LES NOMBRES RELATIFS

ÉTUDE D'UN COMPTE RENDU D'OBSERVATION D'UNE CLASSE DE CINQUIEME

Michèle Artaud
IUFM d'Aix-Marseille

Préambule

Nous avons choisi de présenter cette étude d'une part en distinguant l'analyse des praxéologies mathématique et didactique de l'évaluation de l'organisation mathématique, d'autre part en abordant cette analyse de deux points de vue, l'un « dynamique », et l'autre « statique ». Le point de vue dynamique, par lequel nous commencerons, montre l'organisation mathématique en train de se construire et la praxéologie didactique qui en permet la construction en suivant le déroulement du compte rendu étudié. Le point de vue statique présente l'organisation mathématique qui a été construite ainsi que certains éléments de l'organisation didactique qui en a permis la construction, notamment les éléments génériques de cette organisation.

1. Organisation mathématique et organisation didactique : un point de vue dynamique

Le professeur commence par présenter le programme de la séance du jour :

> On va terminer l'activité sur les nombres relatifs faite lundi. On va en déduire des règles de comparaison qu'on marquera sur le cahier de cours. Vous prenez votre cahier d'exercices, on va corriger...

On trouve là une première mention de l'organisation mathématique à étudier, il s'agit de la *comparaison des nombres relatifs*. La voie d'étude choisie est une activité, commencée précédemment, et que l'on va maintenant corriger.

ACTIVITÉ

On a mesuré la température dans plusieurs villes :

Ville	A	B	C	D	E	F
Température en degrés	–3	1	–4	–1	6	2

1) Représenter les températures sur une droite graduée (un carreau représentant une unité).
2a) Fait-il plus froid dans la ville A ou dans la ville B ? Comparer leur température.
2b) Comparer les températures des villes B et C.
2c) Même question avec les villes D et F.
3a) Comparer les températures des villes A et C.
3b) Même question avec les villes C et D.
3c) Même question avec les villes A et D.
4a) Comparer les températures des villes B et E.
4b) Même question avec les villes E et F.
5) Ranger les températures de la plus basse à la plus haute.
6a) Compléter par $<$ ou $>$

–2 ... 5   –3,2 ... –6,8   7 ... –5,2   6,5 ... 4,7
–14 ... –2,5   5,3 ... –6,9   3,3 ... 8,2   –1,1 ... –1,01

6b) Ranger par ordre croissant :

–1 ; 4,5 ; –2,6 ; –3,4 ; 7,8 ; 9 ; –12,5

L'activité propose donc de comparer des températures de villes ; les questions 1 et 2 ont été traitées.

Après avoir rappelé les réponses à la question 2, P précise qu'il s'agissait de répondre aux questions 3 à 6 ; il désigne un élève pour corriger la question 3 et commente : « Il s'agissait de comparer les villes A et C. Où est-ce qu'il fait plus froid ? » P parle d'une voix forte et distincte qui s'impose comme une chape sonore. Entre-temps l'élève a écrit les réponses demandées :

3a) $-4 < -3$
3b) $-4 < -1$
3c) $-3 < -1$

Un nouvel élève est appelé pour traiter la question 4 : il donne des réponses correctes, en utilisant systématiquement la question « Où est-ce qu'il fait plus froid ? »

P fait alors un bilan : « Dans la question 2, on compare des nombres négatifs et des nombres positifs. Dans la question 3, on compare des nombres négatifs. C'est nouveau pour vous. Bon, dans la question 2, qu'est-ce qui se passe ? » Une élève : « Un nombre sans signe c'est plus grand qu'un nombre négatif. » Un élève rappelle le cas particulier de zéro ; P reprend cette remarque : « On a vu que *moins* zéro et *plus* zéro, c'est égal. » P : « À la question 2, après avoir fait la comparaison, on obtient la règle... à mettre sur le cahier de cours... » À la demande de P, des élèves énoncent la règle en question. P reprend leur formulation et l'écrit au tableau :

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.

Nous voyons apparaître ici deux types de tâches mathématiques : il s'agit des types de tâches T_1 « Soit a un nombre positif et b un nombre négatif ; comparer a et b » et T_2 « Soit a et b deux nombres négatifs ; comparer a et b ». Ces types de tâches ont été accomplis dans l'activité en mettant en œuvre une technique que l'on peut décrire ainsi. On considère que a et b sont les températures respectives des deux villes A et B ; s'il fait plus froid dans la ville A que dans la ville B, alors $a < b$; sinon $a > b$. Ce n'est pas cette technique qui sera associée aux types de tâches T_1 et T_2 dans l'organisation mathématique. Elle est là pour faire surgir les éléments technologiques qui fonderont les techniques relatives à T_1 et T_2. Le professeur commence par utiliser les résultats de la question 2, dans laquelle il s'agissait de comparer des nombres négatifs et des nombres positifs. Les résultats obtenus ($-3 < 1$, $-4 < 1$, $-1 < 2$) font apparaître que « De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif », résultat technologique dont la technique relative à T_1 se déduit immédiatement comme le montre l'exemple suivant.

Tâche $t_1 \in T_1$: comparer -3 et 1
Technique : -3 et 1 sont de signes contraires ; -3 est négatif donc $-3 < 1$.

Notons qu'à cet énoncé technologique s'ajoute l'énoncé « *moins* zéro égal *plus* zéro », qui permet de régler le cas où l'un des deux nombres est nul.

La question 3 permet, de même, de faire émerger le résultat technologique relatif au type de tâche T_2 :

On passe à la question 3. P : « Qu'est-ce qu'on compare ? » Des élèves : « Des nombres négatifs. » P : « Et alors ? » Un élève : « Le chiffre le plus près de 0, ça donne la distance. » Un élève, avec l'aide de P : « Celui qui a la distance à 0 la plus petite est le plus grand. » Un autre élève intervient : « C'est l'ordre inverse de la distance à 0. » P approuve : « On peut écrire la propriété de deux manières. » Des élèves : « La première, c'est plus facile ! » P : « On va écrire la première... » Après une petite préparation orale, P met au tableau la formulation attendue, tout en signalant aux élèves qu'ils doivent l'écrire « à droite des réponses de la question 3 » :
De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro.

Un débat s'ensuit. « On pourrait dire *le plus grand est celui qui a la plus petite distance à* 0 » affirment plusieurs élèves. P approuve mais ajoute : « Comme dans la règle précédente on a dit *le plus petit*, on continue ici. » Les élèves notent. P : « On pourrait dire aussi, comme l'a dit votre camarade, que les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro. »

Par contraste avec le travail effectué à propos de la question 2, l'étude des résultats de la question 3 fait apparaître deux énoncés technologiques considérés comme équivalents : « De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro » et « les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro ». Celui qui est choisi par les élèves est le premier. Il permet de justifier et produire la technique suivante, relative au type de tâches T_2 « Soit a et b deux nombres négatifs ; comparer a et b » : si a a la plus grande distance à zéro, alors $a < b$; sinon $a > b$. Signalons que la technique ainsi produite comporte un sous-type de tâches « Déterminer parmi deux nombres négatifs celui qui a la plus grande distance à zéro », sous-type de tâches qui est considéré ici comme non problématique. Notons également que le deuxième énoncé technologique aurait conduit à une variante de la technique τ que nous exemplifions ci-après :

Tâche $t_2 \in T_2$: comparer -4 et -3.
Technique : la distance à zéro de -4 est 4 ; celle de -3 est 3. On a $3 < 4$ et donc $-4 < -3$.

La question 4, dont l'objet est de comparer des nombres positifs – nouveau type de tâches que nous noterons T_3 – est mentionnée par P et reconnue par les élèves comme non problématique :

> « Pour la question 4, est-ce que c'est quelque chose de nouveau pour vous ? » Les élèves : « Non ! » P : « Est-ce que nous sommes capables de comparer les nombres relatifs ? » Les élèves : « Oui. ».

Un nouveau type de tâches, T, « Soit a et b deux nombres relatifs ; comparer a et b » est nommé ici par le professeur et les élèves conviennent qu'ils disposent d'une technique pour l'accomplir. Cette technique, qui n'est pas décrite par le professeur, peut être reconstituée sans mal.

Technique τ relative à T
Si a et b sont positifs, c'est une tâche routinière qu'on sait accomplir.
Si a et b sont de signes contraires, alors :
    si a est négatif, alors $a < b$;
    sinon, $a > b$.
Si a et b sont négatifs, alors :
    si a a la plus grande distance à zéro, alors $a < b$;
    sinon $a > b$.

On voit ainsi les trois types de tâches précédemment identifiés, T_1, T_2 et T_3, apparaître comme sous-tâches dans l'accomplissement de T par la technique τ.

Cette phase de correction apparaît comme participant de plusieurs moments de l'étude. Il y a d'abord un *moment de la première rencontre* avec le type de tâches T, et donc les types de tâches T_1, T_2 et T_3 : en effet, bien que T_3 ait déjà été rencontré par les élèves à l'école primaire, il s'agit là de la première rencontre en tant qu'ingrédient dans l'accomplissement du type de tâches T. C'est également un *moment d'exploration* du type de tâches T et de l'élaboration de la technique τ relative à T, ainsi qu'un *moment d'élaboration de l'environnement technologico-théorique*. C'est enfin un *moment d'institutionnalisation* du type de tâches qu'il s'agit d'étudier, d'éléments de la technique qui va permettre d'accomplir T – notamment les trois sous-types de tâches qui la composent –, et d'éléments technologiques qui justifient la technique proposée. Signalons ici, sans que cela ait une coloration positive ou négative, qu'il n'y a pas d'institutionnalisation complète de la technique τ. On peut noter enfin que les éléments technologiques sont écrits par les élèves sur le cahier d'exercices, en regard des réponses qui ont permis leur production, et que le travail s'effectue d'abord en interrogeant un élève, qui vient au tableau corriger l'exercice, puis en interaction avec l'ensemble des élèves de la classe.

La correction de l'activité se poursuit :

> « Question 5... Maintenant qu'on sait comparer les nombres deux à deux, on sait ranger les nombres relatifs... » P appelle un élève au tableau, l'interroge. L'élève indique qu'on commence par les nombres négatifs. P lui demande de préciser. L'élève écrit –4. P commente : « Il commence par le plus petit... » L'élève a continué d'écrire :
>
> $-4 < -3 < -1 < 1 < 2 < 6$
>
> P commente : « Une fois qu'on a épuisé les négatifs on s'attaque aux positifs.... » Puis : « Ranger les températures de la plus basse à la plus haute, ça correspond à ranger les nombres... Dans quel ordre ? » Un élève : « Croissant. » P reprend cette réponse, en l'explicitant à l'intention d'un élève qui semble ne pas comprendre : « Du plus petit au plus grand. » Il l'écrit :
>
> rangement dans l'ordre croissant
> (du plus petit au plus grand)

Voici donc un autre type de tâches, T', « Ranger une suite finie de nombres relatifs dans l'ordre croissant ». Le professeur le relie d'emblée au type de tâches précédent, T : « Maintenant qu'on sait comparer les nombres deux à deux, on sait ranger les nombres relatifs », signifiant par là que, dans la technique τ' relative à T', T apparaîtra comme sous-type de tâches. D'autres indications portant sur la technique mise en œuvre sont données par P : « on commence par le plus petit », « une fois qu'on a épuisé les négatifs on s'attaque aux positifs ». La technique initiale, qui consistait à interpréter les nombres en jeu comme des températures de villes, n'est pas utilisée directement ici, mais ce sont les résultats qu'elle a permis de produire qui permettent d'arriver à la réponse demandée. On avait en effet :

$$\begin{array}{lll} -4<-3 & -3<1 & 1<6 \\ -4<-1 & -4<1 & 2<6 \\ -3<-1 & -1<2 & \end{array}$$

Il vient donc que –4 est le plus petit des négatifs, puis viennent –3 et –1. On passe ensuite aux nombres positifs[1] et l'on obtient : $-4 < -3 < -1 < 1 < 2 < 6$. Notons qu'il « manque » le résultat intermédiaire $1 < 2$, signe sans doute que le type de tâches T_3 est considéré comme routinier.

Trois des quatre moments cités précédemment sont réalisés ici à propos du type de tâches T' : moment de la première rencontre avec T', moment d'exploration de T' et d'élaboration d'une technique permettant de l'accomplir, moment d'institutionnalisation du type de tâches T' et d'éléments constituant la technique τ'.

Le travail se poursuit avec la correction de la question 6.

> « Ensuite, pour les questions 6a) et 6b), ce sont des applications de ce qu'on vient de voir... » Il appelle un élève au tableau. Celui-ci indique que $-2 < 5$; P lui fait expliquer pourquoi. On passe alors à –3,2 et –6,8 ; l'élève au tableau répond correctement, mais un élève conteste : 6,8 c'est plus grand que 3,2 ! P explique que les négatifs se rangent « dans l'ordre inverse » [de la distance à 0].
> L'élève au tableau a continué. Il hésite un instant sur la comparaison de –1,4 et –2,5 : il écrit d'abord les deux nombres à comparer, en laissant un espace entre eux, puis place le signe convenable en recherchant celui dont la distance à 0... S'agissant du dernier couple, il apparaît que l'élève a mémorisé les nombres à comparer, –1,1 et –1,01 ! Il indique que 1,1 c'est 1,10, ce qui est plus grand que 1,01, etc.

---

[1] Le résultat intermédiaire $-1 < 1$ n'est pas nécessaire ici en raison du résultat technologique « Tout nombre négatif est inférieur à un nombre positif donné », résultat qui se déduit immédiatement de celui énoncé : « De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif ».

P enchaîne sur la question 6b), demandant qui n'est pas passé au tableau. Une élève se propose. Elle vient, s'acquitte de sa tâche, pendant que P commente (après les négatifs on passe aux positifs, etc.). P : « Est-ce que tout le monde est d'accord avec ce rangement ? » Les élèves : « Oui ! »

Ainsi que l'indique P, la question 6 comporte des spécimens des types de tâches T et T', et on se situe ici dans un moment exploratoire des blocs pratico-techniques. On voit notamment, à propos du type de tâches T, coexister la technique τ et la variante que nous avions signalée plus haut, comme en témoigne le passage suivant :

L'élève au tableau a continué. Il hésite un instant sur la comparaison de –1,4 et –2,5 : il écrit d'abord les deux nombres à comparer, en laissant un espace entre eux, puis place le signe convenable en recherchant celui dont la distance à 0... S'agissant du dernier couple, il apparaît que l'élève a mémorisé les nombres à comparer, –1,1 et –1,01 ! Il indique que 1,1 c'est 1,10, ce qui est plus grand que 1,01, etc.

Ainsi que l'explication donnée par le professeur à la suite de l'intervention d'un élève : les négatifs se rangent « dans l'ordre inverse » [de la distance à 0]. On apprend également que les nombres relatifs à comparer seront des décimaux et pas uniquement des entiers comme le travail effectué jusqu'à présent pouvait le laisser penser.

Il s'agit aussi d'un moment d'évaluation de la praxéologie mathématique constituée, qui apporte réponse – partiellement sans doute – aux questions suivantes : les techniques élaborées à partir de spécimens portant sur les nombres entiers sont-elles encore valables ou doit-on les modifier ? A-t-on les éléments technologiques permettant de justifier les techniques mises en place et de les rendre intelligibles ? Sait-on les mettre en œuvre ?

Le travail se poursuit :

P : « Vous prenez votre cahier de cours. Vous rangez l'activité, on s'en resservira demain – il reste des choses à voir dessus. » Après quelques secondes : « Vous sautez une ligne, et vous écrivez... » :

2. Comparaison

Le silence s'est installé : les élèves écrivent. P reprend : « Pour la comparaison des nombres relatifs, on a vu qu'il nous manquait deux règles. Ce sont les règles qu'on a au tableau... Vous marquez ça sur votre cahier de cours. Vous écrivez en rouge, ou vous écrivez en bleu et vous encadrez en rouge *(il le fait au tableau, en encadrant en rouge)* »

Règle 1

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.

Les élèves notent. P poursuit : « Avant de passer à la règle 2, on va mettre quelques exemples d'applications de cette règle... Tout le monde a fini de recopier ? » Des élèves : « Non !... » P : « On va mettre deux exemples d'application. Vous allez comparer... »

–2 ... 7,5
6,1 ... –4,7

P : « Vous comparez ces nombres avec les signes < et >. Alors qu'est-ce qu'on peut dire de –2 et 7,5 ? » Des élèves : « –2 est le plus petit. » P : « On est tous accord ! » De même pour le second couple.

P circule dans la classe, puis reprend : « Ensuite, il nous faut une deuxième règle. Vous écrivez donc en dessous *Règle 2*... Celle qui est écrite au tableau. Et vous encadrez en rouge ; ou vous écrivez en rouge. Comme vous voulez. » Le silence se fait. P commente : « Cette fois-ci ça concerne les nombres négatifs et comme tout à l'heure on mettra deux exemples d'application. » P reprend oralement la règle 2 pendant que les élèves la notent dans leur cahier de cours.

Petit répit. Puis, bien vite : « Vous avez terminé ? » En guise de réponse un petit brouhaha se fait entendre. « Alors dépêchez-vous !... » Bientôt P reprend, et fait un bilan : « Vous savez comparer tous les relatifs entre eux... » Un élève : « Alors elle est finie la leçon ? » P : « Il restera les opérations. Et sur la comparaison, on va faire des exercices d'application. Donc c'est pas terminé ! » Il poursuit : « Vous comparez... » :

–7,1 ... –12,6
–5,4 ... –1,7
Puis : « Alors, qu'est-ce qu'on peut dire ? » P dialogue avec un élève : on arrive à –7,1 > –12,6. « On les range dans l'ordre inverse de leur distance à 0 », commente P. Il sollicite un autre élève pour la deuxième comparaison, qui est rapidement menée à bien. P : « Bien... On a les deux règles qui permettent de comparer les nombres relatifs, je le répète. On va faire des exemples d'application que vous prenez sur votre cahier de cours. » Un élève demande confirmation : « Sur le cahier de cours », répète P, qui ajoute : « Vous prenez votre feuille d'exercices, exercices 5, feuille numéro 14 ».

Il s'agit là, clairement, d'un moment d'institutionnalisation de l'environnement technologico-théorique, ce que manifeste l'écriture dans le cahier de cours des deux règles de comparaison citées lors du travail à propos de l'activité, ainsi que des types de tâches T_1 et T_2 à travers deux tâches de chaque type. A la suite de la demande d'un élève, le professeur est amené à préciser que l'organisation mathématique relative à la comparaison des nombres relatifs est presque fixée, même si « on va faire des exercices d'application », annonçant ainsi sans doute un moment de travail des techniques mises en place qui fera vraisemblablement évoluer un peu la praxéologie mathématique constituée. Il annonce également la venue à l'existence d'une autre organisation mathématique locale, celle relative aux opérations sur les nombres relatifs.

Le processus d'étude de l'organisation mathématique se poursuit par des exercices qui seront faits sur le cahier de cours. Notons ici que ceci doit être assez inhabituel, car un élève en demande confirmation à P. Il s'agit de considérer la feuille numéro 14, et plus spécialement les exercices 5 et 6.

Les élèves découvrent l'exercice à faire : « C'est facile !... » P commente : « L'exercice 5, c'est un exercice de rangement dans l'ordre croissant [question 1], mais aussi dans l'ordre décroissant [question 2]. Alors, allez-y... » Le silence se fait. P : « N'oubliez pas de mettre des signes... » Une élève s'inquiète à nouveau de sa bonne compréhension de la consigne : « Dans le cahier de cours, à la suite ! », répète P. Un petit flottement se fait sentir, lié peut-être à des problèmes d'organisation. Les élèves s'affairent. P ne leur laisse guère de répit, et envoie un élève au tableau pour traiter la première question, le rangement des nombres –3, 5, –9, 0, –5, 8 dans l'ordre croissant. L'élève écrit :

5 f 14
–9 >

(La notation 5 f 14 désigne l'exercice 5 de la feuille d'exercices n°14.) Des élèves se récrient : « M'sieur, il s'est trompé ! » L'élève rectifie et continue. P commente, explique, justifie. Tout cela va très vite : une nouvelle élève est envoyée au tableau pour la deuxième question, le rangement des nombres –7, 6, –4, 0, –6, 5 dans l'ordre décroissant. P lui fait préciser le sens de cette expression (« Du plus grand au plus petit »), l'élève s'active en regardant sa feuille. Des élèves donnent à haute voix la suite des nombres à écrire. P leur demande de « laissez la personne au tableau faire l'exercice ». L'élève a fini. Elle retourne à sa place. P reprend : « Alors, ensuite vous allez faire le numéro 6, c'est la même chose mais cette fois-ci avec des nombres décimaux. Le numéro 6 en entier, 1 et 2 ». Le silence se fait. Les élèves s'affairent. Un élève appelle P, lui indique la différence qu'elle voit entre les exercices 5 et 6 : « Cette fois on passe aux décimaux. Donc la comparaison s'effectue aussi sur la partie décimale... » P approuve. Puis il arrête les élèves : « Vous allez noter également le travail à faire pour demain... »

Le travail effectué ici concerne le type de tâches T', qui se modifie et que l'on peut reformuler de la façon suivante : « Ranger (dans l'ordre croissant ou décroissant) une suite finie de nombres relatifs ». Il s'agit à la fois d'un moment de travail de la technique – on se met en main la technique τ' élaborée précédemment –, d'un moment d'évaluation de la technique et de ce qu'on est capable de faire à son propos : on retrouve ici ce que nous avions noté à propos du passage des entiers aux décimaux à travers la remarque d'un élève au professeur « Cette fois on passe aux décimaux. Donc la comparaison s'effectue aussi sur la partie décimale... ». Il s'agit encore d'un moment d'institutionnalisation du type de tâche *T'*, qui, on l'a vu, s'est un peu modifié à cette occasion.

Le professeur arrête l'étude en cours pour parler du travail à faire pour le lendemain :

> « Vous allez faire le 3 et le 4 de la feuille 14. Prenez votre feuille d'exercices, on va en dire un mot rapidement. » Il insiste : « S'il vous plaît ! Avant de passer à la correction du 6, on regarde ce qu'il y a à faire pour demain ! » Il explicite : « L'exercice 3, on a déjà fait ça. L'exercice 4, c'est différent... ». Il écrit :
>
> 3,2 < < 3,3
>
> « Chaque fois il faut compléter par un nombre compris entre les deux. Ensuite, deuxième question, rapidement » :
>
> < 3,4 <
>
> « Il faut encadrer par deux entiers consécutifs. » P commente, explique, précise (« consécutifs », ça veut dire « qui se suivent »), conclut : « Je vous rappelle : pour demain, 3 et 4, et terminer le 6. » Il veut enchaîner avec la correction du début de l'exercice 6. Mais les élèves ont déjà commencé à ranger leurs affaires. La séance est terminée.

On voit apparaître dans l'exercice 4 deux nouveaux types de tâches, qui viendront enrichir l'organisation mathématique relative à la comparaison des nombres relatifs : il s'agit de « Déterminer un nombre compris entre deux entiers relatifs donnés » et « Encadrer un nombre relatif donné par deux entiers consécutifs ». Ces types de tâches sont simplement évoqués, et ce sera à l'élève de produire, à partir de l'organisation mathématique fabriquée en séance, une technique pour chacun des types de tâches cités, technique qui sera vraisemblablement justifiée et institutionnalisée lors de la correction des exercices.

2. Organisation mathématique et organisation didactique : un point de vue statique

2. 1. Organisation mathématique

L'organisation mathématique qui s'est mise en place sur le thème de la comparaison des nombres relatifs est une organisation *locale* comportant deux types de tâches, *T* « Soit *a* et *b* deux nombres relatifs ; comparer *a* et *b* » et *T'* « Ranger dans l'ordre croissant ou décroissant une suite finie de nombres relatifs ». Nous la présentons ci-après dans un tableau.

Types de tâches	Soit *a* et *b* deux nombres relatifs ; comparer *a* et *b*	Ranger dans l'ordre croissant ou décroissant une suite finie de nombres relatifs
Techniques	Si *a* et *b* sont positifs, c'est une tâche routinière qu'on sait accomplir. Si *a* et *b* sont de signes contraires, alors : si *a* est négatif, alors $a < b$; sinon, $a > b$. Si *a* et *b* sont négatifs, alors si *a* a la plus grande distance à zéro, alors $a < b$; sinon $a > b$.	Dans l'ordre croissant, on considère les nombres négatifs $a_1, \dots a_p$. On détermine celui qui a la plus grande distance à zéro, a_{i_1}, c'est le plus petit. On écrit $a_{i_1} <$. On recommence l'opération avec les nombres négatifs $\{a_1, \dots a_p\} \setminus \{ a_{i_1} \}$. Quand on a épuisé les nombres négatifs, on range les nombres positifs dans l'ordre croissant et on les écrit à la suite.
Technologie	De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif. Moins zéro égal plus zéro. De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro. Les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.	

On peut observer que le niveau de la théorie n'est pas apparu lors de la construction de cette praxéologie mathématique, que la technique relative au type de tâche *T'* est restée largement implicite, notamment en ce qui concerne le rangement dans l'ordre décroissant qui est considéré comme allant de soi, et que le résultat technologique « Les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro » n'a pas été institutionnalisé par écrit.

2.2 Organisation didactique

Pour décrire d'un point de vue statique la praxéologie didactique observée, qui permet à la praxéologie mathématique décrite précédemment de se construire, nous partirons des moments de l'étude qui y sont réalisés (types de tâches didactiques) et de leur mode de réalisation (technique). Signalons que, de par la nature du corpus de données, nous n'avons pas accès ici au bloc technologico-théorique – bien que, sur certains points, il serait possible d'en restituer des fragments.

2.2.1. Le moment de la première rencontre – Nous avons vu ce moment apparaître en deux occasions à propos des types de tâches *T* et *T'* : c'est l'activité de comparaison des températures et son accomplissement par les élèves qui permet au professeur de faire rencontrer ces deux types de tâches. Ce moment de première rencontre est une tâche coopérative, le travail des élèves, représentés plus particulièrement par celui qui est au tableau, servant de support au professeur pour matérialiser ce moment : « P fait alors un bilan : "Dans la question 2, on compare des nombres négatifs et des nombres positifs. Dans la question 3, on compare des nombres négatifs. C'est nouveau pour vous." ».

2.2.2. Le moment exploratoire – Il apparaît dans un premier temps fortement lié au moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique, cet aspect « naturel » étant renforcé dans la praxéologie observée par le fait que les techniques ne sont que peu ou pas institutionnalisées par le professeur. C'est pour l'essentiel le travail de la question 6 de l'activité qui permet à ce moment de se réaliser, à partir d'un corpus constitué de huit spécimens du type de tâches *T* et d'un spécimen du type de tâches *T'*. Là encore, il y a coopération entre le professeur et les élèves, les élèves se situant nettement du côté du bloc pratico-technique (ils mettent en œuvre la – ou une des – technique(s) permettant d'accomplir le type de tâches) alors que le professeur est clairement du côté du bloc technologico-théorique (il intervient pour donner des éléments justificatifs des gestes techniques accomplis).

2.2.3. Le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique – Encore une fois, ce type de tâches est coopératif : nous avons vu, par exemple, que la formulation des deux règles se fait par les élèves, sous la direction relativement souple du professeur qui reprend leurs énoncés. Mais c'est le professeur qui prend l'initiative de ce moment, ce que traduit notamment dans le travail sur la question 2 de l'activité son intervention : « Bon, dans la question 2, qu'est-ce qui se passe ? ». C'est là encore l'activité, et notamment l'étude des questions 2, 3, 4 et 5, qui sert de support à ce moment.
On peut supposer que ce mode de réalisation des trois moments précédents, qui prend appui sur la réalisation par les élèves d'une activité, est un trait générique de la praxéologie didactique observée.

2.2.4. Le moment de l'institutionnalisation – Nous pouvons presque dire que ce moment d'institutionnalisation est partout dense dans le travail effectué. C'est pour l'essentiel le professeur qui est l'acteur de ce moment, qu'il réalise à la fois par écrit et par oral. Ce sont, de façon privilégiée, les types de tâches et les techniques – ou plutôt des éléments des techniques, les techniques étant peu institutionnalisées – qui sont institutionnalisés oralement et les éléments technologiques qui le sont par écrit. Ces derniers sont d'ailleurs notés deux fois, on l'a vu : une première fois lors du travail sur l'activité qui en permet l'émergence, une deuxième fois dans le cours. La encore, on peut supposer que ce sont des traits génériques de l'organisation didactique mise en place par le professeur.

2.2.5. Le moment de l'évaluation – Ce moment apparaît réalisé lors de la correction de l'activité ou des exercices que les élèves ont à faire. Les commentaires du professeur lors de ces épisodes montrent que la fonction d'évaluation des rapports personnels des élèves à la praxéologie mathématique en construction est seconde par rapport à celle de l'évaluation de la praxéologie mathématique elle-même. Il est donc pour l'essentiel ici un sous-moment du moment de l'institutionnalisation.

2.2.6. Le moment du travail de la technique – Ce moment est peu présent dans le corpus étudié : il n'apparaît qu'en fin de séance, à propos du type de tâches T', de manière trop brève pour que nous puissions en parler significativement.

Pour terminer cet instantané de la praxéologie didactique observée, nous noterons quelques aspects génériques, ou que l'on peut supposer tels, de cette praxéologie concernant les rôles respectifs du professeur et de l'élève. C'est le professeur qui dirige l'étude, en particulier c'est lui qui décide de la succession des moments, du passage d'un moment à l'autre ; les élèves suivent les directions du professeur, passent au tableau et plus généralement produisent l'activité mathématique qui servira de matière première dans l'étude engagée. Le professeur dirige également, à partir du système didactique principal constitué par la classe, le travail des élèves dans un des systèmes didactiques auxiliaires, représenté par le travail à la maison : on voit ainsi, à la fin de la séance, le professeur commenter les exercices à faire pour le lendemain.

3. Evaluation de l'organisation mathématique

Nous nous plaçons ici dans la perspective exposée par Yves Chevallard dans son cours[3], à savoir l'évaluation de l'organisation mathématique que nous avons observée et analysée précédemment en vue de développer une organisation mathématique à partir de celle qui nous était présentée. Ajoutons que cette évaluation prend appui sur les critères d'évaluation développés dans le cours, cités en italique ; qu'elle utilise, bien entendu, les éléments de l'analyse effectuée ; qu'elle est relative à l'observation effectuée : certaines des assertions se trouveraient peut-être infirmées si nous avions accès à l'ensemble du processus d'étude de cette organisation mathématique.

3.1. Evaluation des types de tâches

Critère d'identification. – Les types de tâches T_i sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ? En particulier, sont-ils représentés par des corpus K_i effectivement disponibles de spécimens suffisamment nombreux et adéquatement calibrés ? Ou au contraire ne sont-ils connus que par quelques spécimens peu représentatifs ?

Nous avons mis en évidence dans l'analyse que les deux types de tâches considérés sont clairement identifiés : ils sont notamment nommés par le professeur. Les corpus K et K' sur lesquels on voit travailler les élèves paraît adéquatement calibré principalement quant aux ensembles de nombres concernés : les entiers et les décimaux (non entiers) sont représentés. On peut dénombrer douze spécimens du premier type de tâches, mais trois seulement du second type de tâches (deux dans l'ordre croissant et un dans l'ordre décroissant) : le corpus K' est donc trop peu important.

Critère des raisons d'être. – Les raisons d'être des types de tâches T_i sont-elles explicitées ? Ou au contraire ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?

Les raisons d'être des types de tâches T et T' ne sont pas explicitées. Les questions « A quoi

---

[3] Voir Leçon 3, paragraphe 1.1.

sert la comparaison de deux nombres relatifs ? » « A quoi sert le rangement (dans l'ordre croissant ou décroissant) d'une suite de nombres relatifs ?» en particulier ne sont pas posées et restent donc sans réponse. L'activité de comparaison de températures ne saurait constituer une réponse en acte à ces questions puisqu'elle sert, dans l'organisation didactique réalisée, à produire la technique mathématique de comparaison.

Critère de pertinence. – Les types de tâches considérés fournissent-ils un bon découpage relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui ? Pour demain ? Ou au contraire apparaissent-ils comme des « isolats » sans lien véritable – ou explicite – avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ?

La pertinence des types de tâches étudiés est étroitement liée aux raisons d'être de ces types de tâches dans la mesure où l'explicitation de raisons d'être permet de faire un « lien avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ». L'absence d'explicitation des raisons d'être ici conduit donc les types de tâches considérés à apparaître comme des isolats. Cependant, il n'en reste pas moins qu'ils sont pertinents au regard des besoins mathématiques, « immédiats » et à venir, des élèves. Citons, à cet égard, le titre **4. Initiation à la résolution d'équations** du paragraphe **B-Travaux numériques** du programme de cinquième :

Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données.

Les programmes prévoient une initiation très progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter l'écueil connu d'apprentissages aboutissant à la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens. La classe de 5^e correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. Par exemple, dans l'étude d'une situation conduisant à une égalité telle que $3y = 4x + 2$, on sera amené à en tester la véracité pour diverses valeurs de x et y.
Les expressions qui figurent de part et d'autre du signe d'égalité jouent ici le même rôle. On travaillera aussi avec des inégalités dans des cas simples, sans pour autant que cette activité donne lieu à des compétences exigibles.

Plus généralement le travail algébrique, qui constitue l'un des principaux enjeux didactiques du collège, suppose que l'on sache comparer des nombres décimaux relatifs. Ce lien entre la comparaison des nombres décimaux relatifs et le travail algébrique n'est cependant pas présent dans la praxéologie mathématique mise en place par le professeur. On voit poindre ici une voie de développement de l'organisation mathématique considérée, qui permettrait à la fois d'en faire apparaître des raisons d'être et d'en rendre lisible la nécessité pour le travail mathématique mené en cinquième et à venir.

3.2. Evaluation des techniques

Les techniques proposées sont-elles effectivement élaborées, ou seulement ébauchées ? Sont-elles faciles à utiliser ? Leur portée est-elle satisfaisante ? Leur fiabilité est-elle acceptable étant *donné leurs conditions d'emploi ? Sont-elles suffisamment intelligibles ? Ont-elles un avenir, et pourront-elles évoluer de manière convenables ?*

La technique τ relative au type de tâche T apparaît effectivement élaborée, même si, on l'a noté, elle n'est pas institutionnalisée par écrit : le découpage en trois sous-types de tâches est clairement effectué, chacun des sous-types de tâches se voyant attribuer une technique. La technique τ repose dans une large mesure sur la technique de comparaison de deux décimaux positifs, que les élèves ont étudiée au primaire et qui est sans doute pour la grande majorité d'entre eux routinière. Elle apparaît dans l'observation effectuée facile à utiliser pour les élèves et sa portée ainsi que sa fiabilité apparaissent satisfaisante.

La technique τ' relative au type de tâche T' apparaît en revanche peu élaborée – et même pas du tout dans le cas du rangement décroissant : seuls des fragments de cette technique sont institutionnalisés. De plus, cette technique n'est pas très facile d'emploi ni très fiable : elle suppose, si on la suit à la lettre, dans le cas d'un rangement croissant, de déterminer le plus petit nombre négatif d'une suite de nombres négatifs en cherchant celui qui a la plus grande distance à zéro, et de répéter cette opération $n - 1$ fois si la suite comporte n termes. Une technique alternative, plus fiable parce qu'elle repose sur un type de tâche routinier « ranger des nombres positifs », aurait été de déterminer les distances à zéros des nombres négatifs en jeu, puis ranger ces distances à zéros dans l'ordre inverse de celui demandé, et inverser le rangement pour obtenir le rangement des nombres négatifs considérés comme le montre l'exemple suivant :

Tâche $t \in T'$: ranger dans l'ordre croissant –3, 5, –9, 0, –5, 8.
Technique : la distance à zéro de –3 est 3, celle de –9 est 9 et celle de –5 est 5.
On a $9 > 5 > 3$, donc $-9 < -5 < -3$.
Comme $0 < 5 < 8$, il vient $-9 < -5 < -3 < 0 < 5 < 8$.

3.3. Evaluation des technologies

Etant donné un énoncé, le problème de sa justification est-il seulement posé ? Ou bien cet énoncé est-il considéré tacitement comme allant de soi, évident, naturel, ou encore bien connu ("folklorique") ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Sont-elles adaptées à leurs conditions d'utilisation ? Les justifications explicatives sont-elles favorisées ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement et optimalement exploités ?

S'il y a, dans la praxéologie mathématique considérée, des assertions technologiques, le problème de leur justification est peu posé : c'est l'activité de comparaison des températures qui permet de les produire sans qu'elle constitue une véritable justification expérimentale de ces énoncés. Ces assertions sont cependant utilisées pour justifier, expliquer, les techniques mises en place – et c'est le professeur, nous l'avons vu, qui prend en charge cette fonction. Cependant, l'assertion utilisée par le professeur pour justifier la comparaison de deux nombres négatifs est, principalement, l'assertion : « Les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro. », qui n'a pas été institutionnalisée par écrit. Pourtant, c'est bien elle qui est la plus adaptée au travail effectué, notamment parce qu'elle produit des techniques reposant sur le rangement des nombres positifs, tâche routinière pour les élèves. En particulier, c'est ce résultat technologique qui permet de justifier la technique que nous avons exposée ci-dessus concernant le rangement des nombres relatifs.

4. Pour conclure

Nous avons mentionné, à propos de l'évaluation de l'organisation mathématique, le lien – manquant dans la praxéologie observée – avec le travail algébrique. Nous retrouvons ici un trait du processus de transposition didactique de l'algèbre et des systèmes de nombres au collège à propos duquel Yves Chevallard écrivait en 1989 [4] :

> Le problème didactique étudié – la place et le rôle du calcul algébrique au collège – conduit inévitablement à la question des systèmes de nombres. Nous verrons qu'il existe entre l'un et l'autre problèmes un lien nécessaire et incontournable, que la solution « empiriste actuelle tend simplement à occulter, en dépit des effets négatifs qui en résultent.
>
> Le problème didactique de la construction des différents systèmes de nombres est au cœur du curriculum du collège. C'est, objectivement, un problème difficile, devant lequel certains parmi les meilleurs ont pu reculer et dont on peut penser qu'il n'a pas reçu jusqu'à présent de solution satisfaisante. De cette pathologie du curriculum, la situation que nous avons évoquée à propos des systèmes numériques (leur prolifération, et cette « cancérisation » du corpus enseigné qu'elles réalisent) constitue l'un des symptômes les plus frappants.
>
> Nous essaierons de montrer que le problème du calcul algébrique, de sa construction formelle comme de ces emplois, lui est doublement lié. D'une part, en effet, les systèmes de nombres fournissent les domaines de calcul sur la base desquels s'élèvera le calcul algébrique, ainsi qu'on l'a déjà souligné. Mais, d'autre part, *le calcul algébrique constituera le **mobile** essentiel, et l'**outil** fondamental de la construction des systèmes de nombres successifs.*

A cet égard, le curriculum réel a peu changé depuis la fin des années 80, bien qu'aujourd'hui, dans les programmes de collège, l'initiation à l'algèbre soit inscrite dès la sixième et que, donc, rien n'interdise que les systèmes de nombres soient construits par le calcul algébrique. On peut noter, de plus, que, dans le cas des fractions, le programme de sixième écrit :

> Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :
>
> – le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre,
>
> – le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a.

Le lien entre système de nombres et calcul algébrique est donc ici signalé ($\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$) mais il est insuffisamment explicité pour que, étant donné l'état du curriculum, les professeurs puissent l'exploiter pour la construction des fractions et la démonstration des propriétés de ce système de nombres. En ce qui concerne les nombres relatifs, rien de semblable n'est mentionné, alors que, semblablement, les nombres négatifs sont engendrés comme solution des équations $a + x = 0$, avec a positif. Cette construction des nombres négatifs à l'aide du calcul algébrique permettrait, comme dans le cas des fractions, de justifier les assertions technologiques que nous avons vu à l'œuvre dans l'organisation mathématique observée.

> Ainsi, considérons le résultat : de deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro. Soit donc les deux nombres négatifs définis par $a + x = 0$ et $b + x' = 0$ avec $a > b > 0$. Alors $a + x = b + x'$ et donc $a - b = x' - x$. Comme $a > b$, $a - b > 0$, et donc $x' - x > 0$, soit $x' > x$.

Bien entendu, cela supposerait la construction d'organisations didactiques adaptées : c'est précisément ce type de travail que l'on peut conduire dans une perspective de développement.

[4] Chevallard Y. (1989), « Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie, Perspectives curriculaires : la notion de modélisation », *petit x n°19*, pp. 43-72, page 50. C'est nous qui soulignons.

ANNEXE

COMPTE RENDU D'OBSERVATION EN CLASSE

La classe observée est une Cinquième de 28 élèves, décrite par P comme disciplinée mais assez fortement hétérogène. La séance observée a eu lieu le jeudi 20 mars 1997, de 10h à 11h. Plusieurs élèves étaient ce jour-là absents pour préparer le spectacle de fin d'année (destiné notamment à attirer les parents d'élèves des CM2 des environs).

P rappelle que les mâcheurs de gomme doivent passer par la poubelle avant de rejoindre leur place – ainsi que le prévoit le règlement intérieur de l'établissement. Puis il présente la séance : « Bien ! Le programme de la séance d'aujourd'hui... On va terminer l'activité sur les nombres relatifs faite lundi. On va en déduire des règles de comparaison qu'on marquera sur le cahier de cours. Vous prenez votre cahier d'exercices, on va corriger... »

Des élèves arrivent. P poursuit : « Je vous rappelle au tableau les données de l'exercice, c'est-à-dire les températures des villes A, B, C, D, E, F » (voir l'encadré, page suivante). Il écrit :

A	B	C	D	E	F
–3	1	–4	–1	6	2

Après avoir rappelé les réponses à la question 2, P précise qu'il s'agissait de répondre aux questions 3 à 6 ; il désigne un élève pour corriger la question 3 et commente : « Il s'agissait de comparer les villes A et C. Où est-ce qu'il fait plus froid ? » P parle d'une voix forte et distincte qui s'impose comme une chape sonore. Entre-temps l'élève a écrit les réponses demandées :

3a) $-4 < -3$

3b) $-4 < -1$

3c) $-3 < -1$

Un nouvel élève est appelé pour traiter la question 4 : il donne des réponses correctes, en utilisant systématiquement la question « Où est-ce qu'il fait plus froid ? »

ACTIVITÉ

On a mesuré la température dans plusieurs villes :

Ville	A	B	C	D	E	F
Température en degrés	–3	1	–4	–1	6	2

1) Représenter les températures sur une droite graduée (un carreau représentant une unité).
2a) Fait-il plus froid dans la ville A ou dans la ville B ? Comparer leur température.
2b) Comparer les températures des villes B et C.
2c) Même question avec les villes D et F.
3a) Comparer les températures des villes A et C.
3b) Même question avec les villes C et D.
3c) Même question avec les villes A et D.
4a) Comparer les températures des villes B et E.
4b) Même question avec les villes E et F.
5) Ranger les températures de la plus basse à la plus haute.

6a) Compléter par < ou >

$-2 \ldots 5 \qquad -3{,}2 \ldots -6{,}8 \qquad 7 \ldots -5{,}2 \qquad 6{,}5 \ldots 4{,}7$

$-14 \ldots -2{,}5 \qquad 5{,}3 \ldots -6{,}9 \qquad 3{,}3 \ldots 8{,}2 \qquad -1{,}1 \ldots -1{,}01$

6b) Ranger par ordre croissant :

-1 ; $4{,}5$; $-2{,}6$; $-3{,}4$; $7{,}8$; 9 ; $-12{,}5$

P fait alors un bilan : « Dans la question 2, on compare des nombres négatifs et des nombres positifs. Dans la question 3, on compare des nombres négatifs. C'est nouveau pour vous. Bon, dans la question 2, qu'est-ce qui se passe ? » Une élève : « Un nombre sans signe c'est plus grand qu'un nombre négatif. » Un élève rappelle le cas particulier de zéro ; P reprend cette remarque : « On a vu que *moins* zéro et *plus* zéro, c'est égal. » P : « À la question 2, après avoir fait la comparaison, on obtient la règle... à mettre sur le cahier de cours... » À la demande de P, des élèves énoncent la règle en question. P reprend leur formulation et l'écrit au tableau :

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.

On passe à la question 3. P : « Qu'est-ce qu'on compare ? » Des élèves : « Des nombres négatifs. » P : « Et alors ? » Un élève : « Le chiffre le plus près de 0, ça donne la distance. » Un élève, avec l'aide de P : « Celui qui a la distance à 0 la plus petite est le plus grand. » Un autre élève intervient : « C'est l'ordre inverse de la distance à 0. » P approuve : « On peut écrire la propriété de deux manières. » Des élèves : « La première, c'est plus facile ! » P : « On va écrire la première... » Après une petite préparation orale, P met au tableau la formulation attendue, tout en signalant aux élèves qu'ils doivent l'écrire « à droite des réponses de la question 3 » :

De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro.

Un débat s'ensuit. « On pourrait dire *le plus grand est celui qui a la plus petite distance à* 0 » affirment plusieurs élèves. P approuve mais ajoute : « Comme dans la règle précédente on a dit *le plus petit*, on continue ici. » Les élèves notent. P : « On pourrait dire aussi, comme l'a dit votre camarade, que les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro. »

Il presse les élèves d'avancer – « Tout le monde a noté ? » – et poursuit : « Pour la question 4, est-ce que c'est quelque chose de nouveau pour vous ? » Les élèves : « Non ! » P : « Est-ce que nous sommes capables de comparer les nombres relatifs ? » Les élèves : « Oui. » P poursuit : « Question 5... Maintenant qu'on sait comparer les nombres deux à deux, on sait ranger les nombres relatifs... » P appelle un élève au tableau, l'interroge. L'élève indique qu'on commence par les nombres négatifs. P lui demande de préciser. L'élève écrit –4. P commente : « Il commence par le plus petit... » L'élève a continué d'écrire :

$-4 < -3 < -1 < 1 < 2 < 6$

P commente : « Une fois qu'on a épuisé les négatifs on s'attaque aux positifs.... » Puis : « Ranger les températures de la plus basse à la plus haute, ça correspond à ranger les nombres... Dans quel ordre ? » Un élève : « Croissant. » P reprend cette réponse, en l'explicitant à l'intention d'un élève qui semble ne pas comprendre : « Du plus petit au plus grand. » Il l'écrit :

rangement dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand)

Puis il enchaîne : « Ensuite, pour les questions 6a) et 6b), ce sont des applications de ce qu'on vient de voir... » Il appelle un élève au tableau. Celui-ci indique que $-2 < 5$; P lui fait expliquer pourquoi. On passe alors à –3,2 et –6,8 ; l'élève au tableau répond correctement, mais un élève conteste : 6,8 c'est plus grand que 3,2 ! P explique que les négatifs se rangent « dans l'ordre inverse » [de la distance à 0].

L'élève au tableau a continué. Il hésite un instant sur la comparaison de –1,4 et –2,5 : il écrit d'abord les deux nombres à comparer, en laissant un espace entre eux, puis place le signe convenable en recherchant celui dont la distance à 0... S'agissant du dernier couple, il apparaît que l'élève a mémorisé les nombres à comparer, –1,1 et –1,01 ! Il indique que 1,1 c'est 1,10, ce qui est plus grand que 1,01, etc.

P enchaîne sur la question 6b), demandant qui n'est pas passé au tableau. Une élève se propose. Elle vient, s'acquitte de sa tâche, pendant que P commente (après les négatifs on passe aux positifs, etc.). P : « Est-ce que tout le monde est d'accord avec ce rangement ? » Les élèves : « Oui ! » P : « Vous prenez votre cahier de cours. Vous rangez l'activité, on s'en resservira demain – il reste des choses à voir dessus. » Après quelques secondes : « Vous sautez une ligne, et vous écrivez... » :

2. Comparaison

Le silence s'est installé : les élèves écrivent. P reprend : « Pour la comparaison des nombres relatifs, on a vu qu'il nous manquait deux règles. Ce sont les règles qu'on a au tableau... Vous marquez ça sur votre cahier de cours. Vous écrivez en rouge, ou vous écrivez en bleu et vous encadrez en rouge *(il le fait au tableau, en encadrant en rouge)* »

Règle 1

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif

Les élèves notent. P poursuit : « Avant de passer à la règle 2, on va mettre quelques exemples d'applications de cette règle... Tout le monde a fini de recopier ? » Des élèves : « Non !... » P : « On va mettre deux exemples d'application. Vous allez comparer... »

–2 ... 7,5
6,1 ... –4,7

P : « Vous comparez ces nombres avec les signes < et >. Alors qu'est-ce qu'on peut dire de –2 et 7,5 ? » Des élèves : « –2 est le plus petit. » P : « On est tous accord ! » De même pour le second couple.

P circule dans la classe, puis reprend : « Ensuite, il nous faut une deuxième règle. Vous écrivez donc en dessous *Règle 2*... Celle qui est écrite au tableau. Et vous encadrez en rouge ; ou vous écrivez en rouge. Comme vous voulez. » Le silence se fait. P commente : « Cette fois-ci ça concerne les nombres négatifs et comme tout à l'heure on mettra deux exemples d'application. » P reprend oralement la règle 2 pendant que les élèves la notent dans leur cahier de cours.

Petit répit. Puis, bien vite : « Vous avez terminé ? » En guise de réponse un petit brouhaha se fait entendre. « Alors dépêchez-vous !... » Bientôt P reprend, et fait un bilan : « Vous savez comparer tous les relatifs entre eux... » Un élève : « Alors elle est finie la leçon ? » P : « Il restera les opérations. Et sur la comparaison, on va faire des exercices d'application. Donc c'est pas terminé ! » Il poursuit : « Vous comparez... » :

–7,1 ... –12,6
–5,4 ... –1,7

Puis : « Alors, qu'est-ce qu'on peut dire ? » P dialogue avec un élève : on arrive à –7,1 > –12,6. « On les range dans l'ordre inverse de leur distance à 0 », commente P. Il sollicite un autre élève pour la deuxième comparaison, qui est rapidement menée à bien. P : « Bien... On a les deux règles qui permettent de comparer les nombres relatifs, je le répète. On va faire des exemples d'application que vous prenez sur votre cahier de cours. » Un élève demande confirmation : « Sur le cahier de cours », répète P, qui ajoute : « Vous prenez votre feuille d'exercices, exercices 5, feuille numéro 14 ».

Les élèves découvrent l'exercice à faire : « C'est facile !... » P commente : « L'exercice 5, c'est un exercice de rangement dans l'ordre croissant [question 1], mais aussi dans l'ordre décroissant [question 2]. Alors, allez-y... » Le silence se fait. P : « N'oubliez pas de mettre des signes... » Une élève s'inquiète à nouveau de sa bonne compréhension de la consigne : « Dans le cahier de cours, à la suite ! », répète P. Un petit flottement se fait sentir, lié peut-être à des problèmes d'organisation. Les élèves s'affairent. P ne leur laisse guère de répit, et envoie un élève au tableau pour traiter la première question, le rangement des nombres –3, 5, –9, 0, –5, 8 dans l'ordre croissant. L'élève écrit :

5 f 14

–9 >

(La notation 5 f 14 désigne l'exercice 5 de la feuille d'exercices n°14.) Des élèves se récrient : « M'sieur, il s'est trompé ! » L'élève rectifie et continue. P commente, explique, justifie. Tout cela va très vite : une nouvelle élève est envoyée au tableau pour la deuxième question, le rangement des nombres –7, 6, –4, 0, –6, 5 dans l'ordre décroissant. P lui fait préciser le sens de cette expression (« Du plus grand au plus petit »), l'élève s'active en regardant sa feuille. Des élèves donnent à haute voix la suite des nombres à écrire. P leur demande de « laissez la personne au tableau faire l'exercice ». L'élève a fini. Elle retourne à sa place. P reprend : « Alors, ensuite vous allez faire le numéro 6, c'est la même chose mais cette fois-ci avec des nombres décimaux. Le numéro 6 en entier, 1 et 2 ». Le silence se fait. Les élèves s'affairent. Un élève appelle P, lui indique la différence qu'elle voit entre les exercices 5 et 6 : « Cette fois on passe aux décimaux. Donc la comparaison s'effectue aussi sur la partie décimale... » P approuve. Puis il arrête les élèves : « Vous allez noter également le travail à faire pour demain... » « Oh !... » « Vous allez faire le 3 et le 4 de la feuille 14. Prenez votre feuille d'exercices, on va en dire un mot rapidement. » Il insiste : « S'il vous plaît ! Avant de passer à la correction du 6, on regarde ce qu'il y a à faire pour demain ! » Il explicite : « L'exercice 3, on a déjà fait ça. L'exercice 4, c'est différent... ». Il écrit :

3,2 < < 3,3

« Chaque fois il faut compléter par un nombre compris entre les deux. Ensuite, deuxième question, rapidement » :

< 3,4 <

« Il faut encadrer par deux entiers consécutifs. » P commente, explique, précise (« consécutifs », ça veut dire « qui se suivent »), conclut : « Je vous rappelle : pour demain, 3 et 4, et terminer le 6. » Il veut enchaîner avec la correction du début de l'exercice 6. Mais les élèves ont déjà commencé à ranger leurs affaires. La séance est terminée.