'année et qui lui a permis de faire tourner sa classe.

L'analyse de la séance filmée est également l'occasion de réfléchir sur la place à donner aux élèves à travers un deuxième axe, celui de la gestion des interventions. En effet, après avoir regardé le film, Benjamin est sensibilisé par le fait que ses interventions sont parfois très directives et que cela peut être problématique, comme il le constate lors de son analyse d'un épisode pendant lequel est déterminé l'ensemble de définition de la fonction carré :

> B : Là quand ils disent l'ensemble de définition c'est $[0 ; +\infty[$, je dis non et je repose la question. Alors c'est peut-être dommage d'être trop directif. Non c'est pas ça, c'est autre chose. Cela les incite à dire n'importe quoi jusqu'à ce qu'ils donnent la bonne réponse. Mais d'un autre côté, si je leur dis : calculez $(-2)^2$, est-ce que vous pouvez le faire ? Et ben, là ça fait tilt tout de suite. Ça c'est des choses vraiment pas évidentes.

Benjamin a visiblement du mal à concevoir d'autres types d'interventions et il ne lui semble pas forcément naturel de demander à ses élèves d'approfondir leurs réponses ou de leur demander de les justifier, comme le montre la suite de l'entretien :

> AL : Qu'est-ce que tu pourrais faire d'autre ?
>
> B : ... Non je vois pas. C'est le genre de choses où la réponse est donnée dans la question. […]
>
> AL : Mais est-ce que tu ne peux pas avoir une autre technique ?

B : … Leur demander de choisir un nombre au hasard et de l'élever au carré. Mais je suis sûr que les seize qui sont là vont choisir un nombre positif... Ou alors, ne pas dire tout de suite non et demander : pourquoi [0 ; +∞[? Demander la justification de ça. Et là normalement ils se rendent compte.

L'analyse de cette séance fait également naître des réflexions nouvelles notamment en ce qui concerne les difficultés rencontrées par les élèves lors de la mise en œuvre de l'algèbre comme outil de preuve et de leurs conséquences sur les choix didactiques. Au cours de l'entretien qui a lieu juste après la séance, Benjamin revient sur un moment où un élève propose d'étudier la parité de la fonction carré en choisissant un exemple numérique. Il confirme alors qu'il ne s'attendait pas à cette difficulté, même s'il l'avait déjà rencontrée en début d'année ("J'ai été confronté à ce problème-là, au début de l'année, pour prouver une égalité par exemple : ils t'en prennent deux et ça y est."). Mais, finalement, cette erreur ne l'a pas particulièrement dérangé ("Bon je ne m'y attendais pas plus que ça mais cela ne m'a pas tellement désarçonné. J'ai dit : non, tu ne peux pas généraliser avec un seul exemple, etc. "), même si, finalement, il ne sait pas vraiment comment la prendre en charge autrement :

B : Mais, ça, je trouve que c'est vraiment difficile à leur faire comprendre que traiter sur des exemples comme ça, ça ne généralise pas. Je ne vois vraiment pas comment on peut leur démonter ça. A moins de donner un contre-exemple, c'est vrai. Mais euh... Ça, c'est tout ce qui me pose vraiment problème.

Après le visionnement du film, Benjamin revient sur ce type de difficulté qu'il a encore rencontré dans la suite du travail sur les fonctions lors d'études de parité, mais aussi lors d'études de variations. Il reprend alors la technique qu'il a choisie lors de la séance pour prendre en charge la réponse de l'élève qui lui propose de calculer f(– 4) pour étudier la parité de la fonction carré et il ne semble plus forcément convaincu de la pertinence de son choix :

B : Ça c'est pas évident de leur faire comprendre que c'est pas bon. Là j'essaie de m'en sortir en disant : tu montres un truc sur –4, mais tu ne généralises pas. C'est quelque chose qu'ils n'ont pas, la généralisation.

Sa réflexion semble toutefois avoir évolué quant au type de contre-exemple que l'on peut proposer aux élèves pour mettre en évidence l'insuffisance de la justification à partir d'exemples :

B : Pour le "on calcule f(-4)", il y a peut-être un truc qui serait pas mal, cela serait de leur donner un contre-exemple. Si on montre quelque chose sur un seul exemple, cela ne marche pas toujours. Par exemple, si tu leur dis que 1^2 ça fait 1, donc on en déduit que pour tout x, x^2 égale x. Cela pourrait être pas mal pour leur montrer qu'il n'y a aucune généralisation avec ce qu'ils font.

Le fait d'envisager une telle prise en charge l'amène alors à s'interroger sur sa stratégie consistant à donner des exemples numériques, relevée à plusieurs reprises lors de l'étude de la vision des élèves et de leurs difficultés, et qu'il a mise en jeu au cours de cette séance pour réexpliquer aux élèves que $(-x)^2 = x^2$. Il prend alors conscience d'une certaine ambiguïté dans ses pratiques, qu'il exprime ainsi :

B : Et alors après je me contredis pas mal : quand je leur dis que pour se souvenir que x^2 égale $(-x)^2$, je leur dis de calculer $(-2)^2$. Je suis en train de prendre un exemple et de généraliser en quelque sorte. Et je leur redis en dessous : il ne faut surtout pas généraliser...

Cette réflexion se poursuit ensuite par l'analyse de la prise en charge du problème rencontré lors de l'étude des variations de la fonction carré, lorsque l'élève envoyé au tableau considère que les carrés de deux nombres a et b sont toujours rangés dans le même ordre que a et b[45] :

---

[45] Nous reprenons ci-dessous l'extrait de la retranscription de la séance qui correspond à ce moment :
L'élève écrit $a^2 \leq b^2$.
B : Donc on obtient a^2 inférieur ou égal à b^2...
[…]
B : D'accord. Alors, a et b on les a pris où, ça ?
E : Dans l'ensemble de définition.
B : L'ensemble de définition, c'est quoi ?
E : C'est $\mathbb{R}$.

> B : L’exemple pour les négatifs, quand on élève au carré. […] En fait cela m’étonne qu’aucun élève ne m’ait fait la remarque. Je leur dis : ne prenez jamais un exemple pour montrer quelque chose. Et puis là c’est ce que je fais, même si moi je sais que c’est un contre-exemple. Moi je suis certain que sur les trente-trois il n’y en a pas un qui a compris la notion de contre-exemple. Et cela m’étonne qu’il y en ait pas un qui m’ait dit : vous prenez un exemple pour montrer quelque chose. Pour eux c’est sur le même plan. Et il y en a pas un qui fait la remarque. C’est dommage car cela pourrait être l’occasion de dire : non ça c’est un contre-exemple.

En conclusion, nous avons retrouvé à travers l'analyse de cette séance différentes cohérences repérées lors de l'analyse des pratiques de Benjamin dans le cadre de son enseignement en algèbre. Par ailleurs, au cours des différents entretiens menés dans le cadre de ce dispositif "vidéo", nous avons vu un stagiaire s'interroger de façon pertinente, ce qui l'a conduit à prendre du recul et à avoir un regard critique sur certaines de ses pratiques.

Passons maintenant à la dernière partie de notre conférence dans laquelle nous avons évoqué des exemples de raisons qui peuvent expliquer des évolutions ou des résistances dans les pratiques des trois professeurs stagiaires sur lesquelles nous avons travaillé.

IV - Des raisons qui expliquent les évolutions :

L'étude des différents rapports professionnels à l'algèbre menée dans notre travail fait tout d'abord apparaître une possible influence des conditions de travail sur les évolutions repérées. Ainsi, Julien qui exerçait avec des élèves peu motivés par les mathématiques et rencontrant de nombreux problèmes s'est clairement plus interrogé que Marie, exerçant dans un milieu beaucoup plus favorable, sur les difficultés rencontrées par les élèves en algèbre et sur les prises en charge envisageables. Cette réflexion l'a, par ailleurs, conduit à développer un système interprétatif beaucoup plus approfondi que celui de Marie. Mais, il apparaît aussi clairement que le contexte dans lequel le stagiaire exerce ne suffit pas pour expliquer son évolution. En effet, Benjamin exerçait également dans un milieu plus favorable que celui de Julien et pourtant une caractéristique forte de son profil est l'attention particulière portée aux élèves et à leurs difficultés.

Il semble également que certains incidents critiques jouent un rôle particulier sur les évolutions possibles du rapport professionnel à l'algèbre des enseignants débutants. Ceci est notamment apparu dans notre recherche lors de l'analyse des pratiques de Benjamin. Au cours de son année de stage, il a été notamment confronté à deux incidents critiques qui l'ont conduit à s'interroger d'une part sur les difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation de la lettre en algèbre, d'autre part sur les limites d'un apprentissage de l'algèbre par automatisme. Néanmoins, s'il est vrai que certains incidents peuvent éventuellement sensibiliser les stagiaires à certains problèmes, il n'est pas évident qu'ils permettent pour autant de construire des stratégies plus performantes, comme l’a montré l’exemple de Marie lors du travail sur les valeurs absolues.

Différents chercheurs insistent sur le fait que l'expérience seule ne suffit pas et que la construction de compétences professionnelles nécessite une certaine pratique réflexive (Perrenoud, 1992, par exemple). Ce point de vue semble renforcé par notre recherche. En effet, l'analyse des pratiques de Marie, Benjamin et Julien montre une différence d'évolution entre Marie et les deux autres stagiaires. Or, l'analyse des entretiens de suivis avec cette personne a mis en évidence une certaine difficulté à

B : C’est $\mathbb{R}$. Donc a et b sont deux nombres réels tout à fait quelconques. Par exemple on va prendre $a=-4$ et $b=-2$. On a bien $a \leq b$ parce $-4 \leq -2$. On élève au carré qu’est-ce qu’on obtient. $(-4)^2$ c’est combien ?
E : 16.
B : $(-2)^2$ c’est combien ?
E : 4.
B : Est-ce que $16 \leq 4$?
E : Non.
B : Pourtant c’est ce qu’on déduit de ce qui est écrit au-dessus.
[…]

prendre du recul par rapport à ses pratiques ou par rapport à certains conseils, à se placer dans une posture réflexive. En revanche, les deux autres stagiaires se sont montrés plus enclins à se placer dans une telle posture.
Enfin, les représentations métacognitives des stagiaires relativement aux mathématiques et à leur enseignement semblent également jouer un rôle sur les évolutions repérées. Notre travail n'était pas spécialement centré sur la détermination de ces représentations pour les stagiaires considérés, mais il nous a permis d'en pointer quelques éléments. Certaines caractéristiques des profils nous semblent ainsi avoir leur origine dans certains de ces éléments. Prenons, l'exemple d'une autre stagiaire, que nous avons suivie, pour qui l'enseignement des mathématiques doit s'accompagner d'un travail d'aide au développement d'une certaine autonomie des élèves face au travail. Ses pratiques ont été fortement marquées par une réelle volonté de donner certaines responsabilités à ses élèves, s'expliquant certainement en partie par cet aspect de sa vision de l'enseignement des mathématiques.

V – Conclusions :

Ce travail d'analyse des pratiques de trois professeurs stagiaires enseignant au même niveau mais dans des conditions de travail différentes a permis de repérer des évolutions et des résistances relativement à différents aspects de l'enseignement de l'algèbre. Nous avons essentiellement centré notre conférence sur l'analyse des deux points suivants :

- *la vision des élèves et de leurs difficultés :*

Notre étude fait apparaître qu'en début d'année cette vision des trois PLC2 est fortement centrée sur les difficultés relatives au système symbolique et plus particulièrement à la manipulation des écritures algébriques et qu'ils ont une faible capacité d'analyse des erreurs et restent le plus souvent à un niveau de constat. En fait, leur système explicatif s'organise principalement alors autour de l'explication suivante : les élèves ne connaissent pas correctement les règles à utiliser. Il s'y s'associe un système d'aides consistant à ré-expliquer les règles, à demander leur mémorisation et à les faire appliquer dans un nombre suffisant d'exercices pour que cette application se mécanise, devienne un réflexe. Au cours de l'année, la vision des élèves et de leurs difficultés a évolué chez chacun de ces trois stagiaires. Elle s'est accompagnée de la prise de conscience d'autres types de problèmes ainsi qu'une évolution de leur système d'analyse. Mais les évolutions sont différentes selon les trois PLC2 : ainsi l'étude des entretiens avec Marie a montré que cette stagiaire a repéré de manière très précise des erreurs concernant la manipulation d'écritures algébriques ou liées à l'articulation de divers registres sémiotiques. Mais, lors de ces rencontres, elle n'a jamais évoqué, par exemple, de difficultés liées au sens des écritures algébriques ou d'autres difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation de l'algèbre pour prouver une propriété. L'étude des entretiens avec Benjamin et Julien montre, en revanche, une plus grande diversité dans les types de difficultés repérées. La diversité des évolutions apparaît aussi à travers les systèmes d'interprétation. Ainsi, nous avons pu observer que celui de Marie est toujours resté centré sur le fait que les difficultés de ses élèves étaient dues à un manque de connaissance des règles à appliquer. Parallèlement, nous avons pu noter chez les autres stagiaires des évolutions évidentes de leur système explicatif. Ainsi, on constate chez Benjamin une prise de conscience progressive des difficultés liées aux différents changements du statut de la lettre en algèbre et une intégration de cette dimension dans son système interprétatif. De même, chez Julien, nous avons pointé l'évolution de ses réflexions sur le sens donné par les élèves aux écritures algébriques et l'évolution du système explicatif qui en découle.

- *les stratégies d'enseignement de ces trois enseignants débutants :*

Un résultat de notre étude relative aux stratégies d'enseignement concerne la mise en place au début de l'année d'organisations didactiques assez proches. En effet, dans les premiers chapitres essentiellement consacrés à un travail sur des objets déjà étudiés au collège, les trois stagiaires ont mis en place des schémas didactiques relativement semblables. Par ailleurs, dès les premiers cours, nous avons pu noter chez ces enseignants une réflexion intéressante relativement au geste professionnel "choisir des exercices pour travailler une technique". L'étude de leurs pratiques a montré une rigueur certaine lors de l'organisation du travail technique et une cohérence lors du choix des exercices, avec une prise en compte de différentes variables didactiques. Nous avons pu constater, par ailleurs, que Marie et Benjamin ont eu très tôt le souci de proposer un travail se complexifiant progressivement et structuré de manière à favoriser l'appropriation des différentes techniques. Julien, a eu, quant à lui, plus de difficultés à passer de la position d'étudiant à celle d'enseignant et, de ce fait, a rencontré au début de son stage des difficultés pour doser le travail à proposer aux élèves et pour mettre en place une gestion qui favorise leur apprentissage. Mais, la prise en compte de différents conseils, dont ceux de sa tutrice, l'ont conduit à approfondir sa réflexion quant à la gestion de ce travail des techniques. Ses pratiques se sont alors fortement rapprochées de celles des trois autres. Ces caractéristiques du travail des techniques, communes aux trois stagiaires, ont été retrouvées tout au long de l'année dans les pratiques de ceux-ci.

Mais, là aussi, nous avons pu noter des évolutions différentes suivant les personnes considérées. Les trois stagiaires ont tous exprimé, à un moment ou à un autre, la volonté de proposer un travail spécifique pour les objets nouveaux, qui s'est caractérisée le plus souvent par l'introduction progressive d'activités préparatoires. Sur ce point, l'étude des pratiques de ces enseignants a alors montré des diversités évidentes dans l'exploitation de ces activités. Ainsi Marie a-t-elle progressivement introduit des activités de découverte pour l'introduction de notions nouvelles mais l'étude de ses cours a mis en évidence que le lien entre les activités et les résultats institutionnalisés était rarement visible. Julien, quant à lui, a également pris conscience de l'intérêt d'amener les élèves à découvrir des notions ou des propriétés avant de les institutionnaliser et, comme Marie, il a fait le choix de mettre en place des activités préparatoires. Comme elle, il n'a pas été attentif au départ à la nécessité d'établir un lien entre ces activités et le cours, mais progressivement nous avons pu observer une réelle évolution de sa réflexion relativement à l'exploitation des situations d'introduction proposées.

La diversité des évolutions apparaît également à travers les moments d'élaboration ou d'explicitation de techniques nouvelles. Marie n'organise pas de moment pour amener les élèves à découvrir ou élaborer de nouvelles techniques : elle garde à sa charge leur explicitation et semble peu soucieuse de proposer des éléments technologiques visant à justifier les techniques présentées. Cette conception de l'apprentissage de l'algèbre n'évoluera pas au cours de sa première année d'enseignement. L'étude des pratiques de Julien et de Benjamin a fait apparaître, elle aussi, des questionnements relatifs aux responsabilités à laisser à la classe. La volonté de laisser de telles responsabilités à ses élèves est apparue relativement tôt chez Julien. Mais les problèmes de gestion de classe rencontrés par ce stagiaire ne lui ont pas permis de mettre immédiatement en place des situations prenant en compte ce souci. En revanche, pour Benjamin, ce questionnement est né en fin d'année et est resté ouvert. Cette différence au niveau des réflexions menées autour des responsabilités susceptibles d'être laissées aux élèves au cours d'une séance conduit à d'autres diversités relativement à certains gestes professionnels (la gestion d'exercices plus difficiles, par exemple) ou à certains moments didactiques (les moments de re-rencontre avec certains objets, par exemple).

Notre travail a mis en évidence certaines raisons qui permettent d'expliquer certaines évolutions ou résistances : une possible influence des conditions de travail, le rôle de certains incidents critiques, le rôle du conseiller pédagogique, une influence certaine de la propension de certains stagiaires à s'interroger sur leurs pratiques, le rôle des représentations métacognitives relativement aux mathématiques et leur enseignement.

Il a également montré qu'il était possible de créer des milieux (via l'analyse de vidéos, en ce qui nous concerne) qui pourraient conduire les stagiaires à se questionner davantage et à dépasser certaines résistances.

Bibliographie :

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 19 n°2, 221-266.

GRUGEON B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves dans la transition entre deux cycles d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

LENFANT A. (2002). ***De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*****. Thèse de doctorat. Université Paris 7.**

LENFANT A. (2005) De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. In CASTELLA C., HOUDEMENT C. (Eds*), Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2004*. IREM de Paris 7.

PERRENOUD P. (1992). Quelle formation pour un métier nouveau ? *Educateur n°17*, 26-27.

ROBERT A. (1996). IUFM : Réflexion sur la formation professionnelle initiale des professeurs de mathématiques des lycées et collèges. *Repères IREM n° 23*, 83-108. Editions Topiques.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2.4, 505-528.

Thème 2

Ateliers

Comment conduire la classe au cours d'une situation problématique d'enseignement ? Il n'y a pas qu'une manière de faire ...

Atelier animé par l’équipe de Danielle Roger
Christine Grandjean, David Maréchal (académie de Besançon), Marie-José Houssin , Laurent Danne (académie de Créteil)

Résumé :
Le travail proposé dans l'atelier sur ce thème s'appuiera sur une vidéo d'une séquence de l'autoconfrontation de Marie-José Houssin, enseignante expérimentée, et de Laurent Danne, alors néo-titulaire, sur un moment précis d'un cours de Marie-José dans une classe de 6ème. Le cours a pour objectif d'installer chez les élèves la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment qui a été introduite initialement comme un axe de symétrie du segment. Le moment particulier du cours, qui a provoqué les échanges dialogiques, sur lequel l'atelier sera amené à travailler, est une séquence bien précise du dialogue entre élèves, entre élèves et professeur, destinée à valider et faire valider l'orthogonalité entre médiatrice et segment. Mais valider comment ? Faire valider par qui ?
Pour être plus précis encore, il s'agit de deux répliques entre un élève et l'enseignante :

> L’élève : "c'est un angle droit."
> Le professeur : "on a l'impression que c'est un angle droit."

L'échange qui se déroule alors entre les deux enseignants fait ressortir l'imbrication, dans le concret de l'action quotidienne, d'un problème de la discipline enseignée, ici le passage difficile de la géométrie d'observation à la géométrie de démonstration, avec les difficultés du dialogue dans la classe et les possibilités d'une réelle activité des élèves tout au long de ce dialogue.

Compte-rendu du débat d'actualité : Le nouveau cahier des charges de la formation des maîtres en IUFM : Incidences sur l'organisation de la formation initiale dans le second degré

Jean-François Chesné (IUFM de Créteil)
Mirène Larguier (IUFM de Montpellier)

Depuis quelques années, à l'occasion de son colloque, la CORFEM soumet aux formateurs de mathématiques de tous les IUFM un questionnaire sur un thème donné. Le choix fait en 2007 a été de s'intéresser à des questions d'actualité relatives au « nouveau cahier des charges de la formation des maîtres en IUFM » (Cf. BO n°1 du 4 janvier 2007 et BO n° 9 du 1er mars 2007) et à l'intégration des IUFM dans l'université. Si ce questionnaire était sans rapport direct avec les deux thèmes retenus pour le colloque 2007, le domaine qu'il abordait semblait cependant fondamental à la fois pour la formation des stagiaires et l'activité professionnelle des formateurs. . Le bureau de la CORFEM souhaitait ainsi faire un état des lieux à l'heure des réflexions, des débats et des interprétations différentes relatives aux nouveaux textes officiels, et ouvrir un débat sur les incidences de ces changements sur la formation initiale dans le second degré

Le document qui suit ne prétend pas reproduire dans son intégralité la présentation effectuée par Jean-François Chesné et Mirène Larguier à partir des questionnaires retournés. Il rappelle simplement les questions posées aux formateurs (pages 2 et 3), et reprend ensuite les diapositives de cette présentation (pages 4 à 12), dont l'objet principal était de rendre compte le plus fidèlement possible des questionnaires retournés.

Questionnaire

Le parcours de formation

Décrivez brièvement les prévisions, portées à votre connaissance, concernant l'organisation de la formation des PLC2 dans votre IUFM pour l'année 2007-2008 :

1. Quel sera le volume horaire annuel de la formation dans votre IUFM ?
    - Formation didactique disciplinaire :
    - Formation transversale :
    - Formation interdisciplinaire :
    - Autre (à préciser) :

Commentaires :

2. Quelles seront les modalités de la formation ? (répartition des stagiaires en groupes, effectifs, nombre de formateurs,…)

3. Quels seront les thèmes privilégiés en formation transversale ?

4. Est-ce qu'il y aura des modules interdisciplinaires prévus ?
   oui ☐ non ☐
   si oui, les préciser :

5. Est-ce qu'il y aura un module destiné à répondre aux besoins individuels des stagiaires ?
   oui ☐ non ☐
   si oui, les préciser :

6. Citez des aspects particuliers de la formation prévus dans votre IUFM qui ne sont pas évoqués ci-dessus :

7. Combien d'heures hebdomadaires sont prévues pour le stage en responsabilité ?

L'écrit professionnel

8. Dans votre IUFM, quelle forme est-il envisagé de donner à cet écrit ?

    - Il est conservé sous la forme actuelle du mémoire (éventuellement moyennant un changement de nom) : oui ☐ non ☐
    - Il est complètement supprimé : oui ☐ non ☐
    - Il est remplacé par un autre écrit : oui ☐ non ☐
      Si oui, le décrire :

9. Quels seront les changements sur le suivi des productions des stagiaires ?

10. Quels seront les changements sur l'évaluation des productions des stagiaires ?

11. Qu'est-ce qui est prévu concernant le dossier de compétences ?

12. Est-il prévu des liens avec un master professionnel ou de recherche ?
    oui ☐ non ☐
    Si oui, expliciter :

L'alternance IUFM/terrain

13. Dans votre IUFM, quelles sont les propositions qui concrétisent l'idée d'une complémentarité pour les stagiaires entre l'IUFM et l'établissement dans lequel s'effectue leur stage en responsabilité ? (exemples : préparation et analyse des séances du stage en responsabilité, utilisation de vidéo en formation disciplinaire, feuille de route destinée à mieux comprendre le fonctionnement d'un établissement scolaire, rencontres obligatoires avec des personnels de l'établissement, formation par le chef d'établissement,…).

14. Quels sont les impacts que vous prévoyez sur la formation disciplinaire pour que la formation en IUFM soit « en prise sur la réalité scolaire » ?

15. Quelle collaboration formateurs IUFM/conseillers pédagogiques / tuteurs est envisagé ? Moments de rencontres, modes de communication, …, étapes obligatoires ou facultatives ?

16. Comment la formation des conseillers pédagogiques / tuteurs sera-t-elle organisée (contenus et modalités) ?

17. Autres :

Le dossier de compétences

18. Quel mode et quels moyens d'évaluation des compétences professionnelles sont envisagés ?

19. La maîtrise de la langue constitue-t-elle un axe privilégié qui sera évalué ?

20. Quelle forme est prévue pour le dossier de compétences ? Son utilisation après la titularisation fera-t-elle l'objet d'une réflexion particulière ?

21. Autres :

Les liens avec le système LMD :

22. Donnez les modalités selon lesquelles, dans votre IUFM, il est envisagé d'inscrire la validation de modules d'enseignement suivis au cours de la formation initiale dans un cursus LMD (indiquez les conditions prévues pour l'évaluation en vue de la délivrance de crédits ECTS).

Points complémentaires :

23. Quelle est la date d'intégration de votre IUFM à l'université ? Quelle est cette université et dans quel climat se réalise ce passage ?

24. Donnez brièvement certaines des modalités d'intégration de votre IUFM au sein de son université de rattachement que vous considérez comme importantes (par exemple, composition du conseil d'école de l'IUFM).

25. Quelles sont, pour votre IUFM, les perspectives d'évolution du nombre de stagiaires dans les années à venir ?

26. Quelles incidences les changements qui vont intervenir peuvent-ils avoir sur le recrutement et la formation des formateurs dans votre IUFM ?

27. Etes-vous favorable au fait que les formateurs de l'IUFM doivent être à 70 % à temps partagé et qu'ils doivent avoir une expérience récente de la classe ?

- Oui ☐
- Non ☐

Argumentez votre réponse.

Présentation du 22/06/07
Jean-François Chesné – Mirène Larguier

Diapositive 1

CORFEM 2007

Le nouveau cahier des charges de la formation des maîtres en IUFM : Incidences sur l'organisation de la formation initiale dans le second degré

J.-F. Chesné, M. Larguier 1

Diapositive 2

Sommaire

- Introduction et présentation du contexte
- Le parcours de formation
- L'écrit professionnel
- L'alternance IUFM / terrain
- Le dossier de compétences
- Les liens avec le système LMD
- Quelques points complémentaires

2

Diapositive 3

Nos intentions

- La volonté d'une mutualisation : *quels sont les processus d'intégration déjà engagés en juin 2007 ?*
- L'occasion d'un questionnement : *pas d'objectif d'uniformisation, mais à partir de l'émergence de problématiques communes, interroger les différentes interprétations des textes officiels, les différents choix effectués, les différentes maquettes de plans de formation*
- L'occasion d'un positionnement : *la CORFEM ne pourrait-elle pas jouer un rôle d'interlocuteur institutionnel représentant les formateurs de mathématiques pour le second degré (et en particulier les formateurs associés ou à temps partagé) ?*

3

Diapositive 4

L'année du I2R

- Une année de réformes
- Une année de réunions
- Une année d'incertitudes

4

Diapositive 5

Tout a commencé il y a 2 ans …

« Dans un délai maximum de trois ans à compter de la publication de la présente loi, les instituts universitaires de formation des maîtres sont intégrés dans l'une des universités auxquelles ils sont rattachés par décret pris après avis du Conseil national de l'enseignement supérieur et de la recherche. »

Article 85 de la loi
n°2005-380 du 23 avril 2005
d'orientation et de programme
pour l'avenir de l'école

5

Diapositive 6

Une année de réformes

- Décembre 2006 : arrêté portant cahier des charges de la formation des maîtres en IUFM
- Janvier 2007 : vade-mecum de l'intégration
- Mars 2007 : circulaire de la mise en œuvre du cahier des charges de la formation des maîtres
- Mai 2007 : arrêté modifiant certaines modalités d'accomplissement et de validation du stage des PLC2

http://www.iufm.education.fr/connaitre-iufm/speciale-integration.html 6

Diapositive 7

Diapositive 8

Une année de réunions

- « Il y a eu hier une réunion pour la formation des PLC2, on en est encore à faire remonter des propositions.On doit se revoir le vendredi 29 juin pour (on espère) avoir des certitudes. »
- « Nous sommes encore en pleine réflexion sur les formes à donner au nouveau plan de formation. »
- « Demain, nous travaillons toute la journée sur le montage de notre nouveau plan de formation. Puis nous avons une réunion de coordonnateurs en fin de journée pour fédérer nos réflexions et ajuster nos pratiques. »

7

Une année d'incertitudes (1)

« Nous sommes dans le flou complet en ce qui concerne les futurs plans de formation. Je ne peux donc pas répondre à votre questionnaire pour le moment. »

8

Diapositive 9

Une année d'incertitudes (2)

« En l'état de notre réflexion, le plan de formation n'est pas encore abouti. Je joins la première ébauche et son dernier avatar contraint par la nouvelle maquette imposée depuis la semaine dernière . Je suis encore bien incapable de répondre à toutes les questions de ce questionnaire... J'attends les lumières des collègues ! »

9

Diapositive 10

Une année d'incertitudes (3)

- A l'étude, en cours, rien de précis encore
- « Trop de questions sans réponses et trop de précipitation »
- « Formation de plus en plus trustée par le transversal »
- « Pour les MC, les postes en didactique risquent progressivement de disparaître… »
- « Nous vivons actuellement une situation difficile : le maintien des décharges pour les PA est remis en cause »
- « On espère ne pas fermer ! »

10

Diapositive 11

Un bilan général sur les questionnaires

- Merci à tous ceux qui ont pris le temps de nous répondre
- Nos excuses pour les « ratés » dans les adresses
- Beaucoup de réponses encore dans « le flou »!
- Et un caractère transitoire pour tous…

11

Diapositive 12

Sommaire

- Introduction et présentation du contexte
- Le parcours de formation
- L'écrit professionnel
- L'alternance IUFM / terrain
- Le dossier de compétences
- Les liens avec le système LMD
- Quelques points complémentaires

12

Diapositive 13

Le parcours de formation

- Le volume de formation
- Les modalités de formation
- Les thèmes transversaux
- Les modules interdisciplinaires
- L'individualisation du parcours
- Le stage en responsabilité

13

Diapositive 14

Ce que dit le cahier des charges

« La formation à l'IUFM des professeurs des collèges et des lycées stagiaires correspond à un volume horaire minimal de 220 heures au cours de l'année de stage et de 50 heures au cours de la première année d'exercice en tant que titulaire. »

arrêté portant cahier des charges de
la formation des maîtres en IUFM (19/12/06)

14

Diapositive 15

Le volume de formation

La formation didactique disciplinaire :
entre 93h et 138 h

- La formation transversale :
entre 48h et 99h
- La formation interdisciplinaire :
entre 6h et 74h
- Autres : entre 24h et 30h
- Au total : entre 189h et 251 h

15

Diapositive 16

Autres choix :

- Constitution du portfolio : 16 h
- Accompagnement et individualisation des parcours : 102 heures avec 6 formateurs pour 30 stagiaires
- Formation transversale et interdisciplinaire réunies
- Augmentation importante des heures de formation interdisciplinaire en relation avec le socle et le travail en équipe
- Groupe pluri-sectoriel : PLC/PE

16

Diapositive 17

Les modalités de la formation

- Effectifs : entre 40 et 120 **(Corse mise à part avec 20 stagiaires de toutes disciplines)**

- Répartition des stagiaires : entre 2 et 4 groupes par académie (avec des variations internes)

- Nombre de formateurs : entre 6 et 15 (tous statuts confondus)

17

Diapositive 18

Les thèmes transversaux

- L'environnement éducatif ; le système éducatif
- Évaluation et communication
- « L'apprentissage »
- Corps et voix
- Gestion de classe ; situations difficiles
- Analyse de pratiques
- Le travail en équipe
- L'éthique professionnelle
- Concevoir son enseignement dans le cadre d'un projet
- Connaître les éléments transdisciplinaires : l'élève, le couple enseignement/apprentissage…

18

Diapositive 19

Les modules interdisciplinaires

- oui : 5
- Les « incontournables » : thèmes de convergence, IDD, TPE
- La place de la langue en référence au socle
- Réalisation de projets interdisciplinaires par des groupes de 4 à 6 stagiaires
- Des formats différents : de la conception à la mise en œuvre en passant par l'exposition
- projet intégrant les TICE
- Un thème en lien avec les offres des associations

19

Diapositive 20

Le parcours individualisé

- Oui : 3 Non : 1 ? : 2
- Ce qui relève du profil personnel
- Ce qui relève des difficultés rencontrées
- 4 stagiaires pour 1 formateur superviseur…
- 2 h d'accompagnement/30 stagiaires
- 12 h/stagiaire
- AAPP : ateliers d'analyse de pratique professionnelle (trustée par le transversal)
- Sensibilité à la langue et à la culture corse
- Développement de la culture (conférences)

20

Diapositive 21

Le stage en responsabilité

- 6h à 8h (4)
- 8h (3)
- Cahier des charges : 288 h annuelles au maximum

21

Diapositive 22

Sommaire

- Introduction et présentation du contexte
- Le parcours de formation
- L'écrit professionnel
- L'alternance IUFM / terrain
- Le dossier de compétences
- Les liens avec le système LMD
- Quelques points complémentaires

22

Diapositive 23

L'écrit professionnel

- La forme
- Le suivi des productions
- L'évaluation des productions
- Les liens avec le dossier de compétences
- Les liens avec un master

23

Diapositive 24

La forme

- Conservation dans sa forme actuelle :
2 (1 avec réserve ; 1 en plus d'autres écrits)
- Suppression : 1
- Remplacé par : 1, 2 ou 3 écrits de « poids » variable, plus ou moins dirigés.
- Evocation d'un portfolio et d'un « dossier d'échange » comportant différents écrits :
  - Travail d'étude et de recherche
  - Travail en lien avec le projet d'établissement
  - Projet interdisciplinaire

24

Diapositive 25

Le suivi des productions

Flou, mais revu à la baisse par rapport au mémoire professionnel

Exemple : 3 heures par stagiaire pour le suivi des écrits

La comparaison avec l'université : une raison pour supprimer les heures de tutorat?

25

Diapositive 26

L'évaluation des productions

- Tout apparaît : du « pas de changement », à « on ne sait pas encore », en passant par la mise en correspondance a priori avec certaines compétences.
- Le portfolio est à nouveau cité…
- La soutenance : comment ? Individuelle ou pas? Ou pas du tout ?

26

Diapositive 27

Les liens avec le dossier de compétences

- L' écrit (ou les écrits) professionnel(s) entrerai(en)t dans la validation de certaines compétences professionnelles
- Un relevé global de la validation des acquisitions des 10 compétences
- Par une commission d'évaluation?
- Quand ?

27

Diapositive 28

Les liens avec un master

- « Le projet est envisagé mais rien de concret pour l'instant »
- « Compléter la formation par des travaux d'étude et de recherche (nouveau nom du mémoire) pour l'obtention d'un master. »
- « Ce qui est prévu c'est la délivrance de crédits européens dans le cadre de la masterisation pas de lien avec un autre master. »
- La formation est découpée et définie sous la forme d'unités d'enseignement correspondant à des ECTS

28

Diapositive 29

Sommaire

- Introduction et présentation du contexte
- Le parcours de formation
- L'écrit professionnel
- L'alternance IUFM / terrain
- Le dossier de compétences
- Les liens avec le système LMD
- Quelques points complémentaires

29

Diapositive 30

L'alternance IUFM / terrain

- Les pistes concrètes pour les stagiaires
- Les impacts sur la formation à l'IUFM
- La collaboration entre formateurs
- La formation des conseillers tuteurs

30

Diapositive 31

Diapositive 32

Les pistes concrètes pour les stagiaires

- Préparation et analyse de séances
- Vidéos
- Feuille de route
- Formation par un chef d'établissement
- Coopération IPR/IUFM (lettre de mission)
- Réunions CP/PIUMF/IPR
- Désignation d'un référent dans l'établissement accueillant des PLC2, des T1 ou des T2
- CP davantage associés à l'observation en classe à partir d'une grille construite en formation
- Groupes de parole

31

Les impacts sur la formation à l'IUFM

- Prise en compte des fiches de visite
- Modification des formats des différentes fiches d'évaluation
- Meilleure prise en compte des contraintes du terrain

32

Diapositive 33

La collaboration entre formateurs

- Collaboration ou communication?
- Collaboration ou coopération?
- Communication par le biais d'une ENT
- Des rencontres plus « institutionnalisées » : très tôt dans l'année, à mi-parcours.
- Un dialogue avec le « suiveur »
- Une articulation essentielle

33

Diapositive 34

La formation des conseillers tuteurs

- De 2 à 3 demi-journées jusqu'à 2 à 3 journées prévues en général, entrant ou non dans le PAF
- Les thèmes évoqués :
  - Connaissance de la formation des PLC2
  - Définition du rôle du tuteur
  - Observation d'une séance
  - Analyse à partir de vidéos
  - Conduite d'un entretien
  - Appropriation du dossier de compétences
  - Travail entre CP et tuteur de suivi à l'IUFM

34

Diapositive 35

Sommaire

- Introduction et présentation du contexte
- Le parcours de formation
- L'écrit professionnel
- L'alternance IUFM / terrain
- Le dossier de compétences
- Les liens avec le système LMD
- Quelques points complémentaires

35

Diapositive 36

Le dossier de compétences

- L'évaluation des compétences
- La maîtrise de la langue
- La forme du dossier et son avenir

36

Diapositive 37

L'évaluation des compétences

- Référence de chaque module (ou d'unité) de formation à des compétences visées
- Référence des écrits et des visites (ou autres activités) à des compétences visées
- Des écrits stabilisés quand ils permettent d'attester les compétences
- Répartition des validations potentielles pour les formateurs (au sens large)
- Quel niveau de maîtrise?
- Et le C2i?
- Encore à l'étude…

37

Diapositive 38

La maîtrise de la langue

- Pas un axe privilégié, mais un axe comme les autres
- Des regrets… car « pas du tout privilégié »

38

Diapositive 39

Sa forme finale pour transmission au jury…

- Une fiche de synthèse est prévue reprenant l'intitulé de chacune des dix compétences ; pour chacune d'elles il sera indiqué si elle est « validée » ou « non validée » et un commentaire rapide pourra figurer. Cette fiche sera remplie au moment de la commission d'évaluation et figurera dans les dossiers transmis au jury d'EQP.

39

Diapositive 40

… et son avenir

- « On s'achemine vers une validation par bloc de compétences refusant la dissection telle qu'elle est proposée. »
- « Visée prospective au moment de la validation PLC2 et poursuite du travail lors de T1 et T2 »
- « Il est prévu d'indiquer aux stagiaires pour l'année T1 les compétences à travailler. »

40

Diapositive 41

Sommaire

- Introduction et présentation du contexte
- Le parcours de formation
- L'écrit professionnel
- L'alternance IUFM / terrain
- Le dossier de compétences
- Les liens avec le système LMD
- Quelques points complémentaires

41

Diapositive 42

Les liens avec le système LMD

- En cours de réflexion
- « Les formations sont réparties en 7 UE accréditées chacune d'un certain nombre d'ECTS »

42

Diapositive 43

Sommaire

- Introduction et présentation du contexte
- Le parcours de formation
- L'écrit professionnel
- L'alternance IUFM / terrain
- Le dossier de compétences
- Les liens avec le système LMD
- Quelques points complémentaires

43

Diapositive 44

Des points complémentaires

- L'intégration à une université
- Les modalités de cette intégration
- L'évolution du nombre de stagiaires
- Les impacts au niveau des formateurs
- La question du « profil » des formateurs

44

Diapositive 45

L'intégration à une université

- Intégrations déjà faites : Créteil, Grenoble, Limoges,Nantes, Reims,Versailles, Lyon (juillet)
- « Climats » : opaque, tendu, à l'amiable, de travail…
- Volonté commune de ne pas aller trop vite
- Trop de précipitation
- Volonté de garder une autonomie pour gérer le budget

45

Diapositive 46

Les modalités de l'intégration

- Une école interne
- Une école autonome
- Un rôle accru du département de mathématiques?

46

Diapositive 47

L'évolution du nombre de stagiaires

Très variable : de la crainte de ne pas pouvoir répondre aux besoins à celle de ne plus avoir à répondre à des besoins

Inquiétude des administratifs et des IPR concernant la stabilisation des PLC2,T1 et T2

47

Diapositive 48

Les impacts au niveau des formateurs

- Craintes exprimées sur le maintien des formateurs associés et sur le recrutement des MCF
- Recrutement probable de personnels à temps partagé

48

Diapositive 49

La question du « profil » des formateurs qui seraient à 70% à temps partagé

- **Des avis très partagés :**
  - **Favorables : 5**
    - Pour suivre l'évolution du métier et des élèves
    - Pour vivre la réalité du terrain en même temps que les stagiaires
  - **Non favorables : 5**
    - Les PIUMF construisent et transmettent la culture de l'IUFM, les gestes professionnels des formateurs
    - Mais un formateur doit impérativement travailler dans des classes, éventuellement dans le cadre de recherches.
    - Il faut des formateurs compétents et évalués mais pas sur des critères démagogiques
    - Le regard des experts (didactique, épistémologie..) doit compléter la formation

49

La préparation des séances de classe par les stagiaires en fin de formation : un exemple de résistances et changements dans les pratiques

Sylvie Coppé

IUFM Lyon
UMR ICAR Equipe COAST (CNRS Université Lyon 2- INRP- ENS Lyon- ENS LSH)

Résumé:
Nous partirons des résultats d'une recherche sur la façon dont les professeurs stagiaires en fin de formation initiale préparent leurs séances de classe. Nous faisons l'hypothèse que ce moment de préparation est un moment fondamental dans l'activité du professeur parce que celui-ci doit mobiliser et articuler des connaissances relevant de différents types et de différents champs. De plus, nous pensons que mieux connaître comment les professeurs réalisent cette tâche de préparation peut contribuer d'une part à déterminer des connaissances professionnelles et d'autre part, à améliorer la formation initiale (et continue) des professeurs.
Pour cela, nous avons réalisé et analysé quatre entretiens utilisant la méthodologie de l'entretien d'explicitation qui visent à faire raconter comment ces professeurs ont fait pour faire cette préparation et à leur faire expliciter leurs choix (et non à expliciter une méthode générale).
A partir de quelques résultats qui n'ont pas un caractère général mais qui permettent de faire des hypothèses, nous travaillerons avec les participants sur la question des évolutions et des résistances dans les pratiques et aussi sur la façon dont la formation peut prendre en compte ces éléments.

Dans cet atelier, nous souhaitons apporter quelques éléments sur la façon dont les professeurs en fin de formation initiale effectuent la préparation de leurs séances de classe. C'est une tâche importante dans la pratique du professeur. En tant que formateurs, nous savons que c'est une tâche difficile qui demande de mobiliser des connaissances diverses. C'est également un objet de formation.
Notre but est de déterminer comment les enseignants préparent leurs séances de classe et quels types de connaissances ils mettent en œuvre à ce moment. Actuellement, nous nous sommes limitée au cas des professeurs stagiaires.
Le but plus lointain de cette recherche est de travailler sur des questions vives et encore peu résolues comme celles portant sur la détermination de savoirs professionnels des enseignants (quels sont ces savoirs, comment les transmettre aux formés, comment donner des outils qui permettent d'appréhender le métier et lesquels ?) ou bien celles portant sur les compétences professionnelles (quelles sont –elles ? à quoi reconnaît-on qu'un enseignant est compétent ? comment se construisent –elles ? où se construisent-elles ?).

Nous faisons une première hypothèse à savoir que le moment de préparation de séances de classe est un moment fondamental dans l'activité du professeur et que mieux connaître comment les professeurs réalisent cette tâche peut contribuer à la détermination de savoirs professionnels de l'enseignant et ainsi, à améliorer la formation initiale (et continue). De plus, pour le thème des changements et résistances dans les pratiques, il nous semble que c'est en termes d'articulation entre connaissances antérieures et connaissances nouvelles, entre connaissances disciplinaires et autres que se pose le problème. Ainsi, d'une part, les jeunes professeurs ont à acquérir des connaissances nouvelles qui ne sont plus seulement disciplinaires et qui vont constituer des connaissances professionnelles. D'autre part, ils vont devoir adapter leurs connaissances antérieures notamment mathématiques, et les transformer pour être mises au service des apprentissages des élèves. Enfin, on peut penser que ces connaissances pourront être acquises dans différents lieux et auprès de certaines personnes.

1. Problématique cadre théorique

Actuellement peu d'études s'intéressent vraiment à la tâche de préparation des séances de classe. Durand, 1996 reprend des travaux anciens sur la planification et donne quelques résultats. Ainsi, il souligne que cette activité est essentiellement personnelle, qu'elle se déroule à différents moments et à différents endroits, que sa durée est très variable d'un professeur à l'autre. Elle sert à prévoir ce qui va se passer alors que le professeur n'est pas devant les élèves et à lui fournir un certain nombre d'outils, elle a pour but de réduire l'incertitude face à ce qui va se passer dans la classe en anticipant si c'est possible les réactions des élèves. En bref, elle a des effets opérationnels et affectifs qui se doivent d'être performants. D'ailleurs, Durand souligne que ce n'est pas toujours le cas chez les novices.
Pour ce qui est du contenu, Durand met en avant trois conclusions :

> *Concernant les contenus de la planification, les apports de la recherche peuvent être schématisés en trois points : une planification essentiellement organisée par rapport aux contenus enseignés, des préoccupations entretenant des rapports assez souples et inconstants avec l'apprentissage des élèves et une activité très routinière. (Durand op. cité, 1996).*

Il distingue enfin sur plusieurs critères les novices et les experts. Ainsi les experts passent moins de temps à préparer leur cours que les novices, ils ont davantage de plans, de procédures accessibles et de routines, ce qui allège leur charge de travail. Enfin, les experts écrivent moins que les novices notamment en ce qui concerne leurs objectifs.

Shulman, 1987 a élaboré une classification des types de connaissances des professeurs dans laquelle il distingue :

- des connaissances sur les contenus à enseigner, relevant de champs disciplinaires reconnus comme pour nous les mathématiques,
- des connaissances relevant d'une pédagogie générale qui permettent d'organiser et/ou de prendre en compte la gestion de la classe,
- des connaissances relevant de la didactique (pour nous des mathématiques),
- des connaissances portant sur les programmes d'enseignement ou sur d'autres outils institutionnels comme les commentaires des programmes ou les évaluations nationales ou internationales
- des connaissances portant sur les élèves et leur caractéristiques,
- des connaissances sur le contexte de l'école ou de la classe,
- des connaissances portant sur les buts et les valeurs de l'éducation.

Notons qu'en ce qui concerne les connaissances qui relèvent de la didactique, c'est nous qui traduisons par ce terme puisque Schulman ne l'emploie pas : il désigne par « pedagogical content knowledge » des connaissances qui relèvent à la fois du contenu et de la pédagogie.

> *Among those categories, pedagogical content knowledge is of special interest because it identifies the distinctive bodies of knowledge for teaching. It represents the blending of content and pedagogy into an understanding of how particular topics, problems, or issues are organized, represented and adapted to the diverse interests and abilities of the learners, and presented for instruction. (Schulman, 1987)*

Nous pensons qu'actuellement, compte tenu des recherches françaises, il est possible de faire cette traduction et donc, d'introduire cette catégorie qui nous semble bien recouvrir ce que Shulman indique. C'est d'ailleurs bien le sens de son article qui cherche à dépasser le clivage entre les connaissances disciplinaires et pédagogiques en introduisant ces connaissances portant sur le savoir pour l’enseignement.

Nous reprenons ces résultats et nous les confrontons aux nôtres mais nous souhaitons avancer sur cette question en décrivant de façon plus fine comment les professeurs préparent leurs séances. Bien sûr, nous situons notre étude en France dans les années 2000 alors que les modalités de formation des maîtres ont bien évolué par rapport aux années dont datent les études citées ci-dessus.

En ce qui nous concerne, pour problématiser cette question, nous utilisons le cadre théorique de Chevallard (1992, 1999) dans le prolongement de la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985). Il définit trois entités premières : les sujets, les objets et les institutions, terme pouvant être pris au sens large puisque, selon Chevallard, presque tout peut être considéré comme une institution : *« Là encore, une institution peut être à peu près n’importe quoi. »* (Chevallard, 1992, p. 88).
Une fois ceci posé, Chevallard indique que chaque institution reconnaît un certain nombre d’objets qui deviennent alors des objets institutionnels. Ainsi, un objet O existe dès lors qu’une personne X ou qu’une institution I reconnaît cet objet comme existant pour elle, ou de façon plus précise s’il existe un rapport personnel de X à O (noté R(X,O)) ou un rapport institutionnel de I à O (noté R(I,O)). Un objet n’existe que parce qu’il est connu d’une personne (ou d’une institution), il n’existe qu’en tant qu’objet de connaissance.

Les savoirs vivent dans des institutions avec des fonctionnements propres à ces institutions définissant des rapports institutionnels, comme il est indiqué dans un autre texte :

> *« Tout savoir S est ainsi attaché à une institution I au moins, dans laquelle il est mis en jeu par rapport à un domaine de réalité D. Le point essentiel est alors qu’un savoir n’existe pas in vacuo, dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. » (ibid, 1989, p. 213).*

L’auteur définit ensuite les sujets par la notion d’assujettissement à une (des) institution(s) :

> *« Une personne X est assujettie à une foule d’institutions. Je poserai ici l’axiome qu’une personne n’est en fait rien d’autre que l’émergent d’un complexe d’assujettissements institutionnels. Ce qu’on nomme « liberté » de la personne apparaît alors comme l’effet obtenu en jouant un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d’autres.*
> *A cet égard, les institutions sont toujours « flouées » par leurs sujets. Là où elles s’attendent à trouver de « purs sujets », qu’elles croient entièrement façonnés par elles, elles rencontrent des personnes, qui leur apparaissent toujours, peu ou prou, comme de mauvais sujets. En particulier, le rapport institutionnel $R_I(p,O)$ n’est le rapport personnel d’aucune personne, sujet de I en position de p : conformité n’est pas identité. » (Chevallard, 1992, p. 91).*

Notons que le terme « connaissance » n’est pas employé car pour Chevallard. On peut dire qu’une connaissance correspond à des éléments d’un rapport personnel à un objet dans une institution donnée, c’est-à-dire sous la contrainte du rapport institutionnel. Pour notre étude, nous pouvons alors considérer les étudiants ou les professeurs stagiaires comme des sujets tout d’abord de l’institution de l’enseignement secondaire composée par les établissements scolaires que les professeurs rencontrent, par les classes dans lesquelles ils enseignent et par les autres professeurs qu’ils rencontrent. Cependant, nous savons bien que ces professeurs ont rencontré diverses institutions d’enseignement et de travail et nous pouvons donc considérer qu’ils ont construit d’autres rapports personnels à des objets communs à ces institutions.
Nous avons donc déterminé les institutions qui pouvaient être en lien avec l’institution de l’enseignement secondaire dans laquelle les professeurs évoluent.

- *Institution scolaire des études* dans laquelle les professeurs ont construit des rapports personnels à des objets de savoir mathématique ou non : cela nous semble d'autant plus pertinent que nous avons des novices, et donc ils sont encore très proches de ce système,
- *Institution scolaire de préparation au concours* que nous distinguons du système scolaire car nous considérons, comme il est déclaré dans les textes, que c'est un première année de professionnalisation avec un but déclaré : ainsi, par exemple, certains étudiants peuvent déjà faire des stages dans des établissements scolaires secondaires,
- *Institution de formation* qui est constituée par l'établissement de formation mais aussi par les professeurs tuteurs ou maîtres de stages qui participent à la formation dans laquelle les professeurs construisent de nouveaux rapports personnels soit à des objets de savoir mathématiques soit à d'autres objets comme « la prise en compte des élèves en difficulté », « les interactions dans la classe », « l'évaluation des copies », etc.
- *D'autres institutions* dans lesquelles on pourrait trouver des activités d'enseignement ou d'éducation hors du milieu scolaire comme, par exemple les cours particuliers, l'animation de centres de vacances, etc.
- *D'autres institutions* dans lesquelles il n'y pas de volonté d'enseignement ou d'éducation.

Nous pouvons alors reformuler nos questions à l'intérieur de ce cadre théorique. Quel est le rapport personnel construit par les professeurs en fin de formation initiale à l'objet « préparer une séance de classe » ? Comment peuvent-ils construire ce rapport personnel à partir d'autres rapports personnels provenant d'autres institutions dans lesquelles des objets de savoir en lien ont été rencontrés ? Comment des rapports personnels à des objets nouveaux sont-ils construits ?
On peut alors penser les phénomènes de résistance au changement comme un (ou des) rapport(s) personnel(s) non adéquat(s) dans l'institution enseignement secondaire.

Un autre élément important, selon nous, est le caractère implicite ou explicite de ces connaissances ainsi que leur plus ou moins grande antériorité. Ainsi on peut penser que les professeurs, comme d'autres professionnels, apprennent sans arrêt et donc réorganisent leur système de connaissances. C'est peut-être plus particulièrement vrai pour les professeurs stagiaires qui, institutionnellement, doivent acquérir des connaissances, savoirs et savoir faire, que l'on appellera des compétences professionnelles.

Nous repérons ensuite des institutions dans lesquelles ces savoirs peuvent être présents :

- *Institution scolaire des études* dans laquelle les professeurs ont acquis leurs connaissances mathématiques : cela nous semble d'autant plus pertinent que nous avons des novices, et que, donc ils sont encore très proches de ce système,
- *Institution scolaire de préparation au concours* que nous distinguons du système scolaire car nous considérons, comme il est déclaré dans les textes, que c'est une première année de professionnalisation avec un but déclaré : ainsi, par exemple, certains étudiants peuvent déjà faire des stages dans des établissements scolaires secondaires,
- *Institution de formation* qui est constituée par l'établissement de formation mais aussi par les professeurs tuteurs ou maîtres de stages qui participent à la formation
- *Institution de l'enseignement secondaire* composé par les établissements scolaires que les professeurs rencontrent, par les classes dans lesquelles ils enseignent et par les autres professeurs qu'ils rencontrent qui sont identifiés comme des collègues de travail et non comme des formateurs,
  - *D'autres institutions* dans lesquelles on peut trouver des activités d'enseignement ou d'éducation hors du milieu scolaire comme, par exemple les cours particuliers, l'animation de centres de vacances, etc.

Enfin une question de recherche importante est de savoir comment nous allons attribuer ces connaissances aux professeurs interrogés, avec quels critères. Certaines peuvent l'être sur la base de déclarations : c'est le cas des connaissances qui portent sur le programme, sur les élèves, sur le contexte de la classe. D'autres peuvent être identifiées par des actions du professeur, notamment quand il effectue des choix, c'est pourquoi nous veillons à lui faire expliciter ses critères. Enfin d'autres connaissances comme principalement les connaissances mathématiques sont attribuées a priori, ceci en fonction des expériences passées des professeurs dont on sait qu'ils ont réussi un concours difficile dans lequel les connaissances mathématiques étaient vérifiées. Cependant nous sommes bien consciente que ces connaissances ne sont pas toutes identiques pour les professeurs et surtout qu'elles peuvent être insuffisantes comme le montre Pian, 1999 et Robert, 2000 dans une étude sur les étudiants de licence. Robert résume ainsi : "En somme les étudiants ont des connaissances atomisées, techniques, non disponibles, sans mise en relation, sans « relief » épistémologique."

2. La tâche « préparer une séance ou séquence de cours »

L'importance de cette tâche est bien soulignée dans le texte officiel qui définit « Les missions du professeur exerçant en collège, en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel » puisqu'il est indiqué :

> *En fin de formation initiale, la professeur est capable de concevoir, préparer, mettre en œuvre et évaluer des séquences d'enseignement qui s'inscrivent de manière cohérente dans un projet pédagogique annuel ou pluri annuel. (BO n°22 du 29 mai 1997)*
>
> *Pour chaque séquence, il définit, dans le cadre de sa progression, le (ou les) objectifs à atteindre, sélectionne les contenus d'enseignement, prévoit les démarches et situations variées favorables à l'apprentissage, adaptées aux objectifs qu'il s'est fixés et à la diversité des élèves. (BO n°22 du 29 mai 1997)*

Le texte donne même des indications sur comment réaliser cette tâche :

> *« Il définit le ou les objectifs à atteindre*
> *Il sélectionne les contenus d'enseignement…*
> *Il prévoit les démarches…*
> *Il prévoit les successions des différents moments…*
> *Il utilise les différents supports … »*

Dans le cahier des charges de la formation des maîtres (BO n°1 janvier 2007), en ce qui concerne la compétence « Concevoir et mettre en œuvre son enseignement » on note :

> *Il est capable d'élaborer des programmations et de répartir les apprentissages dans le temps. Il connaît les objectifs à atteindre, les programmes d'enseignement et documents d'accompagnement et les différents supports et outils nécessaires à la conception et mise en œuvre des apprentissages. (BO n°1, 2007).*

On voit bien ici que l'activité de préparation est institutionnellement reconnue comme faisant partie du métier et définie de façon relativement précise, en décrivant ce sur quoi doit porter la préparation. Nous savons par notre expérience de formatrice, qu'en France, même si nous ne disposons pas encore d'un programme national de formation initiale, cette compétence qui vise à savoir préparer des séances de classe est largement travaillée en formation, mais certainement aussi sous des formes diverses qu'il serait certainement important de déterminer.

A partir de ces référentiels, nous pouvons donc lister un certain nombre de tâches que les professeurs auront à accomplir :

- adapter leurs connaissances mathématiques à un niveau de classe donné, ce qui suppose des adaptations au niveau de langage, des éléments théoriques, des retours sur leur propre savoir mathématique, etc

- prendre connaissance des programmes et les traduire en termes d'objectifs ou de tâches pour les élèves,
- effectuer des découpages dans le savoir à enseigner pour le rendre enseignable, compte tenu des programmes et du temps d'enseignement,
- élaborer, construire, choisir des tâches pertinentes pour le savoir à enseigner et pour le niveau des élèves et organiser leur mise en oeuvre,
- élaborer des évaluations en lien avec les programmes et ce qui a été enseigné,
- prévoir un découpage de la séance, anticiper le temps passé sur chaque tâche et donc vérifier que ce qui est prévu est suffisant,
- organiser le travail des élèves, devoirs réguliers, devoirs à la maison, interrogations orales, etc,
- rédiger des synthèses que les élèves conserveront,
- prendre en compte les connaissances antérieures des élèves, c'est-à-dire anticiper sur ce que les élèves savent déjà, sur ce qu'ils pourront faire, sur les difficultés, sur les aides à apporter,
- s'adapter au public de la classe, prendre en compte la diversité des élèves.

3. Méthodologie

Pour le chercheur, il est difficile d'observer les moments de préparation de séances de classe pour plusieurs raisons. La première est que les professeurs n'ont pas forcément un temps et un lieu donné pour le faire, contrairement aux séances de classe. Nous savons bien par expérience, et les entretiens le confirment, que cette préparation se fait à plusieurs reprises, les professeurs y pensent à certains moments, reprennent ce qu'ils ont fait, etc. Il faudrait donc suivre un professeur pendant plusieurs jours, cela semble donc difficile.
La seconde est qu'une grande partie de ce travail se fait, en général, au domicile du professeur, il est également difficile d'aller l'observer chez lui.
Enfin, comme cette activité est en grande partie individuelle, il n'est pas aisé d'avoir des observables. Nous avons donc choisi d'utiliser l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1994) : nous avons demandé aux professeurs volontaires de venir avec une préparation récente faite sous la forme qu'ils souhaitaient (papier, fichier informatique, manuel scolaire ou même sans aucun document) d'un cours qu'ils allaient faire très bientôt. Notre but est de leur faire raconter comment ils ont fait pour faire cette préparation, quelles ressources ils ont utilisées et de leur faire expliciter leurs choix. Il s'agit bien de faire raconter aux professeurs comment ils ont fait pour cette séance particulière, à ce moment-là, et non de leur demander une méthode générale qui pourrait provenir d'un discours appris ou de représentations générales qu'ils se font de cette tâche mais qui ne correspond pas à ce qu'ils font vraiment.
Nous avons réalisé (en juin 2004) et analysé quatre entretiens avec des professeurs stagiaires volontaires, à la fin de leur première année de formation (après les jurys de validation et de titularisation), en utilisant la méthodologie de l'entretien d'explicitation qui vise à faire raconter comment ces professeurs ont fait pour faire cette préparation et à leur faire expliciter leurs choix.
La consigne que nous leur avions donnée était de venir avec un cours qu'ils estimaient préparé, ainsi qu'avec tous les documents qu'ils avaient utilisés. Nous avons employé le terme « cours » dans un sens volontairement large pour laisser toute liberté aux professeurs pour raconter ce qu'ils font quand ils préparent ce qu'ils vont faire avec leurs élèves : ainsi, on peut penser que certains vont préparer plutôt un chapitre et d'autres plutôt une séance ou éventuellement d'autres peuvent ne rien préparer. Cette précision est importante puisque a priori nous ne savons pas vraiment comment chacun prépare. Nous ne voulions pas enfermer les professeurs dans une représentation trop restrictive de la notion de cours, séance ou séquence, ceci par un vocabulaire trop spécifique.
Quand le terme cours renvoie au sens de cours magistral qui désigne une technique d'exposition du savoir, ou bien au texte du savoir que les élèves doivent conserver, nous emploierons alors le terme synthèse ou trace écrite que doivent garder les élèves.

Nous commençons toujours l'entretien de la même façon en faisant retrouver le moment où le professeur a préparé son cours, c'est-à-dire que nous le mettons en évocation comme le préconise la technique de l'entretien d'explicitation. Ainsi, nous savons sans le demander explicitement où se trouve le professeur quand il prépare ses cours, à quel(s) moment(s) il le fait, de quels outils il dispose.
"Je vous avais demandé de venir avec ce que vous aviez qui constituait un cours plus ou moins préparé, d'un cours que vous allez faire très prochainement. Je vais vous demander de vous replacer au moment où vous avez fait cette préparation, où c'était, quand et d'essayer de nous raconter comment ça c'est passé."
Nous veillons particulièrement à faire expliciter les choix faits : par exemple, lorsque le professeur indique qu'il préfère telle ou telle activité ou tel manuel, nous demandons systématiquement : "*comment savais tu ? à quoi voyais-tu que tu le préférais ? que t'es-tu dit à ce moment là ?"*
Enfin, pour tenter de déterminer l'origine des connaissances mobilisées, nous avons intercalé des questions comme : "*où as-tu appris à faire cela ?"*

Actuellement, quatre entretiens ont été faits en juin 2004 (avant la fin des cours et après le jury de validation) avec quatre stagiaires volontaires en fin de formation. Il est important de préciser qu'il est difficile d'avoir des volontaires pour ces entretiens car ce travail de préparation semble être une composante très privée du travail du professeur. C'est pourquoi, nous n'avons ni choisi la classe, ni le chapitre, nous avons accepté tous les volontaires. Enfin, pour la même raison, nous n'avons pu avoir une parité homme /femme.

- Arnaud : nombres relatifs en $6^{ème}$
- Chloé : Fonctions trigonométriques en 2^{nde}
- Céline : géométrie dans l'espace en 2^{nde}
- Corinne : translations en $4^{ème}$

Ainsi nous ne prétendons pas avoir un échantillon représentatif mais nous travaillons sur des études de cas.
Nous avons enregistré au magnétophone et décrypté cet entretien, puis nous l'avons analysé en faisant tout d'abord un résumé de la méthode employée par chacun avec des renvois à chacun des documents écrits que nous avons photocopiés, puis nous avons déterminé les types de connaissances utilisées. Nous avons également photocopié les documents qui ont pu être utilisés à un moment, puis rejetés (notamment quand les professeurs indiquent qu'ils ont choisi entre plusieurs leçons de manuels, par exemple). Chaque entretien dure environ une heure.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, nous faisons tout d'abord un résumé du récit de cette tâche de préparation. Ces textes sont essentiellement descriptifs de façon à avoir une trame de ce qui est fait. Ainsi, nous n'employons que des verbes à la forme affirmative. Nous avons bien sûr reconstruit le discours du professeur et nous avons introduit des termes qu'il n'avait pas forcément employés.
Nous avons choisi de conserver les termes "activité" ou "activité préparatoire" qui sont sans cesse employés par les professeurs, pour désigner ces sortes d'exercices proposés aux élèves dans les manuels pour introduire les notions. Ces activités devraient permettre aux élèves de rencontrer un savoir nouveau par le biais d'un problème, en s'appuyant sur des savoirs anciens qui se révèlent inadaptés ou insuffisants. Or, en général, elles ne constituent même pas toujours, selon nous, des problèmes ou même des exercices. Quand il y a un problème, il est souvent très découpé, composé de questions courtes et fermées. On peut donc dire que souvent ces activités d'introduction ne répondent pas à leur fonction première (déjà souligné par Robert et Rogalski, 2004).
Notons à ce sujet que dans les programmes depuis la première contre-réforme (collège 1978, seconde 1981), il y a eu un glissement de sens de « On devra privilégier l'activité de chaque élève. » vers « Les activités à mettre en œuvre dans les classes ».

> *Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :*
>
> > *permettre un démarrage rapide pour tous les élèves …,*
> > *créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures,*

rendre possible la mise en jeu des outils prévus,

fournir aux élèves aussi souvent que possible des occasions de contrôle de leurs résultats…" (Programmes collège 1985 seconde 1990 Contre réforme)

ou bien encore

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. » (Introduction des programmes de collège 2007).

Les résumés sont relativement courts (environ une demi-page) pour vraiment mettre en avant les différentes étapes. Nous notons les documents apportés en face des actions qui les concernent, cela nous permet de vérifier la cohérence de ce qui est raconté. Enfin, nous avons repéré de façon systématique :

- le(s) lieu(x)
- les ressources (nature, nombre)
- les documents apportés
- les critères énoncés
- la trace écrite.

Voici, à titre d'exemple, deux résumés que nous avons élaborés.

3.1. Résumé de la préparation de Céline

Résumé de la préparation de Céline

Elle prépare tout son chapitre (habituel). Ici c'est le chapitre de géométrie dans l'espace en 2nde.
Elle travaille chez elle avec les programmes et des manuels (ici elle en utilise 4 mais elle en a d'autres).
Elle consulte les programmes de la classe concernée (ici 2nde) et de la classe précédente pour voir ce que les élèves savent. Elle écrit un résumé des programmes (doc.1).
Ensuite, elle ouvre ses livres (elle en avait 4) et elle choisit d'abord un plan de synthèse de cours dans un livre (doc. 3).

Ses critères : une synthèse complète avec des définitions (ceci est habituel pour elle) dans laquelle il y a des dessins (lié à ce chapitre).

Elle choisit ensuite une activité préparatoire à chaque paragraphe de la synthèse et elle note cet ordre avec l'indication du manuel, de la page et du numéro de l'exercice ainsi qu'éventuellement quelques commentaires. Ce document constitue sa préparation écrite (doc 2).

Ses critères : elle commence par un exercice qu'elle juge être de rappels des connaissances de la classe précédente puis des exercices où interviennent de nouvelles connaissances. Ses critères de choix portent essentiellement sur la forme (nombreuses questions courtes et rapides, aspect interactif).

Elle anticipe le temps qu'elle va passer sur chaque partie.
Elle découpe ensuite en séances et en partie à l'intérieur d'une même séance.
Elle fait les exercices de réinvestissement proposés surtout parce que c'est de la géométrie.
Elle prévoit un fonctionnement de type cours dialogué, elle ne prévoit pas de gestion plus précise.
Elle sait qu'elle va interroger des élèves mais elle n'anticipe pas qui.
Elle note ce qu'elle va faire écrire aux élèves.
Elle revoie cette préparation avant chaque séance pour se la remettre en tête ou pour rectifier le temps par rapport à ce qui s'est passé dans la séance précédente.

La trace écrite :

Outre les fiches photocopiées d'exercices ou de cours, la trace écrite est composée des références des exercices suivies des titres des parties qu'ils permettent d'introduire. En résumé ce sont des numéros d'exercices et des titres de paragraphes.

Ex 1 p. 260 (BELIN) : réinvestissement (photocopie)
n° 1 p. 178 (HYPERBOLE) : du patron à la perspective
→permet d'introduire le I perspective cavalière : fiche IUFM
n° 2 p. 178 (HYPERBOLE) : sections planes de solides
→ permet d'introduire le II section d'un solide usuel par un plan (en photocopie)
….

On voit que son découpage correspond surtout à une organisation mathématique en termes de types de tâches, plutôt qu'à des moments didactiques (sur ces notions, voir Chevallard 1998). Elle prévoit un canevas de notions mais peu sa gestion de classe. Enfin, elle anticipe peu les connaissances anciennes des élèves, ni leurs erreurs ce qu'elle explique par son inexpérience.

3.2 Résumé de la préparation de Corinne

Résumé de la préparation de Corinne

Elle prépare tout le chapitre. Ici, il s'agit de la translation en 4ème. Elle prend en compte le temps qu'elle a pour le faire (ici, deux semaines).

Elle travaille chez elle avec son ordinateur pour consulter un site où elle trouve des activités (Mathenligne), elle a 2 manuels de 4ème et les programmes.

Elle cherche tout d'abord des activités qu'elle juge intéressantes, puis elle vérifie qu'elles sont compatibles avec le programme. En fait, chaque activité met en avant soit la définition d'une translation, soit une de ses propriétés.

Ses critères : elle veut que les élèves soient actifs, qu'ils puissent faire quelque chose. Pour cela, les énoncés doivent être clairs et précis (habituel). Ici elle choisit ceux de mathenligne car il y a plusieurs exercices avec le même support (lié au chapitre).

Elle choisit donc 4 activités sur le site (docs. 1 et 2) : translation de cocottes dessinées sur quadrillage (reconnaissance puis tracé), image de points du quadrillage (reconnaissance puis tracé) .

Elle choisit ensuite des activités du manuel de la classe (doc. 3) qui permettent de travailler sur l'image d'une droite, du milieu d'un segment, d'un cercle.

A l'occasion de chacune des activités, elle donnera aux élèves des propriétés et à la fin elle distribuera une fiche méthode prise sur Mathenligne (doc. 4).

Elle écrit ensuite son programme de la semaine, séance par séance, de façon très brève (quelques lignes) : c'est un plan succinct qui rappelle les phases de sa séance, les références des activités, la forme des synthèses et des numéros d'exercices pris dans le livre (doc. 5).

Elle intercale et elle prend en compte des activités qui relèvent du fonctionnement quotidien de la classe : corrections de devoirs

Elle rédige également la synthèse qu'elle fera copier aux élèves (doc. 6).

Elle anticipe, sans le noter, ce qu'elle va dire aux élèves pour introduire les activités, les formes de travail, l'organisation des corrections.

Elle prévoit la difficulté des activités et le temps nécessaire.

La trace écrite :

Elle est composée de plusieurs feuilles : le plan de la semaine séance par séance avec des indications précises sur ce qui sera fait y compris les corrections de devoir, le plan complet du chapitre avec tout ce qui sera fait et tout ce qui sera copié par les élèves et les fiches d'exercices.

Nous voyons là encore une forte cohérence entre ces documents et la façon dont a procédé Corinne puisqu'elle fait un choix d'activités qui constitue une grande partie de sa préparation et qu'ensuite elle découpe le temps par rapport à la semaine *: "Et quand elle est faite je répartis ça dans le temps par exemple là le chapitre sur la translation que je vais faire doit tenir sur une semaine donc j'ai regardé mes activités j'ai tout mis ça en une semaine à peu près avec les exercices associés."*

La préparation de Chloe est plus précise que celle de Cécile. Notamment, on peut distinguer un découpage correspondant davantage à une organisation mathématique et un autre à une organisation didactique.

3.3 Premières conclusions

Nous constatons, grâce à l'entretien d'explicitation, qu'à travers le récit des professeurs, nous pouvons reconstituer de façon assez précise les grandes étapes de leur préparation. Il y a bien cohérence entre leur récit et les documents apportés, ce qui nous permet de reconstruire ce qu'ils ont fait.
On peut mettre en avant des convergences sur la façon de procéder : les préparations concernent un chapitre entier et sont donc assez peu détaillées notamment en ce qui concerne la gestion de la classe et le travail effectif des élèves.
Mais nous voyons aussi des différences interpersonnelles tant sur le procédé que sur la forme. Notamment pour Arnaud, dont on peut dire qu'il n'a qu'une trame qu'il va adapter au cours du temps alors que Corinne ou Cécile ont des préparation beaucoup plus complètes (ce qui ne veut pas dire qu'elles ne les adapteront pas aussi dans le temps).
Examinons maintenant plus en détail d'autres résultats.

4 Des similarités fortes

4.1 Le travail de préparation est un travail privé

Les quatre professeurs interrogés travaillent seuls chez eux. Cependant, ils peuvent revenir plusieurs fois sur leur préparation notamment en fonction des réactions des élèves au fur et à mesure des séances.
Ils ont à leur disposition les programmes, plusieurs manuels dont celui de la classe, pour certains un ordinateur et Internet. Ceci confirme les résultats d'autres études qui soulignent bien le caractère privé des préparations et explique pourquoi il est difficile de trouver des professeurs volontaires pour montrer leurs productions.

4.2 Les professeurs préparent un chapitre entier

Comme nous l'avons dit plus haut, les préparations faites concernent un chapitre entier. Ainsi les professeurs travaillent soit un long moment (pour certains une demi-journée entière, pour d'autres en plusieurs fois) pour préparer tout le chapitre.
Par exemple, Chloe revient plusieurs fois sur ce qu'elle a fait à la fois avant le début du chapitre et en cours de réalisation. Ainsi, elle fait des adaptations locales par rapport à un premier plan, ce qui peut l'amener à modifier l'ordre des paragraphes ou à rejeter une partie. Nous avons ici l'illustration d'une préparation faite de plusieurs touches avec un souci de cohérence par rapport à l'ordre des notions présentées : *"Ben déjà quand je le reprends 1 ou 2 jours après pour moi c'est enfin je me pose pas de question enfin oui c'est clair pour moi quoi déjà puis j'ai en regardant les exercices pour voir l'ordre les exercices que je mets au milieu si je m'aperçois que ben l'exercice que j'avais prévu j'ai besoin de quelque chose qui est après c'est que pour le faire ben c'est que ça va pas donc soit je change d'exo soit je change de paragraphe et puis ça m'est arrivé sur certains chapitres de commencer mon chapitre et puis au milieu de me dire non mais là il faut que tu changes parce que ils ont pas réagi comme je pensais ou ça c'est pas déroulé de la bonne façon et il faut que je change au milieu quoi ça m'est arrivé aussi."*

Ceci fait, trois d'entre eux découpent leur préparation en un nombre de séances qu'ils estiment raisonnable, c'est-à-dire qui correspond à la pratique habituelle des professeurs ou aux contraintes de temps (notamment en fin d'année). Seul Arnaud ne fait pas ce découpage a priori, il se laisse guider par l'avancement de la classe. *"Moi je n'ai pas de prévision sur l'ensemble du chapitre. C'est plus séance après séance donc comment ça se passe donc suivant comment ça se passe à la première séance on voit si on veut avancer plus ou moins vite dans celle d'après."*

4.3 Prise en compte importante des programmes

Une autre constante chez ces quatre professeurs est la prise en compte des programmes. Ainsi, tous lisent attentivement au moins le programme de la classe et éventuellement celui de la classe précédente. Dans l'entretien, nous avons constaté qu'ils en citaient (certains les écrivent) spontanément des éléments mais pas forcément dans les mêmes termes. Tous évoquent soit les objectifs du chapitre qu'ils se construisent à partir des programmes ou bien qu'ils reprennent dans les manuels, soit des éléments de savoir mathématique.
Par exemple Chloé :*"Alors j'étais chez moi donc le chapitre qui nous intéresse c'est les fonctions trigonométriques j'étais chez moi j'ai commencé par regarder le programme ce qu'il fallait que je fasse donc avec le document d'accompagnement"*.
Tous indiquent que cette forte prise en compte des programmes est un savoir-faire acquis en formation grâce à l'insistance des formateurs. Nous retrouvons donc ici un élément de la classification de Shulman (connaissance des programmes) qui semble particulièrement mis en avant. On peut faire l'hypothèse que c'est une caractéristique des novices et que des professeurs experts ont peut-être moins besoin de consulter les programmes et donc d'écrire des listes d'objectifs.
On peut également interpréter ce résultat comme la constitution d'un rapport personnel adéquat à l'objet « programmes scolaires » dans l'institution de l'enseignement secondaire, sachant que ce rapport personnel a été construit dans l'institution de formation.

4.4 Recours massif aux manuels scolaires

Une autre constante est le recours massif aux manuels scolaires pour organiser leur plan et pour choisir des exercices. Un seul professeur utilise également des sites Internet de la même façon.
En fait, il semblerait que le travail de préparation consiste à choisir parmi quelques (voire beaucoup pour Chloé) manuels (ou Internet) un plan ou des parties de synthèse qui conviennent en fonction de critères portant majoritairement sur la forme ou sur la clarté et des activités (pas forcément dans cet ordre, la recherche d'activités pouvant précéder celle de la synthèse). On pourrait comparer ce travail à la réalisation d'un puzzle dans lequel on agence des pièces déjà fournies. L'image du puzzle nous paraît bien rendre compte de cette élaboration. Ainsi, on peut agencer les pièces d'un puzzle avec une certaine organisation, ou en ayant déjà fait des tris ou bien un peu au hasard. Cela correspond bien à ce que nous avons pu relever chez ces quatre professeurs.
Voici par exemple, Arnaud : "*Oui donc moi je regarde les plans de ce qui se fait et j'ai trouvé moi je mets d'abord mon plan suivant en regardant les différents plans que font les différents livres et donc là donc les plages du chapitre sur les nombres relatifs et le repérage."* L'entretien d'Arnaud nous permet de dire qu'il a des critères de choix des exercices très stricts qui font qu'il décide très vite de prendre ou non un exercice sans chercher à le modifier.
Ou bien Chloé *: "ensuite j'ai beaucoup de livres de 2nde donc je les ai un petit peu tous regardés pour voir comment ils faisaient parce qu'en fait j'ai pas fait les fonctions trigonométriques avec les fonctions de référence donc je trouvais que j'avais fait beaucoup de fonctions à l'époque et donc j'ai regardé dans des livres en fait c'est tout groupé donc j'ai pris ce est qui dans les parties de livres."*
Cependant Chloe est la seule qui complète un exercice trouvé dans un manuel par des questions trouvées dans un autre. Les autres prennent les exercices tels quels.
Deux professeurs pensent que cette pratique de recherche assez systématique dans les manuels peut provenir de l'habitude prise lors de la préparation de l'oral (épreuve sur dossier) du CAPES (concours

français qui leur permet de devenir enseignant) de produire un choix d'exercices commenté, comme l'indique Chloé "*Oui ben disons que pour l'oral 2 du CAPES on a besoin de livres donc moi je m'étais déjà fait une bibliothèque l'année dernière donc pour le coup ça me semblait naturel"*.
Ce point avait déjà été souligné par Lenfant, 2002 en ce qui concerne la construction de séances en l'algèbre en classe de 2nde. Elle indique que pour élaborer leur cours, les professeurs ont recours à plusieurs manuels alors qu'ils choisissent les exercices dans le manuel de la classe.

> *Il apparaît, comme on pouvait s'y attendre, que les manuels scolaires sont les ressources didactiques privilégiées. Notre étude a particulièrement montré que chacune de ces quatre personnes s'est appuyée en fait sur plusieurs manuels pour élaborer les différentes organisations mathématiques étudiées. Il s'agit clairement, pour nous, d'un héritage de la préparation au CAPES, en particulier celle relative à la deuxième épreuve orale pour laquelle les étudiants prennent l'habitude de rechercher dans différents manuels des exercices portant sur un thème donné. (Lenfant op.cité, 2002)*

Ainsi nous voyons sur ce point apparaître le transfert d'une pratique acquise dans le cadre d'une institution ayant pour finalité la préparation et la réussite à un concours, avec une épreuve imposée, dans l'institution "Enseignement", avec la transformation de cette pratique en une compétence professionnelle. Peut –on conclure que cette pratique fortement liée aux habitudes prises pour la préparation d'une épreuve du concours irait donc à l'encontre d'un véritable questionnement sur le savoir à enseigner ? Nous restons prudente sur ce point mais la question se pose.

4.5 Peu de questionnement sur le savoir mathématique à enseigner

Une autre constante, liée à la précédente par l'omniprésence des manuels, est que les professeurs interrogés ne partent pas vraiment du savoir mathématique dans le sens où, par exemple, aucun ne se pose la question de savoir quels types de problèmes une notion mathématique permet de résoudre. Les choix faits sur les exercices sont bien sûr pilotés par les connaissances mathématiques des professeurs puisque ceux-ci savent résoudre les exercices et savent émettre un jugement mais on peut dire que ce savoir n'est pas vraiment retravaillé dans un but de transmission de connaissances. Les critères de choix portent souvent sur la forme, par exemple Arnaud "*Dans ma première idée j'avais envie de faire cette activité parce que je veux dire elle est assez concrète ça ça va leur plaire"*. D'ailleurs on peut noter la fréquence de l'emploi des termes "plaire, elle m'a plu, ça ne m'a pas plu". On peut s'étonner de cette grande dépendance vis-à-vis des manuels, surtout dans des cas très simples. Par exemple, Arnaud reprend telle quelle cette synthèse sur les nombres relatifs alors que ses connaissances mathématiques sont certainement suffisante pour produire une synthèse similaire.

> *Il existe de températures positives (+40°C sur la plage en plein été) et des températures négatives (-18°C dans le congélateur). Les dates des événements qui se sont produits avant la naissance de Jésus- Christ son t parfois notées avec le signe moins (bataille d'Alésia en –52). (Dimathème 6ème , 2000)*

Si l'on reprend la classification des savoirs de Shulman, on voit donc ici que les connaissances mathématiques sont utilisées pour faire des exercices, un peu comme les élèves, mais qu'elles ne sont pas mobilisées pour questionner le savoir mathématique, pour aller chercher des idées de problèmes ou même pour bâtir les synthèses de cours. Nous voyons plusieurs raisons à cela :

- les professeurs disposent de nombreux manuels, qu'on peut penser bien faits ; ceux-ci font donc l'économie d'écrire eux-mêmes leur cours,
- le statut du savoir écrit dans les manuels est assez élevé et les professeurs ne se donnent pas le droit de le modifier,
- l'activité mathématique est considérée dans le but de faire des exercices, ce qui correspond à l'institution Etudes (on demande de résoudre des problèmes) ou à l'institution Préparation au concours mais n'est pas envisagée pour produire des activités intéressantes pour les élèves.

Ce phénomène est intéressant puisqu'il permet de montrer que certaines pratiques au sujet de savoir peuvent se transférer d'une institution à une autre sans que leur pertinence ne soit interrogée. Et même si elle l'a été dans l'institution de formation, les professeurs ne sont pas encore capables de faire ce transfert. On peut également se demander si la formation continue, par exemple, favorisera ce changement.

4.6 Notion centrale d'activité préparatoire

On voit apparaître la notion centrale "d'activité préparatoire" ou "d'activité d'introduction" qui semble complètement intégrée chez ces quatre professeurs. Précisons que c'est bien l'idée de proposer des activités visant à introduire des savoirs nouveaux qui semble naturalisée et non sa réalisation concrète sur laquelle on pourrait discuter. Nous pensons que c'est un phénomène relativement nouveau, que nous n'aurions certainement pas eu ce résultat il y a dix ans. Ceci nous semble provenir d'au moins deux sources : la formation qui met en avant l'idée de problématisation du savoir et les manuels scolaires qui emploient ce terme pour désigner les exercices qui sont proposés avant les synthèses.
Ceci nous donne donc une idée générale de ce que peut être un plan de séance : activité préparatoire, synthèse, exercices d'application sans liens entre ces parties.
De plus, comme nous l'avons dit précédemment, les activités choisies sont souvent reprises telles quelles dans les manuels et ne correspondent pas toujours, selon nous, à de véritables activités dans le sens où les élèves n'ont pas vraiment de problème à chercher ou bien elles sont trop guidées.
Si nous analysons les activités choisies par les professeurs nous constatons qu'elles sont souvent constituées de tâches peu problématiques, avec de multiples questions très fermées. Par exemple, Céline choisit un QCM Vrai/ faux à partir de solides de l'espace représentés en perspective cavalière.

5 Des différences

5.1 Des écrits différents

Comme nous l'avons vu, la production écrite finale qui constitue la préparation du chapitre est très différente d'un professeur à l'autre.
Trois écrivent leur plan de cours sur papier, une sur ordinateur.
La longueur de ce plan est variable : de un tiers de page (Arnaud) à deux pages (Chloé et Céline).
Enfin Corinne a différentes fiches : sa préparation n'est pas seulement faite en fonction du savoir mathématique mais également en fonction de la vie de la classe. Ce point nous interroge car nous pensons que les autres professeurs interrogés prennent eux aussi en charge la correction des devoirs et d'autres tâches quotidiennes et répétitives, mais ces éléments ne font partie de leur préparation ou bien ils sont tellement intégrés qu'ils n'ont pas besoin de les préciser.

5.2 Modification des exercices pris dans les manuels

Comme nous l'avons plus haut les exercices sont pris tels quels dans les manuels et très peu souvent modifiés. Or de nombreuses études ont montré le rôle important des variables didactiques. Notre expérience de formatrice nous amène à penser que les professeurs ne se donnent pas le droit de modifier des exercices de manuels : ceci semble confirmé en partie ici.
Seule Chloé indique bien qu'elle modifie l'exercice choisi et pourquoi : *"Alors la formulation de la question que ce soit intelligible enfin qu'y ai pas d'ambiguïté sur la réponse qu'on peut apporter heu que enfin voir le but de l'activité s'il veut vraiment faire faire enfin si la façon dont l'activité se déroule a le même but que moi ce que je veux faire faire à mes élèves heu regarder si le enfin comme mon but c'est d'introduire le radian si cette activité va vraiment enfin si à la fin de cette activité je vais pouvoir dire bon ben maintenant avec tout ce qu'on a fait enfin si ce que je veux faire va pas tomber sur un cheveu comme un cheveu sur la soupe*

heu si et puis regarder si quand même ils ont vraiment un travail à faire ou si c'est une petite activité pour s'amuser quoi
enfin faut quand même qu'ils aient matière à travailler et que ça soit pas pas trop facile enfin quelque chose et puis que ce soit assez complet"
On constate donc que la notion de variable didactique qui est certainement une notion enseignée en formation est peu (voire pas) mobilisée ni au niveau déclaratif, ni au niveau procédural.

5.3 Prise en compte des connaissances antérieures des élèves

Pour deux professeurs (Céline et Chloé), il y a une explicitation forte des savoirs anciens et nouveaux. Chez les deux autres, il n'y a pas de trace de ce questionnement. On peut se demander si c'est une caractéristique des professeurs ou bien du chapitre traité. En effet, on pourrait dire que Corinne et Arnaud font des chapitres pour lesquels le savoir mathématique leur apparaît comme complètement nouveau : les nombres relatifs et les translations.
Or, ce type de rapport est développé dans l'institution de formation, mais les entretiens montrent qu'ils sont transférés de façon différente pour la préparation des séances dans l'institution enseignement secondaire.
Les cas de Céline et Chloé sont différents : pour cette dernière, même si elle le déclare, on peut constater que dans sa préparation, peu de choses indiquent qu'elle va effectivement prendre en compte les connaissances antérieures des élèves sur la trigonométrie (par exemple par des phases de rappel ou une évaluation diagnostique ou autre). En revanche, Céline choisit une activité qu'elle nomme réinvestissement et qui porte sur des connaissances anciennes. Elle précise cependant qu'elle a trouvé l'idée en feuilletant les manuels : *"je n'ai pas eu de moi même l'idée de faire une activité de réinvestissement mais j'en ai vu une et c'est là où je me suis dit en lisant cette activité en me disant ça ce n'est pas une activité qui leur apprend quelque chose de nouveau c'est quelque chose de récapitulatif donc ça serait bien de le faire mais ce n'est pas moi qui ai eu l'idée j'ai lu un des livres parce que ce genre d'activité n'étaient que dans un seul des livres qui m'a fait prendre en compte cette activité"*.
Dans les deux cas, on peut tout de même dire qu'elles ont intégré cet élément à leurs connaissances sur les élèves ou à leurs connaissances didactiques et que cela leur permettra certainement d'avoir des interventions pertinentes dans le cadre de la classe.
Nous retrouvons là une conclusion de Robert et Rogalsky, 2004 qui précisent que le travail sur les savoirs nouveaux est souvent fait sur des tâches isolées sans reprise et sans lien avec les savoirs anciens.

5.4 Anticipation du temps à passer

Toutes les études sur les enseignants ont bien montré l'importance de la prise en compte du temps d'enseignement et sur l'avancée du temps didactique. On retrouve donc des remarques sur ce point dans tous les entretiens. Cependant, on constate que les professeurs anticipent plus ou moins sur le temps qu'ils vont passer sur telle ou telle partie. De plus, comme les entretiens ont eu lieu en fin d'année, on peut voir certains professeurs prendre en compte le fait que le temps est encore plus compté à ce moment. Ceci est particulièrement vrai pour Céline :*"donc c'est par rapport à cette succession de questions qui étaient des petites questions qui sont vite faites en plus parce que je ne veux pas non plus y passer 1 heure sachant que je n'ai plus beaucoup de séance aussi j'ai aussi géré là-dessus parce qu'il me reste 3 ou 4 séances avant la fin donc c'est ces petites questions successives assez rapides et récapitulatives qui m'ont plu quant à l'objectif de cette activité de réinvestissement."*

5.5 Anticipation des réactions des élèves

Ce point constitue une différence importante chez les quatre professeurs. Corinne, peut-être parce qu'elle enseigne dans un collège difficile, indique plus particulièrement des critères qui portent sur les apprentissages des élèves comme, par exemple : *"je regarde les activités qui me semblent le plus riches où les élèves peuvent plus s'investir ça explique pourquoi j'ai choisi telle activité dans tel livre et pas dans un autre"*

"Je veux que les élèves soient actifs donc j'essaye de prendre des activités dont l'énoncé est bien clair pour tout le monde on comprend ce qu'il faut faire et chacun peut se mettre dans l'activité c'est pour ça que j'ai choisi celle-ci."

Dans l'entretien, elle précise également souvent ce qu'elle va dire aux élèves car elle a le souci de leur expliquer ce qu'ils ont à faire et pourquoi. Enfin elle anticipe comment elle va gérer les différences de rythme entre les élèves (entre ceux qui ont fini assez vite et ceux qui ne comprennent pas ce qu'il faut faire). *"ce que je fais c'est que j'essaye toujours d'introduire un peu le chapitre j'aime pas l'idée de passer de la correction du DS on fait autre chose tenez l'activité débrouillez vous je préfère leur dire un peu ce qu'on fait bon on va voir la translation quelque chose de nouveau un peu de géométrie introduire comme ça leur présenter l'activité 1 alors ce que je vais faire c'est je vais leur donner la feuille en entier je pensais au départ couper en 2 leur donner d'abord cette partie après l'autre mais je me suis dit qu'avec la page en entier les élèves qui auront vite compris pourront ensuite s'occuper en commençant l'activité 2 ça éviteront qu'ils restent sans rien faire comme ça je pourrais m'occuper de ceux qui ont un peu plus de mal avec cette histoire d'image qu'on déplace."*

Pour les trois autres professeurs qui proposent des activités gérées en question/réponse et très contrôlées par le professeur, ces critères sont moins affirmés, notamment chez Céline qui évoque très peu les élèves. Notons bien que nous ne voulons pas dire du tout que ce professeur n'a pas la préoccupation de ses élèves, simplement c'est soit le registre de description de sa préparation qui n'est pas le même soit que sa gestion de classe ne l'incite pas à se poser ces questions.

Ainsi, nous faisons l'hypothèse que c'est parce que Corinne propose une activité qui amène les élèves à travailler seuls qu'elle se pose ce genre de questions alors que les autres ayant un contrôle plus direct de la classe font l'économie de cette anticipation. Ceci montre que gestion de classe et type d'activités proposées sont étroitement liés et qu'il ne faut sous-estimer l'un par rapport à l'autre.

Les professeurs interrogés n'évoquent pas du tout les stratégies ou les erreurs des élèves, peut-être parce qu'ils sont novices, nous ne le savons pas actuellement.

5.6 Le travail quotidien de la classe

Seule Corinne indique qu’elle fait un découpage par semaine ce qui lui permet de tenir compte des activités quotidiennes de la classe comme les corrections de devoirs. C’est la seule qui le précise *: "Alors jeudi j'ai fait mon petit programme comme à chaque semaine où j'explique", "J'ai 4 séances enfin selon les semaines bref où j'explique chaque séance ce que je vais faire donc celle de jeudi on va corriger le DS"*. Elle précise que c'est auprès des professeurs du collège dans lequel elle fait son stage qu'elle a appris à gérer son temps de cette façon.

Les autres n’évoquent pas ce point mais ils le prennent certainement en compte sans l’écrire.

6 Conclusion

Cette étude, qui reste limitée, nous a permis de produire une description fine de l'activité de préparation de cours chez des professeurs novices. Nous avons constaté que ces descriptions montraient des points de convergence mais aussi des différences inter individuelles non négligeables. Elle nous a permis de mettre en avant le rôle central du programme et des manuels et de montrer que cette construction ressemblait davantage à celle d'un puzzle qu'à une élaboration purement personnelle. Cela nous interroge sur le rôle à donner dans la formation à la prise en compte et à l'analyse des manuels. Par exemple on peut se demander s’il faut travailler sans, avec, contre les manuels.

Un certain nombre de notions didactiques, dont on peut penser qu'elles sont travaillées en formation sous des formes diverses, n'apparaissent pas dans les résumés des professeurs. Nous allons seulement pointer quelques éléments que nous avions cités a priori au début de ce texte. Ainsi le terme « problème » n'apparaît pas dans le discours des professeurs. En revanche, celui d'activité apparaît massivement. Or nous voyons que ce n'est pas la même chose car ce qui est désigné sous le terme d'activité semble être une tâche souvent moins problématique. En conséquence, des questions liées à la dévolution n'apparaissent pas non plus puisqu'il n'y a pas de problème à résoudre et donc à dévoluer aux élèves.
De plus, nous constatons sur ces exemples qu'aucun travail n'est envisagé sur les liens entre activité préparatoire et synthèse. Ainsi les questions de contextualisation / décontextualisation, ne sont pas des éléments de connaissances didactiques mobilisées par les professeurs interrogés.

Nous pensons qu'en une année de formation, il a bien eu soit des changements dans les rapports personnels de ces nouveaux professeurs à des objets de savoirs anciens (notamment mathématiques) soit des créations de rapports personnels à des nouveaux objets (prise en compte des programmes, connaissance des élèves, temps d'enseignement, etc). Cependant, nous avons montré que ces certains de ces rapports personnels étaient encore peu conformes aux rapports dans l'institution « enseignement secondaire » pour les quatre professeurs et que d'autres l'étaient davantage pour certains (la prise en compte des élèves est très variable, certainement en fonction du public).
Cependant, un point nous paraît à souligner : nous avons vu que les rapports personnels aux mathématiques étaient encore fortement marqués par un but de résolution d'exercices plutôt que pour l'élaboration d'activités intéressantes pour les élèves.

En ce qui concerne la modification de ces rapports personnels, les professeurs mentionnent :

- la formation dispensée à l'IUFM soit concernant des éléments précis (prise en compte des programmes), soit sur des critères de choix d'activités ou sur des thèmes (passage du patron à la perspective pour Céline). Corinne cite également le mémoire professionnel dans lequel elle a travaillé la notion d'activité préparatoire.
- les maîtres de stage (cité par Corinne pour l'anticipation des procédures des élèves),
- les manuels scolaires qui permettent d'enrichir les connaissances mathématiques des professeurs par la donnée de conditions d'applications de ces connaissances.

Pour le moment nous retenons quelques idées pour la formation. La première semble être qu'un travail spécifique doit être fait pour aider les professeurs novices à mobiliser davantage leurs connaissances mathématiques antérieures pour élaborer ou pour choisir des activités mathématiques riches pour les apprentissages et pour articuler celles-ci avec des connaissances sur les apprentissages des élèves et sur la gestion de classe. Ainsi, nous pensons qu'il est nécessaire de travailler ensemble la construction de tâches mathématiques problématiques pertinentes pour les apprentissages et des organisations de classe permettant de favoriser l'activité des élèves (souligné également par Robert, 2007). Ce point rejoint celui de la transposition et de la diffusion des savoirs didactiques. Quels sont les éléments des savoirs didactiques qui semblent indispensables à enseigner aux professeurs ?
La deuxième pourrait être de considérer la formation dans la durée afin que des connaissances plus nouvelles soient approfondies, enrichies.
Enfin il est également certain qu'un travail doit être fait aussi avec les professeurs en place dans les établissements et notamment avec les maîtres de stage.

Cette étude sera complétée en interrogeant d'autres types de professeurs. Notre but final est de réaliser d'autres entretiens avec des stagiaires en fin de formation, avec des vacataires qui n'ont pas eu de formation, avec des professeurs qui ont entre 5 et 10 ans d'ancienneté et enfin avec de maîtres de stage pour faire apparaître des régularités et des différences à la fois d'un sujet à l'autre et d'un groupe à l'autre.

Bibliographie

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Cahier des séminaires de didactique des mathématiques et de l'informatique de l'équipe LSD IMAG. Années 88-89. Grenoble : Institut J. Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherche en didactique des mathématiques, vol 12 n° 1. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques, Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en didactique des mathématiques, vol 19 n° 2. Grenoble : La Pensée sauvage.

Durand, M. (1996). L'enseignement en milieu scolaire, Paris : PUF.

Lenfant, A. (2002). De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. Thèse de l'université de Paris 7.

Pian, J. (1999). Diagnostique des connaissances des étudiants de mathématiques de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. Cahier de DIDIREM, 34.

Robert, A. (2000). Connaissances mathématiques actuelles des futurs enseignants, connaissances mathématiques (et didactiques) potentielles…. Séminaire de DIDIREM.

Robert, A. (2001). Les recherches portant sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. Recherche en didactique des mathématiques, vol 21 n° 1, 2. Grenoble : La Pensée sauvage.

Robert, A., Rogalski, M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. Repère IREM n° 54.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. Recherche en didactique des mathématiques, vol 27 n° 3. Grenoble : La Pensée sauvage.

Shulmann, L.S. (1986). «Those who understand : knowledge growth in teaching». Educational Researcher, 15, 2, 4-14.

Shulman, L., S. (1987). Knowledge and teaching : foundations of the new reform. Harvard Educational Review, Vol 57, 1, pp 1-22.

Vermersch, P. (1994). L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue. Paris : ESF Editeurs.