Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques

par Yves Chevallard & Gisèle Cirade

UMR ADEF [*]

1. Le cadre institutionnel et son aménagement

Depuis son ouverture, à la rentrée 1991, l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille comporte une filière de formation des professeurs de mathématiques [1]. En première année, les élèves professeurs (désignés par le sigle PCL1) ont le statut d'étudiant d'université et se préparent au CAPES de mathématiques. En deuxième année, les élèves professeurs (désignés par le sigle PCL2) ont le statut de fonctionnaire stagiaire : à ce titre, ils sont responsables de l'enseignement des mathématiques dans au moins une classe d'un collège ou d'un lycée [2].

Dans le cas de l'académie d'Aix-Marseille, la formation des PCL2 de mathématiques se fait essentiellement à Marseille [3], dans les locaux dont l'institut dispose en centre-ville, sur la Canebière. L'effectif des promotions varie depuis des années entre 45 et 60 : il était de 54 en 2005-2006 par exemple. Les activités de formation à l'IUFM ont lieu le mardi et le mercredi : la journée des « enseignements didactiques et disciplinaires » (EDD) est le mardi, en principe de 9 h à 17 h, la journée du mercredi étant consacrée à la « formation générale et commune » (FGC). Une formation aux TICE, désormais intégrée dans la préparation au C2i2e (Certificat Informatique et Internet niveau 2 « Enseignant »), et qui relève pour partie des EDD, pour partie de la FGC, se loge dans les plages horaires laissées libres le mardi et le mercredi par les EDD et la FGC.

La journée du mardi comporte d'abord, de 9 h à 12 h 15, un *séminaire de didactique des mathématiques* qui rassemble toute la promotion des PCL2. L'après-midi, de 14 h à 17 h, la promotion se scinde en quatre *groupes de formation professionnelle* (GFP), dont chacun est confié à un formateur appelé *tuteur* [4]. Le séminaire du mardi matin et les GFP du mardi après-midi ont lieu 24 fois dans l'année : leur durée est donc de 72 heures, et la formation « didactique et disciplinaire », hors formation au chevet de la classe et travail personnel, dispose donc de 144 heures [5]. À cela s'ajoute une petite formation aux TICE « spécifiques » de la classe de mathématiques, dans la continuité de celle proposée en première année à

---

[*] Une liste alphabétique des sigles apparaissant dans ce texte figure en fin de document : on s'y reportera.

[1] Depuis cette date aussi, c'est l'un des auteurs de cette présentation qui est le responsable de ladite filière.

[2] Le nombre d'heures d'enseignement (au sens large) assumé par un PCL2 de mathématiques ne doit pas excéder six heures hebdomadaires.

[3] Il ne s'agit pas là seulement d'une contrainte de fait : la constitution d'un collectif de formation autour d'un projet fort suppose, croyons-nous, un rassemblement *physique* significatif non seulement des formateurs, mais encore des formés. Une telle instance unitaire de formation permet seule une différenciation motivée et maîtrisée – et non pas aléatoire, voire anomique – des groupes de formation plus restreints (tels, ici, les GFP : voir ci-après), dont le fonctionnement s'inscrit alors dans un projet d'ensemble partagé.

[4] Le responsable et animateur du séminaire du mardi matin est Yves Chevallard. Les quatre tuteurs de GFP sont depuis des années Michel Jullien (professeur au lycée Michelet de Marseille), Christian Reymonet (en poste à l'IUFM), Odile Schneider (professeure au lycée Daumier de Marseille) et Jacques Tonnelle (professeur au lycée Joliot-Curie d'Aubagne).

[5] On ne saurait trop souligner le caractère dévalorisant pour la profession que les PCL se préparent à exercer d'une formation réduite à deux fois 72 heures : 72 heures, c'est par exemple le temps alloué à un élève de première pour réaliser son « travail personnel encadré » (TPE).

propos des calculatrices, et qui s'articule organiquement au travail conduit sur ce thème de formation professionnelle dans le séminaire du mardi matin ainsi qu'en GFP.

Chose importante, le séminaire du mardi matin est animé *par un seul formateur* (et il en va de même, bien entendu, de chacun des GFP). En cela, il suppose de la part de son responsable un effort semblable à celui du professeur dans sa classe, lequel conduit le travail de septembre à juin, sur *l'ensemble* des thèmes à étudier. Mais cela signifie *surtout* que le séminaire n'est pas conçu comme un manteau d'Arlequin fait d'interventions ponctuelles sur des sujets de didactique académique décontextualisés, réalisées par un défilé de formateurs [6]. Notons en outre que le travail effectué dans le séminaire du mardi matin fait l'objet, chaque semaine, d'un *compte rendu écrit mis en ligne*. De son côté, le GFP, groupe de tutorat collectif, a pour ambition de travailler sur les difficultés rencontrées par ses membres dans *toutes* les parties de la formation : dans le séminaire du mardi matin, dans la journée du mercredi, dans leur travail personnel, dans l'activité au chevet de la classe. S'il n'existe pas en principe de « notes de GFP » (analogues aux notes du séminaire du matin), des documents sont ponctuellement rédigés sur divers sujets [7].

2. La problématique de la formation

Certaines des indications factuelles précédentes doivent d'emblée être éclairées par un bref commentaire. Le séminaire du mardi matin, ainsi, appelle plusieurs précisions, et tout d'abord celle-ci. Le mot « séminaire », on le sait, dérive du latin *semen*, « semence » : formé à partir du latin classique *seminarium*, qui signifie « pépinière » et, au figuré, « source, origine, principe, cause », il désigne « un milieu dans lequel on se forme à une profession » [8]. Mais c'est un milieu qui, en tant que dispositif de formation, ne saurait être *autosuffisant* : système didactique ayant son autonomie *relative*, il suppose des systèmes didactiques *auxiliaires*, sinon ancillaires, sans lesquels il s'étiolerait. Il est, fondamentalement, ce lieu de formation où se font les semailles ; mais on verra que les semences viennent en partie d'ailleurs, et que c'est aussi ailleurs – dans les GFP notamment – qu'une part essentielle des soins utiles à leur germination sera apportée.

En vérité, le séminaire relève du genre didactique de la « conférence », structure de formation qui laisse la théorie à l'arrière-plan et où le formateur – le « maître de conférences » ou le « chargé de conférences » d'autrefois – montre aux participants comment accomplir de manière techniquement efficace et bien justifiée au plan technologique les tâches de tel ou tel type, relatif au domaine d'activité – scientifique, professionnel ou autre – sur lequel portent

[6] Telle est l'une des conditions *sine qua non* de la formation présentée ici. Cette condition est compatible, bien entendu, avec le fait que le séminaire soit animé par exemple par un attelage de deux formateurs œuvrant à l'unisson selon la problématique que nous exposons plus loin.
[7] Soulignons, s'il en était nécessaire, que le Séminaire du mardi matin, en grand groupe, prend place pour l'élève professeur *dans un cycle formatif* comportant en particulier quatre dispositifs de formation à la fois nettement différenciés, solidaires et complémentaires : après le séminaire du mardi matin, en grand groupe, il y a, on l'a dit, le *GFP*, *en groupe restreint*, où les réponses ébauchées en Séminaire peuvent être reprises, travaillées, ré-élaborées, et où d'autres questions encore surgissent ; il y a ensuite le travail avec le *PCP maître de stage*, c'est-à-dire (sauf exception) *à deux*, à l'interface de la formation construite à l'IUFM et de l'enseignement donné ou à donner en classe ; il y a enfin le travail du professeur stagiaire *au chevet de la classe*, c'est-à-dire *seul* auprès des élèves, lieu essentiel de formation où naît une part substantielle des questions qui seront formulées ensuite en Séminaire. Chacun de ces lieux de formation suppose de la part de l'élève professeur un *travail personnel spécifique*, avant et après le Séminaire, avant et après le GFP, etc.
[8] Ces indications sont tirées du *Dictionnaire historique de la langue française* (Le Robert, Paris, 1993).

les conférences. Le séminaire se distingue ainsi du « cours » assuré, lui, par un « professeur » – lequel peut par ailleurs se faire, en certains moments, « maître de conférences » [9]. Il se distingue également des « travaux pratiques » : montrer à faire et justifier cette manière de faire, à l'instar du « conférencier », ce n'est pas, en principe, *faire faire* par les participants au séminaire, durant le temps du séminaire : celui-ci n'est donc pas pour les formés un lieu de travaux pratiques – qu'ils feront ailleurs.

Le séminaire du mardi matin est, on l'a vu, un séminaire *de didactique des mathématiques*. Pour bien entendre cette appellation, il convient d'avoir en tête que l'on entend ici par didactique, non la didactique « minuscule » dont une certaine *doxa* intéressée a propagé la notion, mais une didactique « majuscule », entendue comme *science de la diffusion des connaissances et des savoirs* (et plus généralement des *praxéologies*), dans les institutions de la société [10]. Il faut aussi se rappeler que, du seul fait de se tenir dans un institut de formation *professionnelle*, ce séminaire traite *a priori* des conditions et des contraintes didactiques auxquelles *ont affaire les professionnels concernés* – qui sont en l'espèce des professeurs de mathématiques. La chose a été délibérément laissée implicite dans le titre du séminaire pour signifier *qu'elle va de soi* – ce qui peut, certes, tromper l'observateur non averti ou malveillant. On aura noté que, par contraste, le GFP (« groupe de formation professionnelle ») relève d'une autre éthique institutionnelle, imposée dès l'origine par l'institution, où l'on tient à manifester la crainte qu'un institut de formation professionnelle ne soit cannibalisé par des activités de « formation » dont l'objet ne serait pas des *problèmes de la profession*, et qui ne seraient donc pas des activités de formation *professionnelle*. L'expérience montre que, dans l'état actuel de sous-développement historique des professions concernées, cette crainte est, hélas ! fondée [11].

Le détournement des activités de formation professionnelle vers des activités de formation *profane* est d'autant moins improbable que la *profession* est moins développée, et en particulier que ce que nous nommons problèmes de la profession [12] est moins clairement

[9] Ainsi l'historienne Françoise Mayeur écrit-elle (Mayeur 1981, p. 449) : « si Paul Leroy-Beaulieu devait dans son cours exposer le système de l'administration financière, il avait à montrer dans ses conférences comment on prépare un budget ou un impôt. » Paul Leroy-Beaulieu (1843-1916) était un économiste libéral, fondateur de l'*Économiste français* (1873), dont l'ouvrage *La question ouvrière* (1872) fut l'une des sources d'Émile Zola pour la rédaction de *Germinal* (1885). Sur les notions de conférence et de séminaire, voir Chevallard 2002.

[10] Sur la notion de didactique (et aussi sur la notion de praxéologie), voir par exemple Chevallard 2006b. La didactique minuscule est celle que sous-entend ce passage (à propos des épreuves du concours de recrutement des professeurs des écoles) cueilli dans un recueil d'informations et de conseils destiné aux élèves professeurs des écoles (*La Classe*, hors série « Spécial IUFM 2005-2006 », août 2005, p. 16) : « Si la dimension didactique et pédagogique semble diminuer dans ces épreuves rénovées, il reste que pour pouvoir traiter le troisième point (répondre à une question sur la mise en situation d'enseignement), il sera bon de pouvoir se situer par rapport à la didactique (conception des activités) et à la pédagogie (leur mise en œuvre). » Du point de vue défendu et illustré ici, la pédagogie étudie une *partie* des conditions et des contraintes qui sont l'objet de la didactique : en ce sens, la pédagogie est une *partie* de la didactique et ne trouve son sens véritable qu'à assumer fonctionnellement ce statut.

[11] Depuis quelques années, le thème de la formation initiale et continue des professeurs de mathématiques s'est, au niveau mondial, imposé à l'attention des chercheurs. Mentionnons à cet égard le *Journal of Mathematics Teacher Education*, lancé en 1998, ainsi que la 15e étude de l'ICMI, dont la parution est prévue en 2007 (voir http://www.cfem.asso.fr/ICMI15fr.html). Pour un approfondissement des analyses proposées ici, voir Cirade 2006.

[12] Sans rigidifier cette distinction, il convient de distinguer les *problèmes professionnels* – ceux que rencontrent de fait, à un moment ou à un autre, les membres de la profession – et les problèmes *de la profession*, reconnus ou non comme tels par la profession. Une formation professionnelle qui assume sa fonction normative s'efforce de faire reconnaître comme problèmes de la profession de « simples » problèmes professionnels, que la profession méconnaît : il y a ainsi constamment une tension nécessaire entre ce qui est et ce qui devrait ou *pourrait* être.

identifié en même temps que les savoirs « professionnels » qui permettraient de résoudre – partiellement et provisoirement – ces problèmes sont peu élaborés, reconnus et diffusés au sein de la profession. À ces conditions et contraintes pesant sur la mission de formation dévolue aux IUFM s'en ajoutent quelques autres, de nature « pédagogique » cette fois, que l'on peut décrire selon une gradation à trois niveaux, en allant du plus formel au plus fonctionnel en matière d'enseignement.

À un premier niveau, l'enseignement prodigué peut prendre la forme d'un enseignement d'*œuvres* choisies *a priori* comme ayant une pertinence *supposée* pour les « formés » en tant que professionnels en formation, sans qu'on se préoccupe nettement d'établir les voies et moyens de cette pertinence possible. Dans le cas présent, il s'agira d'œuvres mathématiques et/ou didactiques dont le choix et la présentation seront plus formels encore si on les justifie par l'affirmation inquiète – mais simplificatrice – qu'il ne devrait pas être permis à un professeur de les ignorer complètement [13]. Ainsi pourra-t-on décider que de futurs professeurs « devront avoir entendu parler », par exemple, de transposition didactique, de contrat didactique, d'évaluation formative et d'évaluation sommative, etc., et que de futurs professeurs *de mathématiques* devront en outre avoir entendu parler, disons, des « niveaux de van Hiele », etc.

Dire qu'il faut « avoir entendu parler » ne désigne pas pour autant la manière, *formelle* ou *fonctionnelle*, dont la chose se réalise. En aura-t-on entendu parler « frontalement », parce qu'on aura suivi, sans autre motif que l'obligation institutionnelle (éventuellement dissimulée sous l'apparence d'une « option » choisie parmi d'autres), un « cours » sur ces œuvres réputées incontournables (rencontre formelle) ? Ou en aura-t-on entendu parler en cherchant à résoudre un certain problème professionnel (rencontre fonctionnelle) ? Au premier niveau de l'enseignement, la première réponse sera retenue de façon systématique, « choix » institutionnel qui signe l'irresponsabilité de l'institution de formation et s'accompagne en règle générale du renoncement à effectuer sur les œuvres ainsi « visitées » le travail de problématisation professionnelle pourtant indispensable à leur exploitation éventuelle par les formés dans l'exercice de leur profession.

Un deuxième niveau est alors possible et, à certains égards, désirable : le premier niveau évoqué, en effet, se trouve classiquement dépassé dans les problématiques d'enseignement qui, s'inspirant de façon plus ou moins authentique de la *théorie des situations didactiques*, partent pourtant encore d'œuvres « données », présentes dans la culture d'une noosphère au demeurant composite [14]. Le dépassement tient alors de façon essentielle à l'effort engagé pour « fonctionnaliser » ces œuvres, à travers la recherche de situations de formation qui les

[13] Une formule due à Octave Gréard (1828-1904) a été popularisée notamment par les instructions officielles de 1887 et 1923 pour l'école primaire : « L'objet de l'enseignement primaire n'est pas d'embrasser sur les diverses matières auxquelles il touche tout ce qu'il est possible de savoir, mais de bien apprendre, dans chacune d'elles, ce qu'il n'est pas permis d'ignorer. » Le critère de « ce qu'il n'est pas permis d'ignorer » a fait florès ; mais sa signification est rien moins que claire. Au soir de sa vie, non sans amertume, Jules Payot (1859-1940), qui fut notamment recteur de l'académie d'Aix-Marseille, notait ainsi (dans *La faillite de l'enseignement*, 1937) : « Gréard, qui était un magnat dans l'Université, déclarait qu'il fallait enseigner aux primaires "ce qu'il n'est pas permis d'ignorer". Un jour que je lui demandais de préciser sa pensée, il eut un geste vague : "une teinture de choses essentielles", me dit-il, c'est-à-dire une espèce d'enseignement secondaire au rabais, comme je le compris par la suite. »

[14] Il semble que, dans les IUFM, la noosphère propre à l'enseignement des mathématiques – celle de l'APMEP, des IREM, de l'ARDM, etc. – et celle, transdisciplinaire, de la formation des enseignants inspirée par les sciences de l'éducation et la « pédagogie » ancienne manière se mêlent dans des proportions variables, en un composé à la stabilité incertaine.

feraient apparaître comme apportant réponse à un besoin né dans un contexte d'activité professionnelle adéquatement transposée. On mettra au point par exemple des « activités » qui feront rencontrer la notion de contrat didactique, ou celle d'évaluation formative, etc. Ce niveau d'élaboration, qui prend le monde comme un donné structurel à reconstruire fonctionnellement (plutôt que comme une œuvre ouverte, fonctionnellement motivée, et à « poursuivre »), réalise un immense progrès par rapport à la conception dominante – muséographique – de l'éducation scolaire et de la formation professionnelle entendues comme visite du musée des œuvres d'un secteur culturel donné.

Il existe pourtant un troisième niveau de problématique d'enseignement, dans lequel, à travers les notions d'*activité d'étude et de recherche* (AER) et de *parcours d'étude et de recherche* (PER), la théorie anthropologique du didactique conduit cependant à inscrire l'approche situationnelle dans un cadre élargi [15]. Pour se situer un instant au plan de l'enseignement scolaire (et non pas de la formation des professeurs), on peut avancer que, alors que, dans une AER, on s'efforce d'étudier une question *ad hoc* Q_j, censée engendrer une œuvre mathématique O_j extraite d'une suite d'œuvres $(O_i)_{i\in I}$ préprogrammée, dans un PER, la question *inaugurale* Q génératrice du parcours conduira à étudier des questions dérivées Q_k, en fonction des *besoins de connaissance engendrés par l'étude* de Q et en fonction aussi *des décisions prises par le collectif d'étude* (la classe, l'équipe de TPE en classe de première, etc.) sous l'autorité de son ou ses « directeurs d'étude » (professeurs, etc.). Dans le contexte de l'enseignement scolaire, le paramètre clé est la question inaugurale et génératrice Q, qui détermine en grande partie les questions engendrées Q_k et, par voie de conséquence, les œuvres O_i sollicitées (et, *pour cela*, étudiées). Dans le cadre de la classe de mathématiques, au collège, la question « Comment peut-on calculer sur des nombres qui s'écrivent avec beaucoup de décimales ? » pourra ainsi engendrer un PER réalisant une bonne couverture d'une partie substantielle du programme, alors que telle autre question – « comment déterminer le jour de la semaine où tombait (ou tombera) telle date ? », par exemple – aura une générativité moindre de ce point de vue [16].

Les questions prises pour exemple rappellent discrètement un fait crucial : dans l'enseignement *général*, tout se passe comme si les questions données à étudier ne pouvaient pas ne pas être apportées par l'institution elle-même, notamment parce que les élèves – tel est le principe, mais telle est aussi très largement la réalité – n'auraient pas de pratique personnelle extrascolaire (ou simplement extérieure à la classe de mathématiques) qui serait la source de questions de mathématiques à étudier. À cet égard, les questions proposées en exemple plus haut se veulent simplement, au mieux, des questions que les élèves *pourraient* rencontrer comme difficultés à vaincre dans une activité extérieure à la classe de mathématiques. Divers essais ont certes été tentés pour donner à l'élève une fonction de *problem-bringer*, et pas seulement de *problem-solver* : ainsi en va-t-il en principe avec les TPE ou encore les IDD (au collège), par exemple [17]. Mais il s'agit là d'un problème largement *ouvert* s'agissant de l'organisation de l'étude scolaire, dont la tradition met entièrement dans

[15] Voir là-dessus Chevallard 2006b.

[16] L'idée de base, que nous ne pouvons que mentionner ici, est qu'un enseignement par PER suppose idéalement un petit nombre de PER couvrant l'essentiel du programme de la classe.

[17] Dans le cadre des travaux de l'équipe animée par le premier des auteurs a été produite et mise en œuvre (de façon, hélas ! limitée) la notion de « boutique de mathématiques », structure interne à un établissement où élèves et professeurs de toutes disciplines peuvent apporter leurs questions. Dans le cas des élèves, seules sont acceptées les questions qui ne sont pas les enjeux didactiques du moment dans la classe. Le mot de *boutique* n'a pas ici, bien sûr, d'acception commerciale : il renvoie à l'idée d'un lieu de plain-pied – une boutique est en principe située en rez-de-chaussée – où l'on peut espérer trouver ce que l'on cherche dans un domaine déterminé – ici, les mathématiques.

le *topos* du professeur la fonction d'*apporter* les problèmes que les élèves auront, eux, à *résoudre* [18].

Le troisième niveau annoncé s'impose en revanche presque de lui-même dans la formation, non plus des élèves de collège ou de lycée, mais des élèves *d'IUFM* : ceux-ci, en effet, ont une pratique extérieure à la formation, qui est une pratique professionnelle, donc soumise à des conditions et contraintes relativement uniformes. Alors même qu'une formation « par les œuvres » peut porter à les ignorer ou à les contourner, dans l'exercice naissant de ce qui deviendra sauf exception leur métier, les difficultés qu'ils rencontrent sont massives, certaines. Tel est le constat évident, et pourtant trop souvent occulté, dont est sorti ce qui fait le cœur de l'organisation de la formation des PCL2 de mathématiques que nous tentons de restituer ici.

3. « Questions de la semaine » et « Forum des questions »

3.1. Le champ à explorer : une extension quasi illimitée

Il résulte des considérations précédentes que *toute* question relative à l'activité d'un professeur *peut* être étudiée dans la formation proposée dès lors qu'elle est *didactique*, c'est-à-dire qu'elle touche à la création ou à la modification de conditions et de contraintes concernant la diffusion des connaissances mathématiques par le truchement de la classe. On ne s'étonnera pas, en conséquence, que l'on puisse se proposer d'y travailler *par exemple* sur les questions suivantes, choisies parmi une foule d'autres [19].

1. Lors de la réunion parents-professeurs, les parents des enfants à problèmes (discipline, travail) ne sont pas venus. Peut-on se permettre de les appeler pour prendre rendez-vous ? Si trois ou quatre parents sont dans ce cas, les rendez-vous peuvent-ils alors être pris sur un même créneau horaire (les parents concernés étant reçus les uns à la suite des autres), comme lors de la réunion, ou bien faut-il individualiser (dans le temps) les entretiens ? (année 2005-2006, 6e semaine)

2. Quand les parents d'élèves contestent notre manière de travailler (DM trop éloigné, selon eux, de ce que l'on fait en classe, par exemple), comment réagir ? (année 2005-2006, 7e semaine)

3. À qui doit-on s'adresser lorsque nous remplissons les bulletins scolaires ? Aux élèves ou aux parents ? (année 2005-2006, 7e semaine)

4. Dans trois semaines, une rencontre parents-professeurs est organisée. Pour l'organiser, un système de rendez-vous (de 10 minutes) est mis en place à partir de cette date : le professeur peut fixer un rendez-vous dans le carnet de liaison ; les parents ont un planning sur lequel ils demandent de rencontrer tel ou tel professeur. Sur quels critères doit-on demander à rencontrer tel parent dans ce cadre ? (année 2005-2006, 13e semaine)

Notons sans attendre que, comme nombre d'aspects des praxéologies de formation mises en œuvre, cette ouverture quasi illimitée du champ des questions « admissibles » doit être

[18] Le postulat – erroné – est que les problèmes « se poseraient d'eux-mêmes », comme si la problématisation du monde qui nous entoure allait de soi. Dans un passage équivoque, Pascal a retouché ce postulat ordinaire en faisant dans les termes suivants l'éloge ambigu de Marin Mersenne (1588-1648) : « Il avait un talent tout particulier pour former de belles questions ; en quoi il n'avait peut-être pas de semblable : mais encore qu'il n'eût pas un pareil bonheur à les résoudre, et que ce soit proprement en ceci que consiste tout l'honneur, il est vrai néanmoins qu'on lui a obligation, et qu'il a donné l'occasion de plusieurs belles découvertes, qui peut-être n'auraient jamais été faites s'il n'y eût excité les savants. »

[19] Au long des six dernières années, entre septembre 2000 et mai 2006, quelque 7000 questions ont été formulées par écrit par les élèves professeurs stagiaires.

expliquée aux « formés » eux-mêmes. De là par exemple le commentaire suivant [20], formulé dans le cadre du séminaire du mardi matin au cours de l'année 2005-2006.

> … il est usuel de distinguer des conditions et contraintes *« génériques »* (qui pèsent en principe sur l'accomplissement de *toute* tâche d'enseignement), et des conditions et contraintes *« spécifiques »* (c'est-à-dire supposées propres à l'enseignement de tel thème mathématique, voire de tel sujet relevant de ce thème). En réalité, cette distinction n'est pas aussi tranchée qu'on pourrait le croire. Rencontrer les parents d'élèves, en groupe ou individuellement, par exemple, est, certes, un type de tâches qui apparaît comme une condition et une contrainte *générique* de l'enseignement (et des apprentissages qu'il vise) ; mais l'accomplissement de ce type de tâches peut avoir des effets *spécifiques*, positifs ou négatifs, à propos de tels contenus mathématiques particuliers – par exemple si le professeur demande aux parents de s'assurer que leur enfant, élève de 6^{e}, connaît ses « tables de multiplication », mais ne leur demande rien quant à l'attention qu'ils pourraient porter au travail donné à faire à leur enfant en matière de déduction en géométrie par exemple.

3.2. D'un bout à l'autre de l'année, les difficultés rencontrées : un exemple

Pour faire des élèves professeurs stagiaires des *problem-bringers*, un dispositif spécifique a été mis en place : chaque séance du séminaire du mardi matin s'ouvre par quelques minutes consacrées à la rubrique dite des *Questions de la semaine*. Les participants au séminaire doivent répondre à la consigne que voici.

> De manière précise mais concise, formulez une difficulté à laquelle vous vous êtes heurté, ou une question que vous vous êtes posée, dans le cadre de votre travail, au cours de la période écoulée.

Le temps dévolu à cette rubrique est en principe, pour chacun des élèves professeurs, un temps d'anamnèse, où l'on tente de se souvenir des difficultés rencontrées, pour en sélectionner une qui semble particulièrement saillante. À titre d'exemple, voici *l'ensemble* des questions posées par une élève professeure de la promotion 2004-2005, Margot [21].

Margot (2de)
0. Pas de fiche.
1. Mon premier chapitre est une activité numérique avec les ensembles de nombres, l'arithmétique, les nombres premiers, l'écriture scientifique et la notion d'ordre de grandeur. Est-ce que je dois faire une AER pour chaque sous-partie ou est-ce qu'une activité sur les ensembles de nombres et une sur l'arithmétique suffisent ?

[20] Dans tout ce qui suit, en prenant connaissance des extraits des notes rendant compte des séances du séminaire du mardi matin, on aura présent à l'esprit le fait que la rédaction de ces notes se fait semaine après semaine, de façon généralement hâtive, ce qui explique pour l'essentiel les maladresses et ambiguïtés qu'on pourra ça et là y débusquer. Les rectificatifs et additifs, si besoin est, viennent *après coup*, dans un dialogue continué avec les élèves professeurs ; ils ne sont pas nécessairement reproduits ici avec le passage qu'ils corrigent, nuancent ou explicitent.

[21] Lors de la séance 0, c'est-à-dire lors de la réunion de rentrée à la fin du mois d'août 2004, Margot n'a pas rendu la feuille sur laquelle elle aurait dû rédiger sa question (sans doute était-elle absente ou en retard) : d'où la mention « Pas de fiche » portée ci-après. Lors de la séance 10, ainsi que vers la fin de l'année (séances 23 & 24), en revanche, elle était bien présente, mais elle a porté sur la fiche qu'elle a rendue la mention « Pas de question cette semaine ». Le sigle SPA désigne le « stage de pratique accompagnée » et le sigle TER désigne le travail d'étude et de recherche conduisant à la rédaction du « mémoire professionnel » : là-dessus, voir, *infra*, la sous-section 5.4. Le sigle PCP mentionné dans la question 18 désigne le professeur conseiller pédagogique, c'est-à-dire le professeur qui, dans l'établissement où s'effectue le stage en responsabilité, accueille, guide et encadre l'élève professeur, dont il est donc un « formateur de proximité ».

2. Comment faire pour justifier les propriétés et théorèmes du chapitre d'arithmétique du programme de 2^{de} (nombres premiers, etc.), autrement que par des exemples ? N'est-ce pas gênant de ne rien démontrer alors que, dans le chapitre « Géométrie du plan », on demande aux élèves de faire des démonstrations ?

3. a) Quelle calculatrice suggère-t-on à un élève qui se destine à une ES ? Il faut qu'elle soit scientifique, qu'elle possède du calcul statistique et matriciel. Une TI 82 suffit-elle ?

b) La majorité des élèves de ma classe effectuent leur exercices mais une partie non. Que faire ? Punir ?

4. En DM j'ai proposé aux élèves l'exercice suivant :

1. Simplifier $A = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

2. Trouver a et b tels que $A = \frac{1}{2}$.

Un élève écrit :

1. $A = \frac{2a}{a-b}$

2. $A = \frac{1}{2} = \frac{2a}{a-b}$ donc $2a = 1$ et $a - b = 2$

donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{3}{2}$

et je vérifie $\frac{2a}{a-b} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$.

Je lui dis que les valeurs de a et b sont justes, qu'il ne s'agit que d'un exemple de couple solution et je rajoute que son raisonnement est faux : on n'a pas le droit de dire que, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *alors* $a = c$ et $b = d$. Il me répond : *Si ! On a le droit…* « Lorsqu'une des deux fractions ne contient pas d'inconnue et que l'on veut déterminer les inconnues présentes dans l'autre fraction, on peut faire comme ça ! » Que répondre ? Cette « méthode » permet en effet de déterminer un couple solution. Aurais-je dû mieux formuler ma question ? Comment contrer ce type de raisonnement dans le fond comme dans la forme ?

5. Peut-on demander aux élèves d'effectuer des démonstrations pour justifier, par exemple, les règles d'ordre ?

6. Lorsque je propose un exercice, certains de mes élèves trouvent plus rapidement que d'autres et se mettent à bavarder. Comment capter cette énergie ? Lorsque je donne plusieurs exercices, l'attention des élèves sur la correction est moindre – ils cherchent les autres exercices.

7. Je commence un chapitre sur les configurations du plan essentiellement basé sur des révisions du collège et dont le but est d'apprendre à effectuer des démonstrations. Comment « schématiser » une démonstration géométrique ? Comment peut-on expliquer un raisonnement ? Peut-on parler de logique ?

8. Sur le chapitre de généralités sur les fonctions, quelles techniques les élèves doivent-ils connaître au sujet de la variation des fonctions ? Mon livre ne fait utiliser que la lecture graphique. La méthode « algébrique » (montrer que, si $a \le b$ alors $f(a) \le f(b)$, etc.) est-elle encore au programme de 2^{de} ?

9. Pour le rapport de SPA, doit-on simplement donner le rapport brut de la séance observée ? Ou doit-on rajouter des éléments annexes (progression de la classe, enchaînement des séances suivantes, etc.) ?

10. Pas de question cette semaine.

11. Un élève passe au tableau pour résoudre un exercice de géométrie. Il rédige sa solution, elle est juste, mais il y a plus rapide comme raisonnement. Un élève le fait remarquer oralement. Faut-il que cet autre raisonnement soit apparent au tableau ? Que les élèves en prennent note ?

12. Comment aider les élèves à mieux voir dans l'espace, surtout pour la notion de plan et la recherche de sections planes ?

13. a) Quels sont les différents critères que l'on doit considérer dans la gestion de la classe ?

b) Que doit-on mettre dans l'analyse de la théorie ?

14. Dans le chapitre *Repérage dans le plan*, il est conseillé d'effectuer des repérages dans un tableur. Comment créer une AER pour le repérage dans un tableur ? Quel peut-être son intérêt mathématique ?

15. a) Fréquemment des élèves de ma classe égarent leurs livre. Le temps qu'ils le retrouvent, je leur donne quelques photocopies du livre pour qu'ils puissent faire les exercices. Mais une telle technique ne pousse pas les élèves à plus de précaution envers leur livre et n'accélère pas la recherche du livre ou la démarche au CDI pour en acquérir un autre (souvent en le payant). Que faire pour motiver le bon entretien du livre et son importance ? Les photocopies peuvent pallier un moment l'absence du livre mais ne peuvent pas le remplacer.

b) Je me suis aperçue qu'un élève ne note pas la correction des exercices ou des activités lorsqu'il ne comprend pas ses erreurs. Il pose parfois des questions pour plus d'explications, mais ce n'est pas toujours le cas. Je lui ai expliqué qu'il faut noter les corrections des exercices pour pouvoir les refaire et me montrer en AI ou à la fin des cours les endroits incompris. Je comprends son raisonnement et sa démarche intellectuelle. Je lui demande souvent s'il a compris. Mais comment le motiver à corriger ses erreurs par lui-même en écoutant la correction collective et en posant plus de questions ?

16. Au sujet des coordonnées d'un vecteur, la donnée en ligne $\vec{u}\ (a\ ;\ b)$ et la donnée en colonne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ apparaissent dans divers documents. Quelle est la « bonne » écriture ?

17. Quelles sont les démonstrations de théorèmes exigibles au programme de 2^{de} ?

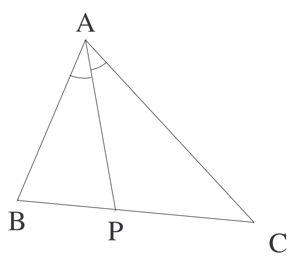
18. La notion d'équation de droite n'est plus au programme de 3^{e}. Mon PCP m'a dit que, en 2^{de}, il faut parler d'équation réduite et d'équation cartésienne d'une droite. L'équation cartésienne d'une droite, utile pour la résolution de systèmes, n'est plus au programme. Peut-on quand même introduire la définition d'équation cartésienne d'une droite même si elle n'est plus au programme du secondaire ?

19. Le scénario que l'on doit produire dans le mémoire de TER peut-il ou doit-il tenir compte de la réaction des élèves ?

20. Des grèves s'annoncent et la fin de l'année approche. Comment gérer la progression et le contenu des séances lorsque la quantité des élèves présents varie ?

21. Au sujet des fonctions de référence en 2^{de}, les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont étudiées. Pourquoi les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^3$ ne sont plus considérées comme fonctions de référence alors qu'elles interviennent à de nombreux moments ?

22. Soit ABC un triangle quelconque. Notons P le point d'intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ avec [BC]. Comment prouver que $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$?



23. Pas de question cette semaine.

24. Pas de question cette semaine.

25. Comment élaborer un devoir « commun » en fin d'année ?

3.3. Le travail collectif de questionnement : entre usages formatifs et résistances

Quels sont les principaux obstacles que rencontre la volonté de faire des professeurs stagiaires des *problem-bringers* ? Le premier d'entre eux consiste en la résistance qu'on observe chez certains à l'obligation de s'excentrer de son expérience propre des difficultés rencontrées afin de voir en elles l'*écho* ou le *symptôme* de *problèmes de la profession* et d'assumer alors de les « apporter » à ce collectif de professionnels en devenir qu'est la promotion. La tentation est forte, chez quelques-uns, de ne pas rapporter telle difficulté au motif qu'elle aurait déjà été « réglée » avec l'aide du professeur conseiller pédagogique, alors que la « déclaration » de cette difficulté dans le cadre des *Questions de la semaine* a un intérêt pour le travail collectif de formation que ne diminue nullement sa « résolution » annoncée. Les symptômes de cette résistance sont multiples. Alors que certains élèves professeurs font de ce dispositif un usage formatif évident, par contraste d'autres – en petit nombre chaque année – ne s'y soumettent qu'en le détournant de façon consciente (voire délibérée) ou non. Ainsi en va-t-il dans le cas de Benoît dont, quand elles existent [22], les questions, distanciées et à la tonalité critique, portent *sur* le métier et/ou *sur* la formation plutôt qu'elles ne désignent des problèmes *du* métier ou *de* la formation au métier : leur ensemble trace le portrait d'un *outsider* absent ou réprobateur, selon le cas, et presque toujours largement étranger à la formation prodiguée [23].

Benoît (2de)

0. Comment organiser le contenu du programme dans une classe à deux niveaux ?

1. a) Une difficulté : élaborer une progression (même approximative). La progression doit-elle être alternée ?
b) Peut-on s'inscrire au PAF cette année ?

2. [Présent, mais pas de fiche]

3. [Présent, mais pas de fiche]

4. Dans la séance du 14 septembre, on a eu affaire à un début de formalisme de didactique. Avez-vous trouvé ou y a-t-il des théorèmes ou des propriétés applicables sur le terrain ?

5. Que répondre à des élèves qui préfèrent un cours magistral à une AER ?

6. a) Je fais des activités en classe, des synthèses, mais peu d'exercices au sens des élèves. Je trouve que le programme de 2de est assez chargé. Est-ce que les responsables qui ont élaboré le programme de 2de ont conscience de sa lourdeur pour pouvoir le faire en découpage ternaire ?
b) Est-il permis de demander aux élèves de réfléchir à l'activité chez eux avant de la discuter en classe ?

7. [Présent, mais pas de fiche]

8. [Présent, mais pas de fiche]

9. Peut-on demander au proviseur ou à son adjoint d'éviter d'organiser des interventions (photo de classe, information sur l'orientation, etc.) pendant mes heures de cours ?

10. [Présent, mais pas de fiche]

[22] Le symbole ∅ (question 23) signale qu'une fiche *blanche* (vide) a été rendue.

[23] Outre l'absence de question, fréquente (13 fois sur 24), on doit noter la référence au PAF (qui ne concerne que les professeurs titulaires, ce qui laisse voir une impatience conduisant à une identification imaginaire), la tentative de se situer en surplomb par rapport aux contenus de la formation (question 4), la contestation indirecte qui en est faite (question 5) ou le fait de les ignorer ostensiblement (questions 17a & 24a), conjugués avec la recherche de ce qui semble bien être vécu comme un trait de louable originalité qu'à ce titre on exhibe (questions 11 & 24b), la centration sur soi, archaïsante et en tout cas étrangère à la formation donnée, l'importance donnée à ce qu'on fait, marquée par l'utilisation répétée du *je* et la dichotomie presque violemment affirmée entre soi et le reste du monde (question 9), etc.

11. J'ai donné l'exercice suivant aux élèves :

Sans calculatrice, comparer $\sqrt{2}$ et $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408}$.

Je croyais qu'en écrivant le second membre sous la forme $(1 + a)$ et en élevant au carré les deux nombres, cela ferait l'affaire. Écrire $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408} = \frac{577}{408}$ et élever $\sqrt{2}$ et $\frac{577}{408}$ au carré est la seule voie que j'aie trouvé jusqu'ici. Cette réponse est-elle en accord avec le « Sans calculatrice » de l'énoncé ?

12. [Absent]

13. [Présent, mais pas de fiche]

14. [Présent, mais pas de fiche]

15. [Présent, mais pas de fiche]

16. [Présent, mais pas de fiche]

17. a) Peut-on traiter le chapitre *Statistique* sous forme d'exercices et de DM ?

b) Je ne fais jamais de révisions. Je réinvestis les notions étudiées au collège dans des exercices. La semaine dernière j'ai passé deux heures sur une activité. Je me suis rendu compte au cours de celle-ci que la construction de l'image d'un point par une translation ou par une rotation ne sont pas acquises. Compte tenu du temps qui passe, je voulais mettre cette activité de côté pour avancer le cours (je ne l'ai pas fait !). Peut-on renoncer parfois à finir un travail commencé mais qui ne prend pas forme ?

18. Lorsque je fais passer un élève au tableau pour une correction d'exercice, cela prend beaucoup de temps. Car parfois il faut reprendre toute la correction. Que faire ? Continuer à faire passer les élèves au tableau ou faut-il corriger les exercices avec l'ensemble de la classe ?

19. J'ai pris du retard par rapport à ma progression. Je suis conscient que les devoirs à la maison doivent être courts et ont pour but la vérification de l'acquisition par les élèves des notions de cours. Vu le contexte, est-ce que je peux utiliser un DM pour compléter un cours (démonstration d'une propriété par exemple) ?

20. Pas de question.

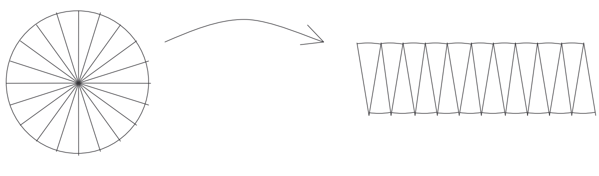
21. [Présent, mais pas de fiche]

22. [Absent]

23. ∅.

24. a) Peut-on traiter certaines parties du cours sous forme de DM ?

b) Peut-on partir de l'observation schématisée ci-après pour construire une activité amenant à calculer l'aire d'un cercle ?



25. [Présent, mais pas de fiche]

3.4. *De l'individuel au collectif : une ascèse formative*

Les questions formulées au fil des semaines par un élève professeur portent une charge significative d'informations à propos de leur auteur, ce que ce dernier peut ne pas percevoir ou ne percevoir que très partiellement. Ainsi a-t-on vu, chez Margot, une constante : à travers ses questions transparaît une attitude de réprobation un brin nostalgique et misonéiste à l'encontre de l'univers professionnel qu'elle découvre. Mais un tel apport informatif « clandestin » est en fait peu utilisé en formation : afin que les élèves professeurs censurent le moins possible l'expression des difficultés qu'ils rencontrent, les « questions de la semaine » ne sont pas commentées en tant que questions – et elles sont bien entendu exclues des pièces constituant le dossier de validation des professeurs stagiaires. Le matériel qu'elles constituent va être exploité bien différemment, au bénéfice de la formation *de la promotion toute entière* (et non pas seulement de leur auteur) et, par cette entremise, au service *de l'évolution de la profession* [24]. Cet objectif est visé à travers un dispositif clé, le *Forum des questions*, gouverné par un ensemble de principes relativement étrangers à la culture scolaire et universitaire encore dominante [25] : les questions formulées doivent être *prises au sérieux*, ce qui signifie que 1) toute question mérite *a priori* d'être examinée, travaillée, étudiée : il n'y a pas de question dénuée de sens ou d'intérêt ; 2) toute question – on l'a vu – doit être regardée comme un *écho* ou un *symptôme* d'au moins un *problème de la profession* ; 3) le formateur doit s'interdire, sauf exception [26], de répondre de façon immédiate : le principe de la *réponse différée* est fondateur – on ne répond pas du tac au tac à un problème de la profession ; 4) les questions d'un mardi matin donné sont mises en ligne avant la fin de la semaine : chaque participant au séminaire doit en prendre connaissance avant le mardi matin suivant.

3.5. Des constructions praxéologiques ouvertes mais solidaires

Une question se formule en mots ; une réponse, non. Car une réponse n'est pas, ou pas seulement, un discours ; c'est une praxéologie ou un fragment de praxéologie. La « réponse » mise en texte dans les notes du séminaire après avoir été présentée en séance n'est donc qu'un ensemble discursif qui suggère une praxéologie, en présente certains éléments, fournit des matériaux pour l'élaborer dans un registre de réalité qui reste celui de la pratique professionnelle des professeurs stagiaires. Une « réponse » au sens plein du terme ne « s'énoncera » que dans l'activité du professeur en relation avec sa classe et ses environnements essentiels : elle ne saurait sans perte se mettre en mots. Le séminaire (et/ou le GFP) se contentent donc d'apporter des « matériaux » pour construire une réponse, notée de façon générique $R^{\heartsuit}$, qu'il échoit à l'élève professeur d'élaborer au long cours pour son propre compte, non bien sûr en situation d'autarcie ou d'isolement praxéologique, mais dans une solidarité professionnelle que manifeste et autorise le travail collectif conduit dans la formation.

3.6. Dynamiques de construction et de déconstruction : un exemple

[24] L'évolution de la profession, ou plutôt la *construction continuée* de la profession, est visée ici, notamment, à travers la formation de ses nouveaux membres, porteurs de praxéologies professorales susceptibles de « percoler » à travers le monde professionnel : il s'agit là de la fonction normative qu'un IUFM se doit d'assumer, et qui est consubstantielle à sa nature d'école *normale* – qui concourt à la critique et à la définition toujours recommencée des *normes* de la profession.

[25] Tel du moins que nous avons pu l'observer *in vivo*, le formateur « traditionnel » aime exclusivement les questions pour lesquelles il dispose *a priori* d'une réponse (ce qui viole le principe 1 ci-après), et livre alors cette réponse immédiatement (ce qui viole le principe 3), en la regardant en outre comme réponse *à l'élève professeur*, et non *à la question posée* (ce qui viole le principe 2), et cela sans constituer de traces écrites (à l'adresse du collectif de travail) ni de la question ni de la réponse (ce qui viole le principe 4). Quant aux questions qui le mettent *hic et nunc* en échec, il les fuit, alors même qu'il repousse avec irritation les questions auxquelles il estime que l'auteur devrait avoir été capable de répondre sans le consulter, au vu du travail de formation déjà réalisé – situation qui peut être vécue comme une agression narcissique par le formateur, mais qui devrait avoir surtout la vertu de le rendre lucide sur l'état des connaissances des formés et donc mieux capable de poursuivre son action auprès d'eux.

[26] Il arrive que, à des fins conservatoires, une question appelle une réponse extemporanée. Cette dernière est alors, nécessairement, provisoire.

Pour illustrer – de manière forcément partielle – les dynamiques qu'engendre la problématique de formation précisée plus haut dans le cadre du dispositif du « Forum des questions », on s'arrêtera sur plusieurs des questions apportées par Margot. Lors de la séance 4, Margot rédige ainsi le texte suivant.

> En DM j'ai proposé aux élèves l'exercice suivant :
>
> 1. Simplifier $A = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
> 2. Trouver a et b tels que $A = \dfrac{1}{2}$.
>
> Un élève écrit :
>
> 1. $A = \dfrac{2a}{a-b}$
> 2. $A = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a}{a-b}$ donc $2a = 1$ et $a - b = 2$
>
> donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{3}{2}$
>
> et je vérifie $\dfrac{2a}{a-b} = \dfrac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}$.
>
> Je lui dis que les valeurs de a et b sont justes, qu'il ne s'agit que d'un exemple de couple solution et je rajoute que son raisonnement est faux : on n'a pas le droit de dire que, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *alors* $a = c$ et $b = d$. Il me répond : *Si ! On a le droit…* « Lorsqu'une des deux fractions ne contient pas d'inconnue et que l'on veut déterminer les inconnues présentes dans l'autre fraction, on peut faire comme ça ! » Que répondre ? Cette « méthode » permet en effet de déterminer un couple solution. Aurais-je dû mieux formuler ma question ? Comment contrer ce type de raisonnement dans le fond comme dans la forme ? (2005-2006, 2^{de}, semaine 4)

Cette question va recevoir une réponse extensive, dont l'un des objectifs est sans doute de faire passer ce message : il faut travailler les contenus mathématiques manipulés *beaucoup plus* que certains ne le font ; l'analyse *a priori* de ces contenus est *trop souvent insuffisante*. Le problème de la profession visé ici est, comme souvent, double : c'est d'abord le problème de la déconstruction (collective) de *l'illusion de maîtrise* des contenus mathématiques en tant qu'ils sont « à enseigner » ; c'est ensuite celui de la construction d'une praxéologie professionnelle qui, ayant renoncé à ce leurre, reconnaît en théorie comme en pratique que ce qu'il y a de problématique dans la classe, loin de tenir tout entier aux élèves, *est consubstantiel à la matière enseignée* : on ne domine pas des contenus mathématiques du seul fait qu'on croit « dominer » ceux à qui on les enseigne ! La maîtrise à rechercher par le professeur n'est cependant pas une maîtrise « abstraite », indéterminée (ce qui, au reste, n'aurait guère de sens) : c'est une maîtrise *didactique* de la matière mathématique qui doit être son but, et c'est dans cette perspective que s'inscrit la « réponse » apportée, fort longue, que pour cela nous scinderons en plusieurs morceaux.

a) L'exorde de la réponse montre comment une étude mathématique très simple aurait permis de prévoir le phénomène rencontré et comment la propriété mathématique ainsi dégagée aurait dû conduire à formuler une *alternative didactique* qui, en vérité, est inscrite *au cœur de la matière mathématique enseignée* – mais qui, apparemment, n'a pas été aperçue par Margot.

1. L'interrogation sur la manière de « contrer » le raisonnement de l'élève est symptomatique d'une double difficulté : la première se situe à l'étape de la *conception* (et de la programmation) du travail proposé aux élèves ; le second, lors de la *« correction » collective* de ce travail.

2. L'expression proposée, soit

$$A = f(a, b) = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

est homogène de degré 0, c'est-à-dire que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $f(ka, kb) = f(a, b)$. Si donc un certain couple (a_0, b_0) vérifie $f(a, b) = \frac{1}{2}$, il en ira de même d'une *infinité* de couples (a, b), à savoir les couples (ka_0, kb_0) pour $k \in \mathbb{R}^*$. En d'autres termes, une analyse *a priori* très simple – essentiellement mathématique – permettait de prévoir que la question de l'existence d'une infinité de solutions surgirait, quelles que soient les formes de sa manifestation.

3. Les choses étant ce qu'elles sont, deux choix s'offrent au professeur…

b) Le premier des deux choix invoqués est le plus simple ; il n'exige pas moins une certaine capacité d'analyse et d'*invention* mathématiques – ne serait-ce que pour « créer » un type de système d'équations à deux inconnues n'ayant qu'*une* solution dans $\mathbb{R}^2$. Ici, l'auteur de la réponse en rajoute, en vérité, en usant délibérément d'un outil mathématique certes rudimentaire, et autrefois classique, mais aujourd'hui à peu près inconnu des professeurs.

3. Les choses étant ce qu'elles sont, deux choix s'offrent au professeur. Premier choix : il *ne souhaite pas faire rencontrer* aux élèves une situation marquée par l'existence d'une *infinité* de solutions. Il doit alors proposer la résolution d'un *autre type* de systèmes d'équations, qui ait une solution unique.

① On aurait pu avoir par exemple ceci :

Résoudre le système : $\frac{x-3}{y+2} = \frac{1}{3}$; $\frac{x+3}{y-4} = 1$.

② Utilisons le résultat suivant (qu'on ne démontrera pas ici) :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ et, plus généralement, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$ (sous réserve bien sûr que tous ces quotients soient définis).

Comme on a $\frac{3x-9}{y+2} = \frac{x+3}{y-4} = 1$, il vient $\frac{3x-9}{y+2} = \frac{x+3}{y-4} = \frac{(3x-9)-(x+3)}{(y+2)-(y-4)} = \frac{2x-12}{6} = \frac{x}{3} - 2$ et donc $\frac{x}{3} - 2 = 1$, soit $x = 9$. On a alors $y - 4 = x + 3 = 12$, soit $y = 16$. Le couple (9, 16) est l'unique couple solution.

c) La deuxième possibilité, dans laquelle Margot s'est engagée sans en mesurer les conséquences, et peut-être sans les apercevoir, a un coût non négligeable. Elle suppose en particulier une analyse mathématico-didactique sérieuse des contenus enseignés. Cette analyse n'est ici qu'ébauchée – on n'en est encore qu'à la quatrième semaine de la formation. Mais le caractère détaillé de cette partie de la réponse témoigne de l'exigence posée [27].

4. La deuxième possibilité qui s'offre au professeur est d'assumer de faire rencontrer aux élèves la résolution d'un système ayant une *infinité* de solutions, mais en acceptant alors les principales

[27] Dans ce qui suit, l'affirmation que « la classe devra travailler *beaucoup plus* sur le travail des élèves » se réfère à ce qu'il est traditionnel d'appeler la *correction* des travaux des élèves : chaque élève (en principe) apporte à la question Q proposée (comment résoudre une certaine équation à deux inconnues ?) une réponse $R^\lozenge$ (la notation se lit « r poinçon ») ; la classe va alors, sous la direction du professeur, examiner ces réponses pour, en fin de compte, en tirer une réponse $R^\heartsuit$, le « corrigé », qui sera la réponse *de la classe*, et non plus de tel ou tel de ses membres (fût-il le professeur).

conséquences didactiques de cette (première) rencontre – notamment le fait que la classe devra travailler *beaucoup plus* sur le travail des élèves. Examinons rapidement ce que pourrait être un tel travail.

① Le résultat de la première question de l'étude mathématique proposée dans le DM conduit à résoudre l'équation $\frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$. D'une façon encore implicite, la classe se trouve confrontée ici au problème du choix de la *technique* à mettre en œuvre à propos de cette *tâche* dont le *type* peut être formulé ainsi :

T. Résoudre l'équation

$$\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où a, b, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul.

En réalité, dans le cas particulier examiné, la classe se trouve devant une tâche du sous-type suivant :

$T^\flat$. Résoudre l'équation

$$\frac{ax}{cx+dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit^\flat)$$

où a, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul.

② Le type de tâches $T^\flat$ est sans doute davantage de nature à solliciter l'usage de la technique que l'élève « incriminé » met en œuvre, et qui, dans le cas plus général de T, peut s'expliciter ainsi :

$\tau_\spadesuit$. Pour résoudre l'équation

$$\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où a, b, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul, on résout le système

$$\begin{cases} ax+by = u \\ cx+dy = v \end{cases} \qquad (\spadesuit).$$

③ Il est clair que, si (x_0, y_0) est une solution de $(\spadesuit)$, alors (x_0, y_0) est une solution de $(\heartsuit)$ – le seul problème pourrait surgir du fait que l'on aurait $cx_0 + dy_0 = 0$, mais cela n'est pas possible puisque, par hypothèse, $cx_0 + dy_0 = v$ avec $v \neq 0$. Insistons sur ce point : la technique mobilisée par l'élève *donne effectivement une solution de l'équation étudiée*.

④ Mais la réciproque est-elle vraie ? Le système $(\spadesuit)$ a-t-il exactement les mêmes solutions que le système $(\heartsuit)$? Sous l'impulsion du professeur, la question suivante doit être énoncée et examinée par la classe :

$Q^1_\spadesuit$. Lorsque le système $(\spadesuit)$ a une solution unique, le système $(\heartsuit)$ n'a-t-il que cette solution ou bien en existe-t-il d'autres ?

La question $Q^1_\spadesuit$ a une réponse facile : si (x_0, y_0) est une solution de $(\spadesuit)$, alors, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, (kx_0, ky_0) est aussi une solution de $(\heartsuit)$. C'est ainsi que l'égalité $\frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$, vérifiée pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{3}{2}$, est également vraie lorsque $a = 1$ et $b = -3$, ou lorsque $a = -2$ et $b = 6$, etc. Cette simple observation suffit à montrer que, quand bien même la technique $\tau_\spadesuit$ permet d'obtenir *une* solution de $(\heartsuit)$, elle ignore une *infinité* de solutions de $(\heartsuit)$!

⑤ Bien entendu, la conclusion précédente devrait conduire à cette autre question :

$Q^2_\spadesuit$. Les solutions du système $(\heartsuit)$ sont-elles toutes de la forme (kx_0, ky_0), où (x_0, y_0) est solution du système $(\spadesuit)$, ou bien y en a-t-il d'autres ?

On passera toutefois rapidement, ici, sur la suite de l'activité d'étude et de recherche qu'appelle $Q^2_\spadesuit$, question à laquelle devrait s'ajouter aussi la question suivante :

$Q^3_\spadesuit$. Si le système $(\spadesuit)$ n'a pas de solution, le système $(\heartsuit)$ peut-il tout de même en avoir ?

⑥ L'étude de ces questions pourrait conduire à établir (ou à rappeler) deux résultats technologiques essentiels :

θ_1. Les nombres X, Y, où $Y \neq 0$, vérifient l'égalité

$$\frac{X}{Y} = \frac{u}{v}$$

(où u, v sont des nombres déterminés, avec $v \neq 0$) si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\begin{cases} X = ku \\ Y = kv \end{cases}.$$

θ_2. Le système d'équations

$$\begin{cases} ax + by = U \\ cx + dy = V \end{cases}$$

(où a, b, c, d, U, V sont des nombres déterminés) possède une solution et une seule si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Ces éléments technologiques permettent en effet de produire et de justifier la technique suivante :

$\tau_\clubsuit$. Pour résoudre l'équation

$$\frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où a, b, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul, on résout le système

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \quad (\spadesuit).$$

Si celui-ci a une solution unique (x_0, y_0), toutes les solutions de l'équation $(\heartsuit)$ sont de la forme (kx_0, ky_0), où $k \in \mathbb{R}^*$.

⑦ Dans le cas proposé dans le DM, on trouve ainsi que l'équation (en a et b) $\frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$ a pour solution « particulière » le couple $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ et, pour « solution générale », les couples de la forme $\left(\frac{k}{2} ; -\frac{3k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}^*$.

d) La réponse rédigée se termine par l'évocation rapide d'une situation didactiquement *ouverte*, qui vient renforcer discrètement la « leçon » donnée jusque-là : si les décisions didactiques sont premières, elles n'en sont pas moins gouvernées souterrainement par les propriétés mathématiques des contenus sur lesquels elles portent, propriétés qu'il faut reconnaître afin d'optimiser ses décisions en fonction de son projet d'enseignement.

5. La dynamique d'une étude n'est jamais complètement déterminée *a priori*. Le professeur, dirigeant l'étude, peut ainsi vouloir limiter son développement à la simple observation que, si la technique $\tau_\spadesuit$ fournit une solution, elle n'en fournit en elle-même qu'*une*, et souhaiter lancer alors l'étude vers la recherche d'une technique *alternative*, qui en même temps éclaire, si possible, le phénomène évoqué plus haut – toute solution de $(\heartsuit)$ est de la forme (kx_0, ky_0), où $k \in \mathbb{R}^*$ et où (x_0, y_0) est une solution particulière de l'équation $(\heartsuit)$.

① En s'appuyant sur les réponses $R^\Diamond$ d'autres élèves, il sera sans doute possible de mettre en évidence la technique suivante :

$\tau_\heartsuit$. Pour résoudre l'équation

$$\frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{u}{v} \qquad (\heartsuit)$$

où a, b, c, d, u, v sont des nombres déterminés, avec c et d non tous deux nuls et v non nul, on recherche les solutions (x, y) de l'équation à *deux* inconnues

$$v(ax + by) - u(cx + dy) = 0$$

vérifiant $cx + dy \neq 0$.

② Cette technique renvoie donc à la résolution d'*une* équation à *deux* inconnues, de la forme $(va - uc)x + (vb - ud)y = 0$. Dans le cas de l'équation $\frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$ du DM, il vient ainsi $3a + b = 0$, ce qui donne $b = -3a$, etc.

③ Sur la forme $3a + b = 0$, il apparaît clairement que si (a_0, b_0) est un couple solution, alors tout couple (ka_0, kb_0), où $k \in \mathbb{R}^*$, est solution. Une *« interprétation » géométrique* éclaire la chose : l'équation $(va - uc)x + (vb - ud)y = 0$ est, *sauf exception*, celle d'une droite d'équation réduite $y = -\frac{va-uc}{vb-ud}x$, c'est-à-dire d'une droite *passant par l'origine*, les couples (x, y) solutions étant les coordonnées des points de cette droite, *à l'exception de l'origine du repère*.

④ Bien entendu, on devra aussi explorer les cas exceptionnels. En outre, et d'une manière plus générale, l'étude devra procéder, non sur des formes littérales (ainsi qu'on l'a fait ici), mais à partir de *spécimens numériques*. Ainsi l'étude de l'équation

$$\frac{2x+y}{3x+2y} = \frac{1}{2}$$

qui conduit à l'équation $x = 0$, et a donc pour solution tous les couples $(0, y)$, où $y \in \mathbb{R}^*$, peut-elle permettre d'identifier le cas où s'annule le coefficient de y dans l'équation $(va - uc)x + (vb - ud)y = 0$, etc.

⑤ Mais cette équation même ne devra éventuellement être proposée par le professeur qu'après que la classe aura cherché *sans succès* un spécimen adéquat répondant à la condition envisagée – de la même façon que les questions $Q_\spadesuit^j$ évoquées plus haut devraient, sauf exception, naître de la dynamique de l'étude pilotée par le professeur, et non être introduites *ex abrupto* par celui-ci…

3.7. Déconstruire pour reconstruire : le problème des rumeurs professionnelles

Poursuivons avec Margot. Lors de la huitième semaine, elle rédige la question suivante.

Sur le chapitre de généralités sur les fonctions, quelles techniques les élèves doivent-ils connaître au sujet de la variation des fonctions ? Mon livre ne fait utiliser que la lecture graphique. La méthode « algébrique » (montrer que, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$, etc.) est-elle encore au programme de 2[de] ? (2005-2006, 2[de], semaine 8)

On aperçoit à nouveau, en filigrane, la prévention de Margot à l'encontre de l'état (supposé) de l'enseignement des mathématiques dans lequel elle entre comme professeur et qu'elle oppose discrètement à celui qu'elle a connu comme élève.

a) Les « problèmes de la profession » auxquels l'auteur de la réponse va s'attacher sont pourtant formellement autres. Le premier tient à la difficulté qu'ont nombre de professeurs à assumer le pacte républicain d'enseignement inscrit dans les programmes, ce qui se traduit concrètement par une méconnaissance parfois poussée du programme de la classe. Le deuxième problème est lié au premier : cette situation de sous-information devient situation de désinformation dès lors qu'*on prétend savoir*, alimentant ainsi les rumeurs qui courent dans les salles des professeurs de façon à la fois fantaisiste et intéressée – pour Margot, par exemple, la rumeur à laquelle elle fait allusion a le mérite de conforter son misonéisme professionnel [28]. Dans une première partie de la réponse, Margot va donc recevoir une volée de bois vert.

[28] Le problème des rumeurs dans la profession, qui apparaît lié à un lourd retard de développement historique, est travaillé au long cours dans la formation. Notons que ces rumeurs « professionnelles » sont parfois *mathématiques* : pour un exemple, voir Chevallard 2006a.

❶ L'interprétation du programme qui transparaît dans la question posée (et peut-être dans le manuel de la classe concernée) *n'est pas correcte*. Un commentaire du programme de 2[de] précise en effet :

On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.

❷ « Une définition formelle est ici attendue » : cette injonction dénuée d'ambiguïté appelle une définition telle la suivante :

On dit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I si, pour tous x_1, $x_2 \in$ I tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$.

Il serait donc fautif – et coupable – de répandre le bruit que la définition « algébrique » ne serait plus au programme de 2[de].

b) Même si elle est une projection imaginaire, la rumeur a pourtant une racine dans la réalité. Ce germe de réalité est explicité dans la suite de la réponse : la rumeur est une formulation d'une exigence bien réelle, dont elle traduit en même temps la sous-compréhension dans la culture de la profession : comme toute entité mathématique, la notion de monotonie d'une fonction doit faire l'objet d'un enseignement *fonctionnel*, qui en montre l'utilité dans la connaissance et dans l'action. Dans cette perspective, la formulation algébrique de la monotonie *ne saurait être un point de départ* : elle doit advenir dans la classe comme la mathématisation utile d'une propriété dont il s'agit d'abord de faire apparaître en quoi elle change les choses, et donc en quoi elle importe.

c) Pour illustrer cette problématique, le formateur va prendre appui sur un travail antérieur – réalisé lors de la séance 7 du séminaire – dont on reproduit d'abord ici le compte rendu, afin d'éclairer la suite de l'affaire et pointer en passant le système des conditions et contraintes sous lesquelles se développent les dynamiques de formation impulsées et régulées dans le séminaire du mardi matin.

• La contrainte évoquée ici est souvent mal comprise. Elle se manifeste à travers des gestes réflexes – on réduit les fractions, on développe et on ordonne les expressions algébriques, on chasse les radicaux du dénominateur des fractions, etc. – qui, dans une certaine culture mathématique scolaire, constituent comme une seconde nature, et sur les raisons d'être desquels on ne s'interroge donc plus guère – en s'abusant souvent quand, d'aventure, on le fait.

① Pourquoi par exemple pousse-t-on, dans la culture mathématique commune, à ne pas laisser l'expression numérique

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

en l'état, mais à la mettre sous la forme « simplifiée »

$$A = \sqrt{3} - 1 \text{ ?}$$

Une réponse fréquemment donnée est que cela faciliterait le calcul de valeurs approchées de A. Cette réponse a perdu de sa pertinence aujourd'hui : la calculatrice affiche immédiatement un nombre de décimales dont le calcul, autrefois, n'était souvent pas même envisagé, au moins au secondaire. Ainsi obtient-on

0,73205080756887729352744634150587…

pour l'une et l'autre expressions !

➊ Il y a plus : il ***n'est pas vrai*** que la forme que nous appellerons ***canonique*** de A soit la plus adéquate quand on veut déterminer des valeurs décimales approchées de A. Supposons ainsi que nous calculions en prenant pour valeur approchée de $\sqrt{3}$ le décimal 1,7. Il vient :

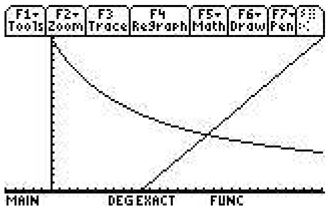
$$\sqrt{3}-1 \approx 0{,}7\ ;\ \frac{2}{\sqrt{3}+1} \approx \frac{2}{2{,}7} = 0{,}74074\ldots$$

On voit que la seconde valeur est bien meilleure : l'erreur est, dans le premier cas, presque 3,7 fois plus importante que dans le second cas.

➋ L'explication est facile dès qu'on dispose de la notion de ***fonction***. Posons

$$f(x) = x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{2}{x+1}.$$

On voit que la première valeur approchée de A n'est autre que $f(1{,}7)$, tandis que la seconde est $g(1{,}7)$. Or f croît et g décroît dans un intervalle contenant $\sqrt{3}$ et 1,7, ce que confirment les représentations graphiques de f et g ci-après.



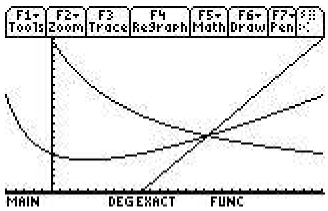
Comme $1{,}7 < \sqrt{3}$, on pouvait ainsi ***prévoir*** que l'on aurait (ainsi qu'on l'a constaté)

$$0{,}7 = f(1{,}7) < f(\sqrt{3}) = A = g(\sqrt{3}) < g(1{,}7) < 0{,}741.$$

Surtout, on peut penser à fabriquer une autre fonction, f_1, telle que $f_1(\sqrt{3}) = A$, et qui, pour $x = 1{,}7$, donne une valeur plus proche de A que $f(1{,}7)$ et $g(1{,}7)$. Posons en effet

$$f_1 = \frac{f+g}{2}.$$

La représentation graphique de f_1 montre que cette fonction est croissante dans un intervalle contenant 1,7 et $\sqrt{3}$ (ce qu'on admettra provisoirement).



Ces courbes montrent aussi que, lorsqu'on prend 1,7 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$, l'expression

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

est « meilleure » pour calculer la valeur de A que l'expression $\sqrt{3}-1$. On a de fait :

$$f_1(1{,}7) = \frac{1{,}7-1}{2} + \frac{1}{1{,}7+1} = 0{,}35 + \frac{1}{2{,}7} = 0{,}720\ldots$$

➌ Ce qui précède fournit l'encadrement : $f_1(1{,}7) < A < g(1{,}7)$. On a :

$$f_1(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\frac{x^2+1}{x+1}.$$

Posons $f_2 = \frac{f_1+g}{2}$. On obtient ici $f_2(1{,}7) = 0{,}175 + \frac{1}{5{,}4} + \frac{1}{2{,}7} = 0{,}175 + \frac{1}{1{,}8} > 0{,}73\ldots$ On a $f_2(x) = \frac{1}{4}\frac{x^2+5}{x+1}$; on peut établir que l'on a :

$$\frac{f_2(x') - f_2(x)}{x' - x} = \frac{(x'+1)(x+1)}{4}[(x'-x)(x+1) + x^2 + 2x - 5].$$

Comme, pour $x > 1{,}5$, on a $x^2 + 2x - 5 > 0{,}25$, on peut conclure que f_2 est croissante pour $x > 1{,}5$, et on peut donc prendre pour valeur approchée de A

$$g_1(1{,}7) = \frac{1}{2}f_2(1{,}7) + \frac{1}{2}g(1{,}7) = 0{,}0875 + \frac{1}{10{,}8} + \frac{1}{5{,}4} + \frac{1}{2{,}7} = 0{,}0875 + \frac{7}{10{,}8} = 0{,}735\ldots$$

On a ici $g_1(x) = \frac{1}{8}\frac{x^2+13}{x+1}$; un calcul analogue au précédent montre que g_1 décroît dans un intervalle contenant 1,7 et $\sqrt{3}$, en sorte qu'on peut conclure que $0{,}73 < A < 0{,}736$. On voit en passant qu'il est inepte de prétendre que la précision de la valeur calculée « ne saurait être meilleure que celle des valeurs à partir desquelles on calcule » : tout dépend du procédé de calcul !

d) Voici alors le réemploi que le formateur fait du travail précédent, pour illustrer l'exigence de fonctionnalité soulignée plus haut.

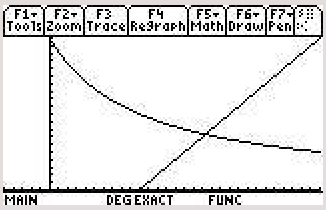
❸ Ce qui est vrai en revanche – mais il ne devrait plus être nécessaire de le répéter ! –, c'est qu'il ne saurait être question, pour le professeur, d'introduire *ex abrupto* la définition précédente. Il convient d'abord de faire *rencontrer à la classe le phénomène de la croissance* comme *explicatif* de certains autres phénomènes regardés comme *à expliquer*. Cette rencontre se fera de préférence de manière *graphique*, exactement comme il en allait dans l'exemple travaillé lors de la séance 7 du Séminaire, dont on a reproduit ci-après les traces écrites figurant dans les notes de ladite séance (notes auxquelles on se reportera pour une information plus complète) :

❶ … Supposons ainsi que nous calculions en prenant pour valeur approchée de $\sqrt{3}$ le décimal 1,7. Il vient : $\sqrt{3} - 1 \approx 0{,}7$; $\frac{2}{\sqrt{3}+1} \approx \frac{2}{2{,}7} = 0{,}74074\ldots$ On voit que la seconde valeur est bien meilleure : l'erreur est, dans le premier cas, presque 3,7 fois plus importante que dans le second cas.

❷ L'explication est facile dès qu'on dispose de la notion de *fonction*. Posons

$$f(x) = x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{2}{x+1}.$$

On voit que la première valeur approchée de A n'est autre que $f(1{,}7)$, tandis que la seconde est $g(1{,}7)$. Or f croît et g décroît dans un intervalle contenant $\sqrt{3}$ et 1,7, ce que confirment les représentations graphiques de f et g ci-après.

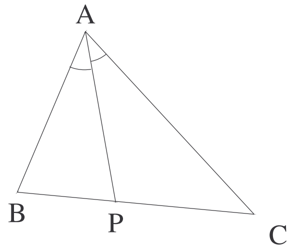


Comme $1{,}7 < \sqrt{3}$, on pouvait ainsi *prévoir* qu'on aurait (ainsi qu'on l'a constaté) : $0{,}7 = f(1{,}7) < f(\sqrt{3}) = A = g(\sqrt{3}) < g(1{,}7) < 0{,}741$.

❹ Ce n'est qu'après qu'on aura ainsi rencontré *graphiquement* une telle *raison d'être* de la notion de fonction croissante (ou décroissante) qu'on posera le problème de formuler *analytiquement* le phénomène de croissance (et de décroissance) : comment exprimer – « avec des x et des y » – le fait que, par exemple, la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{2}{x+1}$ est représentée par une courbe qui « descend » ?… Ce que dit le programme, c'est que ce problème devra être posé – et résolu !

3.8. Un problème de la profession : « démontrer »

Une autre question de Margot fera l'objet d'un travail en séminaire : sa question de la semaine 22, que l'on reproduit ci-après.

> Soit ABC un triangle quelconque. Notons P le point d'intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ avec [BC]. Comment prouver que $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$? (2005-2006, 2^{de}, semaine 22)
>
> 
>

On l'a vu, Margot a, de façon répétée, formulé des questions (que nous rappelons ci-après) à propos de la présence des *démonstrations* dans l'enseignement qu'elle doit donner.

> 2. Comment faire pour justifier les propriétés et théorèmes du chapitre d'arithmétique du programme de 2^{de} (nombres premiers, etc.), autrement que par des exemples ? N'est-ce pas gênant de ne rien démontrer alors que, dans le chapitre « Géométrie du plan », on demande aux élèves de faire des démonstrations ?
>
> 5. Peut-on demander aux élèves d'effectuer des démonstrations pour justifier, par exemple, les règles d'ordre ?
>
> 7. Je commence un chapitre sur les configurations du plan essentiellement basé sur des révisions du collège et dont le but est d'apprendre à effectuer des démonstrations. Comment « schématiser » une démonstration géométrique ? Comment peut-on expliquer un raisonnement ? Peut-on parler de logique ?
>
> 11. Un élève passe au tableau pour résoudre un exercice de géométrie. Il rédige sa solution, elle est juste, mais il y a plus rapide comme raisonnement. Un élève le fait remarquer oralement. Faut-il que cet autre raisonnement soit apparent au tableau ? Que les élèves en prennent note ?
>
> 17. Quelles sont les démonstrations de théorèmes exigibles au programme de 2^{de} ?

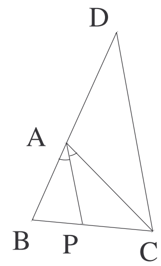
Le contraste est alors frappant entre ce souci constant affiché par Margot et le fait qu'elle révèle presque *in fine* sa propre difficulté à « produire » une démonstration. Sollicité, le responsable du séminaire répond qu'une démonstration, ou plutôt une déduction, est à portée de main dès lors qu'on veut bien faire un usage cohérent et persévérant de la notion de *question cruciale* introduite et travaillée dans le séminaire dès la séance 2, notion que Margot, à l'instar d'autres participants au séminaire, a pu ignorer en la tenant pour inutile – puisqu'elle l'ignorait jusqu'alors.

a) La réponse est l'occasion pour le responsable du séminaire de donner, alors que l'année s'achève, ce qui sera sans doute un ultime exemple de recherche de démonstration. Un premier parcours de recherche est présenté, qui suppose le théorème de Thalès, disponible depuis la classe de quatrième [29].

1. Comment déduire l'égalité indiquée dans la TGD ? Ou plutôt : comment découvrir une déduction de cette égalité dans la TGD ? Telle est la véritable question à examiner.

2. L'idée de *question cruciale* est ici la notion clé. Comment établir l'égalité de deux rapports de longueurs ?

① Une réponse possible est la suivante : en faisant apparaître ces rapports de longueurs comme les rapports dont parle le théorème de Thalès.



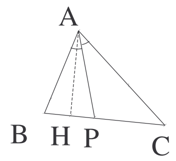
② Ici, le rapport $\frac{PB}{PC}$ se prête à une telle opération ; mais il n'en va pas de même du rapport $\frac{AB}{AC}$. Comment faire apparaître ce rapport sous une forme idoine ?

Soit *d* la parallèle à (AP) passant par C : *d* coupe (AB) en D. On est sûr – d'après le théorème de Thalès – que l'on a $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AD}$. Il reste alors à établir que AD = AC.

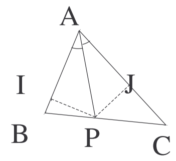
③ Comment faire cela ? En montrant que le triangle ACD est isocèle en A, et donc en montrant l'égalité d'angles $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$. Comment montrer cette égalité d'angles ? La réponse vient rapidement : le parallélisme de (AP) et (CD) permet de conclure que $\widehat{ACD} = \widehat{PAC}$ et que $\widehat{ADC} = \widehat{BAP}$. Comme, par hypothèse, on a $\widehat{BAP} = \widehat{PAC}$, l'affaire est faite !

b) Le parcours de recherche précédent est doublé par un autre, plus « archaïque », qui repose sur une théorie naïve des aires : c'est là une occasion supplémentaire de montrer le fonctionnement de la technique de recherche de démonstrations par questions cruciales.

3. Une autre réponse classique à la question « Comment établir l'égalité de deux rapports de longueurs ? » fait intervenir les aires : on cherche à interpréter les rapports de *longueurs* comme des rapports d'*aires*.



① Le rapport $\frac{PB}{PC}$ s'interprète immédiatement comme le rapport des aires des triangles ABP et PAC, comme le suggère le figure ci-contre :
on a en effet $\frac{PB}{PC} = \frac{PB \times AH}{PC \times AH} = \frac{\mathcal{A}(ABP)}{\mathcal{A}(PAC)}$.



② Comment interpréter le rapport $\frac{AB}{AC}$? Introduisons les projetés orthogonaux I et J et P sur (AB) et (AC). On a $\mathcal{A}(ABP) = \frac{1}{2}\, AB \times PI$, $\mathcal{A}(PAC) = \frac{1}{2}\, AC \times PJ$ en sorte que $\frac{\mathcal{A}(ABP)}{\mathcal{A}(PAC)} = \frac{AB}{AC} \times \frac{PI}{PJ}$; et l'affaire est faite en observant alors que, P étant sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$, on a PI = PJ.

Mais tout cela ne constitue guère que des fragments de la vie du séminaire du mardi matin, qu'on suivra maintenant au long d'une séance ordinaire.

4. Une séance ordinaire

[29] On désigne par TGD la « théorie géométrique disponible », c'est-à-dire l'organisation déductive construite jusque-là pour rendre raison des « faits spatiaux » : pour l'élève comme pour le professeur, la TGD ne cesse d'évoluer, au fil des années du cursus scolaire comme au cours même d'une année donnée.

4.1. Légendes scolaires, encore

Pour situer le forum des questions dans l'ensemble des « rubriques » du séminaire, on parcourt maintenant les notes d'*une* séance, la dixième de l'année 2005-2006. Ce jour-là, après la rubrique des *Questions de la semaine*, le programme de la séance fait apparaître une rubrique rarement présente, intitulée *Problématique et fonctionnement de la formation* : sa présence signale que le responsable du séminaire a éprouvé le besoin de procéder à diverses mises au point.

a) La première section figurant sous cette rubrique porte du reste un titre en forme de rappel à l'ordre : « Les programmes ! » D'emblée les choses sont dites sans détour.

> Plusieurs questions récentes conduisent à revenir sur la question des programmes (et, plus largement, des documents officiels), pour souligner encore le précepte suivant : lorsqu'un professeur se met en marche pour concevoir et planifier l'enseignement d'un thème mathématique donné, et notamment pour *déterminer l'organisation mathématique locale* (OML) qui répondra à ce thème d'études, le premier geste à accomplir est la *consultation du programme* de la classe, et non pas du *manuel* de la classe (ou d'autres manuels).

b) Pourquoi cette injonction ? Parce que le geste indiqué, clairement intégré à la pratique du professeur, le prémunit au moins en partie contre les rumeurs professionnelles. À titre d'illustration, la question suivante est examinée.

> J'ai commencé avec mes élèves le chapitre « Théorème de Pythagore ». Lors de la détermination de la longueur de côtés d'un triangle rectangle, je leur ai expliqué que, lorsqu'on connaît le carré d'un nombre, on appuie sur la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice pour trouver ce nombre. Plusieurs d'entre eux parlent de « racine carrée » et veulent écrire par exemple : $BC^2 = 25$ donc $BC = \sqrt{25} = 5$. Puis-je leur permettre d'écrire cela (sachant que ce n'est pas, je pense, au programme de parler de racines carrées) ? (2005-2006, 4^e, semaine 9)

L'affaire est vite conclue : l'examen du programme fait apparaître une « compétence exigible » dont la description a été libellée ainsi par les rédacteurs du programme [30] : « Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la *racine carrée* d'un nombre positif. » De même, le programme comporte ce commentaire : « Le théorème de Pythagore fournit l'occasion de calculer des *racines carrées* de nombres positifs dans des cas qui relèvent d'une situation où le nombre calculé a une signification que l'élève peut identifier. » Et encore celui-ci : « On peut aussi rattacher le calcul d'une *racine carrée* à des problèmes où interviennent l'aire d'un carré et la mesure de son côté. » Dans une autre partie du programme, à propos du calcul littéral, on trouve de même cette autre compétence exigible : « Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient, *racine carrée*...). » Le responsable du séminaire note sèchement :

> Conclusion : il est parfaitement normal que, en 4^e, les élèves (et les professeurs) « parlent de "racine carrée" et [écrivent] par exemple : $BC^2 = 25$ donc $BC = \sqrt{25} = 5$ ».

c) Une seconde question appelle des remarques analogues ; la voici.

[30] Ici et dans les citations qui suivent, c'est nous qui soulignons.

Certains termes mathématiques comme « antécédent », « projection orthogonale », « contraposée » ne sont plus aux programmes des classes de collège ou lycée alors que les notions correspondantes le sont. De plus, certains élèves connaissent ces termes et demandent si c'est la même chose. Je suis obligée alors d'expliciter pour éviter toute confusion. Pourquoi ces termes ont-ils été enlevés des programmes ? (2005-2006, 2^{de}, semaine 9)

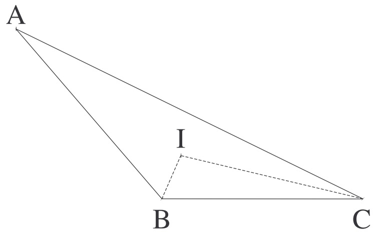
La culture de l'à-peu-près si propice aux rumeurs apparaît ici particulièrement dommageable ! Une mise à l'épreuve par consultation des textes officiels est donc réalisée aussitôt. « À propos de fonction définie par une courbe, précise le document qui accompagne le programme de seconde, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'images et d'*antécédents*, ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.)… » Pour ce qui est des projections, il suffit, semblablement, d'observer que l'un des « thèmes d'étude » proposé (au choix) par le programme concerne les « *projections orthogonales* d'une sphère ou d'un disque sur un plan » ; ou encore de noter cet autre passage du document d'accompagnement : « Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels *s'enroule* sur le cercle et comment varient les *projections* de l'extrémité d'un arc AM en fonction de la longueur de cet arc. » La situation est différente, on va le voir, avec la question de la « contraposée ».

4.2. Construire la profession : une nécessaire prise de parti

Si les éléments de réponse apportés aux professeurs stagiaires dans ce qui précède ne font guère difficulté (on s'y borne à rappeler les injonctions officielles), il n'en va pas toujours ainsi. Construire la profession, c'est bien entendu la co-construire de façon solidaire. Mais quelles que soient les formes de cette solidarité, ce processus historique suppose, de la part des instances normatives qui participent à cette construction commune, de proposer – éventuellement contre d'autres propositions, certaines compatibles, d'autres contradictoires – des matériaux praxéologiques dont le destin percolatif dans la profession est en vérité rien moins qu'assuré. La question relative à la contraposée est à cet égard, sur un mode en apparence mineur, un cas typique.

a) « Le terme de “contraposée” relève d'un cas de figure un peu différent », précise ainsi la réponse rédigée par le responsable du séminaire. Il est vrai, d'abord, que les textes officiels n'en font pas mention. Ces textes, en revanche, parlent sans barguigner de « raisonnement par l'absurde », comme il en va dans cet extrait du document d'accompagnement du programme de troisième : « [Les élèves] ont rencontré et ont eu l'occasion d'élaborer, au cours de démonstrations, différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction […], infirmation par mise en évidence d'un contre-exemple, approche *du raisonnement par l'absurde lorsqu'il s'agit de reconnaître si une configuration est une configuration de Thalès ou si un triangle est rectangle*. »

b) L'introduction du terme de contraposée est, dans la culture des professeurs, un fait récent, et malheureux en ce qu'il masque le fait *mathématiquement* essentiel : qu'un triangle de côtés 10, 15, 18 (par exemple) n'est pas rectangle se déduit du *théorème de Pythagore*, « tout court » ! Quant à la contraposée d'une implication $p \Rightarrow q$, elle est *logiquement* équivalente à cette implication et est donc *mathématiquement inessentielle*, en sorte qu'on aura tout dit en énonçant que le fait que tel triangle n'est pas rectangle *se déduit du théorème de Pythagore par un raisonnement par l'absurde* (comme le fait, on l'a vu, le document d'accompagnement). C'est cette déduction (à partir du théorème de Pythagore) et la manière de la réaliser (par un raisonnement par l'absurde, ou, si l'on veut, « par contraposition ») qui importent. À cet égard, le rédacteur des notes propose un développement que l'on reproduit plus complètement [31].

> Sur ce vocable [contraposée], de fait, les deux ensembles de textes – relatifs respectivement au collège et à la classe de 2[de] – sont muets. Mais on se rappellera ici (voir l'exposé 12, dû à […]) que l'emploi du mot cité a été *fortement déconseillé* : chaque fois qu'on serait tenté d'en user, on en remplacera l'usage par le recours à un *« raisonnement par contraposition »* énoncé explicitement, comme par exemple celui-ci : *Si ce triangle, dont les côtés mesurent 10, 15, 18, était rectangle, on aurait* $18^2 = 10^2 + 15^2$. *Or on a* $18^2 = 324$ *et* $10^2 + 15^2 = 325 \neq 324$. *Donc ce triangle n'est pas rectangle.* Cela noté, on se rappellera aussi que le raisonnement « par contraposition » peut être regardé comme un *raisonnement par l'absurde*. Le raisonnement par contraposition, en effet, s'énonce dans sa généralité ainsi : *Si p alors q. Or non-q. Donc non-p*. Le raisonnement par l'absurde est *a priori* plus large ; on peut l'énoncer formellement ainsi : *Si p alors q et non-q. Donc non-p*. La différence *fonctionnelle* entre les deux formes est la suivante : dans un raisonnement *par contraposition*, on *connaît a priori* une certaine implication *Si p alors q* (il s'agira par exemple du théorème de Pythagore), en sorte que *q* est fixée ; dans un raisonnement *par l'absurde*, où on cherche à prouver que *non-p*, on recherche pour cela une proposition *q* telle qu'on puisse établir que l'on a tout à la fois *Si p alors q* et *Si p alors non-q*, l'une de ces deux implications étant vraie, en général, parce que son conséquent (*q* pour la première, *non-q* pour la seconde) *est connu par ailleurs pour être vrai*. Considérons par exemple le triangle ABC ci-après, où I est le point de concours des bissectrices, et soit *p* la proposition « les bissectrices (BI) et (CI) sont perpendiculaires ».
>
> 
>
>
> Montrons par l'absurde que *p* est faux. Soit *q* la proposition « $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} \neq 180°$ » : on sait qu'elle est *vraie* comme conséquence du fait bien connu que « la somme des angles d'un triangle est de 180° ». Par ailleurs, montrons que *p* implique *non-q*, c'est-à-dire que *si le triangle* BIC *est rectangle, alors* $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$. Dans le triangle (supposé) rectangle BIC, on a en effet $\widehat{IBC} + \widehat{BCI} = 90°$, et il vient donc : $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 2\widehat{IBC} + 2\widehat{BCI} = 2(\widehat{IBC} + \widehat{BCI}) = 2 \times 90° = 180°$, CQFD.

c) On rencontre ainsi un grand problème de la profession, celui de l'enseignement des *outils logiques et ostensifs* du travail mathématique. Son abord dans le cadre de la formation oblige ici à souligner que sa résolution en est aujourd'hui gênée par la croyance, très prégnante encore dans la profession (où elle s'est répandue à l'occasion de la réforme des mathématiques modernes dans la période 1968-1978), du caractère quasi vital que revêtirait *l'hypercorrection langagière* dans la prophylaxie des « erreurs ». Ce serait en apportant à l'élève – *pour lui en imposer l'usage* – des formes *rigides*, supposées *univoques*, que l'on (re)dresserait son esprit, toujours prompt à s'égarer et à battre la campagne. Dans le sillage de cette croyance générale, élément théorique clé d'une certaine didactique proposée aux professeurs, on trouve notamment, au niveau technologico-technique, et en ce qui concerne le travail de déduction mathématique, des formats démonstratifs diffusés par certains manuels dont le plus célèbre peut-être consiste en l'imposition uniforme du schéma à trous « On sait que… / Si… alors / Donc… » [32]. Ces pratiques, qui s'efforcent de refouler les mésusages spontanés de la raison établie, s'articulent à l'idée que les usages ordinaires de la déduction

---

[31] Sur le dispositif des *exposés*, mentionné ici en passant, voir *infra*, la sous-section 4.7.

[32] Voir par exemple l'ouvrage *Mathématiques 5[e]* de la collection « Triangle » (publiée chez Hatier), édition 2006, p. 169.

seraient intrinsèquement suspects, parce qu'il existerait un hiatus radical entre « logiques de la vie quotidienne » et « logiques du travail mathématique », ce que « prouverait » ce fait que le principe exprimé au Moyen Âge par la formule *ex falso sequitur quodlibet* (si p est faux, alors n'importe quel q en résulte) ne vaudrait pas dans la vie quotidienne. Ces points de vue, qui tentent d'éconduire magiquement les usages « naturels » de la raison, oublient que ces usages-là sont, tout autant que les usages « mathématiques », des construits praxéologiques déterminés par certains ensembles de conditions et de contraintes de l'activité humaine et qu'il convient de *retravailler* (et non de tenter d'éradiquer à force de rites) lorsque les conditions et contraintes sous lesquelles on doit les mobiliser *changent*. Si, par exemple, des étudiants peuvent se tromper lorsqu'on leur demande quels sont les entiers n compris entre 1 et 20 qui vérifient la proposition « Si n est pair, alors $n + 1$ est premier » (il y a souvent, en ce cas, scotomisation des entiers n impairs), il n'en va plus de même lorsqu'on aborde cette question en cherchant à déterminer les entiers pour lesquels la proposition est *fausse* – à savoir les entiers *pairs* tels pourtant que leur successeur ne soit pas premier, soit 8, 14, 20 (ce qui fournit aussitôt, par complémentation, les entiers n demandés). Discontinuité là, continuité ici : la thèse discontinuiste – qui s'oppose à une vision *transformatrice* de l'outillage logique – apparaît ainsi bien fragile ! Notons que le *travail des formes langagières*, indispensable pour que les transformations visées s'accomplissent, mais que réduit à rien l'imposition d'une rhétorique unique (pourtant bien éphémère dans le cursus des études !), était autrefois la règle plutôt que l'exception. C'est ainsi que, dans ses *Notions de logique formelle* (1967), Joseph Dopp offrait pour formulations « rhétoriques » de l'implication $p \Rightarrow q$ le florilège suivant [33] : « Si p, alors q » ; « p suffit pour que q » ; « p n'est pas vrai sans que q ne soit vrai » ; « p seulement si q » ; « p n'est vrai que si q est vrai » ; « p suppose q » ; « non-p à moins que q » ; « q, si p » ; « q dès que p » ; « q pourvu que p » ; « q est nécessaire pour que p » ; « q à moins que non-p » ; « q sauf si non-p » ; « non-p suffit pour que non-p ». On voit ici comment une très ancienne production conceptuelle – *ex falso…* – vient travailler en retour la raison ordinaire, tout cela se situant au plus loin de l'effort pour installer chez l'élève une raison schizophrène… Alors en effet qu'il peut paraître d'abord excéder la raison ordinaire, ce réglage logique s'impose ainsi presque naturellement à elle – non pour la contredire, mais pour l'expliciter : si l'on veut que $p \Rightarrow q$ ait toujours une (et une seule) des deux valeurs de vérité classiques, et si, comme le suggère la raison ordinaire, on la reconnaît fausse si, et *seulement si*, p est vraie et q fausse, alors elle doit être regardée comme vraie *dans tous les autres cas*.

4.3. Les Archives du Séminaire

Lors de la séance dont on suit ici les traces écrites, le responsable du séminaire, on l'a noté, a décidé de « remettre les pendules à l'heure ». Non seulement, laisse-t-il entendre, les élèves professeurs lui paraissent négliger les textes officiels – dont la consultation suffit à renvoyer au néant bien des légendes scolaires naissantes ou indurées –, mais ils négligent aussi un dispositif qui, en réalité, n'a été mis en place qu'à la rentrée 2005 : les *Archives du Séminaire*. Dès la « rentrée pédagogique » (qui, cette année-là, a eu lieu le 31 août), chaque élève professeur a reçu un cédérom comportant les notes des cinq dernières années du séminaire du mardi matin, de 2000-2001 à 2004-2005, sous la forme de cinq fichiers d'environ cinq cents pages chacun. Ces fichiers, on l'imagine, regorgent d'informations, d'analyses, de propositions. Pour inciter les participants à en faire le meilleur usage, la rubrique *Problématique et fonctionnement de la formation* se poursuit alors par une section intitulée

[33] Dopp 1967, p. 38.

« Les archives du Séminaire, encore et encore », qui s'ouvre par ces mots : « Les archives du Séminaire sont à interroger *en priorité* quand on rencontre une difficulté. »

a) Pour illustrer ce principe, un premier exemple est proposé : la difficulté déjà signalée concernant le mot « antécédent », à laquelle les notes du séminaire de l'année 2002-2003 consacrait déjà un développement, en réponse à la question que voici (la récurrence du « symptôme » étant l'indice fort d'un « problème de la profession »).

> Existe-t-il des documents sur les programmes plus détaillés que les programmes officiels ? Certaines notions apparaissent dans tous les livres sans être explicitement au programme : la limite est parfois floue. Exemple : le mot « antécédent » en 2^{de}. (2002-2003, 2^{de}, semaine 10)

La présentation de la réponse apportée – que nous omettrons ici – est alors suivie de cette recommandation, où pointe à nouveau le souci d'enrichir la culture de la profession (par le truchement des professeurs stagiaires).

> Il faut prendre l'habitude de fureter, de fouiner dans les archives : ce que la langue anglaise désigne par le verbe *to browse* – qui signifie, au sens propre, « brouter, paître » et, au sens figuré, rechercher dans un livre (idée qu'a reprise le langage informatique il y a quelques décennies).

b) Ce précepte est illustré sur un nouvel exemple, qu'apporte une autre question.

> Pensez-vous qu'il vaut mieux commencer par les puissances de 10 ou par les puissances d'exposant entier ? Je suis censé, selon la progression commune établie dans le collège, traiter ces deux notions dans le même chapitre. (2005-2006, 4^e, semaine 9)

La même source – les notes du Séminaire 2002-2003 – dispense des éléments de réponse relatifs à tout un ensemble de questions formulées, cette année-là, lors d'une même séance !

> 1. Le programme de 4^e notifie les puissances de 10 avant la notion de puissance. Cela sous-entend-il dans l'organisation du thème qu'il faille traiter les puissances de 10 avant les puissances ? (2002-2003, 4^e, semaine 13)
>
> 2. Dans le chapitre « Puissances », faut-il commencer par les puissances de 10, ou par les puissances d'un nombre quelconque et ensuite travailler sur les puissances de 10 considérées alors comme un cas particulier très utile ? (2002-2003, 4^e, semaine 13)
>
> 3. J'ai voulu séparer en deux chapitres non consécutifs les puissances de 10 et les puissances d'un nombre quelconque afin d'alléger ce chapitre et d'aborder les puissances d'un nombre quelconque (exemples numériques) après que celui sur les puissances de 10 a été « digéré ». Se pose alors le problème de l'introduction de la formule $(10^n)^m = 10^{n\times m}$ (pour n, $m \in \mathbb{Z}$). L'égalité $(10^4)^{-2} = \frac{1}{(10^4)^2}$ ne peut pas être justifiée sans les puissances d'un nombre quelconque. (2002-2003, 4^e, 13)
>
> 4. Dans mon chapitre sur les puissances, j'ai eu la difficulté suivante : j'ai choisi de traiter les puissances de 10 avant les puissances d'entiers relatifs. J'ai alors été confrontée au problème d'introduction de $(10^m)^p = 10^{m\times p}$: en effet, cela cadre plutôt avec les puissances d'entiers relatifs. Comment y remédier ? (2002-2003, 4^e, semaine 13)

Comme presque toujours, la réponse commence par interroger les textes officiels, dont l'examen livre une première conclusion – le caractère erroné de certaines affirmations « rumorales » contenues dans les questions examinées.

Observons d'abord que la question qui nous intéresse apparaît comme un *thème* dans le *secteur* « Nombres et calcul numérique » du domaine des *travaux numériques*. Cela fait, il convient surtout de souligner que ce thème d'études est intitulé *« Puissances d'exposant entier relatif »* : il se définit donc d'entrée de jeu par la référence aux nombres de la forme a^n (où $a \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{Z}$), et pas seulement par rapport aux puissances de 10. *Il n'est donc pas exact* de dire que le programme de 4^e^ mentionne « les puissances de 10 avant la notion de puissance » ! En revanche, il est vrai que, *dans le cadre de l'étude des nombres* a^n, « les activités insisteront sur l'usage des puissances de dix », lesquelles doivent ainsi occuper *l'essentiel du temps d'étude alloué au thème*. Mais cela ne signifie pas non plus que l'on soit tenu de « commencer par les puissances de 10 » : on peut aussi bien commencer « par les puissances d'un nombre quelconque et ensuite travailler sur les puissances de 10 »…

Parvenu à cette conclusion, le répondant s'emploie alors à travailler sur un autre grand problème de la profession, dont l'une des formes est l'automatisme de pensée suivant : si un type de tâches T (ici, le calcul sur des expressions numériques de la forme $(10^n)^m$, où n, $m \in \mathbb{Z}$) possède, dans le programme, une généralisation $T^\#$ (ici, le calcul sur des expressions de la forme a^m, où $a \in \mathbb{Z}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$), on ne saurait étudier T qu'à titre de cas particulier de $T^\#$, soit, en conséquence, « après avoir étudié $T^\#$ ». Sur ce point, le propos du formateur se fait plus ferme encore.

L'argument selon lequel la considération d'égalités telles que $(10^3)^4 = 10^{12}$ ou $(10^4)^{-2} = 10^{-8}$ supposerait la notion « générale » de puissance d'un nombre relatif relève d'une vision des mathématiques comme construction *a priori* que l'on dévoilerait en partant du plus général pour en faire dériver le plus particulier : il s'agit là d'une conception où l'on suppose l'histoire faite, au lieu de la regarder comme « à revivre ». Tout à rebours, on peut envisager de travailler d'abord sur les puissances de 10 (on établira alors par exemple que $10^3 \times 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$, etc.), puis sur les *puissances des puissances de 10* (ce qui conduira à observer que, en écrivant $(10^3)^2$ le produit $10^3 \times 10^3$, on arrive à $(10^3)^2 = 10^6 = 10^{3\times2}$, etc.), avant de généraliser aux puissances d'un entier non nul quelconque (par exemple). Dans tous les cas, même si l'on a d'abord travaillé sur les nombres a^n (avec a relatif non nul quelconque et $n \in \mathbb{Z}$), il conviendra encore de *motiver* l'étude du cas particulier $a = 10$ (qui conduira bien sûr à s'intéresser plus généralement au cas $a = 10^p$, avec $p \in \mathbb{Z}$)…

c) Un dernier exemple est proposé, apporté par la question suivante.

En ce qui concerne le domaine de définition d'une fonction, je n'ai pas compris l'objectif du programme. Il faut bien sûr en parler aux élèves et leur demander de justifier l'existence de ce domaine mais doivent-ils la trouver par eux-mêmes ? Est-ce une compétence exigible ? (2005-2006, 2^de^, semaine 9)

À nouveau, la consultation des archives du séminaire, et plus exactement celle des notes de l'année 2002-2003 toujours, ramène un viatique précieux. Tout d'abord, comme précédemment, on y constate la récurrence du problème rencontré, comme l'atteste ce bloc de questions.

1. Y a-t-il une notation spécifique en 2^de^ pour le domaine de définition ? J'ai personnellement introduit la notation que j'avais apprise en 2^de^ ($\mathcal{D}_f$), mais je me suis aperçu que dans tous les livres on parle de $\mathcal{E}$, et que les élèves redoublants connaissent aussi cette notation. Est-ce que cela a un intérêt pédagogique ou est-ce juste une différence de notation sans intérêt ? (2002-2003, 2^de^, semaine 8)

2. Le programme de 2^de^ n'est pas très clair, je trouve, sur la notion d'ensemble de définition. On m'a expliqué que cette notion avait été supprimée, puis réintégrée dans les programmes, mais qu'on avait voulu « alléger » le programme à ce sujet. Que dois-je attendre de mes élèves ? (2002-2003, 2^de^, semaine 9)

3. Dans le programme de 2^de^, il est explicitement écrit que l'on ne fera pas d'exercices sur l'ensemble de définition. Pourtant il me paraît important pour les classes supérieures (filières S et ES) de savoir trouver un ensemble de définition pour des fractions ou des radicaux. De plus, lorsqu'on résout $\frac{ax+b}{cx+d}$ $=, \leq, \geq 0$, on doit parler de « valeur interdite ». (2002-2003, 2^de^, semaine 11)

La réponse apportée alors situe le changement évoqué dans une durée plus longue – en omettant, non sans tact, de préciser que ce changement ne devrait pas en être un pour la plupart des élèves professeurs, étant donné leur âge [34].

1. Le changement de notation est lié au fait qu'on ne parle plus comme autrefois de *domaine* de définition mais d'*ensemble* de définition : la lettre $\mathcal{D}$ est alors naturellement remplacée par la lettre $\mathcal{E}$. On notera, au reste, que le mot de « domaine », qui désigne classiquement une partie *ouverte et connexe* d'un espace topologique, ne convenait pas, par exemple, pour désigner un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

2. On notera surtout ce que disait *déjà* l'ancien programme de la classe de 2^de^ :

[Le programme] ne porte que sur *l'étude d'exemples* et se place dans le cadre des *fonctions définies sur un intervalle* ; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction...). Le plus souvent, l'intervalle d'étude sera indiqué lors de la définition de la fonction considérée. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles : on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles ; on ne multipliera pas de tels exemples.

On observera ici, notamment, l'emploi de l'expression « ensemble de définition » en lieu et place de l'ancien « domaine de définition », et l'exhortation à ne pas céder à la tentation de l'étude formelle de l'ensemble de définition « maximal » d'une fonction donnée par son expression algébrique – type de tâches qui, en une évolution spontanée quelque peu pathologique, avait autrefois reçu, dans les classes de 2^de^, un développement très excessif.

3. On notera que ce sont en fait les rédacteurs des programmes du début des années 1980 qui ont voulu donné un coup d'arrêt à l'excessif développement de la pratique systématique de rechercher le « domaine de définition » de fonctions données par leur expression analytique. C'est alors en effet qu'apparaît l'injonction sans appel, reconduite programme après programme, de placer l'étude à conduire « dans le cadre des *fonctions définies sur un intervalle* », injonction reprise sous une forme à peine allégée par l'actuel programme de 2^de^, lequel énonce ceci :

À l'occasion de tous ces exemples, on abordera la notion d'ensemble de définition. On évitera les exercices systématiques de détermination d'ensemble de définition ; dans la plupart des cas, on le donnera. En dehors de quelques exemples où celui-ci pourra être fini (cas de fonctions du temps du type « nombre de mariages en fonction de l'année » où la variable est discrète et les graphiques correspondants parfois continus !), ce sera toujours un intervalle ou la réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Ensuite, une indication clé est donnée pour que chacun des élèves professeurs intervenant en seconde construise dans sa classe une réponse appropriée.

4. En pratique, la recherche de l'ensemble « maximal » sur lequel une expression donnée est définie doit rester exceptionnelle. On demandera en revanche aux élèves de se rendre capable de vérifier, chaque fois qu'une fonction est donnée par son expression algébrique, que cette fonction est bien définie sur tel intervalle *donné* sur lequel on souhaiterait *a priori* – à tort ou à raison – l'étudier. Une telle étude peut conduire alors à scinder l'intervalle en deux sous-intervalles disjoints, ou à en rejeter une partie, etc. Ce qu'illustrent les problèmes ci-après :

Dans chacun des cas suivants, la formule algébrique permet-elle de définir une fonction sur l'intervalle I ?

[34] On rencontre ici le problème de la gestion des évolutions curriculaires, traditionnellement marquées par une longue rémanence des pratiques de classe établies.

a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$; $I =]0, +\infty[$

b) $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{x^2-4}$; $I =]-2, 5[$.

Bien entendu, on devra soigneusement doser la quantité d'exercices formels du type précédent, sous peine de voir refleurir la domaine-de-définitionite qui sévit jadis si lourdement.

4.4. Observer & analyser

La séance va se poursuivre avec une rubrique clé du séminaire : *Observation & analyse*. Le « problème de la profession » qui est au cœur du travail est celui de la construction d'une technique d'analyse didactique des séances et suites de séances de classe. Lors de cette séance 10, le problème est étudié à propos du compte rendu d'une séance observée dans une classe de 4^{e} le vendredi 21 janvier 2005 de 14 h à 15 h. Ce compte rendu, qui a pour titre *À propos des médianes d'un triangle*, a déjà fait l'objet d'un travail lors de la séance précédente du séminaire, où les participants ont analysé les sept premiers paragraphes – que l'on reproduit ici sans commentaire [35].

[1] 14 h 04. Les élèves entrent, s'installent, se tiennent debout puis, sur injonction de P, s'assoient. P demande s'il y a des absents. D'autres élèves arrivent. (La sonnerie du collège est en panne, ce qui ne facilite pas la ponctualité.) P demande le silence : « On peut commencer ? »

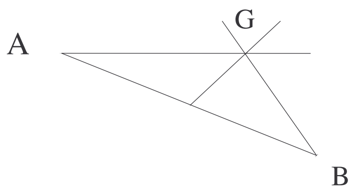
[2] P s'enquiert si des élèves ont encore leur DM à rendre : deux élèves se signalent. P précise que, comme quelques élèves étaient absents hier, on explique rapidement ce qu'on a fait. « On a travaillé sur les médianes. Qui rappelle ce qu'on a appris ? » Une élève précise la définition de la médiane puis on rappelle le concours des médianes au point G, centre de gravité. P rappelle le tracé de la médiane.

[3] On reprend la feuille d'activité de la veille pour y envisager l'activité 7 (voir ci-après). Il est 14 h 08. P : « Vous regardez l'activité 7, qui s'appelle *Position du centre de gravité sur chacune des médianes.* » P fait la figure au tableau. Un élève lit l'énoncé du problème. P reprend, explicite, commente : il y a une seule solution, « on va tous obtenir le même point C ».

[4] Une élève répond à la question posée – construire le point C connaissant A, B et G – en donnant le début d'un procédé de construction. P fait rappeler par un élève que G est intérieur au triangle ABC. Un dialogue vivant s'instaure. On prend le milieu de [AB]. Peut-on construire les médianes ? Non ! P : « Je vous laisse un peu réfléchir… »

[5] L'élève qui avait lu l'énoncé intervient spontanément : « On n'a pas toutes les données !… » Il est 14 h 12. Murmures de travail.

[6] P : « Qui a une idée ? » Un élève, qu'elle envoie au tableau, dit qu'on peut construire les trois médianes – contrairement à ce qu'affirment certains, souligne P.

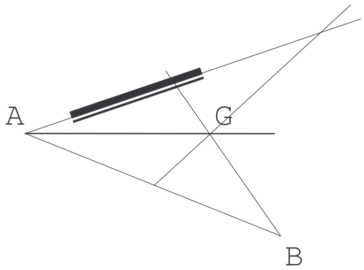


[7] L'élève au tableau met en place le milieu de [AB]. P conteste sa manière de faire ; il recommence, cette fois correctement, mais il est gêné par le bas du tableau, trop proche de son dessin…

a) Le travail de la séance 10 commence par l'analyse des trois paragraphes qui suivent.

[35] Pour préserver son anonymat, le professeur observé, une élève professeure de la promotion 2004-2005, est uniformément nommé P dans ce qui suit.

[8] Il est 14 h 18. « Voilà ! Ça devrait être bon ! » P souligne qu'on a ainsi la 3^{e} médiane, bien qu'on n'ait pas le point C. « Comment construire le point C ? » Plusieurs doigts se lèvent. C est sur la médiane, mais où ? L'idée s'exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue…



[9] P : « Il faudrait qu'on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » P fait observer qu'alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.

[10] On passe à l'étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. P a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. P leur montre comment placer le milieu à l'aide du quadrillage. Il est 14 h 24.

b) D'une manière générale, l'analyse à élaborer est scindée en quatre rubriques : *Structure et contenu de la séance*, *Organisation mathématique*, *Organisation didactique*, *Gestion de la séance*. Les notes du séminaire recensent les éléments d'analyse ci-après, que l'on laissera le lecteur découvrir par lui-même.

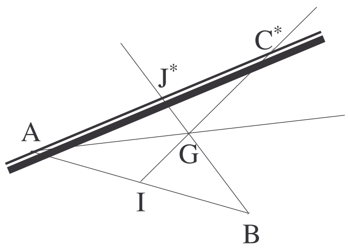
Structure et contenu de la séance

➔ L'épisode examiné participe d'une activité d'étude et de recherche dont l'objet est la résolution du problème suivant : déterminer le sommet C, supposé perdu, d'un triangle ABC dont on connaît le centre de gravité G et les sommets A et B.

➔ Un premier sous-épisode, narré dans les paragraphes 8 et 9, voit la classe proposer des directions d'attaque du problème. Un second sous-épisode d'étude et de recherche est alors lancé par P, *motu proprio*, à propos du problème suivant : quelle est la position du centre de gravité sur la médiane ?

Organisation mathématique

➔ Dans cet épisode de classe, plusieurs organisations mathématiques *potentielles* affleurent autour du type de tâches $T_{C?}$. Une première OMP potentielle $[T_{C?}/\tau_{C?}^{*}/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$ intègrerait ainsi une technique $\tau_{C?}^{*}$ de construction *approchée*, consistant à faire tourner la règle *graduée* autour du point A jusqu'à ce que les points C^{*} et J^{*} d'intersection du bord de la règle avec, respectivement, la droite (IG) et la droite (BG), soient situés de façon que J^{*} apparaisse (sur la graduation de la règle) comme très voisin du milieu de $[AC^{*}]$ (voir la figure ci-dessous).



➔ Une deuxième OMP potentielle est ébauchée à travers la formulation d'une conjecture technologique $\theta_{C?}^{**}$: G serait au milieu de [IC]. La technique $\tau_{C?}^{**}$ correspondante, qui semble évidente à P, est laissée implicite dans la classe. Cette OMP, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}^{**}/\theta_{C?}^{**}/\Theta_{C?}]$, est, sur l'injonction de P, abandonnée dans cet état.

➔ La construction d'une troisième OMP potentielle est lancée par P, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$, et dont la technologie $\theta_{C?}$ devrait préciser la position de G sur [IC].

➔ Une ultime organisation mathématique apparaît, en fin d'épisode, autour du type de tâches suivant : étant donné deux points d'un quadrillage, marquer le milieu du segment dont ces points sont les extrémités. Le compte rendu ne dit rien sur la technique mise en place et sa justification éventuelle.

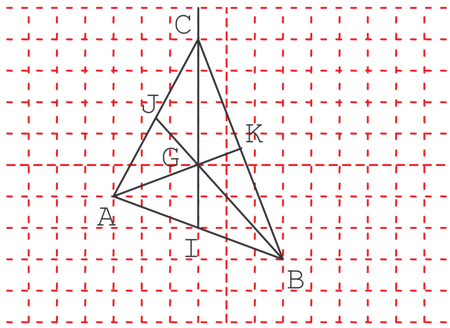
Organisation didactique

➔ L'épisode relève en son entier du *moment de l'émergence d'une technique* $\tau_{C?}$ ainsi que, corrélativement et partiellement, du *moment technologique*.

➔ Les propositions techniques ou technologico-techniques des élèves sont sollicitées et brièvement examinées par P, de façon soit explicite (c'est le cas de la technique $\tau_{C?}^{*}$), soit implicite (cas de la technique $\tau_{C?}^{**}$) : le *débat* à leur endroit est des plus réduits.

➔ La direction de l'étude par P joue un rôle essentiel dans le passage – relativement immotivé, semble-t-il, pour la classe – du premier sous-épisode au second, qui sera consacré à l'étude d'un élément technologique *supposé* clé. On doit noter, à ce propos, le dissociation du *topos* de P et du *topos* des élèves : pour P, la recherche technologique lancée doit aboutir à un résultat classique, que P sait producteur d'une technique $\tau_{C?}$ adéquate ; pour les élèves, il y a là au mieux une conjecture. On peut, en vérité, penser que nombre d'entre eux se guident en l'espèce sur le désir de P, non sur l'analyse objective de la situation d'étude et de recherche.

➔ L'étude de la position de G sur la médiane se présente d'abord comme expérimentale. L'expérimentation utilise un quadrillage (voir la figure ci-contre). Ce choix n'est pas le fruit d'une délibération collective : il apparaît entièrement comme celui de P, qui a de même assumé la préparation pratique du « montage expérimental » – qui se réduit ici aux figures dessinées sur le tableau (sur un volet quadrillé de celui-ci), ainsi que sur la feuille de travail distribuée aux élèves.



Gestion de la séance

➔ La gestion de l'épisode est sans doute déséquilibrée par le désir de P d'en venir à ce qui, institutionnellement, semble motiver toute la séance : établir le résultat classique sur la position de G.

➔ Ce déséquilibre conduit notamment à ne pas approfondir les apports de la classe. Ainsi la proposition concernant la technique $\tau_{C?}^{*}$ ne fait-elle pas l'objet d'une analyse mettant en jeu la distinction entre construction *exacte* et construction *approchée*, analyse qui permettrait seule de justifier son rejet (car elle constitue un procédé *approché* tout à fait acceptable).

➔ Il en va de même de la technique $\tau_{C?}^{**}$: celle-ci aurait pu être le point de départ d'une étude expérimentale conçue par la classe, avec l'aide de P (par exemple pour l'idée, peut-être encore trop peu familière, d'user d'un quadrillage), conduisant à établir que la conjecture formulée à l'emporte-pièce par une élève (« Au milieu ! ») est en vérité erronée, et amenant la classe, au-delà, vers d'autres conjectures formulées en termes de rapports numériques « simples » et chaque fois dûment soumis à l'expérience.

4.5. Analyser une organisation mathématique

Lors de la séance 6, soit plusieurs semaines auparavant, les paragraphes 5 à 10 du compte rendu avaient fait l'objet d'un travail des participants au séminaire, qui avaient choisi d'opérer seuls pour huit d'entre eux, tandis que les autres se regroupaient en 17 binômes et 3 trinômes. La consigne était alors simplement de donner, pour chacune des quatre rubriques usuelles d'une analyse, *une* indication relevant de cette rubrique. Lors de la séance 10, le responsable du séminaire rend compte du contenu des fiches à propos de la rubrique *Organisation mathématique*. Le « rapport de correction » intégré dans les notes de cette séance s'ouvre par un rappel de la consigne, et annonce un bilan mitigé (où le sigle OM désigne une organisation mathématique).

> La rubrique *Organisation mathématique* doit en principe mentionner à la fois les OM en cours de construction durant l'épisode étudié et les principales OM antérieurement construites (ou simplement introduites au cours de l'épisode) et qui sont mobilisées comme outils du travail mathématique. Le contenus des travaux réalisés – il y a maintenant longtemps – reste à cet égard loin de l'objectif à atteindre. Rappelons que la consigne était de préciser « au moins une indication relevant de chacune des quatre rubriques habituelles », et donc en particulier de la rubrique *Organisation mathématique*.

a) Le responsable note d'abord que certaines fiches s'en tiennent prudemment à repérer des *types de tâches*, comme dans les extraits suivants par exemple : « construction des médianes connaissant un côté et le centre de gravité », « construire à la règle et au compas le 3^{e} sommet d'un triangle connaissant un côté et le centre de gravité », « placer le milieu d'un segment à l'aide du quadrillage ». Bien moins nombreux sont les essais relatifs aux *techniques*. Plusieurs d'entre eux montrent au reste une confusion « qu'il faudra apprendre à éviter » entre technique et *technologie*, comme le montre l'extrait suivant.

> Type de tâches : Tracer les médianes du triangle.
>
> Technique : ~~une médiane passe par le centre de gravité et par le milieu d'un côté~~
>
> Technologie : • une médiane passe par le centre de gravité et par le milieu d'un côté.
> • les trois médianes concourent au point G, centre de gravité.

En ce cas, le rapport de correction précise ce qu'auraient pu être des formulations correctes – « quelque chose comme ceci » :

> Type de tâches : Tracer les médianes d'un triangle dont on connaît deux sommets et le centre de gravité.
>
> Technique : 1) Marquer le milieu du côté connu ;
>
> 2) tracer les droites passant par les sommets connus et le centre de gravité et la droite passant par le milieu du côté connu et le centre de gravité.
>
> Technologie : La médiane issue d'un sommet passe par ce sommet, par le centre de gravité du triangle et par le milieu du côté opposé.

Nombre de formulations, en vérité, sont *« insuffisamment précises »*, à l'instar des suivantes.

> Type de tâches : Construire les médianes d'un triangle.
>
> Technique : Construction à la règle.
>
> Technologie : définition de la médiane ; propriété de G.

Le rapport de correction conclut que, par rapport à cet état de choses, un « effort sensible » doit être fait quant à la « *description précise* tant du type de tâches que de la technique ou des énoncés technologiques et théoriques. »

b) D’autres tendances lourdes sont relevées. Ainsi de la propension à « confondre l’organisation mathématique qui se met en place et l’organisation didactique qui permet cette mise en place ». Ce type de confusions est illustré par le fragment de réponse que voici.

> Type de tâches : construire à la règle et au compas le 3e sommet d’un triangle connaissant un côté et le centre de gravité du triangle.
>
> Technique : émettre une conjecture quant à la position du centre de gravité sur la médiane d’un triangle.

« Ici, précise le rapport de correction, la prétendue technique est une technique *didactique*, c’est-à-dire une technique d’étude et de recherche, pour trouver le résultat technologique clé qui permet de produire et de justifier la technique *mathématique* attendue. » Par contraste, « le bilan de l’analyse » aurait dû « avoir à peu près le contenu suivant » :

> *Type de tâches*. Construire à la règle et au compas le 3e sommet d’un triangle connaissant un côté et le centre de gravité du triangle.
>
> *Technique*. 1) Marquer le milieu I du côté connu ;
>
> 2) sur la droite (IG), du côté de G ne contenant pas I, marquer C tel que GC = 2GI.
>
> *Technologie*. Le centre de gravité d’un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers de la longueur à partir du sommet.

La confusion de l’organisation *mathématique* et de l’organisation *didactique*, souligne le rapport de correction, « est plus nette encore dans le cas suivant », où, en outre, « les éléments de technique didactique indiqués ne se rapportent nullement à la tâche didactique considérée », qui est d’étudier la position du centre de gravité sur une médiane.

> Type de problème : trouver la position du centre de gravité sur les médianes.
>
> Technique : les élèves tentent des techniques graphiques : faire glisser la règle, tracer les médianes.

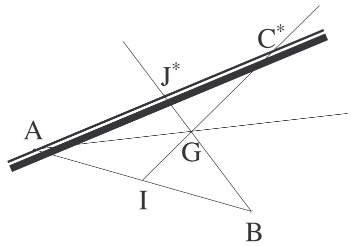
c) Une autre tendance lourde, déjà pointée dans une séance précédente du séminaire, est soulignée : la *tentation narrative*, que manifeste par exemple la réponse suivante : « La recherche avec les élèves porte d’abord sur l’appartenance du sommet à une médiane puis sur la position du centre de gravité sur cette médiane. » En conclusion, les élèves professeurs sont invités à examiner attentivement « les notes relatives à l’organisation mathématique que proposent d’une part le résumé de la séance 8, d’autre part le présent résumé », notes que le rapport de correction rassemble en une forme de « corrigé » du travail demandé, que l’on reproduit ci-après.

> *Organisation mathématique*
>
> ➔ L’organisation mathématique ponctuelle qui émerge, $[T_{me/\{A, B, G\}}/\tau_{me/\{A, B, G\}}/\theta/\Theta]$, semble suggérée plutôt qu’explicitée. En particulier, le résultat technologique clé mis en jeu n’est pas nettement formulé :
>
> $\theta_{me/\{A, B, G\}}$. La droite support de la médiane issue d’un sommet peut être déterminé de deux façons (outre sa définition usuelle comme droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé) : comme la droite passant par le sommet considéré et par le centre de gravité, ou comme la droite passant par le milieu du côté opposé et par le centre de gravité.
>
> Ce résultat se déduit du concours des médianes au centre de gravité ; mais cette déduction semble elle-même être tenue pour aller de soi.

➔ S'agissant de la technique τ_M relative au type de tâches T_M de détermination graphique du milieu d'un segment donné, P intervient pour rectifier une manière de faire qu'elle juge inadéquate. Le compte rendu ne dit rien ni sur cette inadéquation, ni sur ce qui fonde, au plan de la technologie, la « bonne » manière de faire à laquelle P ramène l'élève. Il ne précise pas davantage τ_M elle-même. On peut donc écrire ainsi *l'organisation mathématique ponctuelle* constituée autour du « point » que constitue l'unique type de tâches T_M : $[T_M/\tau_M/\theta/\Theta]$.

➔ Dans cet épisode de classe, plusieurs organisations mathématiques *potentielles* affleurent autour du type de tâches $T_{C?}$. Une première OMP potentielle $[T_{C?}/\tau_{C?}^*/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$ intègrerait une technique $\tau_{C?}^*$ de construction *approchée*, consistant à faire tourner la règle *graduée* autour du point A jusqu'à ce que les points C^* et J^* d'intersection du bord de la règle avec, respectivement, la droite (IG) et la droite (BG), soient situés de façon que J^* apparaisse (sur la graduation de la règle) comme très voisin du milieu de $[AC^*]$ (voir la figure ci-dessous).

➔ Une deuxième OMP potentielle est ébauchée, à travers la formulation d'une conjecture technologique $\theta_{C?}^{**}$: G serait au milieu de [IC]. La technique $\tau_{C?}^{**}$, qui semble évidente à P, est laissée implicite dans la classe. Cette OMP, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}^{**}/\theta_{C?}^{**}/\Theta_{C?}]$, est, sur l'injonction de P, abandonnée dans cet état.



➔ La construction d'une troisième OMP potentielle est lancée par P, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$, et dont la technologie $\theta_{C?}$ devrait préciser la position de G sur [IC].

➔ Une ultime organisation mathématique apparaît, en fin d'épisode, autour du type de tâches suivant : étant donné deux points d'un quadrillage, marquer le milieu du segment dont ces points sont les extrémités. Le compte rendu ne dit rien sur la technique mise en place et sa justification éventuelle.

4.6. Pour une culture de la profession

Le travail sur l'analyse d'une organisation mathématique réalisé jusque-là est complété par l'examen d'une question posée à la séance précédente.

Doit-on à chaque outil technologique associer une tâche et une technique ? Exemple :

θ_1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$ (à rédiger)

T. Identifier les éléments d'une fraction

τ. Le numérateur est l'élément du haut ; le numérateur est l'élément du haut

Ou dois-je laisser θ_1 et passer à θ_2 ? En résumé, a-t-on toujours le triptyque $[\theta, T, \tau]$? (2005-2006, 4e, semaine 9)

a) La réponse apportée rectifie d'abord une maladresse, involontaire sans doute, mais non dénuée d'ambiguïté, dans la notation employée : l'organisation mathématique ponctuelle constituée autour d'un type de tâches T « se note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ » ; le fait de « "partir" de θ peut laisser entendre que θ "vient avant", ce dont il faut se garder ». Puis le répondant s'attaque à la difficulté soulevée en précisant le type de tâches principal qui motive l'accomplissement du type de tâches T examiné.

On suppose ici que l'on se réfère à des quotients d'entiers ou de décimaux. Le nombre que l'on note $\frac{a}{b}$ est, *par définition*, le nombre qui, multiplié par b, donne a ; en d'autres termes, c'est le nombre qui, multiplié par le *dénominateur*, donne le *numérateur*. Le *type de tâches* « identifier le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire » est certainement un type de tâches à maîtriser – et cela, dès l'année de 6e.

b) Mais la *technique* τ à mettre en jeu est plus complexe que la question ne l'évoque : car le programme du cycle central du collège « n'écarte pas l'usage de la notation / (la barre oblique, appelée aussi, en anglais, *solidus*) », ainsi qu'il ressort de ce passage de l'*Introduction* du programme.

Le vocabulaire et les notations seront introduits, comme en sixième, au fur et à mesure de leur utilité : la notation cos, les symboles $\sqrt{\ }$, ≥, ≤, ≈, et les notations a^n et a^{-n} ; il y aura également lieu de familiariser les élèves avec le décodage de calculs utilisant pour la division les symboles ÷ et /.

La technologie θ de la technique τ est en conséquence plus complexe aussi. Identifier le numérateur – le « haut » – et le dénominateur – le « bas » – « ne pose guère de problèmes lorsqu'on utilise la barre horizontale ». Mais il en va autrement avec la barre oblique : « quel est le "haut", c'est-à-dire le "devant", de l'écriture 2 + 3/5, par exemple ? » Pour éclairer cette question, appel est fait à l'histoire, et plus précisément au « célèbre ouvrage [de Florian Cajori,] *A History of Mathematical Notations* (1928-1929) », où on peut lire ceci.

Alexander Macfarlane [*Lectures on Ten British Physicists*, New York, 1919] adds that Stokes wished the solidus to take the place of the horizontal bar, and accordingly proposed that the terms immediately preceding and following be welded into one, the welding action to be arrested by a period. For example, $m^2 - n^2/m^2 + n^2$ was to mean $(m^2 - n^2)/(m^2 + n^2)$, and a/bcd to mean $\frac{a}{bcd}$, but $a/bc \cdot d$ to mean $\frac{a}{bc}d$. "This solidus notation for algebraic expressions occurring in the text has since been used in the *Encyclopaedia Britannica*, in Wiedemann's *Annalen* and quite generally in mathematical literature." It was recommended in 1915 by the Council of the London Mathematical Society to be used in the current text.

c) Le répondant précise toutefois que « le type de tâches *T* évoqué ici pourrait peut-être être "oublié" dans une 4e ne présentant pas de lourds déficits en la matière ». Car, d'une façon générale, « ce que l'on *explicite* de θ au moment de "mettre en forme" » l'organisation mathématique en cours de construction « peut varier beaucoup ». En revanche, souligne-t-il, il est un élément technologique qui gagnerait certainement à être explicité : ce sont, tout bonnement, les *noms* donnés au « haut » et au « bas » – *numérateur* et *dénominateur* –, qui font alors l'objet du commentaire linguistique et historique que voici.

On peut utilement préciser, ici, que le dénominateur *« dénomme »*, tandis que le numérateur *« nombre »*, c'est-à-dire compte. Ainsi l'écriture $\frac{3}{5}$ désigne-t-elle *trois* « parties de l'unité » qui, en l'espèce, sont des *cinquièmes*, tandis que $\frac{5}{16}$ est l'écriture fractionnaire d'un nombre qu'elle décrit comme *cinq seizièmes* : « seizième » est la dénomination des parties de l'unité considérée, et « cinq » est le nombre de telles parties que l'on « prend ». Dans son *Liber abbaci* (1202), Fibonacci (1170-1250) écrit ainsi (en latin, traduction personnelle) : « Quand, au-dessus d'un nombre quelconque, apparaît une barre, et, que, au-dessus de celle-ci, un autre nombre quelconque est écrit, le nombre du dessus désigne la part ou les parts du nombre du dessous ; le nombre du dessous est appelé dénominateur, le nombre du dessus numérateur. »

Le souci de donner à la culture professionnelle en voie de définition une profondeur historique et historiographique est patent. La réponse se termine, au reste, sur une longue citation des « pages d'histoire des mathématiques » (*History of Mathematics Pages*) « rédigées par un professeur de *high school* américain, Jeff Miller », lequel, sur la question des écritures fractionnaires, « s'appuie d'ailleurs essentiellement sur le livre de Cajori ».

4.7. Les « exposés du jour »

Après les rubriques *Problématique et fonctionnement de la formation* et *Observation & analyse*, la séance 10 fait place à une troisième rubrique régulière dont le titre – *Forum des questions : exposés du jour* – demande à être commenté. Il s'agit d'un forum des questions particulier, où des questions censées répondre à des besoins des participants sont proposées par le responsable du séminaire. L'un des participants est alors désigné pour présenter, dans le cadre d'une séance ultérieure du séminaire, une synthèse des éléments de réponse à la question posée que contiennent les *archives du séminaire* déjà mentionnées. Ce jour-là, une élève professeure présente un « compte rendu de fouilles » portant sur le sujet suivant : « Que pourrait contenir l'analyse didactique du compte rendu d'une séance en classe de 3^e (consacrée au calcul sur les radicaux) qui a été diffusé lors de la séance 8 de ce séminaire ? » Le travail réalisé plus haut à propos d'une observation en 4^e l'année précédente est ainsi poursuivi sous une autre forme, à propos d'une séance observée en 3^e deux années auparavant et qui a fait l'objet d'une analyse consignée dans les notes du séminaire 2004-2005. La présentation orale sera doublée d'un texte mis en ligne de quelque quinze pages – longueur en vérité tout à fait exceptionnelle. À la suite de cette présentation, et avant de clore la séance, le responsable du séminaire précise les questions sur lesquelles les archives du séminaire devraient sous peu livrer leurs secrets.

5. Autour et au-delà du forum des questions

5.1. Situations d'étude et de recherche : un schéma générique

Le forum des questions n'est pas limité au séminaire du mardi matin : un « second forum » a lieu ainsi dans le cadre des GFP, où sont traitées en priorité les questions « vives », sur lesquelles une urgence particulière s'est manifestée – en principe toujours avec une semaine de mise à distance. L'essentiel du travail de formation relève donc du schéma générique par lequel on peut modéliser toute *situation d'étude et de recherche*, en quelque institution qu'elle se situe : il s'agit chaque fois d'apporter une réponse R à une certaine question Q, la réponse R étant une praxéologie ou une partie d'un ensemble praxéologique. Formellement, les choses peuvent s'écrire ainsi : $(S(X\,;\,Y\,;\,Q) \Rightarrow O_1, O_2, \ldots, O_m) \Rightarrow R^\heartsuit$. Ce petit formalisme indique qu'un collectif d'étude, X, encadré par un groupe d'aides à l'étude Y (comportant ou non un ou plusieurs *directeurs* d'étude), s'efforce d'apporter une réponse $R = R^\heartsuit$ à la question Q, en appuyant son travail sur des *œuvres* $O_1, O_2, \ldots, O_m$ qui constitue le *milieu* du travail d'étude et de recherche [36]. Les « œuvres » $O_1, O_2, \ldots, O_m$ sont de différentes sortes : un certain nombre

[36] La construction de ce milieu, l'identification des œuvres utiles et l'effort pour se les rendre disponibles échoient au système didactique $S(X, Y\,;\,Q)$ et, bien entendu, s'inscrivent dans la durée : seule la question Q est donnée au départ ; le reste est le fruit de l'activité du système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$. Le formalisme utilisé ici permet, notons-le au passage, de pointer l'origine de la dérive qui conduit à la problématique de la formation « par les œuvres » : alors que, dans la formation « par les questions », on part de Q, la formation par les œuvres tend à s'écrire : $(S(X\,;\,Y\,;\,?) \Rightarrow O_1, O_2, \ldots, O_m) \Rightarrow \ldots$ À la place d'une motivation « locale » – engendrée par Q –

d'entre elles, que l'on notera $R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge$, sont en fait des réponses à Q que l'on peut trouver dans la « culture ambiante », qu'il s'agisse de la culture mathématique, scientifique, ou autre. La formule précédente s'écrit alors :

$$(S(X, Y ; Q) \rightarrowtail R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m) \rightarrowtail R^\heartsuit.$$

5.2. L'exploitation personnelle des « Archives du Séminaire »

Ce schéma générique a maintes déclinaisons. Au-delà du forum des questions dans sa forme première, le dispositif des *archives du séminaire* est, de ce point de vue, mis à contribution de deux façons principales. Tout d'abord, on l'a vu plus haut, étant donné une question Q choisie en fonction des dynamiques de formation, un participant au séminaire « fouille » les archives pour en ramener au moins certains fragments de réponses $R^\lozenge$ produites par le travail des promotions précédentes. Mais les archives du séminaire sont là aussi pour être exploitées par les professeurs stagiaires dans leur travail personnel de conception et de création de l'enseignement qu'ils donnent dans la classe (ou les classes) dont ils ont la responsabilité aussi bien que dans le *travail d'étude et de recherche* (TER) qui donnera lieu à la rédaction et à la soutenance d'un *mémoire professionnel*. Concernant ces usages des archives, un questionnaire de fin d'année auquel les élèves professeurs ont répondu a suscité les commentaires suivants [37].

Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif*.

- Les archives ont été très bénéfiques pour mon travail tout au long de l'année, et notamment pour le TER, nous avons appris beaucoup de choses.
- Les exposés des séminaires (qui nous font découvrir la richesse des archives).

Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous a paru plutôt *négatif*.

- Ne pas avoir eu recours assez souvent et assez tôt dans l'année aux archives du séminaire lorsque je m'interrogeais sur telle ou telle question. Et avoir ainsi et de manière générale mis du temps à dépasser la barrière du vocabulaire spécifique à la didactique des mathématiques.
- Lorsque je me posais une question sur un certain sujet, je n'avais pas toujours le réflexe de fouiller dans les archives du séminaire qui regorgent pourtant d'informations précieuses.

5.3. L'ordinaire des classes : « corpus A » et « corpus B »

L'ordinaire du travail en établissement au chevet d'une classe relève également du schéma générique ci-dessus : préparer son enseignement, c'est construire des réponses $R^\heartsuit$ à une foule de questions Q. Dès lors que des réponses $R^\heartsuit$ ont été construites par un stagiaire sous la supervision de son professeur conseiller pédagogique, elles peuvent venir devant un collectif de formation – par exemple un GFP – à titre de réponses $R^\lozenge$, pour y être *mises en débat*, c'est-à-dire pour y être observées, analysées, évaluées – cette évaluation supposant, dans le collectif

des œuvres étudiées advient alors une motivation « globale », culturelle, « parce que ça peut servir », « parce qu'il n'est pas permis de les ignorer ».

[37] Ce questionnaire comporte uniquement quatre demandes : « Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif* », « Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *négatif* », « Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif* », « Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous a paru plutôt *négatif* ». Le caractère majoritaire des aspects *positifs* mentionnés dans les extraits des réponses figurant dans la suite de cette étude tient aux dispositifs examinés : de par la construction même du questionnaire, en effet, aspects positifs et aspects négatifs s'équilibrent globalement.

en question, un *projet* de construction d'une réponse R^* satisfaisant un certain ensemble de conditions et de contraintes. Dans un tel cas, l'analyse réalisée est une analyse *a priori* ; une fois $R^\heartsuit$ *réalisée* en classe, et si du moins l'on dispose d'informations sur cette réalisation – par le truchement d'un compte rendu d'observation en classe ou d'une vidéo de la séance [38] –, on peut procéder à une analyse *a posteriori*.

a) C'est ce qui est fait dans le séminaire du mardi matin avec l'analyse de comptes rendus (ou de vidéos) de séances observées au cours des années précédentes. Et c'est aussi ce qui se passe dans les GFP à propos des comptes rendus d'observation de séances issus du *stage de pratique accompagnée* : nous y reviendrons. D'une façon générale, à propos de l'analyse de séances observées, le questionnaire de fin d'année suscite quelques réponses éclairantes, telles celles-ci.

Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif*.

• L'analyse d'une séance observée, notamment : établir l'OM, cerner les fonctions didactiques. Un outil continuellement réinvesti sous diverses facettes dans mon métier d'enseignant.

• Le travail en GFP (du plus récent au plus ancien) : réflexion sur le mémoire professionnel, organisation de l'enseignement, analyse d'une séance observée, partage des expériences ou difficultés rencontrées…

b) L'ordinaire des classes des stagiaires ne nous est pas connu qu'à travers les *corpus A*, c'est-à-dire les comptes rendus d'observation rédigés à l'issue des deuxièmes visites des stagiaires en vue de leur validation [39]. Il l'est aussi à travers les *corpus B*, jusqu'ici relativement peu exploités en formation [40]. Alors que le corpus A est élaboré par le visiteur (à partir de notes personnelles, d'enregistrements sonores, etc.), le corpus B est constitué *par l'élève professeur* selon le schéma suivant, explicité dans le document de présentation de la formation et de sa validation [41].

[Le *corpus B* est] constitué par l'élève professeur dans la période qui suit [la] deuxième visite, et […] doit comporter

– *l'ensemble des documents écrits* (activités, synthèses, exercices, etc.) témoignant de l'activité de la classe (observée à travers deux élèves adéquatement choisis par le professeur stagiaire) sur le thème d'études principal travaillé lors de la visite, et cela au long d'une séquence comportant de cinq à sept séances réparties autour de la séance observée *in situ* (par exemple 2 ou 3 séances avant et 2 ou 3 séances après la visite, ou, si l'étude du thème a été inaugurée lors de la visite, 4 séances après la visite, etc.) ;

– lorsqu'ils ne sont pas inclus dans l'ensemble précédent, les *devoirs en classe* ou *à la maison* rédigés par les deux élèves choisis et relatifs en tout ou partie au thème d'études retenu, ainsi éventuellement que les corrigés correspondants ;

– *une présentation* de l'ensemble des pièces ainsi rassemblées, avec une *chronologie* des séances (maximum 2 pages) et *un tableau* présentant *les notes* (et, s'il y a lieu, les appréciations) assignées à l'ensemble des élèves de la classe depuis le début de l'année jusqu'à la date de la constitution du corpus B.

[38] Les archives du séminaire devraient sous peu être complétées par des *archives d'observations de classes*.

[39] Deux visites sont effectuées, en principe par le même visiteur : la première, qui prend place avant les vacances de la Toussaint, a un objectif de formation uniquement ; la deuxième se situe entre les vacances de Noël et les vacances d'hiver : son objectif reste formatif mais elle jouera un rôle non négligeable dans la validation du stagiaire.

[40] Une recherche est en cours, en liaison avec la constitution d'archives d'observations de classes, sur l'exploitation des corpus B, en recherche comme en formation.

[41] Ce document est communiqué aux professeurs stagiaires dès la rentrée pédagogique, à la fin du mois d'août.

Le corpus B ainsi constitué a une double fonction. La première, historiquement, est d'assurer une prise d'information large, qui permet d'encadrer l'information apportée par la visite *in situ* en montrant plus généreusement, mais *à travers les élèves*, le travail du professeur avec la classe. Ce souci est évidemment d'abord lié à la validation du professeur stagiaire. Mais un second usage est fait des corpus A et B. Chaque élève professeur est examiné par un jury dit « d'évaluation des enseignements », c'est-à-dire des enseignements reçus dans le cadre de la formation à l'IUFM [42]. Or cet examen ne se fait pas *in vacuo* : en arrivant devant le jury, le candidat présente un exemplaire de « ses » corpus A et B, que le jury découvre à cette occasion, et dont il ne peut prendre connaissance qu'à grands traits, pendant la présentation qu'en fait rapidement le candidat. Les questions auxquelles celui-ci doit ensuite répondre se réfèrent aux corpus A et B *en tant qu'objet à analyser* : c'est à cette occasion que les connaissances et la capacité du candidat à les mettre en œuvre (sur une matière qu'il connaît bien) vont être évaluées par le jury [43]. La préparation de cette épreuve orale engendre très normalement des effets de formation dont les réponses au questionnaire de fin d'année renvoient l'écho, comme on le découvrira ci-après.

Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif*.

• L'élaboration du corpus B m'a permis d'avoir une vue sur le travail de mes élèves que je n'aurais jamais eue sans ce travail.

Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif*.

• La mise en pratique des outils travaillés pendant les phases de travail sur les séminaires, le corpus B et le mémoire. Ce qui permet une analyse plus rigoureuse des cours personnels et la mise en place de structures différentes pour améliorer ceux-ci.

• L'analyse des corpus B et A pour le jury des enseignements m'a permis de prendre du recul sur mon travail.

• La constitution du corpus B ainsi que l'oral qui a suivi m'ont paru très intéressants. En effet, cela m'a permis de prendre du recul par rapport à la séquence que j'avais faite avec mes élèves. De plus, les questions posées m'ont permis de progresser et m'ont poussée à une réflexion encore plus profonde.

• Le corpus B a été très positif car il nous a permis de prendre un important recul sur une séquence que nous avions nous-même construite et faite en classe et de l'analyser : très formateur.

Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous a paru plutôt *négatif*.

• L'analyse des corpus A et B qui reste intéressante à faire du point de vue d'une critique personnelle mais dont la présentation orale me semble peu utile. Le temps consacré à la préparation de cet oral me paraît considérable au regard de l'enrichissement apporté par ce dernier.

5.4. Le TER et le mémoire professionnel

Dans la mise en œuvre du schéma fondamental, le TER, travail d'étude et de recherche qui aboutit *au mémoire professionnel*, constitue peut-être, pour les élèves professeurs, l'effort le

[42] Trois jurys différents examinent le dossier de chaque élève professeur. Le jury d'évaluation des stages travaille sur le « dossier de terrain » du candidat (qui contient entre autres choses les corpus A et B), hors la présence de celui-ci. Le jury d'évaluation des mémoires professionnels et le jury d'évaluation des enseignements entendent le candidat et l'interrogent.

[43] Ce jury n'a pas à évaluer la qualité de l'enseignement dont témoignent les corpus A et B (ce qui est du ressort du jury d'évaluation des stages), mais seulement la maîtrise qu'a le candidat des outils didactiques (au sens large) apportés par la formation donnée à l'IUFM (et qu'on peut regarder comme pertinents dans l'analyse de ces corpus).

plus systématique. Les commentaires recueillis sur ce point au moyen du questionnaire de fin d'année apportent à cet égard un éclairage intéressant : on les reproduit ci-après.

Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif*.

Le point qui m'a particulièrement plu cette année porte sur notre mémoire de TER : le fait d'analyser d'un point de vue critique une séance, de dégager les aspects négatifs et positifs et d'essayer de proposer une séance qui améliorerait ceux reconnus problématiques m'a fait avancer dans mon travail de préparation avec ma classe. J'ai d'ailleurs proposé cette séance à ma classe, et ça s'est très bien passé.

Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *négatif*.

C'est un peu lié au point positif en fait puisque je pense qu'il nous aurait été profitable que le travail fait sur le TER se fasse plus tôt dans l'année pour nous aider à mieux démarrer et qu'il n'y en ait pas qu'un mais plusieurs et pourquoi pas avec les mêmes pour deux groupes différents, pour que l'on puisse les confronter.

Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous a paru plutôt *positif*.

Le TER a été l'occasion d'un travail collectif important. Il m'a permis de mieux appréhender les outils de la formation.

Le travail sur le TER est formateur et m'a permis d'étudier, de par son sujet, certaines notions comme par exemple l'expérimentation d'une propriété (dans l'espace sensible) et la démonstration d'un théorème (à partir de la TGD).

Le TER m'a permis de mettre en œuvre un certain nombre d'outils présentés dans la formation et de me rendre compte du travail personnel à faire *a posteriori* sur les séquences d'enseignement.

Le travail du TER qui a duré une bonne partie de l'année m'a permis par des approfondissements successifs, en liaison avec le travail en GFP, de progresser dans la maîtrise des outils didactiques.

Le TER, qui m'a montré une grande partie de l'ampleur du travail de l'enseignant.

a) Le travail demandé est réalisé par des *trinômes* (ou, éventuellement, des *binômes*) d'élèves professeurs appartenant à un même GFP. Le point de départ en est le *stage de pratique accompagnée* (SPA), pendant lequel les élèves professeurs, regroupés par trois en principe, séjournent dans un collège ou un lycée (selon que leur stage en responsabilité a lieu en lycée ou en collège), où un professeur les accueille et les encadre [44]. Au cours de ce stage, chacun des stagiaires est amené à prendre en main, pendant un petit nombre de séances, l'une des classes dont le professeur d'accueil a la responsabilité. Les deux autres stagiaires l'observent et collectent l'information qui permettra à chacun d'eux de rédiger un compte rendu d'observation en bonne et due forme, relatif à l'une au moins des séances qu'il aura pu observer. Ultérieurement, au sein de chaque trinôme de TER, l'un des comptes rendus produits par ses membres dans le cadre du SPA sera choisi – avec l'aide du tuteur, dans le cadre du GFP – comme point de départ du travail d'étude et de recherche à mener à bien.

b) Cette première étape peut être décrite de façon précise dans les termes du schéma introduit plus haut. Lorsqu'il prépare une séance en classe dans le cadre du SPA, l'élève professeur se trouve confronté à une certaine question Q, par exemple « Comment concevoir et réaliser une séance de travaux dirigés, dans une classe de terminale ES, sur la notion d'événements indépendants ? ». Le fruit de son travail de « préparation » sera une certaine réponse $R_0^\heartsuit$ à la question Q, réponse dont ses camarades de SPA (de même que le professeur d'accueil) vont observer la réalisation en classe. Cette réponse $R_0^\heartsuit$ aura été « produite » par l'élève professeur à partir de réponses $R^\lozenge$ qu'il aura pu rencontrer dans des manuels, dans des classes, etc. On

[44] Pour des raisons pratiques, et sauf exception, les équipes de SPA ne sont pas identiques aux trinômes de TER.

retrouve donc là le schéma fondamental que le document de présentation de la formation, déjà cité, explicite comme suit.

> La problématique *générique* du travail est la suivante : étant donné une *question d'enseignement Q*, il s'agit d'élaborer une *réponse* $R^\heartsuit$ selon le schéma général ci-après :
>
> I. *Observer* les réponses $R^\Diamond$ existantes dans la culture ou les pratiques professionnelles.
>
> II. *Analyser*, au double plan clinique/expérimental et théorique, ces réponses $R^\Diamond$.
>
> III. *Évaluer* ces mêmes réponses $R^\Diamond$.
>
> IV. *Développer* une réponse propre $R^\heartsuit$.
>
> V. *Diffuser et défendre* la réponse $R^\heartsuit$ ainsi produite.
>
> Une fois élaborée, la réponse $R^\heartsuit$ prendra, notamment pour autrui, ou pour soi-même plus tard, le statut de réponse $R^\Diamond$: elle pourra alimenter un nouveau cycle Observation / Analyse / Évaluation / Développement / Diffusion & défense, etc.

En bonne méthode, les réponses $R^\Diamond$ observées auront donc été analysées puis évaluées du point de vue de leur apport possible à la construction de la réponse $R_0^\heartsuit$ visée. Avant d'être réalisée dans une classe, la réponse $R_0^\heartsuit$ aura été mise à l'épreuve d'une analyse *a priori* où se sera déployée toute la « science » professionnelle dont un professeur stagiaire est capable à ce stade de sa formation. Après sa réalisation en classe, et si le choix du trinôme s'est portée sur cette séance, une nouvelle vie va commencer pour $R_0^\heartsuit$.

c) La réponse $R_0^\heartsuit$ va en effet faire l'objet d'une analyse *a posteriori* et d'une évaluation corrélative qui mettront en évidence que, par rapport à un certain *projet* de développement conçu par le trinôme de TER sous la direction du tuteur, certaines contraintes, consubstantielles à ce projet, ne sont pas satisfaites par $R_0^\heartsuit$. Analyse et évaluation de $R_0^\heartsuit$ constituent la première partie du TER demandé et, en pratique, font la matière de la première partie du mémoire professionnel, qui en rend raison. Pour le trinôme, $R_0^\heartsuit$ n'est plus dès lors qu'une réponse $R^\Diamond$, à partir de laquelle il convient d'envisager la conception et la construction d'une nouvelle réponse, $R_1^\heartsuit$, satisfaisant au moins certaines des contraintes du projet.

d) Le travail effectué pour produire $R_0^\heartsuit$ va donc être repris à nouveaux frais pour produire $R_1^\heartsuit$: la présentation et l'analyse de ce nouveau travail de développement occuperont la seconde partie du mémoire professionnel du trinôme. Mais le développement de $R_1^\heartsuit$ se fera sous des conditions quelque peu différentes de celles qui avaient présidé au développement de $R_0^\heartsuit$, en particulier sur les points suivants : 1) alors que le travail de production de $R_0^\heartsuit$ avait été mené à bien dans une large autonomie, le travail de conception et de construction de $R_1^\heartsuit$ est encadré par un « directeur de mémoire » (qui, en règle générale, est le tuteur responsable du GFP des élèves professeurs concernés) ; 2) entre la production de $R_0^\heartsuit$ et la production de $R_1^\heartsuit$, la « science professionnelle » des professeurs stagiaires s'est en principe sensiblement accrue et, ainsi que le montrent les commentaires reproduits plus haut, va s'accroître encore dans l'effort même de production de $R_1^\heartsuit$; 3) la réponse $R_1^\heartsuit$ ne sera pas mise à l'épreuve dans une classe, mais devra être présentée et défendue devant le jury d'évaluation des mémoires professionnels. Ce dernier point appelle un commentaire plus étendu.

5.5. Un paralogisme à déjouer

La transposition au cadre de la formation d'une certaine image d'Épinal de l'activité scientifique a pu conduire certaines équipes de formation à découper le processus de développement d'une réponse R à une question Q de façon à ce qu'il s'achève sur la mise à l'épreuve de R dans une classe au moins et sur l'analyse *a posteriori* qui s'ensuit. Si l'on note respectivement R et R^* ce qu'on a noté ci-dessus $R_0^♥$ et $R_1^♥$, cela conduirait à privilégier le parcours suivant :

> … → Développement de R → Réalisation de R en classe [durant le SPA] → Observation, analyse *a posteriori*, évaluation de R [1re partie du TER] → Développement de R^* [2e partie du TER] → Réalisation de R^* en classe [3e partie du TER] → Observation, analyse *a posteriori*, évaluation de R^* [4e partie du TER] → Présentation et défense *a posteriori* de R^* devant un jury → …

Or c'est un autre parcours, autrement découpé, qui est mis en avant dans la formation présentée ici :

> … → Développement de R → Réalisation de R en classe [durant le SPA] → Observation, analyse *a posteriori*, évaluation de R [1re partie du TER] → Développement de R^* [2e partie du TER] → Présentation et défense *a priori* de R^* devant un jury → …

a) Pourquoi ce choix ? Tout d'abord, au plan scientifique, il serait erroné de croire (en regardant la réalisation en classe comme une « expérience », *ce qu'elle n'est pas*) que la confrontation d'une réponse R à ce milieu qu'est une classe serait le *nec plus ultra* en matière de « mise à l'épreuve » d'un scénario de séance (ou de séquence). Une classe, en effet, est un milieu qui révèle sans doute bien des choses, mais qui demeure silencieux à propos de nombre d'aspects de la construction élaborée, à tel point qu'une autre réalisation de R, dans une autre classe, réservera peut-être de fortes surprises et pourra même être regardée comme incommensurable avec celle déjà réalisée. Ensuite, la coupure souhaitée crée une situation *professionnellement inauthentique* : le métier de professeur implique que l'on se présente devant une classe donnée avec une construction de papier R^* élaborée pour être diffusée *dans cette classe-là* et qui, par définition, n'y a encore jamais été diffusée. Tel est le lot du professeur : il n'est pas un expérimentateur qui aurait le droit d'engager sa classe dans une activité *simplement « pour voir »*, une telle problématique non professionnelle modifiant d'ailleurs fortement les conditions et contraintes sous lesquelles une classe (qui n'en serait plus tout à fait une alors) serait amenée à travailler. Mais il y a plus. L'exigence cristallisée dans le parcours de formation et d'évaluation proposé porte sur la maîtrise d'un savoir professionnel développé au cours de la formation, qui doit permettre aux élèves professeurs non seulement de *produire* la réponse R^*, mais encore de la défendre *a priori* devant un jury. Cette dernière configuration « transpose » ce qui, dans un fonctionnement *rénové* de l'activité des professeurs au sein de leur établissement, serait la présentation et la « défense » d'une « préparation de cours » *devant un séminaire d'établissement*. Ce dispositif, qui, certes, existe encore fort peu, devra se développer à l'avenir pour permettre la pratique *intégrée*, tout au long de la carrière, d'un geste professionnel essentiel, accompli en principe par un *collectif de professionnels*, celui qu'inaugure justement le TER au cours de la formation professionnelle initiale, et qu'on peut expliciter ainsi, en conformité avec le parcours mis en œuvre à l'IUFM :

> … → Développement de R [par un professeur de l'établissement] → Réalisation de R [dans la classe de ce professeur] → Observation, analyse *a posteriori*, évaluation de R [par ce professeur et certains de ses collègues] → Développement de R^* [comme projet d'une équipe de professeurs de l'établissement] → Présentation et défense *a priori* de R^* devant un jury [à savoir le séminaire de mathématiques de l'établissement] → …

b) Il est en vérité assez facile de rapprocher les deux parcours tout en les distinguant : il faut pour cela détailler davantage qu'on ne l'a fait jusqu'ici l'étape du développement d'une réponse $R = R^♥$. Au cours de ce processus, on n'arrive pas d'un coup à la construction de la réponse $R^{\heartsuit}$ dont la finalité institutionnelle est d'être réalisée dans une certaine classe ou un certain type de classes : ce qui va se construire, en effet, c'est une chaîne de réponses $R_0^{\heartsuit} \rightarrow R_1^{\heartsuit} \rightarrow \ldots \rightarrow R_n^{\heartsuit} = R^{\heartsuit}$. Chaque fois, la réponse $R_k^{\heartsuit}$ ($0 \leq k \leq n$) fera l'objet d'une analyse et d'une évaluation (par rapport au projet de développement, lui-même peut-être peu à peu retouché), qui ponctuent et relancent le travail de développement. L'analyse de $R_k^{\heartsuit}$ évoquée ici est celle mentionnée à propos des réponses $R^{\lozenge}$ dans le document présentant la formation : « *Analyser*, au double plan clinique/expérimental et théorique, ces réponses $R^{\lozenge}$. » L'analyse peut ainsi être théorique, c'est-à-dire *a priori*, mais elle peut aussi être clinique/expérimentale, ce qui inclut certainement le fait de la mettre à l'épreuve dans une classe, opération coûteuse mais possible [45]. On peut imaginer par exemple que, bien avant de se présenter devant le jury d'évaluation des mémoires professionnels, et à l'instar de chercheurs en didactique des mathématiques, les élèves professeurs aient pu obtenir d'un professeur qu'il réalise leur réponse $R_m^{\heartsuit}$ (avec $0 \leq m < n$), afin d'approfondir leur analyse de $R_m^{\heartsuit}$, ce qui devrait permettre des décisions plus pertinentes pour produire $R_{m+1}^{\heartsuit}$. Mais cela restera *interne au processus de développement* et, en tant qu'objet, extérieur au champ des objets pris en compte dans la *procédure de validation*. Quand la chaîne de production ($\ldots \rightarrow R_k^{\heartsuit} \rightarrow R_{k+1}^{\heartsuit} \rightarrow \ldots$) s'arrêtera sur $R_n^{\heartsuit}$, c'est bien $R_n^{\heartsuit}$ qu'il conviendra de soumettre *a priori* à l'appréciation du jury et de défendre devant lui. Si, avant cela, $R_n^{\heartsuit}$ était réalisée dans une classe, ce n'est pas $R_n^{\heartsuit}$ qui serait présentée au jury, mais ce qui serait alors une version ultérieure, $R_{n+1}^{\heartsuit}$. Le même principe exactement vaut dans un contexte de recherche : un travail qui ne s'achèverait pas sur une analyse *a priori*, provisoirement terminale, serait à l'évidence incomplet.

5.6. Percolation praxéologique et contrôle de qualité

On ne saurait conclure cette présentation raisonnée d'une partie de l'organisation de la formation professionnelle des professeurs de mathématiques à l'IUFM d'Aix-Marseille sans aborder un problème de la profession qui se pose désormais autrement qu'il ne se posait jusque-là : le problème, pour une question Q donnée, du « traitement » (observation, analyse, évaluation) des réponses $R^{\lozenge}$ présentes dans l'environnement professionnel et culturel. Il fut un temps où le manuel était, pour le professeur, la source quasi unique de $R^{\lozenge}$, et où, en outre, les différents manuels ne faisaient guère que recopier avec des variantes d'auteur un texte du savoir consacré par la tradition. Significativement, dans un ouvrage où il souhaitait proposer une modification profonde du curriculum mathématique [46], Henri Lebesgue (1875-1941) pouvait encore se référer au « premier livre de la géométrie » (ou au second, ou au troisième) comme à une réalité connue de tous ses lecteurs : « Ce chapitre, écrivait-il par exemple [47], serait aussi *le premier* en quelque sorte *de la géométrie* et l'on serait donc fondé à parler, en géométrie, de la distance de deux points. Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au *premier livre de la géométrie* ; on n'en parle qu'*au troisième*, après avoir parlé *au second*, de

[45] L'opération en question relève de l'évaluation *formative* en matière curriculaire, dans l'acception originelle de l'expression due à Michael Scriven. Celui-ci écrit : « … evaluation of the curriculum itself also plays an important role in curriculum development. During the early stages, when new methods and materials are being tried, evaluation data enable the curriculum developer to determine the effectiveness of the new procedures and to identify areas where revision is needed. When the new curriculum program has been fully developed, evaluation data make it possible to determine the degree to which the new curriculum is effective in meeting the instructional objectives for which it was designed. The first type of curriculum evaluation has been called *formative evaluation* and the second *summative evaluation*." (M. Scriven, "The Methodology of Evaluation," in *Perspectives of Curriculum Evaluation*, AERA Monograph Series on Curriculum Evaluation, No 1, Chicago, Rand McNally, 1967).
[46] *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Paris, 1975.
[47] *Op. cit.*, p. 28. (C'est nous qui soulignons.)

la mesure des angles et des arcs... » La situation a aujourd'hui changé. Si la formation commentée ici invite prudemment et sous contrôle les élèves professeurs à découvrir les réponses que recèlent les archives du séminaire, on constate par ailleurs une *explosion au moins apparente de l'offre* de réponses $R^\Diamond$ et, plus généralement, d'œuvres O supposées utiles au professeur de mathématiques. Si chaque manuel n'est certes pas une source originale, incommensurable aux autres, si le recopiage sévit, il n'en reste pas moins que, phénoménologiquement, les professionnels sont confrontés à une kyrielle de produits, auxquels l'Internet donne désormais une présence surmultipliée. Alors que nombre de questions de la profession demeurent sans réponse, en revanche, touchant certaines questions, les réponses $R^\Diamond$ grouillent, mais *sans garantie de qualité*, et *sans que leur exploitation didactique aille de soi*. En outre, beaucoup de sources, faisant chorus, propagent sur tel ou tel problème une *doxa* contestable – par exemple à propos du formatage ostensif des démonstrations [48] –, et cela sans qu'un véritable *débat professionnel* vienne éclairer les professeurs ; sans même, au reste, qu'un *espace de débat* existe aujourd'hui. En lieu et place d'une telle exigence, seule susceptible d'élever le niveau de qualification de la profession, on a vu se répandre depuis quelques années le mot d'ordre de « mutualisation », qui désigne en principe la mise en commun de ressources au sein d'un collectif formel ou informel [49]. Si un tel principe bat en brèche l'habitus solipsiste et « pas prêteur » qui a structuré longtemps la circulation des savoirs (scientifiques et professionnels) dans les cultures européennes, jusques et y compris dans le monde de l'entreprise « moderne », il ne permet pas d'éviter une carence grave, qu'un institut universitaire de formation *ne saurait en aucun cas valider* : celle d'une mutualisation *sans mise en débat* de ce qui est mutualisé, sans confrontation à des milieux appropriés des ressources offertes au collectif, sans analyse et sans évaluation suffisantes [50]. Paradoxalement, le mot d'ordre de mutualisation ainsi entendu – comme principe instituant et légitimant un marché libre, sans obligation ni sanction – vient renforcer un trait culturel très ancien de la profession, où chacun se regarde comme un Maître de Vérité et, en conséquence, ne doit qu'à lui-même de faire des productions d'autrui ou des siennes propres un usage mathématiquement et didactiquement juste. De ce point de vue, la formation des professionnels de l'enseignement des mathématiques et l'élévation correspondante des standards de fonctionnement de la profession appellent aujourd'hui un effort redoublé et novateur pour construire une culture professionnelle idoine autour du *contrôle de la qualité épistémologique et didactique* des produits mis en circulation de manière fréquemment « sauvage ». Il y a là une exigence d'instruction publique dont une meilleure prise en charge devrait être intégrée à l'organisation de la formation dès l'année 2006-2007.

Références bibliographiques

[48] Voir ainsi (parmi d'autres) le site http://perso.orange.fr/daniel.courounadin/quatr/demontrer/rediger1.htm.

[49] Pour un exemple, voir ainsi la charte de l'UCE (Université coopérative européenne : http://www.universite-cooperative.coop/fr/projetuce.htm). On y précise par exemple ceci : « L'UCE vise à mutualiser, développer et valoriser les pratiques coopératives par la construction de connaissances transmissibles aux bénévoles, militants et professionnels de l'Économie Sociale et Solidaire en vue d'améliorer l'action individuelle et collective. » Le même document énonce en ces termes le « principe de mutualisation » : « Les membres de l'UCE s'engagent à partager leurs expériences, les évaluations qui en sont faites et les connaissances qui en découlent, dans le champ de la formation des entrepreneurs sociaux, tant sur les contenus spécifiques que sur les méthodes de la pédagogie coopérative mise en œuvre. »

[50] On aura noté la formulation de la charte de l'UCE : ce qui est mutualisé, ce ne sont pas seulement les « expériences » mais aussi les « évaluations qui en sont faites ». Mais qui prend en charge ces évaluations ?

Chevallard, Y. (2002), « Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions », *Actes de la XI^e^ école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)*, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 3-32.

Chevallard, Y. (2006a), La calculatrice, ce bon objet, *Les dossiers de l'ingénierie éducative*, n° 54, p. 20-25.

Chevallard, Y. (2006b). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras, L, Estepa, A., & García, F. J. (Eds), *Actes du 1^er^ congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005)*. À paraître.

Cirade, G. (2006), *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Mémoire de thèse en vue d'obtenir le titre de docteur de l'Université de Provence. À paraître.

Dopp, J. (1967), *Notions de logique formelle*, Publications universitaires de Louvain, Louvain, et Éditions Béatrice-Nauwelaerts, Paris.

Mayeur, F. (1981) *De la Révolution à l'École républicaine* (tome III de l'*Histoire générale de l'enseignement et de l'éducation en France*), Nouvelle Librairie de France, Paris.

Principaux sigles utilisés

AER : activité d'étude et de recherche.
APMEP : association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.
ARDM : association de recherche en didactique des mathématiques.
CAPES : certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire.
CDI : centre de documentation et d'information.
C2i2e : certificat informatique et Internet niveau 2 « Enseignant ».
DM : devoir à la maison.
EDD : enseignements didactiques et disciplinaires.
ES : [série] économique et sociale.
FGC : formation générale et commune.
GFP : groupe de formation professionnelle.
ICMI : *International Commission on Mathematical Instruction*
IDD : itinéraires de découverte.
IREM : institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.
IUFM : institut Universitaire de Formation des Maîtres.
OM : organisation mathématique.
OML : organisation mathématique locale.
OMP : organisation mathématique ponctuelle.
PAF : plan académique de formation.
PCL1 : élève professeur de première année d'un IUFM.
PCL2 : élève professeur de deuxième année d'un IUFM.
PCP : professeur conseiller pédagogique.
PER : parcours d'étude et de recherche.
S : [série] scientifique.
SPA : stage de pratique accompagnée.
TER : travail d'étude et de recherche.

TGD : théorie géométrique disponible.
TICE : technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement.
TPE : travaux personnels encadrés.
UMR ADEF : unité mixte de recherche « Apprentissage, didactique, évaluation, formation ».