ÉCRITURES FRACTIONNAIRES : étude de traces écrites de l'activité d'une classe de cinquième.

Michel Jullien & Jacques Tonnelle
IUFM d'Aix-Marseille

Le corpus consacré au thème de l'enseignement des écritures fractionnaires au collège se compose de cinq parties. La première partie est consacrée à des « questions ombilicales » (voir le cours) de professeurs stagiaires sur ce thème.

Les deuxième et troisième parties contiennent chacune un compte rendu d'observation en classe. La quatrième partie est consacrée à des « traces écrites de l'activité d'une classe » sur le thème des fractions (pour les conditions de constitution de ces comptes rendus et de ces traces écrites, voir la présentation générale). Enfin, les programmes en vigueur des classes concernées clôturent ce corpus.

Le travail en atelier et en travaux dirigés a consisté à produire des analyses de ces différentes observations à l'aide des outils théoriques présentés dans les différentes parties du cours, notamment la notion centrale « d'organisation praxéologique ».

Ce texte ne présente pas une chronique du travail du groupe sur cette question, mais a l'ambition de mettre par écrit l'essentiel des analyses produites au cours de ce travail. De plus, et bien que les analyses aient porté sur chacune des trois observations du corpus, nous avons choisi de décrire celles ayant trait aux « traces écrites de l'activité d'une classe ». Ce type d'observation a le mérite de couvrir une assez longue période d'étude et de parcourir ainsi l'ensemble des activités de la classe sur ce thème. C'est seulement cette partie de l'ensemble du corpus proposé aux participants de l'Université d'Eté que nous avons reproduit en annexe. Le lecteur pourra, le cas échéant, s'y reporter.

Le travail d'analyse a été découpé en deux grandes parties. Dans un premier temps, il consistait à mettre à jour l'organisation (praxéologique) mathématique mise en place dans cette classe à propos de ce thème d'enseignement, ou tout au moins ce qu'on peut en voir à travers l'étude des traces écrites d'un élève de la classe. La deuxième partie a porté sur l'analyse de l'organisation (praxéologique) didactique qui a servi à mettre en place l'organisation mathématique. C'est dans cet ordre que nous allons présenter les résultats de ce travail d'analyse.

Nous évoquerons sommairement dans une troisième partie la question de la valeur de ces organisations praxéologiques.

Mais, dans le but de se familiariser avec ce corpus, il convient de commencer par une description événementielle et linéaire, de l'ensemble des activités de la classe.

1. Structure et contenu de l'ensemble de la séquence observée

Comme il est indiqué dans l'en-tête de la chronique de l'étude (page 140 en annexe), cette séquence constitue le tout de l'étude du thème des écritures fractionnaires dans cette classe de cinquième. Elle s'est déroulée d'un seul tenant, entre le 28 novembre 1996 et le 16 janvier 1997 durant environ dix-sept heures. Le programme de référence est donc celui qui était en vigueur jusqu'en 1997 et qui a subi des modifications depuis.

Le cahier de l'élève dont les traces écrites sont reproduites se divise classiquement en une partie « Cours » et une partie « Exercices ». Le cours fait l'objet du troisième chapitre de l'année. Il s'intitule, en conformité avec les textes officiels, « Nombres en écritures fractionnaires » et est bâti selon le plan suivant :

I. Comparaison des fractions
  1. Les fractions
  2. Égalité de fractions
  3. Simplification
  4. Comparaison de fractions
  5. Utilisation de la simplification
  6. Comparaison à 1
II. Opérations sur les fractions
  1. L'addition des fractions
  2. La multiplication des fractions
  3. Fraction et partie entière

La partie « Exercices » s'ouvre sur les énoncés des exercices proposés (essentiellement issus du manuel en vigueur dans la classe), se poursuit par les traces écrites de l'élève concernant ces exercices et se termine par les énoncés et les copies (corrigées) relatifs à un devoir à la maison et un devoir en classe.

Le détail du contenu de chacune des séances est indiqué dans la chronologie de la page 140 et on s'y reportera au fur et à mesure, si nécessaire.

2. L'organisation mathématique

Il s'agit de donner une description de l'organisation mathématique mise en place dans cette classe de 5è, c'est-à-dire de décrire le plus précisément possible la réalité mathématique qui s'est construite dans cette séquence.

On peut comparer, selon une métaphore qu'on aura l'occasion de reprendre, le travail de la classe (du professeur et des élèves) à la construction d'une maison. Ce qu'on regarde, en essayant d'identifier l'organisation mathématique mise en place, c'est le résultat final en dehors des aléas du chantier.

L'organisation mathématique que l'on peut observer dans ce corpus est une organisation mathématique régionale qui correspond au secteur d'études des écritures fractionnaires.

Un premier travail consiste à identifier les *types de problèmes* qui ont été travaillées et tels qu'on peut les identifier à travers les traces écrites qui sont à la disposition de l'élève K.

2.1. Les types de problèmes

C'est d'abord dans les exercices qu'on va essayer de les identifier.

Les énoncés des exercices se trouvent pour la plupart aux pages 154 et 155 du corpus. La reproduction du cahier d'exercices commence à la page 156.

Le travail d'analyse permet d'identifier huit types de problèmes qui peuvent s'énoncer de la façon suivante :

- T_0 : Étant donné une fraction $\frac{a}{b}$, déterminer s'il s'agit d'un nombre entier, d'un nombre décimal, ou si ce n'est ni l'un ni l'autre.
- T_1 : Simplifier une fraction $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers strictement positifs donnés.

• T_2 : Étant donné deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, déterminer si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; plus généralement, étant donné les fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$, déterminer celles d'entre elles qui sont égales.

• T_3 : Étant donné les fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$, les ranger par ordre croissant (resp. décroissant).

• T_4 : Étant donné deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, calculer $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ et mettre le résultat sous forme simplifiée.

• T_5 : Étant donné deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, calculer $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ et mettre le résultat sous forme simplifiée.

• T_6 : Étant donné une fraction $\frac{a}{b}$, déterminer les entiers n, p et q tels que $\frac{a}{b} = n + \frac{p}{q}$, avec $p < q$.

• T_7 : Étant donné une grandeur g_0 dont on connaît la mesure par rapport à une unité u, trouver la mesure, dans cette même unité, d'une grandeur g dont on connaît la mesure par rapport à g_0 prise comme unité.

Une remarque complémentaire s'impose. Dès le début du cours, la définition différencie les « fractions » des « écritures fractionnaires » en réservant cette dernière expression aux cas ou l'un au moins des numérateurs et dénominateurs ne sont pas entiers. Ce distinguo posé et en dépit du titre du chapitre (d'ailleurs en conformité avec les textes officiels), il ne sera plus guère question dans la suite des activités mathématiques de la classe que des fractions d'entiers excepté dans quelques exemples illustrant la simplification des fractions (l'occurrence , dans le cours, d'une telle écriture est d'ailleurs accompagnée d'une mise en garde, cf. pages 144 et 145) et... dans le devoir en classe.

2.2. Les techniques et les éléments technologiques associés

Il s'agit, à travers ces traces écrites, d'identifier et de décrire les techniques mises à la disposition de la classe pour étudier ces types de problèmes. Ce travail nécessite en fait un examen approfondi des diverses activités de la classe afin d'exhiber des manières de faire laissées largement implicites dans la plupart des cas. Pour ne pas multiplier les renvois, nous étudions à la suite les technologies de ces techniques.

Le type de problèmes T_0

Le problème T_0 est rencontré par l'intermédiaire d'un seul spécimen qui comporte sept fois le même travail. Il constitue le premier exercice du chapitre. Mais, la toute première rencontre a lieu en fait dans le cours. En effet, au détour de la remarque : « une fraction peut être égale à un nombre entier, un nombre décimal, ou bien ni l'un ni l'autre » - formulation un peu maladroite qui pourrait laisser entendre une intersection vide entre l'ensemble des entiers

et celui des décimaux - P propose cinq exemples de fractions, mentionne leur appartenance à l'une des catégories précédentes et accompagne ce résultat de l'indication, entre parenthèses, d'une écriture décimale exacte ou approchée (selon le cas) de cette fraction, sans qu'aucun lien causal ne soit clairement explicité. L'exercice correspondant que l'on trouve dans le cahier d'exercices est bâti exactement sur le même modèle, ce qui laisse à penser qu'il s'agit d'un exercice fait en classe. Ce type de problèmes, rencontré au tout début du chapitre ne semble plus évoqué par la suite et ne fait l'objet d'aucune évaluation.

On peut en déduire que la technique τ_0 mise en oeuvre est de manière évidente l'effectuation de la division, sans doute à l'aide d'une calculatrice. Autrement dit, elle repose sur l'idée que la recherche de l'écriture décimale du nombre (s'il en a une) permet de résoudre la question de sa nature. Cet élément technologique est resté implicite, en tout cas il ne figure pas dans les traces écrites dont on dispose.

Deux points méritent d'être ici soulignés. D'une part, comme toute technique, elle a son domaine de validité et on devine que dans certains cas d'autres connaissances seront nécessaires pour savoir si l'écriture décimale est finie ou pas. Mais P évite complètement cette difficulté en ne proposant que des exemples de nombres rationnels non décimaux dont la longueur de la période est 1[1]. D'autre part, on sait qu'une autre technique existe et a existé dans l'enseignement : elle consiste à regarder la présence ou l'absence d'autres facteurs que 2 et 5 dans la décomposition primaire du dénominateur de la fraction irréductible. Les connaissances que sa mise en oeuvre nécessite ne sont pas disponibles aujourd'hui à ce niveau des études, mais il n'en a pas été toujours ainsi.

> *C'est ainsi que dans un manuel d'arithmétique de l'enseignement primaire supérieur[2] on trouve l'exercice : " La fraction 7/64 peut-elle être convertie exactement en fraction décimale ? Justifier la réponse par un raisonnement ". L'examen du cours montre que l'élève dispose d'un théorème : " Pour qu'une fraction ordinaire irréductible puisse être convertie en nombre décimal, il faut et il suffit que son dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5 ". Ce théorème est dûment démontré dans le cours.*

Le type de problèmes T_1

On dénombre trois exercices (il s'agit des exercices n° 5, 6 et 7) qui portent exclusivement sur le type de problèmes T_1, ce qui représente 33 spécimens de ce problème. C'est un signe de l'importance que P lui a accordé.

La technique mise en oeuvre par l'élève K, et que l'on peut repérer à travers ses exercices, consiste à trouver un diviseur commun au numérateur et au dénominateur et à effectuer la division. Un élément de preuve intervient dans ce schéma : il consiste à matérialiser l'opération de division par deux flèches surmontées du diviseur commun (voir pages 156, 157 et 158).

L'élément technologique sur lequel se fonde cette technique se trouve dans le cours, à la page 144. On y énonce la propriété $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$ dans un paragraphe intitulé « Egalité de fractions ». Cet énoncé est précédé lui-même d'une brève expérimentation de cette égalité pour deux couples de fractions. L'aspect sommaire du compte rendu de cette expérimentation (en particulier, il manque la mise en évidence de l'existence d'un multiplicateur k et le fait qu'elle

[1] Ce critère ne suffit pas, à lui tout seul, à assurer la réussite de la technique. L'écriture décimale que la plupart des calculatrices donne du nombre 2469133333/2000000000 est 0.1234566667, ce qui laisse à penser que le 6 se répète indéfiniment...

[2] A. Millet, *Arithmétique*, 1re, 2e, 3e Années du Brevet Élémentaire (programme de 1920), Hachette, 1923.

ne porte que sur des décimaux ne doivent pas occulter qu'il s'agit d'une tentative de justification de la propriété. Dans le paragraphe suivant, intitulé « Simplification », on peut lire la phrase « la règle précédente permet de 'fabriquer' différentes écritures fractionnaires d'un même nombre ». L'exemple qui illustre cette remarque n'utilise pas formellement la « règle » énoncée, mais l'égalité des fractions est justifiée par la mise en évidence à l'aide de flèches d'un multiplicateur commun, le jeu sur le sens des flèches permettant d'éviter d'écrire des divisions. C'est sans doute dans cet exemple qu'il faut voir l'origine de la technique utilisée par l'élève K. Une utilisation plus stricte de la règle amènerait la technique plus classique suivante :

$$\frac{15}{20} = \frac{5 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

Le paragraphe se termine par la définition de la forme irréductible d'une fraction comme la « forme la plus simple sous laquelle peut s'écrire une fraction ». L'aspect peu mathématique de cette définition est d'abord le signe du manque d'une notion adéquate et est, bien évidemment, un effet du curriculum. L'absence, à ce niveau, des notions élémentaires d'arithmétique, n'autorise pas que vive, de manière mathématiquement contrôlée, la notion de forme irréductible d'une fraction ni l'idée, pourtant fondamentale, d'écriture standard d'un nombre dont l'intérêt saute aux yeux dès lors que l'on se pose la question de l'égalité de deux résultats, par exemple.

En fait, dans la plupart des exemples proposés, l'élève obtient la forme irréductible en un seul « coup » (le PGCD du numérateur et du dénominateur est un nombre premier ou est facilement repérable, comme 100 par exemple). Ce choix semble permettre d'éviter la rencontre avec la question de la meilleure simplification ce qui risquerait de montrer l'absence de critère.

Notons encore que, dans les traces écrites, on ne repère aucune indication sur la façon de trouver un diviseur commun et les quelques critères de divisibilité étudiés en classe de Sixième et qui sont largement employés pour la résolution de ce type d'exercices ne sont pas rappelés dans le cours à la page 147, au moment où la simplification va de nouveau entrer en scène pour la comparaison des fractions.

Le type de problèmes T_2

En lien étroit avec la technique précédente, la technique τ_2 relative au type de problèmes T_2 est utilisée dans deux exercices : les numéros 11 et 12.

n°11. *Marions-les.* Trouver les paires de fractions égales :

$$\frac{9}{39} ; \frac{12}{9} ; \frac{3}{13} ; \frac{35}{10} ; \frac{12}{17} ; \frac{4}{3} ; \frac{35}{27} ; \frac{77}{56} ; \frac{60}{85} ; \frac{3,5}{2,7} ; \frac{11}{8} ; \frac{7}{2}.$$

n°12. *Chasse l'intrus !* Dans chaque ligne, chasser la fraction qui n'est pas égale aux autres :

a) $\frac{50}{60} ; \frac{60}{48} ; \frac{10}{8} ; \frac{6}{4} ; \frac{15}{12} ; \frac{25}{20} ; \frac{5}{4}$.

b) $\frac{5}{30} ; \frac{1}{6} ; \frac{4}{24} ; \frac{10}{60} ; \frac{2}{12} ; \frac{3}{18} ; \frac{5}{3}$.

c) $\frac{24}{36} ; \frac{6}{9} ; \frac{10}{15} ; \frac{14}{21} ; \frac{1,2}{1,8} , \frac{3}{2} ; \frac{8}{12}$.

Dans l'exercice n°11, il s'agit de la même technique. Pourtant, dans l'exercice n°12, qui consiste à identifier l'intrus dans une suite de fractions, se pose le problème d'une technique permettant de dire si deux nombres écrits sous forme fractionnaire sont différents. L'élève K

explique en une phrase écrite en début d'exercice (« On cherche la forme irréductible de chaque fraction ») la façon de s'y prendre, même si les calculs nécessaires à cette technique n'apparaissent pas dans ce qui suit. La technique utilisée se fonde donc sur l'unicité de la forme irréductible. Ce résultat n'est nulle part mentionné dans ces traces écrites. L'élément justificatif est donc une connaissance « folklorique ». Une autre technique alternative s'appuierait sur la proposition réciproque de la propriété énoncée dans le cours, à savoir que les seules fractions égales à $\frac{a}{b}$ sont de la forme $\frac{k \times a}{k \times b}$. Mais cette réciproque n'est pas énoncée elle non plus.

Le type de problèmes T_3

En ce qui concerne le type de problèmes T_3, on en trouve douze spécimens dans le cahier de l'élève. La difficulté de ces exercices varie en fonction de différents facteurs. Certaines fractions proposées ont toutes le même dénominateur : c'est le cas de quatre de ces exercices. La technique τ_3 consiste à ranger les fractions dans l'ordre de leur numérateur. Elle est explicitement indiquée dans le cahier de l'élève K. En effet, on peut y lire, à deux reprises, la phrase : « On classe ces fractions si les dénominateurs sont les mêmes dans l'ordre décroissant de leurs numérateurs ». C'est, à peu de choses près, l'énoncé de la propriété du cours à la page 146 :

> Propriété : Les fractions se rangent, si les dénominateurs sont égaux, dans l'ordre des numérateurs.

On peut remarquer incidemment que l'élève a écrit « fonctions » à la place de « fractions » (lapsus de P ?) sans que cela n'ait semblé troubler sa compréhension. La formulation même de cette propriété induit très fortement la technique qu'elle justifie. Comparer, par exemple, à un énoncé du type :

> Propriété : De deux fractions ayant le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Cette propriété est amenée par une « activité » faite en classe et dont l'énoncé est issu du manuel en vigueur. Les traces écrites relatives à cet exercice permettent de supposer qu'il s'agit de six grilles du type « grilles de mots croisés » auxquelles on associe la fraction ayant pour numérateur le nombre de cases noires et pour dénominateur le nombre total de cases. Chacune de ces grilles ayant le même nombre de cases, on obtient ainsi six fractions de même dénominateur. Le rangement de ces six fractions dans l'ordre croissant est alors indiqué sans qu'aucun élément justificatif ne l'accompagne. L'exercice apparaît davantage comme une « mise en scène » de la propriété que comme une expérimentation de celle-ci.

On peut noter par ailleurs que la réussite de l'accomplissement de cette tâche suppose la connaissance des ordres croissant et décroissant.

Dans six autres spécimens les fractions proposées n'ont pas toutes le même dénominateur et dans quatre de ces cas, l'énoncé mentionne entre parenthèses la consigne « trouver un dénominateur commun ».

On peut donc compléter la technique τ_3 mise en place pour résoudre le type de problèmes T_3 :

- si les fractions ont le même dénominateur, elles sont rangées dans le même ordre que leur numérateur ;

- sinon, on se ramène au cas précédent en trouvant des fractions égales aux précédentes et qui ont toutes le même dénominateur.

Mais comment trouver un dénominateur commun ? Quelle technique mettre en oeuvre pour accomplir cette sous-tâche du type de tâches T_3 lorsqu'on accomplit cette dernière suivant la technique τ_3 ?

On ne trouve guère de technique clairement exposée pour ce type de tâches. Sans doute parce que le programme alors en vigueur ne considère pas la comparaison de fractions de dénominateurs différents comme une « compétence exigible », le professeur n'a pas cru bon de mettre entre les mains des élèves une technique nettement identifiée. Dans le cours, il est seulement précisé que la technique de simplification des fractions permet, le cas échéant, de trouver des dénominateurs communs, encore que cela soit davantage suggéré (par un exemple) que véritablement montré. Les exigences du devoir en classe sont, de ce point de vue, tout à fait en accord aussi bien avec les textes qu'avec la pratique de la classe.

Le cahier d'exercices montre que l'élève K réduit effectivement les fractions au même dénominateur afin de les ranger, mais ne dit rien sur la façon de s'y prendre, et cela même dans les deux derniers cas où les dénominateurs en présence ne sont pas des multiples d'un même nombre :

> **n°17**. Ranger les fractions suivantes par ordre décroissant :
> a) $\frac{13}{21}$; $\frac{152}{17}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{5}{17}$.
> b) $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$.

Dans deux cas, l'énoncé donne un moyen de déterminer la série de fractions qu'il faut ensuite ranger :

> **n°19.** a) Ecrire les fractions inférieures ou égales à 1 qui ont pour dénominateur 7 (les dénominateurs *(sic)* étant des nombres entiers).
> b) Ranger par ordre croissant les fractions obtenues en a).
>
> **n°20.** Ranger par ordre décroissant les fractions comprises entre 1 et 2 dont le dénominateur est entier.

Ce dernier exercice a un énoncé est un peu mystérieux : fallait-il écrire que $2 > 3/2 > 4/3 > 5/4 > 6/5 > 7/6 > \ldots > 1$? On peut en douter ! Mais alors que faire ? En fait, l'élève K a pris les fractions de dénominateur 7 et de numérateur entier comprises entre 1 et 2.

A propos de ce type de problèmes, on trouve dans le cahier d'exercices un travail fait apparemment en classe et qui consiste à comparer deux fractions dont la taille des numérateurs et dénominateurs impose l'aide d'une calculatrice. En effet, il s'agit de comparer $A = \frac{13860}{33461}$ et $B = \frac{33461}{80782}$. Dans un premier temps, on constate que les approximations décimales données par une calculatrice sont les mêmes pour les deux fractions. On ne peut donc conclure. C'est alors par la réduction au même dénominateur, en prenant le produit des dénominateurs comme dénominateur commun, que l'on parvient enfin à les comparer pour conclure que $A < B$. La conclusion de cet exercice est une mise en garde : « Se méfier de la machine »...

Notons enfin que le cahier de cours montre qu'un type de tâches un peu différent a été travaillé : il s'agit de la comparaison à 1 des fractions. Ce travail fait l'objet d'un paragraphe du

cours (le sixième et dernier dans le chapitre consacré à la comparaison des fractions) qui se termine par l'énoncé d'une propriété :

> Propriété : Lorsque le numérateur d'une écriture fractionnaire est plus grand que le dénominateur, le nombre que représente cette écriture est plus grand que 1. Lorsque le numérateur est plus petit que le dénominateur, ce nombre est plus petit que 1.

Cependant, on ne trouve pas de trace d'exercices portant sur ce type de tâches.

Le type de problèmes T_4

On trouve 70 spécimens environ de ce type de tâches, de difficulté et de présentation variables. C'est un domaine extrêmement travaillé. La technique proposée est essentiellement basée sur la propriété énoncée dans le cours :

> Propriété fondamentale :
> Pour calculer une somme (ou une différence) de fractions ou d'écritures fractionnaires ont doit avoir le même dénominateur
>
> $\boxed{\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}}$ $\boxed{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}}$
>
> • On additionne (ou on soustrait) les numérateurs
> • On conserve le dénominateur.

On voit comment la dernière partie de la propriété vient mettre en place la technique. Il n'y a d'ailleurs rien de plus dans le cours.

La première partie de la propriété constitue un élément technologique en même temps qu'elle fonde la technique. Elle n'est pas démontrée. Tout au plus est-elle introduite par la résolution de deux exercices qui l'ancre dans la résolution de problèmes « concrets » et qui justifie plutôt le fait qu'on puisse avoir besoin, à certains moments, de savoir additionner deux (ou plusieurs) fractions. Encore que les exemples choisis (ce sont tous des nombres décimaux) ne justifient guère cette nécessité : il suffirait de donner leurs écritures décimales respectives, ce qui fournirait, de surcroît une preuve de la propriété pour le cas des nombres décimaux.

La technique d'addition et de soustraction des fractions s'accompagne d'une exigence supplémentaire, mais qui n'est nulle part énoncée : celle de fournir le résultat sous forme irréductible. L'examen des pratiques de l'élève K le montre bien, comme il montre qu'une exigence justificative est satisfaite dans chacun des exercices en mettant chaque fois en oeuvre la propriété énoncée dans le cours. En voici un exemple :

$$\frac{49}{3}-\frac{18}{3}=\frac{49-18}{3}=\frac{31}{3}$$ on ne peut pas la simplifier

On notera enfin que, dans l'énoncé de la propriété, le terme « écritures fractionnaires » est de nouveau utilisé. Pourtant, comme cela a déjà été signalé, l'élève en aura très peu rencontré.

Le type de problèmes T_5

Le schéma d'ensemble de l'organisation mathématique pour le type de tâches T_5 est sensiblement le même que pour le type de tâches précédent : l'énoncé de la propriété suit une

expérimentation et fonde la technique de multiplication des fractions. Dans les exercices, ce type de tâches aura été rencontré par l'intermédiaire de 6 spécimens seulement.

Le type de problèmes T_6

Ce type de tâches, clairement décrit dans le programme, apparaît dans 8 spécimens. la technique de résolution semble ici très peu précisée. Il s'agit de décomposer le numérateur en la somme de deux nombres « bien choisis », puis d'utiliser la propriété de la somme de deux fractions « à l'envers ». On obtient une nouvelle écriture de la fraction de départ sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction. L'entier obtenu est alors dénommé la partie entière :

$$\frac{17}{2} = \frac{16+1}{2} = \frac{16}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8\times2}{2} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2}.$$

La partie entière est 8.

On voit que cette technique nécessite l'effectuation de sous-tâches d'un type nouveau (écrire que $\frac{16+1}{2}$ est égal à $\frac{16}{2} + \frac{1}{2}$, par exemple) et des sous-tâches déjà étudiées (simplifier la fraction $\frac{16}{2}$). Mais elle nécessite aussi l'effectuation de sous-tâches moins clairement définies : décomposer 17 en 16+1. Est-ce que écrire, par exemple, $\frac{17}{2} = \frac{14+3}{2} = \frac{14}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7\times2}{2} + \frac{3}{2} = 7 + \frac{3}{2}$ est juste ? Est-ce que ça répond à la question ? Cet aspect n'est pas pris en compte par la technique mise en place, tout au moins à travers les traces écrites dont on dispose.

Pourtant, dans le cours, on voit apparaître une division euclidienne. Mais le lien qu'il peut y avoir avec ce type de tâches (effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur) et le type de tâches T_6 est resté très implicite et l'élève K ne l'indique jamais dans la résolution de ses exercices.

A noter que le travail inverse, consistant à retrouver la fraction connaissant sa partie entière et sa partie fractionnaire, a été donné à faire 8 fois. On considère qu'il s'apparente au type de problèmes T_4.

Le type de problèmes T_7

Il faut reconnaître dans l'énoncé de ce type de problèmes celui qu'on désigne plus traditionnellement par l'expression « prendre une fraction d'une grandeur ». La formulation adoptée veut préciser le champ mathématique dont ce type de problèmes est issu. Elle permet de l'inclure dans le champ plus vaste des problèmes de changements d'unités et de justifier ainsi que l'on fasse une multiplication. Par conséquent, inclure cette tâche dans un type de tâches plus vaste va faire travailler la question de la technologie et de la technique.

Dans le cahier d'exercices on rencontre une « activité » et un exercice qui portent sur ce type de problèmes. Il apparaît ainsi dans le registre des *applications* du cours sur les fractions. Par exemple, on trouve dans le cahier d'exercices :

$$\text{Les } \frac{2}{5} \text{ de 30 font : } 30 \times \frac{2}{5} = \frac{30}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

Puis, un peu plus loin :

Combien valent les $\frac{8}{5}$ des $\frac{3}{11}$ de 1100 ?

$$1100 \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{1100}{1} \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{26400}{55}.$$

Un type de problèmes est donc rencontré et une technique est mise en place qui pourrait ainsi s'énoncer : pour prendre une fraction d'une grandeur on multiplie la grandeur par cette fraction. Elle n'est pas énoncée par écrit et on ne trouve pas non plus d'éléments technologiques qui viendraient la justifier. On a donc l'exemple ici d'une organisation praxéologique à peine abordée où le type de tâches a été rencontré en deux occasions, et si un savoir-faire a été localement élaboré il ne s'est pas accompagné de la mise en place d'un savoir nettement identifié.

2.3. Les aspects théoriques

On ne trouve pas trace d'éléments théoriques dans ce corpus. Bien sûr, tout ce qui est dit sur les fractions repose essentiellement sur le fait que ce sont des *nombres* et donc qu'ils ont toutes les propriétés des nombres et qu'en particulier, les équations du type $bx = a$ n'ont qu'une seule solution ($b \neq 0$) dont une écriture est $\frac{a}{b}$. C'est sur cet élément de théorie que repose la définition d'une telle écriture que l'on adopte en classe de Sixième. Mais ce point théorique n'est absolument pas explicité ici.

3. L'organisation didactique

On s'intéresse ici à l'ensemble des dispositifs qui permettent la mise en chantier du thème des écritures fractionnaires. Ils constituent le cadre dans lequel les gestes de direction d'étude pourront être déployés par P. C'est le cas, par exemple, de la correction d'exercices. Ce geste suppose la dévolution d'énoncés plus ou moins problématiques que les élèves ont à traiter dans le cadre de ce que l'institution dénomme travail à la maison. Un bon fonctionnement du dispositif conduit normalement à un progès collectif dans l'étude du type de problèmes étudié au cours de la correction en classe. L'apparition récurrente d'un tel dispositif au cours du traitement didactique des différents thèmes étudiés durant l'année favorise une efficacité croissante de ce geste d'étude. Il doit posséder certaines caractéristiques parmi lesquelles la régularité favorise la robustesse du dispositif. Notons que le geste de correction d'exercices concourt à l'évaluation personnelle (affermissement de l'autonomie), favorise le traitement de l'erreur et conforte l'institutionnalisation de la praxéolologie mathématique étudiée.

On se donne donc pour objectif de procéder à un relevé systématique des dispositifs didactiques qui organisent et structurent l'étude. L'enquête peut être menée au moyen des *moments didactiques*. Celle-ci permet de dégager les fonctions didactiques des différentes phases de l'étude qui se donnent à voir dans le corpus. On repère ainsi certains dispositifs peu apparents si l'on s'en tient à une lecture strictement chronologique.

Ces dispositifs peuvent aussi être situés sur l'axe spécificité-généricité. Il s'agit de mettre en relation les moyens de l'étude construits dans l'interaction régulière entre les acteurs - P et élèves - avec l'organisation mathématique élaborée simultanément. Une question fondamentale apparaît en toile de fond de cette enquête : dans quelle mesure le montage didactique va-t-il favoriser (ou non) un apprentissage heureux ?

3.1. La structure de l'étude dans ses aspects les plus génériques

Une description sommaire de l'étude est fournie dans le tableau de la page 140. Elle permet quelques premières observations.

a) On constate une segmentation du thème dont l'étude se réalise pendant 17 heures, en périodes d'égale importance ;

b) Chaque période est l'occasion d'introduire un sous-thème nouveau relevant du thème principal. Par exemple : égalité de fractions; simplification; comparaison de fractions; utilisation de la simplification; comparaison à 1, etc. ;

c) Des exercices *d'application directe* sont systématiquement donnés en classe et à la maison ;

d) Ces derniers sont corrigés lors de la séance suivante ;

e) La séquence s'achève par une séance d'exercices, la réponse à des questions d'ordre général et un temps de *mise au point* (laquelle mise au point ne se traduit pas formellement dans les traces écrites) ;

f) Un contrôle en classe suivi d'une séance de correction de ce contrôle clôturent la séquence ;

Ces observations peuvent être affinées à la lumière des notes de l'élève K.

a) Séparation entre une partie *Cours* et une partie *Exercices.* Toutefois, une rubrique intitulée *Activités* figure tantôt dans la partie *Cours* et tantôt dans la partie *Exercices.*

b) Dans la section *Exercices*, tout nouvel exercice est indiqué par son numéro et la page où on peut trouver son énoncé dans le manuel de la classe.

c) Les énoncés d'exercices ne figurent jamais parmi les notes de correction de ces exercices. Ils affleurent toutefois, mais pas toujours, et souvent de manière concise, dans les exercices intégrés dans le *Cours*. Quant aux énoncés des exercices intitulés Activités, ils sont à de rares exceptions, totalement absents.

d) La prise de notes, faite au titre des exercices, ne permet que très rarement une observation sur la nature de la correction qui en a été faite collectivement. Cela empêche de distinguer ce qui relève du travail propre de l'élève de ce qui est produit par le professeur lui-même : aucun corrigé n'apparaît ainsi systématiquement différencié. Cette contrainte intrinsèque à l'objet observé pose une question : comment penser des dispositions générales qui assureraient une plus grande efficacité ? En l'espèce, cette absence d'information sur le dispositif *correction d'exercices* n'a probablement que peu d'incidences immédiates sur les résultats de l'élève K qui s'avère être un très bon élève,.réussissant tous ses exercices. Mais si le travail personnel d'un élève moins performant n'est pas formellement distingué de ce qui est produit par le professeur lui-même, on peut craindre que le travail réalisé au titre des exercices corrigés en classe ne favorise pas chez cet élève l'*autonomie* effective que P est en droit d'attendre de lui dans le travail à la maison.

e) Le relevé systématique des énoncés des exercices empruntés au manuel de la classe indique que la progression dans la complexité est dosée de manière à permettre, a priori tout au moins, un *travail de la technique* de qualité. Sans chercher à préciser cette dimension, on enregistre toutefois deux énoncés marginaux. Il y a tout d'abord un énoncé équivoque (Ex n°20) pour

lequel l'analyse mathématique fournit de nombreuses réponses possibles, et dont la correction ne marque pas l'ambiguïté. Bien que cet énoncé soit unique en son genre, on peut s'interroger sur ce que peut objectivement faire un élève soucieux d'utiliser les techniques standard rencontrées. En second lieu, on trouve un énoncé qui convoque au passage la notion de volume sans qu'une réelle technique ait été clairement installée à l'égard des grandeurs. L'interrogation précédente peut dans ce cas être reconduite. Le dispositif qui est concerné ici est la sélection des exercies à donner aux élèves. Selon quelle technique établir cette liste de manière à assurer un bon usage d'une technnique donnée ?

f) Parmi les cinq énoncés du contrôle en classe, deux sont problématiques sur le plan du contrat didactique. L'exercice n°2 invite à compléter une série de six égalités de fractions pour lesquelles il y a un place laissée libre (exercice à trou). Ce type de tâche, en apparence proche de la tache T_2 , n'a jamais été rencontré par les élèves dans les exercices en tant que tel. De la même façon l'exercice n°5 pose deux petits problèmes de modélisation et fait simultanément référence à l'idée de grandeur, notion qui n'est pas travaillée dans le corpus d'exercices. C'est un témoignage supplémentaire du fait que les notions de fractions et de grandeurs ne sont pas dialectiquement construites.

3.2. La prise d'information sur les besoins des élèves

a) On rappellera qu'en classe de Sixième la fraction $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a (avec b non nul). Le premier chapitre du cours concerne la *comparaison des fractions*. L'exposition choisie impose de « présenter » l'objet fraction. Cette entreprise est réalisée au moyen d'un tout premier exercice qui consiste en une modélisation qui conduit à relier les côtés d'un rectangle et son aire.

> Exercice : L'aire d'un pré rectangulaire est égale à 1875 m2. Sachant que la largeur de ce pré fait 25 m, calculer sa longueur (on pourra l'appeler x). Donne sa valeur exacte.

La recherche du côté manquant, désigné par x (dont l'unité n'est pas précisée), conduit à poser une équation, puis une autre égalité qui incorpore cette fois les unités (x en mètres) et enfin une troisième ligne où x apparait comme le résultat d'une division $x = 1875 \div 25$, ce qui fournit une longueur égale à 75 m.

Un autre calcul, répondant à une question d'un type similaire, donne $x = 200 \div 30$ puis $x = \frac{200}{30}$. Dans cette phase introductive, la réalisation didactique observée néglige dans les faits (ici dans les traces écrites) les connaissances des élèves. En tout cas le montage didactique ne les interroge pas. La transition didactique avec le rapport ancien des élèves aux fractions n'est pas l'objet d'un travail spécifique permettant d'activer cette notion abordée dans la classe précédente.

La question qui est ici posée est celle de la reprise de l'étude d'un thème ou encore la question des transitions didactiques : comment, par quels gestes et dans quels dispositifs, assurer une reprise de l'étude d'un thème qui fasse droit et qui prenne en compte les connaissances, réelles ou supposées, des élèves ? Il existe un dispositif qu'on appelle *test d'entrée* dans l'étude d'un thème, qui s'intègre facilement dans l'environnement ordinaire d'une classe. Il consiste en une courte interrogation portant sur les savoirs exigibles à l'issue de la classe précédente, et plus précisément sur les types de tâches associés. Ce dispositif est destiné à redéfinir un espace à l'élève dans le cadre de l'activité de la classe. Il contribue en outre, psychologiquement, à le mettre en confiance. Un second ordre de bénéfices concerne le

directeur d'étude. Cela lui permet de repérer plus précisément les difficultés, lacunes, erreurs qui ne manqueront pas de freiner tôt ou tard l'avancée du temps didactique. Et d'y remédier éventuellement au moyen d'un matériel approprié et sous des formes diverses permettant d'éviter l'épreuve douloureuse des révisions systématiques.

b) Cette absence effective conduit P à un agencement de l'étude de facture classique. Le chapitre commence par un premier titre I. Comparaison de fractions : 1° Les fractions ; 2° Egalités de fractions ; 3° Simplification ; 4° Comparaison de fractions, etc... L'exposé linéaire est déroulé au gré des titres, sans articulation nette entre ceux-ci et surtout sans l'énonciation claire des questions mathématiques qui justifieraient ce qui est introduit. A quel besoin mathématique répond la tâche de comparaison des fractions ? On ne peut en dire grand chose.

c) Certes, les traces écrites, organisées sous la conduite du directeur d'étude, ne font pas ressortir l'enveloppement oral et gestuel qui accompagne la prise de notes. On peut toutefois, et de manière raisonnable, faire l'hypothèse que les élèves reproduisent sur leur cahier ce qui est inscrit au tableau. Si ces traces tendent à participer à la fonction de mémorisation de l'activité collective (c'est une routine dont l'enjeu peut être débattu avec les élèves), on ne peut éviter de s'interroger sur l'efficacité de ces notes dans la poursuite de l'étude, charge qui revient à l'élève dans son activité privée : comment peut-il s'emparer du matériel qui lui est ainsi fourni sur le thème ? Les éléments objectifs de la réponse doivent se trouver dans le document final. Mais sous quelles espèces ?

d) Les types de problèmes dégagés au titre de l'analyse de l'organisation mathématique n'apparaissent pas toujours explicitement dans les traces écrites. Cependant, les techniques ébauchées ou en voie d'élaboration incorporent des savoirs et des savoir-faire qui les justifient et/ou les produisent. Les élèves sont conduits à identifier ces techniques et à s'en rendre maîtres, tout au moins dans un cadre mathématique contrôlé et adapté à la situation d'apprentissage. Les exercices permettent d'identifier les techniques mises en oeuvre, on l'a vu. Mais ces techniques doivent-elles faire l'objet d'une institutionnalisation, c'est-à-dire d'un exposé qui montre l'usage qui en est fait sur un specimen simple du type de problème concerné ? Une réponse en actes est repérable pour la tache T_3, par exemple : la propriété énoncée dans le cours suggère fortement la technique elle-même.

> Propriété : Les fractions se rangent, si les dénominateurs sont égaux, dans l'ordre des numérateurs.

De manière générale, il n'y a guère de dispositifs particuliers permettant une prise d'information sur le rapport des élèves aux objets étudiés dans l'environnement créé. Et même lorsque le dispositif existe, par exemple avec le devoir à la maison sur le Tangram, les nouveaux enjeux de savoirs apparaissent assez éloignés de la tâche à réaliser. La production sollicitée met en jeu des capacités dont le lien avec les tâches et techniques étudiées est peu lisible. En outre, la fréquence de ces devoirs à la maison est faible : un seul sur toute la période d'étude. Comme on l'a signalé, le statut même de ce dispositif semble incertain au travers des documents examinés.

3.3. La problématisation

Le texte qui reste entre les mains de l'élève fournit aussi des informations sur la dynamique cognitive qui a permis la constitution des synthèses successives regroupées dans la section *Cours*. Certes, les évènements qui constituent l'histoire intellectuelle de la classe sont gommés de la prise de notes : le processus didactique laisse la place au produit de l'activité.

Toutefois, l'absence de traces écrites des questions dévolues à la classe, ainsi que des éléments de relance pour la communauté d'étude, n'est-il pas sans conséquences sur les futures réorganisations de savoirs que l'élève est appelé à réaliser ? C'est un véritable problème didactique si on fait l'hypothèse que la trame de l'histoire collective qui s'est nouée et dénouée dans la classe sous forme de questions, de tentatives, de succès et/ou d'échecs peuvent favoriser l'efficacité du travail personnel ?

Cela dit, comment débute l'étude ? On se contentera d'examiner uniquement la tâche T_3. C'est, semble-t-il, l'évocation de la notion de grandeur (ici les surfaces) qui fournit un sens naïf à la comparaison des fractions. L'intention didactique pourrait s'inspirer du principe suivant : deux quadrillages identiques comportant un nombre différent de cases noircies sont « comparés ». Le système invoqué, concrètement soumis à l'observation de l'élève par l'intermédiaire du manuel de la classe, se présente brutalement comme un ensemble de deux fractions. Le quadrillage qui possède le plus de cases noircies correspond à une fraction supérieure à l'autre. Cette approche fournit certes un sens à la comparaison, bien que les fractions invoquées représentent des proportions, non désignées comme telles par manque de prise en charge technologique.

On notera toutefois que la problématisation de la comparaison n'est pas vraiment abordée. Pourtant, les problèmes associés au thème des fractions en classe de sixième fournissent de la matière sur ce point. Par exemple, prendre les trois cinquièmes d'une somme de 1000F revient à prendre la moitié de 1200F. A la lumière de cet exemple, la problématisation de la comparaison des fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$ est posé. Peut-on alors comparer les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$, et comment ? Cela dit, on peut aussi constater que le montage didactique sollicite deux définitions des fractions, l'une comme quotient (définition utilisée effectivement dans la classe précédente), l'autre comme proportion, sur laquelle se greffe la rencontre avec la question de la comparaison des fractions. Les conséquences de cette coexistence de nature théorique pourraient être analysées en termes d'effet sur la construction mathématique en cours.

3.4. Comment se matérialisent les moments de l'étude ?

En ciblant toujours nos observations sur la tâche T_3 examinons maintenant les différents moments de l'étude de celle-ci :

a) La <u>première rencontre</u> avec la tâche T_3 est notifiée dans le cours au quatrième point du premier chapitre par le truchement du manuel (Activité 2, page 24) dont l'énoncé n'est pas reproduit, mais qui sollicite l'élève à partir de six grilles. Six fractions (des proportions en fait) sont ainsi produites puis comparées au moyen d'un montage simple et suggestif. La première rencontre est ainsi organisée autour d'une tentative de problématisation de la comparaison des fractions.

b) Dès la première rencontre, une technique de comparaison est mise en place, même si elle est restée largement implicite. Cette technique est encore largement embryonnaire par rapport à la question générale de la comparaison de deux fractions quelconques. <u>L'exploration de la tâche T_3</u> se poursuit au moyen de deux disques d'aire égales (sans que cette qualité soit formellement signalée) partagés en huit parties égales, à la manière d'un camenbert. On en déduit que 3/8 < 6/8 ; le signe « < »est utilisé comme tel entre les disques. L'émergence de la technique est

« réalisée » par la comparaison visuelle des objets graphiques mis en regard l'un de l'autre dont l'élément pertinent retenu est l'importance de la surface hachurée. Le rangement de fractions nécessitant parfois leur transformation en fractions de même dénominateur, un specimen de rangement est fourni dans le *Cours* , sous la rubrique *Utilisation de la simplification*. Voici cet exercice

Ranger de la plus petite à la plus grande les fractions suivantes : $\frac{9}{24}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{14}{8}$

La technique n'est pas explicitée, mais est montrée de la manière suivante :

On simplifie les fractions : $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$; $\frac{25}{20} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$; $\frac{14}{8} = \frac{7}{4} = \frac{14}{8}$.

On les range : $\frac{3}{8} < \frac{10}{8} < \frac{14}{8}$.

$\frac{9}{24} < \frac{25}{20} < \frac{14}{8}$.

Bien que l'intention ne soit pas notée, on trouve à la suite l'énoncé des critères de divisibilité par 2, par 3, par 5 et par 9. Mais aucun exemple ne vient montrer l'usage qui peut être fait de ces critères, ni dans le cours, ni dans aucun des exercices.

c) Le travail de la technique est amorcé dans le cours. Dès la première rencontre avec la technique τ_3 , la fraction $\frac{6}{8}$ qui est de manière « évidente »plus grande que la fraction $\frac{3}{8}$, fournit une autre inégalité qui contient - mais cela n'est pas explicité ici - une amélioration du champ d'application de la technique, de la manière suivante $\frac{3}{8} < \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Suit immédiatement une version classique de la tâche T_3 :

Ranger de la plus petite à la plus grande les fractions suivantes : $\frac{9}{24}$;

$\frac{25}{20}$; $\frac{14}{8}$.

Cette situation est proposée dix fois dans les exercices de deux manières différentes : soit sur des séries de six à sept fractions ayant des dénominateurs communs (ceux-ci étant respectivement 36, 24, 60, 48) ; soit sur des séries de quatre ou cinq fractions ayant deux, trois, quatre ou cinq dénominateurs différents, mais qui présentent entre eux une relation de proportionnalité simple. Le plus souvent le plus grand dénominateur est le dénominateur commun cherché. Dans deux cas ce dénominateur commun est le produit des dénominateurs (17×21 dans un cas et 5×4×3 dans l'autre). La technique installée précédemment s'enrichit alors d'une propriété des fractions rappelée antérieurement, et faisant l'objet du titre de ce paragraphe : *Utilisation de la simplification.*

d) La mise en place par P de certains éléments technologico-théoriques se réalise d'abord par l'énoncé d'une propriété. La seule tentative de justification de cette propriété semble être de type expérimental, et elle apparaît dans l'activité décrite plus haut. L'exigence justificative de P se poursuit lors du deuxième exemple dans lequel la comparaison des fractions 21/13 et 357/13 est accompagnée de la phrase " *Comme les deux fractions ont le même dénominateur, on les classe dans l'ordre de leur numérateur. 21 est plus petit 357. Donc 21/13 est plus petit que 357/13* ". Cette phrase participe tout autant de l'institutionnalisation de la technique que de sa justification. L'élève K, en bon élève et de manière assez remarquable, fait droit à cette exigence dans tous les exercices de comparaison.

e) Le moment de l'évaluation du type de tâche T_3 se réalise notamment dans d'un exercice (parmi cinq) du contrôle en classe. La technique de comparaison est sollicitée ainsi :

Ranger par ordre croissant, après avoir cité la règle utilisée : $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{10}{70}$.

L'élève dont on peut examiner le devoir a répondu ceci *: Pour pouvoir classer les fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur*. Cette réponse est jugée insuffisante par P qui commente sur la copie *: Comment les classes-tu ensuite ?* La réponse complète attendue est notée par l'élève, sur la copie même, à l'issue de la correction du devoir en classe : *Et lorsqu'elles ont le même dénominateur, on les classe dans l'ordre de leur numérateur.* L'effectuation du rangement provoque d'abord une simplification par 10 de la dernière fraction, puis un classement gouverné par le dénominateur commun 7, puis un dernier classement où $\frac{10}{70}$ vient remplacer la fraction $\frac{1}{7}$.

f) Le document qui constitue le cours fait une large part à la tâche T_3 , qui y est exposée de manière simple et opératoire. La présentation de cette tâche est accompagnée d'une technique de traitement déployée en quelques spécimens suggestifs. Ce travail d'institutionnalisation est soutenu par d'autres spécimens présentés en exercices, en nombre suffisant pour permettre la mise en place d'un rapport solide à la tâche, même si celle-ci n'est pas présentée sous toutes les facettes possibles en classe de quatrième (par exemple la comparaison de fractions de même numérateur). Le contrôle en classe fournit enfin l'occasion de tester la technique tout en participant du moment de l'institutionnalisation. Par exemple, il n'en est pas de même de la sous-tâche « comparaison d'une fraction à 1 » qui, à cet égard, est restée très marginale.

Un travail semblable peut être accompli à propos de l'organisation didactique mise en oeuvre à propos de la tâche T_6 :

Etant donné une fraction $\frac{a}{b}$, déterminer les entiers n, p et q tels que $\frac{a}{b} = n + \frac{p}{q}$, avec $p < q$.

a) Un « problème » est proposé aux élèves pour aborder ce type de tâches.

> Problème : Quatre enfants se partagent vingt-cinq gâteaux. Quel est la part de chacun ?

On observe ici de nouveau le souci d'ancrer la tâche mathématique à étudier dans la catégorie de la résolution de problèmes « concrets », souci qui répond à une demande explicite et insistante des textes officiels. Par ailleurs, la tâche que cet énoncé désigne apparaît comme un alibi en ce sens où, elle se présente comme routinière pour des élèves à ce niveau (un élève de la classe de Sixième serait sans doute capable de fournir la réponse 6,25 après avoir effectué la division de 25 par 4), mais c'est l'interprétation et l'écriture de la réponse qui va nécessiter en fait la mise en oeuvre de la tâche visée. P organise donc cette première rencontre en imposant une exigence nouvelle sur la forme même de la réponse. En effet, la réponse commence par « *la part de chacun sera de 25/4 des gâteaux* » qui pourrait suffire (dans une autre *institution,* la classe de Sixième par exemple) à la résolution du problème posé. P poursuit, à partir de cette première réponse :

$$\frac{25}{4} = \frac{24+1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6\times4}{4} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}.$$

> Chaque enfant aura 6 gâteaux entiers plus un quart de gâteau.

La première rencontre a ainsi eu lieu avec T_6, par le truchement d'un exemple.

b) A cette occasion, une technique émerge, bien qu'elle reste encore implicite. Elle le restera en dépit d'une description sommaire « *6 : partie entière* » ; « 1 / 4 *: fraction plus petite que 1* », à laquelle est adjointe la mention « On pose la division » (suivie de l'effectuation de cette division qui est arrêtée à la virgule, sans mention particulière). Un commentaire au statut incertain ajoute : " Avec la machine : 25 ÷ 4 = 6,25

c) Le travail de cette technique embryonnaire est néanmoins repérable dans deux exercices (n°79, n°80) dans lesquels huit fractions doivent être écrites sous la forme $a + \frac{b}{c}$ où $\frac{b}{c}$ est « *la partie fractionnaire (fraction inférieure à 1)* ». Une seule fraction donnée est déjà inférieure à 1. Dans chacun des cas traités, la décomposition est réalisée à la manière de l'exemple princeps décrit lors de la première rencontre. Chaque étape nouvelle dans la succession des écritures menant au résultat final semble relever, au niveau des décisions prises, de la division euclidienne de a par b. Aucun indice ne permet toutefois d'en avoir la certitude absolue. L'usage de cette technique met en valeur, à chaque traitement, la partie entière de la fraction initiale. Aucun commentaire n'est fait sur la partie fractionnaire.
Les deux derniers exercices du cahier d'exercices (n°81, n°82) fournisssent l'occasion de retrouver une fraction donnée sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Ici encore huit exemplaires sont à traiter. La technique n'est pas tout-à-fait la même, puisqu'il s'agit de transformer un entier sous forme de fraction dont le dénominateur est donné dans la partie fractionnaire. Le traitement juxtaposé des exercices n°79, 80, 81 et 82 semble toutefois indiquer deux démarches permettant de passer d'un écriture à l'autre et inversement.

d) La technique ι_6 ne reçoit pas véritablement de validation technologique, si on écarte un commentaire fait sur le cahier de cours:

> *A retenir :*
> *On peut toujours décomposer une fraction plus grande que 1 en la somme d'un nombre entier et d'une fraction plus petite que 1.*

La grande concision des notations écrites dans le cahier de l'élève K - lequel ne fournit sans doute qu'un tableau très partiel des situations vécues dans la classe - ne fournit pas d'information sur le travail effectué en matière de justification. Le domaine mathématique où on se situe est probablement envahi par la familiarité culturelle, familiarité qui tend à remplacer des constructions explicites

e) Le type de tâche T_6 n'est pas l'objet d'évaluation . Son institutionnalisation est bien repérée non seulement dans le cahier de cours, mais aussi dans le cahier d'exercices. Ce qui semble devoir être retenu par l'élève constitue un savoir-faire, qui n'a pas une importance majeure (savoir-faire qui n'apparaît pas dans le contrôle en classe) et dont la portée demeure incertaine.

4. Evaluation de l'organisation mathématique observée

Il s'agit, dans ce chapitre, de proposer quelques éléments permettant de porter un jugement sur ce que vaut une organisation mathématique donnée. La tâche est éminemment

complexe et le travail effectué avec les stagiaires de l'Université d'été a mis en évidence cette difficulté, dès lors que l'on s'impose un effort de justification de ses jugements.

4.1. Les types de tâches

Les types de tâches rencontrés dans ce corpus sont en général *bien identifiés*. Seul, peut-être, le type de tâches T_7 reste-t-il un peu flou, car insuffisamment travaillé. Cela peut s'expliquer par le fait que la question de l'emploi des écritures fractionnaires demeure très lié à la classe de Sixième.

Si le type de tâche T_6 a été bien identifié, il semble en revanche être resté relativement marginal et la question de savoir pourquoi on s'intéresse à l'écriture d'une fraction sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité est restée très confidentielle si même elle est apparue dans la classe.

D'une manière générale, si les types de tâches proposés sont a priori *pertinents*, la nécessité d'apprendre à calculer avec des écritures fractionnaires n'a jamais été mise en perspective avec les connaissances des élèves. Pourquoi, en effet, mobiliser un savoir-faire particulier pour ajouter $\frac{11}{20}$, $\frac{3}{20}$ et $\frac{6}{20}$ alors que l'on sait que $\frac{11}{20} + \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{55}{100} + \frac{15}{100} + \frac{30}{100} = 0{,}55 + 0{,}15 + 0{,}3 = 1$? Cette nécessité doit apparaître en mettant en oeuvre des nombres qui n'ont pas d'écriture décimale. Et, corrélativement, la technique utilisée pour ces nombres se verra justifiée de manière irréfutable (en justifiant au passage des techniques opératoires anciennes) dans le cas où on sait déjà calculer, c'est -à-dire dans le cas des nombres décimaux.

Enfin, et cela a été déjà été signalé ci-dessus, l'organisation mathématique mise en place s'est pratiquement restreinte aux fractions d'entiers. Ce choix, en désaccord avec les textes officiels qui étendent les écritures fractionnaires aux quotients de décimaux, peut certainement s'expliquer par l'énorme prégnance du chapitre « Fractions » tel qu'il a existé dans les curriculums précédents. Mais cette restriction de fait va empêcher que vivent des techniques alternatives : soit à comparer, par exemple $\frac{15}{20}$ et $\frac{8}{10}$; on a $\frac{15}{20} = \frac{7{,}5}{10} < \frac{8}{10}$.

4.2. Les techniques

On a constaté à plusieurs reprises que, si les types de tâches ont été souvent abondamment travaillés, les techniques n'ont pas toujours été nettement institutionnalisés. C'est en particulier le cas pour le type de tâches T_6 pour lequel on a signalé ci-dessus le grand flou laissé par les traces écrites de l'élève K sur cette question : comment décompose-t-on le numérateur ? comment sait-on que la décomposition est bien la bonne ? Etc.

En revanche, en ce qui concerne les techniques relatives aux tâches plus classiques (somme, différence, produit) on a constaté des efforts de mise en mots. Par exemple, à propos de la somme on peut lire dans le cahier de cours : « On additionne les numérateurs et on conserve le dénominateur ». De plus, les exigences de P semblent porter sur une rédaction de la technique qui la rende auto-justificative. Ainsi, pas une seule fois l'élève K n'écrit directement le résultat de la somme de deux fractions et passe toujours par l'étape montrant qu'il effectue la somme des numérateurs et si les dénominateurs sont différents, mention est faite de cette situation.

Pour le type de tâches T_3, le travail de la technique est resté un peu court. En effet, P s'en est tenu à la comparaison de fractions ayant le même dénominateur conformément au programme. Mais les inégalités auraient pu être rencontrées d'un point de vue dynamique : quand on augmente le numérateur, on augmente la fraction. On sait que ce type de techniques a

de l'avenir mathématique. De même la comparaison de fractions de même numérateur n'a pas été évoquée, non plus que son corollaire : quand on diminue le dénominateur, on augmente la fraction.

4.3. Les technologies

C'est sans doute dans cette partie que les insuffisances apparaissent les plus importantes. D'une manière générale, le problème de la justification d'un énoncé n'est pas vraiment posé. Les « activités » qui introduisent les énoncés ne jouent pas de ce point de vue le rôle de preuve expérimentale que l'on s'attendrait à leur voir jouer, même si leur présence laisse tout de même à penser que P n'ose pas « asséner » ces énoncés ni les considérer comme bien connus (« folkloriques »). C'est seulement dans le cas de la multiplication que l'activité joue vraiment son rôle exprimental. En effet, on y considère un rectangle de dimensions $\frac{2}{3}$ de mètre et $\frac{4}{5}$ de mètre. On complète alors ce rectangle afin d'obtenir un carré de 1 m de côté. En partageant l'un des côtés en trois parties égales et l'autre en cinq parties égales, le carré se trouve découpé en 3×5 = 15 rectangles de mêmes dimensions, donc de même aire. Ainsi, l'aire d'un de ces rectangles est-elle $\frac{1}{15}$ m^2. Constatant alors que le rectangle initial est composé de huit de ces rectangles, on en déduit que son aire est $\frac{8}{15}$ m^2. Par conséquent, si l'on veut que l'aire d'un rectangle soit toujours donnée par le produit de ses dimensions, on en déduit que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ ne peut pas être égal à autre chose qu'à $\frac{8}{15}$.

En revanche, aussi bien dans le cas de la comparaison que dans celui de la somme, les activités choisies ne jouent pas aussi bien ce rôle expérimental. On peut d'ailleurs s'interroger sur leur rôle exact dans la rencontre avec un type de problèmes.

Ainsi, de manière générale, les tentatives de justification des propriétés énoncées apparaissent un peu évanescentes. De même, la dimension démonstrative de l'activité mathématique n'a pas toute la place méritée, bien que des possibilités existent. On donnera ici un seul exemple. Dans la question de la comparaison à 1, il figure dans le cours l'équivalence $a/b < 1 \Leftrightarrow a < b$. Une démonstration de cette propriété peut être donnée en exploitant le travail effectué à propos de la simplification des fractions et de la comparaison des fractions de même dénominateur en observant (sur des exemples numériques) que $1 = b/b$ et que, par suite, $a/b < 1 \Leftrightarrow a/b < b/b \Leftrightarrow a < b$.

ANNEXE

Traces écrites de l'activité d'une classe

La séquence didactique dont on a reproduit ci-après les traces écrites figurant dans les "archives" d'un élève d'une classe de cinquième – l'élève K – a occupé environ 17 heures, entre le jeudi 28 novembre 1996 et le jeudi 16 janvier 1997. Cette séquence constitue le tout de l'étude du thème des écritures fractionnaires, lequel a ainsi été traité d'un tenant, selon un choix dont, *a posteriori*, le professeur de la classe doute qu'il soit judicieux. La chronique de l'étude, telle qu'il l'a établie, est reproduite ci-dessous.

Date	*Durée*	*Contenu*
28 novembre	1 heure	I. Comparaison de fractions 1) Les fractions. Définitions : fraction, numérateur, dénominateur Exercices d'application directe en classe 2) Égalité de fractions. Propriétés : $b \neq 0$, $k \neq 0$, $\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{k\times b}$ Exercices d'application directe en classe et à la maison.
2 décembre	1 heure	Correction des exercices 3) Simplification. La méthode de simplification. Définition : fraction irréductible Exercices d'application directe en classe et à la maison.
5 décembre	2 heures	Correction des exercices 4) Comparaison de fractions. Critère de comparaison. Rangement de fractions Exercices d'application directe en classe et à la maison.
9 décembre	1 heure	Correction des exercices 5) Utilisation de la simplification. Critères de divisibilité Exercices d'application directe en classe et à la maison.
12 décembre	1 heure	Correction des exercices 6) Comparaison à 1 Exercices d'application directe en classe et à la maison.
16 décembre	2 heures	Correction des exercices Exercice sur les limites de la calculatrice II. Opérations sur les fractions 1) L'addition. Propriété fondamentale : $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$; $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$ Exercices d'application directe en classe et à la maison.
19 décembre	1 heure	Correction des exercices 2) La multiplication de fractions. Propriété fond. : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ Exercices d'application directe en classe et à la maison.
20 décembre	1 heure	Correction des exercices Exercices supplémentaires
6 janvier	1 heure	Exercices de rappel pour redémarrer
9 janvier	2 heures	Correction des exercices Exercices de traduction de phrases 3) Fraction et partie entière. Règle Exercices d'application directe en classe et à la maison.
10 janvier	2 heures	Séance d'exercices Réponses aux questions d'ordre général Mise au point
13 janvier	1 heure	Contrôle
16 janvier	1 heure	Correction du contrôle

On trouvera plus loin les énoncés de la plupart des exercices faits en classe, tel que le professeur les a reconstitués, ainsi que les énoncés des devoirs à la maison et en classe.

ELEVE K : COURS

NDLR : Le lecteur pourra constater que certaines annexes ne sont pas très lisibles et nous le prions de bien vouloir nous le pardonner. Cela tient au recueil de données qui sont des photocopies de matériau brut, lesquelles, on le comprendra, n'étaient pas a priori faites pour la diffusion.

8/11

CHAPITRE 3

Les nombres en écriture fractionnaire

I Comparaison de fractions.

1) Les fractions.

Exercice: L'aire d'un pré rectangulaire est égale à 1875 m^2. Sachant que la largeur de ce pré fait 25 mètres, calculer sa longueur (on pourra l'appeler x) Donne sa valeur exacte.

Equation: $25 \times x = 1875$

$x = 1875 \div 25$

$x = 75$ m

Donc la longueur fait 75 mètres.

Reprendre le calcul précédent avec une aire de 200 m^2 et une large de 30 mètres

Donner la longueur.

Equation: $30 \times x = 200$

$x = 200 \div 30$

$x = \frac{200}{30}$

Définition: Une fraction est le quotient d'un nombre entier par un nombre entier

Exemples : ① $\frac{2}{3}$ est une fraction (2 et 3 sont des entie

② $\frac{2,3}{4,5}$ est un quotient ou bien une écriture fracti
naire.

Remarque : une fraction peut-être égale à un nombre entier
nombre décimal, on tient l'un ni l'autre.

Exemples : ① $\frac{1}{2}$ est l'écriture fractionnaire d'un nor
décimal (0,5)

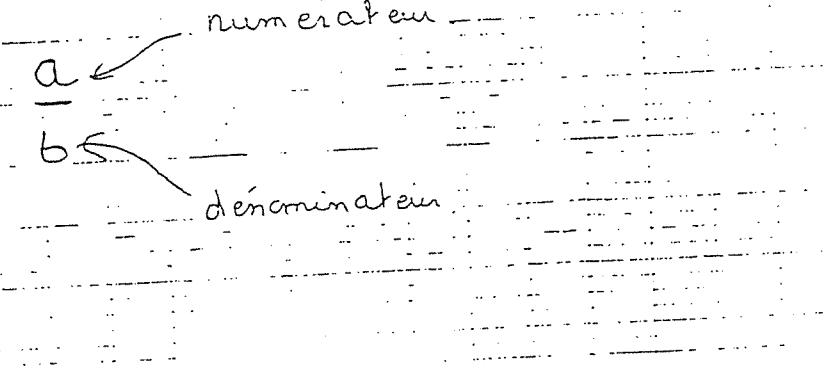
② $\frac{1}{4}$ est l'écriture fractionnaire d'un nom
décimal (0,25)

③ $\frac{4}{2}$ est une fraction (2)

④ $\frac{9}{3}$ est une fraction (3)

⑤ $\frac{31}{6}$ est l'écriture fractionnaire ni d'un nom
entier ni d'un nombre décimal (= 5,166)

A retenir : Portrait d'une fraction



2) Egalité de fractions.

Calculer, à l'aide de la calculatrice,

$\frac{3}{5} = 0,6$ $\qquad$ $\frac{21}{35} = 0,6$

même chose avec

$\frac{11}{8} = 1,375$ $\qquad$ $\frac{22}{16} = 1,375.$

Propriété :

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction ($b \neq 0$), et si k est un nombre non nul alors :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

3) Simplification

La règle précédente permet de "fabriquer" différentes écritures fractionnaires d'un même nombre.

$\frac{1,8}{4,2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7} = \frac{15}{35} = \frac{45}{105} = \frac{4,5}{10,5} = \frac{9}{21}$ = etc...

(×10, ×6, ×5, ×3, ×10, ×2 ; ×10, ×6, ×5, ×3, ×10, ×2)

Attention !

La 1ère et la 6ème expressions sont des écritures fractionnaires.

Remarque : de toutes ces expressions, $\frac{3}{7}$ est la "plus simple"

Définition : La forme la plus simple, sous laquelle on peut écrire une fraction s'appelle la forme irréductible de cette fraction

4) Comparaison de fractions

Activité 2 page 24

Grille A : $\frac{19}{36}$ 19 cases noires, 36 cases en tout.

Grille B : $\frac{20}{36}$ 20 cases noires, 36 cases en tout.

Grille C : $\frac{16}{36}$ 16 cases noires, 36 cases en tout.

Grille D : $\frac{18}{36}$ 18 cases noires, 36 cases en tout

Grille E : $\frac{15}{36}$ 15 cases noires, 36 cases en tout

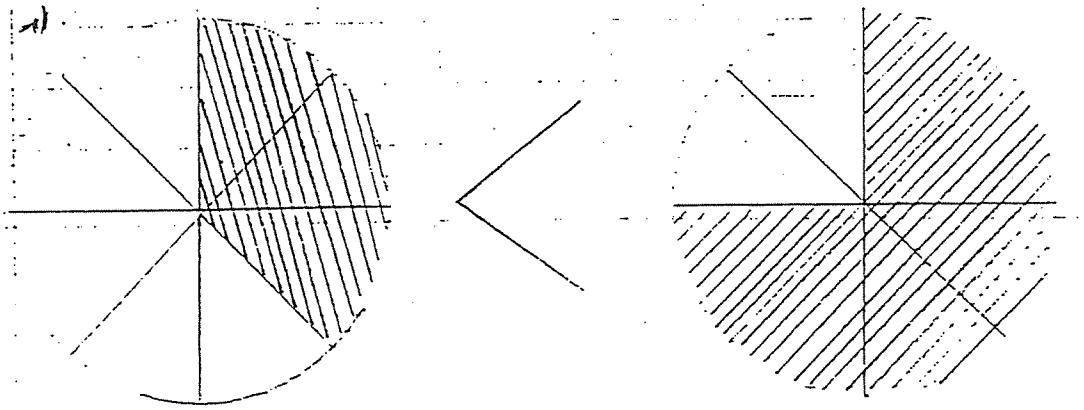
Grille F : $\frac{21}{36}$ 21 cases noires, 36 cases en tout.

6) $\frac{15}{36} < \frac{16}{36} < \frac{18}{36} < \frac{19}{36} < \frac{20}{36} < \frac{21}{36}$

Propriété : Les fractions se rangent, si les dénominateurs sont égaux, dans l'ordre des numérateurs

Exemples :

1)



$\frac{3}{8} < \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2) $\frac{21}{13} < \frac{357}{13}$

Comme les deux fractions ont le même dénominateur, on les classe dans l'ordre de leur numérateur.

21 est plus petit 357

donc $\frac{21}{13}$ est plus petit que $\frac{357}{13}$

9/12.

5) Utilisation de la simplification

Ranger de la plus petite à la plus grande les fractions suivantes : $\frac{9}{24}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{14}{8}$

On simplifie les fractions.

$\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ $\quad \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ $\quad \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = \frac{14}{8}$

On les range

$\frac{3}{8} < \frac{10}{8} < \frac{14}{8}$

$\frac{9}{24} < \frac{25}{20} < \frac{14}{8}$

A retenir : (critères de divisibilité)

- un nombre entier est divisible par 2 lorsqu'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8)
- un nombre entier est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3
- un nombre entier est divisible par 5 lorsqu'il se termine par 0 ou 5.
- un nombre entier est divisible par 9 lorsque la somme des chiffres est un multiple de 9.

12/12

c) Comparaison à 1 :

Comparer $\frac{3}{5}$; 1 et $\frac{5}{3}$

$\frac{3}{5} < 1 < \frac{5}{3}$

Comparer $\frac{18}{7}$; $\frac{14}{25}$ et 1

$\frac{14}{25} < 1 < \frac{18}{7}$

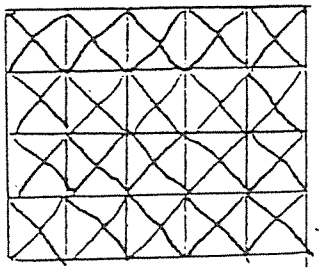
Propriété : Lorsque le numérateur d'une écriture fractionnaire est plus grand que le dénominateur, le nombre que représente cette écriture est plus grand que 1.

Lorsque le numérateur est plus petit que le dénominateur, ce nombre est plus petit que 1

II) Opérations sur les fractions.

1) L'addition de fractions

Service : Résoudre les deux problème A et B en s'aidant éventuellement du quadrillage.



× les parents d'élèves
× le collège
× le foyer

Pb me A :

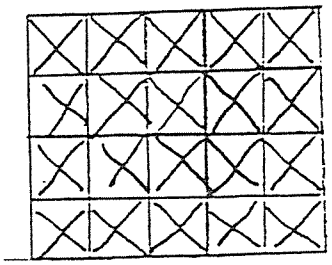
$\frac{11}{20} + \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{20}{20}$

Pour acheter un nouveau magnétoscope, le collège accepte de payer les $\frac{11}{20}$ du prix, les parents d'élèves les $\frac{3}{20}$ et le foyer offre le double des parents d'élèves

Cela suffit-il ?

On aura assez d'argent pour l'acheter

Problème B : Pour acheter une photocopieuse, le collège accepte de payer les 3/4 du prix, les parents d'élèves 1/20 du prix, et le foyer participe pour 20%.
Cela suffit-il ?



× le collège
× les parents d'élèves
× le foyer

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ (×5) $\frac{1}{20}$ $\frac{20}{100} = \frac{4}{20}$ (÷5)

$\frac{15}{20} + \frac{1}{20} + \frac{4}{20} = \frac{20}{20}$ ça suffit.

Propriété fondamentale :

Pour calculer une somme (ou une différence) de fractions d'écritures fractionnaires, on doit avoir les mêmes dénominateurs

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

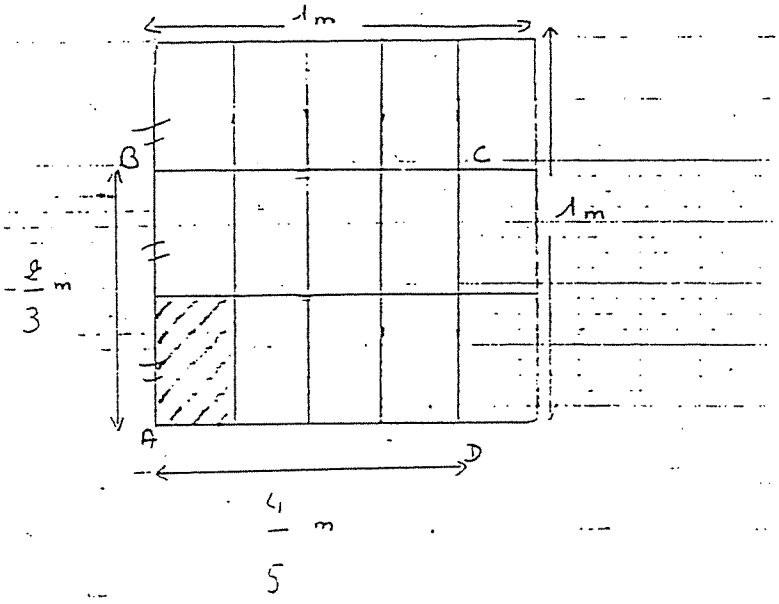
$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

On additionne (ou on soustrait) les numérateurs.
On conserve le dénominateur.

4) La multiplication de fractions :

Activité 8 p 40

a)



L'aire de ABCD est $AB \times BC = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ m²

D'autre part, l'aire du petit rectangle hachuré est $\frac{1}{15}$ m²

L'aire de ABCD est égale à 8 fois celle du rectangle hachuré, soit $\frac{8}{15}$ m². Donc $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Propriété fondamentale :

Pour calculer un produit de fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

6) L'aire de ABCD est $AB \times BC = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ m²

l'aire du rectangle hachuré = $\frac{1}{20}$ m²

L'aire de ABCD est égale à 6 fois celle du rectangle hachuré, soit $\frac{6}{20}$ m². Donc $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$

c) Exemples:

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$; $\frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{9 \times 5} = \frac{12}{45}$.

$\frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{7}{7} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{4}{5}$

3) Fraction et partie entière.

Problème : Quatre enfants se partagent vingt-cinq gâteaux. Quelle est la part de chacun?

Réponse : la part de chacun sera de $\frac{25}{4}$ des gâteaux

$\frac{25}{4} = \frac{24+1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6 \times 4}{4} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$

chaque enfant aura 6 gâteaux entiers plus un quart de gâteau.

$\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}$

partie entière

Fraction plus petite que 1

On pose la division...

25	4
1	6

Avec la machine :

25 : 4 = 6,25

A retenir : On peut toujours décomposer une fraction plus grande que 1 en la somme d'un nombre entier et d'une fraction plus petite que 1.

ELEVE K : EXERCICES

Énoncés des exercices pris dans le manuel de la classe

page 30

n° 5. Simplifier les fractions :

a) $\frac{4}{6}$; $\frac{16}{14}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{10}{12}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{12}{8}$.

b) $\frac{16}{18}$; $\frac{12}{9}$; $\frac{6}{12}$; $\frac{15}{6}$; $\frac{14}{21}$; $\frac{9}{6}$; $\frac{25}{15}$.

n° 6. Simplifier les fractions :

a) $\frac{15}{20}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{33}{44}$; $\frac{30}{40}$; $\frac{5}{10}$.

b) $\frac{2500}{300}$; $\frac{70}{200}$; $\frac{50000}{9000}$.

n° 7. Simplifier les fractions :

a) $\frac{6}{18}$; $\frac{24}{30}$; $\frac{12}{6}$; $\frac{42}{36}$; $\frac{240}{300}$.

b) $\frac{4}{1480}$; $\frac{27}{24}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{14}{16}$; $\frac{8}{18}$.

n° 11. ***Marions-les.*** Trouver les paires de fractions égales : $\frac{9}{39}$; $\frac{12}{9}$; $\frac{3}{13}$; $\frac{35}{10}$; $\frac{12}{17}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{35}{27}$; $\frac{77}{56}$; $\frac{60}{85}$; $\frac{3,5}{2,7}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{7}{2}$.

n° 12. ***Chasse l'intrus !*** Dans chaque ligne chasser la fraction qui n'est pas égale aux autres :

a) $\frac{50}{40}$; $\frac{60}{48}$; $\frac{10}{8}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{15}{12}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{5}{4}$.

b) $\frac{5}{30}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{24}$; $\frac{10}{60}$; $\frac{2}{12}$; $\frac{3}{18}$; $\frac{5}{3}$.

c) $\frac{24}{36}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{14}{21}$; $\frac{1,2}{1,8}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{12}$.

page 31

n° 13. Ranger les fractions suivantes par ordre croissant :

a) $\frac{7}{36}$; $\frac{24}{36}$; $\frac{13}{36}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{43}{36}$; $\frac{36}{36}$.

b) $\frac{15}{24}$; $\frac{36}{24}$; $\frac{2}{24}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{72}{24}$; $\frac{97}{24}$.

n° 14. Ranger les fractions suivantes par ordre décroissant :

a) $\frac{71}{60}$; $\frac{13}{60}$; $\frac{21}{60}$; $\frac{12}{60}$; $\frac{60}{60}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{8}{60}$.

b) $\frac{5}{48}$; $\frac{11}{48}$; $\frac{7}{48}$; $\frac{13}{48}$; $\frac{9}{48}$; $\frac{27}{48}$.

n° 15. Ranger les fractions suivantes par ordre croissant (trouver un dénominateur commun) :

a) $\frac{18}{16}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{13}{16}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$.

b) $\frac{3}{10}$; $\frac{31}{100}$; $\frac{297}{1000}$; $\frac{3056}{10000}$.

n° 16. Ranger les fractions suivantes par ordre croissant (trouver un dénominateur commun) :

a) $\frac{13}{20}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{37}{100}$; $\frac{17}{50}$; $\frac{13}{25}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{2}{5}$.

n° 17. Ranger les fractions suivantes par ordre décroissant :

a) $\frac{13}{21}$; $\frac{152}{17}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{5}{17}$.

b) $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$.

n° 19. *a)* Écrire les fractions inférieures ou égales à 1 qui ont pour dénominateur 7 (les dénominateurs étant des nombres entiers).

b) Ranger par ordre croissant les fractions obtenues en *a)*

n° 20. Ranger par ordre décroissant les fractions comprises entre 1 et 2 dont le dénominateur est entier.

page 43

n° 10. Calculer : $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$; $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}$; $\frac{1}{2}+\frac{4}{2}$; $\frac{13}{14}+\frac{9}{14}$; $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{3}{20}+\frac{5}{20}+\frac{9}{20}$.

n° 11. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{3}{6}+\frac{5}{6}$; $\frac{21}{24}+\frac{8}{24}$; $\frac{5}{10}+\frac{3}{10}$; $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$; $\frac{2}{7}+\frac{12}{7}$; $\frac{1}{3}+\frac{3}{3}+\frac{5}{3}$.

n° 12. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{7}{12}-\frac{3}{12}$; $\frac{17}{25}-\frac{12}{25}$; $\frac{45}{76}-\frac{27}{76}$; $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}$; $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$; $\frac{4}{12}-\frac{4}{12}$.

n° 13. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$; $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}$; $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}$; $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$; $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}$; $\frac{7}{8}-\frac{4}{8}-\frac{2}{8}$.

n° 14. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$; $\frac{49}{3}-\frac{18}{3}$; $\frac{56}{5}+\frac{34}{5}$; $\frac{40}{7}-\frac{19}{7}$; $\frac{47}{20}-\frac{15}{20}$; $\frac{604}{30}-\frac{193}{20}$.

n° 15. Effectuer les soustractions suivantes :
$\frac{17}{12}-\frac{2}{12}$; $\frac{17}{5}-\frac{3}{5}$; $\frac{45}{6}-\frac{27}{6}$; $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$; $\frac{4}{9}-\frac{5}{18}$; $\frac{13}{20}-\frac{2}{5}$.

page 44

n° 16. Compléter le tableau :

a	$\frac{7}{25}$		$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{4}$	
b	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
$a+b$		$\frac{11}{31}$				$\frac{11}{5}$

n° 17. Compléter le tableau et simplifier le résultat lorsque c'est possible :

+	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{2}{3}$				
$\frac{5}{6}$				
$\frac{1}{24}$				
$\frac{7}{12}$				

n° 21. Effectuer et donner les résultats sous forme simplifiée :

$\frac{55}{77}+\frac{4}{7}$; $\frac{5}{10}-\frac{1}{2}$; $\frac{4}{33}+\frac{6}{11}$; $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$; $\frac{25}{1}-\frac{61}{21}$; $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$.

n° 22. Calculer :

$\frac{4}{9}+\frac{20}{27}$; $\frac{3}{5}+\frac{4}{15}$; $7-\frac{2}{3}$; $5-\frac{1}{5}$; $3-\frac{2}{5}$; $\frac{7}{9}-\frac{2}{27}$.

n° 24. Effectuer et simplifier :

$\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}$; $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}\times\frac{16}{14}$; $\frac{1}{100}\times\frac{1000}{55}$; $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}$; $\frac{4}{3}\times 0$.

page 48

n° 63. *Négoce.* Une pièce de vin contenait 125 litres ; on a vendu les $\frac{3}{5}$ de la pièce. Combien contient-elle encore de litres ?

page 50

n° 79. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a+\frac{b}{c}$, où a est la partie entière et $\frac{b}{c}$ la partie fractionnaire (fraction inférieure à 1) : $\frac{17}{2}$; $\frac{13}{10}$; $\frac{45}{7}$; $\frac{355}{113}$.

n° 80. Même exercice que le n° 79 avec : $\frac{25}{12}$; $\frac{100}{31}$; $\frac{49}{7}$; $\frac{4}{17}$.

n° 81. *a*) Trouver la fraction dont la partie entière est 1 et la partie fractionnaire $\frac{3}{5}$.

b) Même question avec 3 et $\frac{8}{9}$; puis avec 2 et $\frac{2}{3}$; enfin avec 7 et $\frac{3}{8}$.

n° 82. Même exercice avec 4 et $\frac{9}{10}$; 2 et $\frac{4}{9}$; 13 et $\frac{1}{2}$; 100 et $\frac{1}{100}$.

8-11-11

CHAPITRE 3 : Les nombres en écriture fractionnaire.

<u>Exercice</u> Dire si les fractions suivantes sont l'écriture fractionnaire d'un nombre entier, d'un nombre décimal, ou bien ni l'un ni l'autre :

$\frac{3}{4}$ est une écriture fractionnaire d'un nombre décimal (0,75)

$\frac{5}{9}$ est ni l'un ni l'autre (= 0,55555...)

$\frac{18}{6}$ est l'écriture fractionnaire d'un nombre entier (3)

$\frac{23}{12}$ est ni l'un ni l'autre (= 1,91666 ......)

$\frac{30}{45}$ est ni l'un ni l'autre (= 0,6666 ......)

$\frac{5687}{234}$ ~~est ni l'un ni l'autre (= 24,3034 17...)~~ c'est un nombre décimal.

$\frac{555}{5}$ est un nombre entier (111)

Exercice 11 p30

$\frac{9}{39} = \frac{3}{13}$ (÷3) $\qquad \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ (÷3) $\qquad \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$ (÷5)

$\frac{12}{17} = \frac{60}{85}$ ($\times 5$) $\qquad \frac{35}{27} = \frac{350}{270}$ ($\times 10$) $\qquad \frac{77}{56} = \frac{11}{8}$ ($\div 7$)

Exercice 12 p 30 : On cherche la forme irréductible de chaque fraction

1 Intrus : $\frac{50}{40}$; $\frac{60}{48}$; $\frac{10}{8}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{18}{12}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{5}{4}$

2 Intrus : $\frac{5}{30}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{24}$; $\frac{10}{60}$; $\frac{2}{12}$; $\frac{3}{18}$; $\frac{5}{3}$

3 Intrus : $\frac{24}{36}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{14}{21}$; $\frac{1,2}{1,8}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{12}$

Exercice 5 p 30.

a) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ($\div 2$) ; $\frac{16}{14} = \frac{6}{3}$ ($\div 10$, $\div 2$) ; $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ($\div 3$) ; $\frac{10}{12}$ ($\div$)

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ($\div 2$) ; $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ($\div 10$, $\div 3$) ; $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ($\div 3$, $\div 4$)

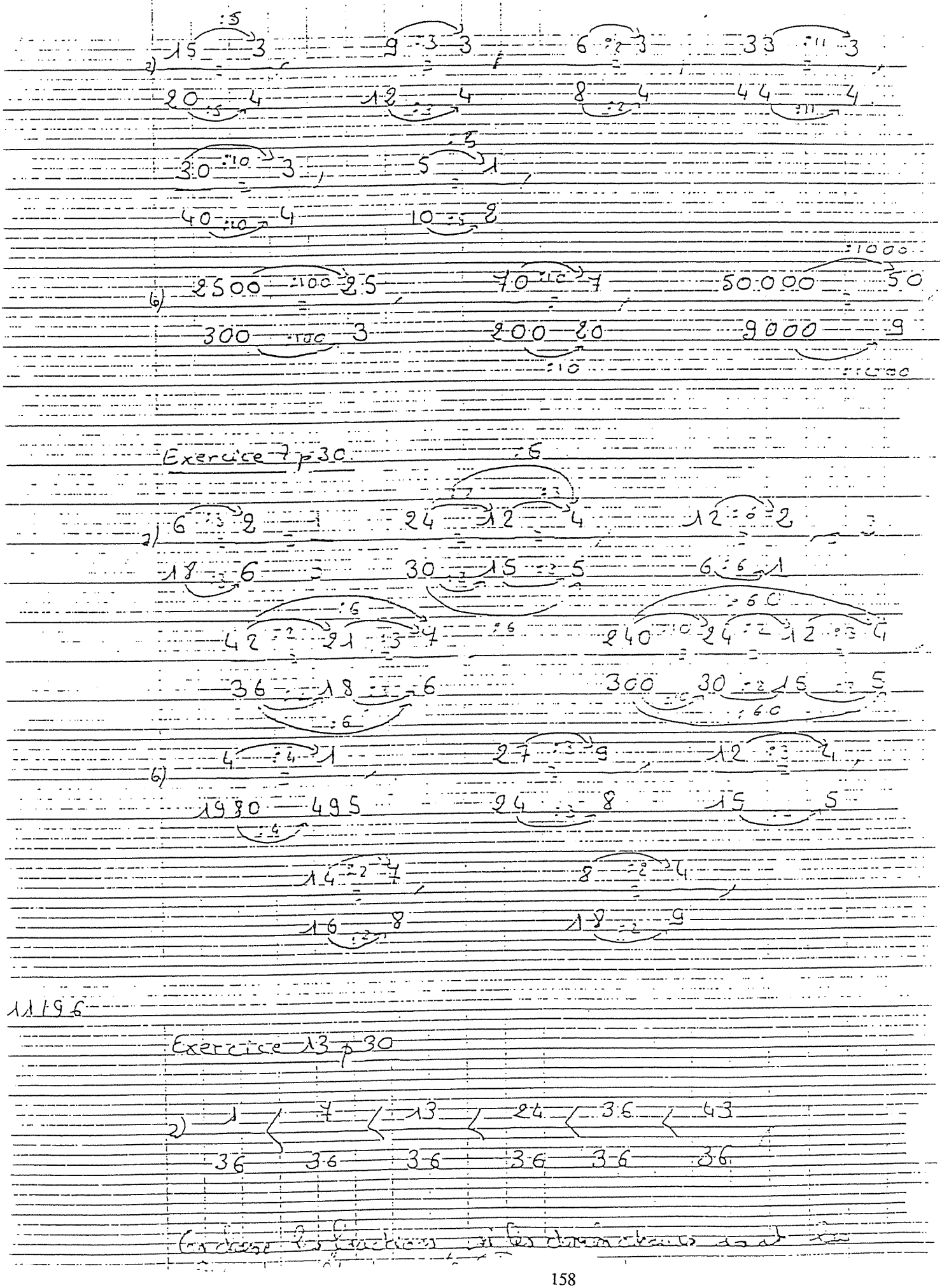
b) $\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$ ($\div 2$) ; $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ ($\div 3$) ; $\frac{6}{12} = \frac{8}{4}$ ($\div 3$) ; $\frac{15}{6}$ ($\div$)

$\frac{14}{21} = \frac{7}{11} = \frac{2}{3}$ ($\div 2$) ; $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ($\div 3$) ; $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$ ($\div 5$)

$\frac{15}{}$

4/11/96

Exercice 6 p 30


Exercice 7 p 30
Exercice 13 p 30

b) $\frac{2}{24} < \frac{7}{24} < \frac{15}{24} < \frac{36}{24} < \frac{72}{24} < \frac{97}{24}$,

Exercice 14 p 30

a) $\frac{71}{60} < \frac{60}{60} < \frac{21}{60} < \frac{13}{60} < \frac{12}{60} < \frac{8}{60} < \frac{1}{60}$,

On classe ces fractions, si les dénominateurs sont les mê[mes]

b) $\frac{27}{48} < \frac{13}{48} < \frac{11}{48} < \frac{9}{48} < \frac{7}{48} < \frac{5}{48}$ dans l'ordre de [illegible] sont de leur numérateurs

Exercice 15 p 30

a) $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$

Comme ces fractions n'ont pas le même dénominateur, on cherche un dénominateur [illegible]

$\frac{10}{16} < \frac{13}{16} < \frac{14}{16} < \frac{15}{16} < \frac{18}{16}$. [illegible]

Maintenant toutes les fractions ont le même dénominateur on

b) $\frac{3}{10} = \frac{3.000}{10.000}$ $\frac{31}{100} = \frac{3100}{10.000}$ $\frac{297}{1000} = \frac{29[..]}{10[...]}$

peut donc les classer dans l'ordre de leur numérateur.

$\frac{2970}{10\,000} < \frac{3.000}{10.000} < \frac{3056}{10.000} < \frac{3100}{10.000}$

$\frac{297}{1.000} < \frac{3}{10} < \frac{3056}{10.000} < \frac{31}{100}$

9/12 exercice 16 p 30

Comme ces fractions n'ont pas le même dénominateur, on cherche un dénominateur commun à ces fractions :

2) $\frac{13}{20} - \frac{7}{10} = \frac{14}{20} - \frac{9}{4} = \frac{45}{20} - \frac{2}{5} = \frac{8}{20} - \frac{1}{2} = \frac{10}{20}$

n'ellesont un
minateur commun
ange dans l'ordre
sant les numérateurs.

$\frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{13}{20} < \frac{14}{20} < \frac{45}{20}$;

$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{9}{4}$;

6) Idem que pe a

$\frac{37}{100} - \frac{17}{50} = \frac{34}{100} - \frac{13}{25} = \frac{52}{100} - \frac{7}{10} = \frac{70}{100} - \frac{2}{5} = \frac{40}{100}$

Idem que pe 2

$\frac{34}{100} < \frac{37}{100} < \frac{40}{100} < \frac{52}{100} < \frac{70}{100}$;

$\frac{17}{50} < \frac{37}{100} < \frac{2}{5} < \frac{13}{25} < \frac{7}{10}$;

Exercice 17 p 31

Idem que pe a ex 16

a) $\frac{13}{21} = \frac{221}{357}$ $\frac{152}{17} = \frac{3192}{357}$ $\frac{13}{17} = \frac{273}{357}$ $\frac{5}{21} = \frac{85}{357}$

$\frac{3192}{357} > \frac{273}{357} > \frac{221}{357} > \frac{85}{357} = \frac{152}{17} > \frac{13}{17} > \frac{13}{21} > \frac{5}{21}$

b) $\frac{3}{5} = \frac{36}{60}$ $-\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ $-\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ $-\frac{5}{3} = \frac{100}{60}$ $-\frac{5}{4} = \frac{75}{60}$

$\frac{100}{60} > \frac{75}{60} > \frac{45}{60} > \frac{36}{60} > \frac{12}{60}$

$= \frac{5}{3} > \frac{5}{4} > \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$

Ex 18 p 31.

a) et b)

$\frac{0}{7}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{7}$.

ex 17 p 31

b)

$\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$ $\frac{1}{5} < \frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3} > \frac{5}{4} > \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$

16/12

exercice: On veut comparer A et B avec une calculatrice

$A = \frac{13860}{33461}$; $B = \frac{33461}{80782}$.

1) Comparer A et B à l'aide de la machine, conclure.

$A = \frac{13860}{33461} = 0,414213562$

$B = \frac{33461}{80782} = 0,414213562$

Les deux fractions ont le mêmes résultats. Donc on ne peut pas les classer.

$$A = B$$

2) Multiplier le numérateur et le dénominateur de A par 80782.

$A = \frac{1119638520}{2703046502}$

$A = \frac{13860 \times 80782}{33461 \times 80782} = \frac{1\,119\,638\,520}{2\,703\,046\,502}$

3) Multiplier le numérateur et le dénominateur de B par 33461.

$B = \frac{33461 \times 33461}{80782 \times 33461} = \frac{1\,119\,638\,521}{2\,703\,046\,502}$.

4°) Comparer A et B

A < B

ATTENTION

Se méfier de la machine

Exercice 20 p 31.

$\frac{7}{7}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{10}{7}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{13}{7}$; $\frac{14}{7}$.

$\frac{14}{7} > \frac{13}{7} > \frac{12}{7} > \frac{11}{7} > \frac{10}{7} > \frac{9}{7} > \frac{8}{7} > \frac{7}{7}$

16/12 Ex 10 p 43.

$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$; $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2+4}{15} = \frac{6}{15}$

$\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$; $\frac{13}{14} + \frac{9}{14} = \frac{13+9}{14} = \frac{22}{14} = \frac{1}{1}$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$; $\frac{3}{20} + \frac{5}{20} + \frac{9}{20} = \frac{3+5+9}{20} = \frac{17}{20}$

Exercice 11 p 43.

$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3+5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; $\frac{21}{24} + \frac{8}{24} = \frac{21+8}{24} = \frac{29}{24}$ = rien. on ne peut pas

$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3+2}{5} = \frac{5}{5} = 1$

$\frac{2}{7} + \frac{12}{7} = \frac{2+12}{7} = \frac{14}{7} = 2$; $\frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$

exercice 12 p 43

$\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7-3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{17}{25} - \frac{12}{25} = \frac{17-12}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$\frac{45}{76} - \frac{27}{76} = \frac{45-27}{76} = \frac{18}{76} = \frac{9}{38}$; $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$ on ne peut pas la simplifier.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{4}{12} - \frac{4}{12} = \frac{4-4}{12} = \frac{0}{12} = 0$

Exercice 13 p 43.

$\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4-2}{7} = \frac{2}{7}$ on ne peut pas la simplifier ; $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$ on ne peut pas la simplifier.

$\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7-4-2}{8} = \frac{1}{8}$ on ne peut pas la simplifier

Exercice 14 p 43

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $\frac{49}{3} - \frac{18}{3} = \frac{49-18}{3} = \frac{31}{3}$ on ne peut pas simplifier

$\frac{56}{5} + \frac{34}{5} = \frac{56+34}{5} = \frac{90}{5} = \frac{18}{1} = 18$; $\frac{40}{7} - \frac{19}{7} = \frac{40-19}{7} = \frac{21}{7} = 3$

$\frac{47}{20} - \frac{15}{20} = \frac{47-15}{20} = \frac{32}{20} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$; $\frac{604}{30} - \frac{193}{30} = \frac{604-193}{30} = \frac{411}{30} = \frac{137}{10}$

exercice 15 p 43.

$\frac{17}{12} - \frac{2}{12} = \frac{17-2}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$; $\frac{17}{5} - \frac{3}{5} = \frac{17-3}{5} = \frac{14}{5}$

$\frac{45}{6} - \frac{27}{6} = \frac{45-27}{6} = \frac{18}{6} = 3$; $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{6-5}{8} = \frac{1}{8}$

$\frac{4}{9} - \frac{5}{18} = \frac{8}{18} - \frac{5}{18} = \frac{8-5}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$; $\frac{13}{20} - \frac{2}{20} = \frac{13-2}{20} = \frac{11}{20} = \frac{13-2}{20}$.

20/12 ex 24 p 44.

$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{12}{15}$; $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{7}{8} \times \frac{16}{14} = \frac{7 \times 16}{8 \times 14} = \frac{112}{112}$;

$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{2 \times 3}{5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{22}{5} = \frac{4}{5}$.

$\frac{1}{100} \times \frac{1000}{55} = \frac{1 \times 1000}{55 \times 100} = \frac{1000}{5500}$

$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}$

$\frac{7 \times 16}{8 \quad 14} = \frac{7}{8} \times \frac{8 \times 2}{7 \times 2} = \frac{7}{8} \times \frac{8}{7} = 1$

10/1/97 exercice 16 p 64

a	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{5} : \frac{5}{10}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$
b	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{7} : \frac{4}{14}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
a+b	$\frac{11}{25}$	$\frac{11}{31}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{11}{5}$

ex 17 p 44.

+	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{6} = \frac{3}{2}$	$\frac{\cdots}{24}$	$\frac{\cdots}{12} = \frac{5}{4}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$	$\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$	$\frac{17}{12} =$
$\frac{1}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	$\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$	$\frac{\cdots}{2}$	$\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$	$\frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6}$; $\frac{\cdots}{3} + \frac{\cdots}{24} = \frac{\cdots}{24} + \frac{\cdots}{24} = \frac{\cdots}{24}$

$\frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{7}{12} + \frac{8}{12} = \frac{15}{12}$; $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6}$

$\frac{1}{24} + \frac{5}{6} = \frac{1}{24} + \frac{20}{24} = \frac{21}{24}$; $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} = \frac{7}{12} + \frac{10}{12} = \frac{17}{12}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$; $\frac{5}{6} + \frac{1}{24} = \frac{20}{24} + \frac{1}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

$\frac{7}{12} + \frac{1}{24} = \frac{14}{24} + \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$; $\frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{7}{12} + \frac{8}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{10}{12} + \frac{7}{12} = \frac{17}{12}$; $\frac{1}{24} + \frac{7}{12} = \frac{1}{24} + \frac{14}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

exercice 21 p 44.

$\frac{5}{77} + \frac{4}{7} = \frac{5}{77} + \frac{44}{77} = \frac{49}{77} = \frac{7}{11}$; $\frac{5}{10} - \frac{1}{2} = \frac{5}{10} - \frac{5}{10} = \frac{0}{10} = 0$

$\frac{4}{33} + \frac{6}{11} = \frac{4}{33} + \frac{18}{33} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\frac{25}{7} - \frac{61}{21} = \frac{75}{21} - \frac{61}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$; $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$

exercice 22 p 44.

$\frac{4}{9} + \frac{20}{27} = \frac{12}{27} + \frac{20}{27} = \frac{32}{27}$; $\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15}$

$7 - \frac{2}{3} = \frac{7}{1} - \frac{2}{3} = \frac{21}{3} - \frac{2}{3} = \frac{19}{3}$; $5 - \frac{1}{5} = \frac{5}{1} - \frac{1}{5} = \frac{25}{5} - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$

$3 - \frac{2}{5} = \frac{3}{1} - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$; $\frac{7}{9} - \frac{2}{27} = \frac{21}{27} - \frac{2}{27} = \frac{19}{27}$

101/97 Activité 9 p 41.

2) Léo $\frac{2}{5}$ de 30 font : $30 \times \frac{2}{5} = \frac{30}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{60}{5} = 12$

Léo $\frac{9}{4}$ de 42 font : $42 \times \frac{9}{4} = \frac{42}{1} \times \frac{9}{4} = \frac{378}{4} = 189$

4)

Combien valent les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{7}$ de 56 ?

$56 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{56}{1} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{336}{28}$

Combien vaut les $\frac{8}{5}$ des $\frac{3}{11}$ de 1100 ?

$1100 \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{1100}{1} \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{26400}{55}$.

c) $120 \times \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} : \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} \times 120 = \frac{9 \times 3 \times 120}{10 \times 4}$

$\frac{9 \times 3 \times 10 \times 12}{10 \times 4} = \frac{9 \times 3 \times 12}{4} = \frac{9 \times 3 \times 3 \times 4}{4} = 9 \times 3 \times 3 = 81$

exercice 53 p 48

$125 \times \frac{3}{5} = \frac{120 \times 3}{5} = \frac{14 \times 5 \times 3}{5} = 14 \times 3 = 42$

125 litres de vin

On vend $\frac{3}{5}$ de 125 litres de vin. On a vendu $\frac{3 \times 125}{5} = 75$ l

donc : $125 - (\frac{3}{5} \times 125)$

il reste 125 litres − 75 litres = 50 litres.

exercice 79 p 50

$\frac{17}{2} = \frac{16+1}{2} = \frac{16}{2} + \frac{1}{2} = 8 \times 2 + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2}$

La partie entière est 8.

$\frac{13}{10} = \frac{10+3}{10} = \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{3}{10}$.

La partie entière est 1

$\frac{45}{7} = \frac{42+3}{7} = \frac{42}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6\times7}{7} + \frac{3}{7} = 6 + \frac{3}{7}$.

La partie entière est 6.

$\frac{355}{113} = \frac{339+16}{113} = \frac{113\times3}{113} + \frac{16}{113} = 3 + \frac{16}{113}$.

La partie entière est 3.

exercice 80 p 50

$\frac{25}{12} = \frac{24+1}{12} = \frac{12\times2}{12} + \frac{1}{12} = 2 + \frac{1}{12}$,

La partie entière est 2

$\frac{100}{31} = \frac{93+7}{31} = \frac{31\times3}{31} + \frac{7}{31} = 3 + \frac{7}{31}$,

La partie entière est 3

$\frac{49}{7} = \frac{49}{7} + 0 = 7\times7 + 0 = 7$

La partie entière est 7.

$\frac{4}{17} = \frac{0}{17} + \frac{4}{17} = 0 + \frac{4}{17}$

La partie entière est 0

ex 81 p 50

a) $1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

b) $3 + \frac{8}{9} = \frac{27}{9} + \frac{8}{9} = \frac{35}{9}$

$2 + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$7 + \frac{3}{8} = \frac{56}{8} + \frac{3}{8} = \frac{59}{8}$

ex 82 p 50

a) $4 + \frac{9}{10} = \frac{40}{10} + \frac{9}{10} = \frac{49}{10}$

c) $2 + \frac{4}{9} = \frac{18}{9} + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$

3) $13 + \frac{1}{2} = \frac{26}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{2}$

4) $100 + \frac{1}{100} = \frac{10\,000}{100} + \frac{1}{100} = \frac{10}{10}$

10/01/97

ex 8 p 30

a) $\frac{5}{2} = \frac{5\times6}{2\times6} = \frac{30}{12}$; $\frac{1}{3} = \frac{1\times4}{3\times4} = \frac{4}{12}$; $\frac{7}{6} = \frac{7\times2}{6\times2} = \frac{14}{12}$

$\frac{5}{4} = \frac{5\times3}{4\times3} = \frac{15}{12}$; b) $\frac{2}{7} = \frac{2\times9}{7\times9} = \frac{18}{63}$; $\frac{9}{2} = \frac{9\times2}{2\times2} = \frac{18}{4}$

$\frac{6}{5} = \frac{6\times3}{5\times3} = \frac{18}{15}$; $\frac{3}{11} = \frac{3\times6}{11\times6} = \frac{18}{66}$

c) $\frac{24}{36} = \frac{12}{18}$

$\frac{24}{36}$ (:2) $= \frac{12}{18}$ (:2) $= \frac{6}{9}$ (:3) $= \frac{2}{3}$

$\frac{15}{39}$ (:3) $= \frac{5}{13}$ (:3)

$\frac{45}{55}$ (:5) $= \frac{9}{11}$ (:5)

$\frac{72}{80}$ (:9) $= \frac{8}{9}$ (:9)

$\frac{50}{30}$ (:10) $= \frac{5}{3}$ (:10)

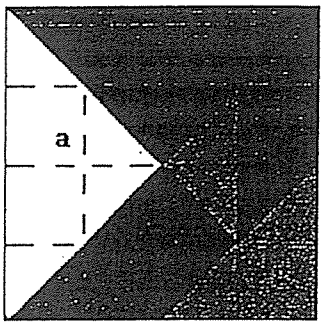
$\frac{300}{500}$ (:100) $= \frac{3}{5}$ (:100)

$\frac{5}{15}$ (:5) $= \frac{1}{3}$ (:5)

1- Devoir à la maison, résultats et commentaires

Le Tangram

a/ Dans un carré en carton de 8cm (ou 8 carreaux) de coté, dessiner et colorier les sept pièces qui forment le jeu appelé tangram.

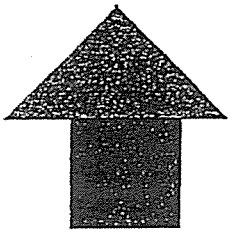


b/ Ecrire l'aire de chaque morceau sous forme de fraction (par rapport à l'aire du grand carré).

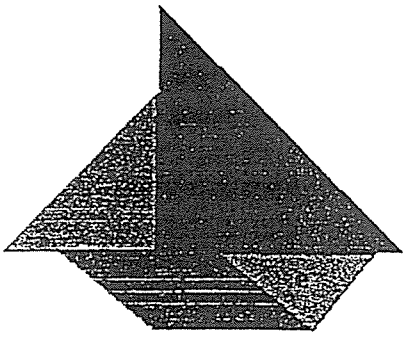
a=... b=... c=... d=...

e=... f=... g=...

c/ Avec les morceaux du tangram, on peut réaliser des dessins très variés. Quelle fraction (du grand carré) représente le dessin ci-dessous ?



Et celui-ci ?



d/ Inventer une nouvelle figure et donner la fraction quelle représente.

09/12

5°H

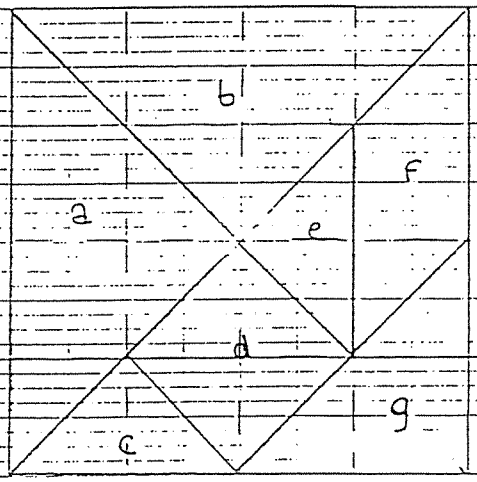
Devoir à la maison

à rendre le 16/12/96

Note	Observations	signature
20/20	Travail sérieux et soigné	

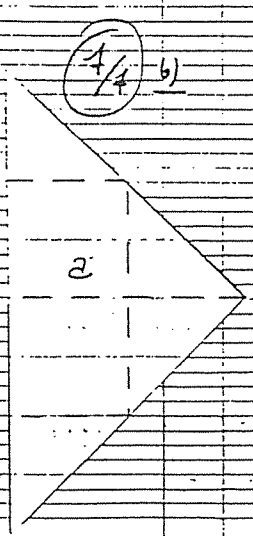
Activité 7 p 40

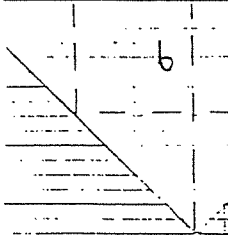
2) (1/1)



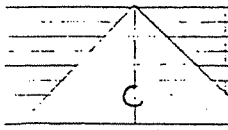
(1/1) b)

a a comme aire la fraction $\frac{4}{16}$ car il y a 2 carrés + 4 demi carrés ce qui est égal à 2 carrés + 2 carrés ce qui fait 4 carrés sur 16 carrés en tout.

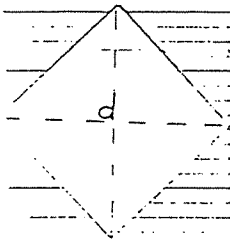




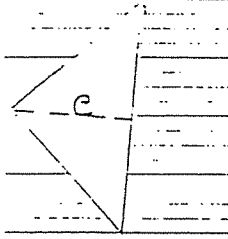
b a comme aire la fraction $\frac{4}{16}$ car il y a 2 carrés + 4 demi carrés ce qui est égal à 2 carrés + 2 carrés ce qui fait 4 carrés sur 16 carrés en tout.



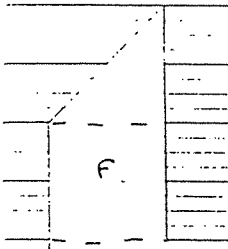
c a comme aire la fraction $\frac{1}{16}$ car il y a 2 demi carrés qui ajoutés en font 1 entier.



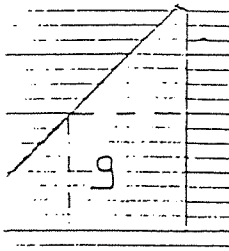
d a comme aire la fraction $\frac{2}{16}$ car il y a 4 demi carrés qui ajoutés en font 2 entiers.



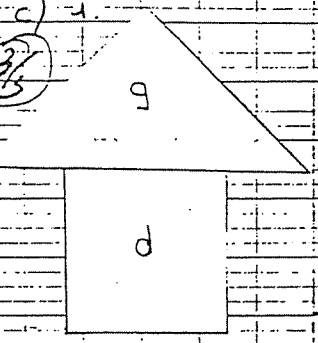
e a comme aire la fraction $\frac{1}{16}$ car il y a 2 demi carrés ce qui fait 1 carré entier.



f a comme aire la fraction $\frac{2}{16}$ car il y a 1 carré entier + 2 demi carrés ce qui est égal à 1 carré entier + 1 carré entier c'est à dire 2 carrés entiers.



g a comme aire la fraction $\frac{2}{16}$ car il y a 1 carré entier + 2 demi carrés ce qui est égal à 1 carré entier + 1 carré entier ce qui fait 2 carrés entiers sur 16 carrés.

c) 

La figure représente : la forme d + la forme g

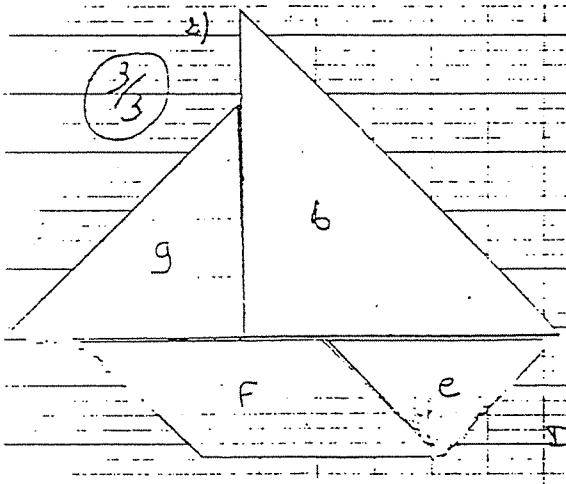
(d) $\frac{2}{16}$ + (g) $\frac{2}{16}$

n pourrait
mpter le
mbre de carreaux)

Donc la figure a pour aire la fraction $\frac{4}{16}$ ca

on a mit la forme d et la forme g dans un carré qui a pour aire la fraction $\frac{16}{16}$ et comme les deux formes appartiennent au même carré ; on ajoute les numérateurs et pas les dénominateurs

ou

2) 

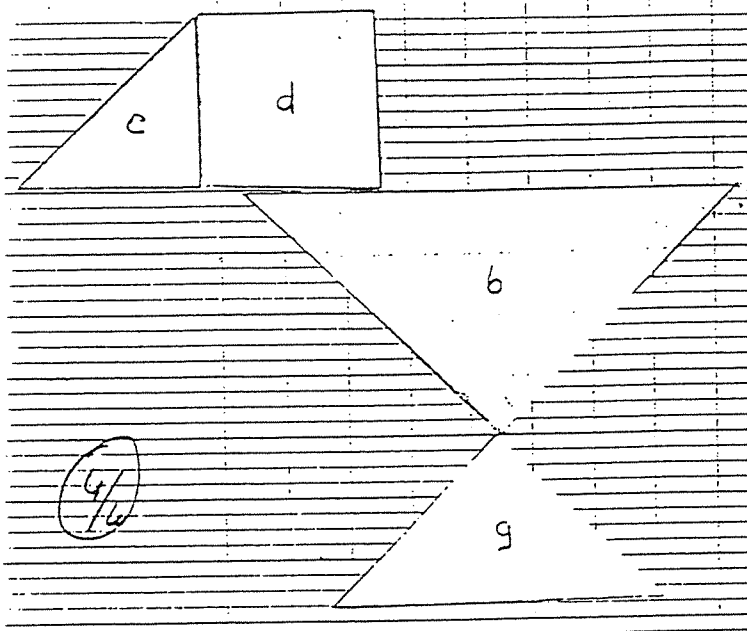
cette figure représente : la forme g + la forme d + la forme F + la forme e

(g) $\frac{2}{16}$ + (b) $\frac{4}{16}$ + (F) $\frac{2}{16}$ + (e) $\frac{1}{16}$

Donc la figure a pour aire la fraction $\frac{9}{16}$ ca

on a mit la forme g + la forme b + la forme c + la forme f dans un carré qui a pour aire la fraction $\frac{16}{16}$ et comme les quatre formes appartiennent du même carré : on ajoute que les numérateurs

d) Inventez une figure et dites la fraction qu'elle représente



4/4

Bien

C'est une cocotte en papier

cette figure représente la forme e + la forme g + la forme b + la forme d + la forme c.

$$\text{e} = \frac{1}{16} + \text{g} = \frac{3}{16} + \text{b} = \frac{4}{16} + \text{d} = \frac{2}{16} + \text{c} = \frac{1}{16}$$

Dans la figure pour avoir la fraction $\frac{10}{16}$ on a pris la forme d + la forme c + la forme b + la forme e + la forme g dans un carré qui a pour aire la fraction $\frac{16}{16}$ et comme les cinq formes appartiennent au même carré on ajoute les numérateurs.

Bien

2- Contrôle, résultats et commentaires

Classe de 5ième H — lundi 13 janvier 1997

Contrôle de mathématiques

Calculatrice interdite

Exercice n°1 : Ranger par ordre croissant, après avoir cité la règle utilisée :

$$\frac{5}{7} \; ; \; \frac{2}{7} \; ; \; \frac{4}{7} \; ; \; \frac{3}{7} \; ; \; \frac{10}{70}$$

Exercice n°2 : Compléter les séries d'égalités (Ne pas oublier les étapes nécessaires):

a) $\frac{5}{7} = \frac{15}{\ldots}$ c) $\frac{4}{5} = \frac{36}{\ldots}$ e) $\frac{17}{12} = \frac{51}{\ldots}$

b) $\frac{2,4}{3} = \frac{24}{\ldots}$ d) $\frac{7}{2} = \frac{\ldots}{10}$ f) $\frac{9}{4} = \frac{\ldots}{28}$

Exercice n°3 : Remplacer chaque fraction par la fraction la plus simple :

$$\frac{100}{400} \; ; \; \frac{500}{30} \; ; \; \frac{140}{220} \; ; \; \frac{2}{6} \; ; \; \frac{63}{36} \; ; \; \frac{45}{60}$$

Exercice n°4 : Ecrire sous forme d'une seule fraction la plus simple possible :
(ne pas oublier de citer les règles !)

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$ *c)* $\frac{2}{5} \times \frac{7}{5}$ *e)* $\frac{5}{4} + 3$

b) $\frac{7}{4} - \frac{5}{4}$ *d)* $\frac{3}{2} \times \frac{8}{9}$ *f)* $\frac{5}{4} \times 3$

Exercice n°5 : Patrick et Sébastien

Sébastien : « *Après l'achat d'un disque pour la fête des pères, il me reste les trois septièmes de mes économies.* »
Quelle fraction de ses économies Sébastien a-t-il dépensé ?

Patrick : « *J'ai dépensé les deux tiers de mes économies pour la Fête des Mères et le douzième pour l'achat d'une cassette* »
Quelle fraction de ses économies reste-t-il à Patrick?

13/01/9

Contrôle de Maths

Note :	Observations :
19/20	Excellent Devoir

Exercice 1 :

Pour pouvoir classer des fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. et alors, comment les classes-tu ensuite ?

$\frac{10}{70} = \frac{1}{7}$ (:10)

Et lorsqu'elles ont le même dénominateur on les classe dans l'ordre de leur numérateur.

1,5

$\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7}$; $\frac{10}{70} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7}$

Exercice 2 :

a) $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{15}{21}$; b) $\frac{2,4}{3} = \frac{2,4 \times 10}{3 \times 10} = \frac{24}{30}$; c) $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 9}{5 \times 9} =$

4

d) $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{35}{10}$; e) $\frac{17}{12} = \frac{17 \times 3}{12 \times 3} = \frac{51}{36}$; f) $\frac{9}{4} = \frac{9 \times 7}{4 \times 7} =$

Exercice 3 :

$\frac{100}{400} = \frac{100 \div 100}{400 \div 100} = \frac{1}{4}$; $\frac{500}{30} = \frac{500 \div 10}{30 \div 10} = \frac{50}{3}$

$\frac{140}{220} = \frac{140 \div 10}{220 \div 10} = \frac{14}{22} = \frac{14 \div 2}{22 \div 2} = \frac{7}{11}$

$\frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{63}{36} = \frac{63 \div 9}{36 \div 9} = \frac{7}{4}$

$\frac{45}{60} = \frac{45 \div 5}{60 \div 5} = \frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$

Exercice 4

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5}$ $\quad$ b) $\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{5} \times 7 = \frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}$ $\quad$ d) $\frac{3}{2} \times 8 = \frac{3 \times 8}{2} = \frac{24}{2} = \frac{8}{1} = 4$

e) $\frac{5}{4} + 3 = \frac{5}{4} + \frac{3}{1} = \frac{5}{4} + \frac{12}{4} = \frac{17}{4}$ $\quad$ f) $\frac{5}{4} \times 3 = \frac{5}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{5 \times 3}{4 \times 1} = \frac{15}{4}$

Exercice 5

Sébastien a dépensé les $\frac{4}{7}$ de ses économies

a) La fraction qui représente ce que Sébastien a dépensé de ses économies est $\frac{4}{7}$ car ses économies représentent $\frac{7}{7}$ et $\frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

ses économies	ce qu'il lui reste	=	ce qu'il a dépensé

Patrick a dépensé

$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12}$

Il a dépensé les $\frac{9}{12}$ de ses économies.

Il lui reste. Ses économies représentent $\frac{12}{12}$. Il en a dépensé les

$\frac{12}{12} - \frac{9}{12} = \frac{3}{12}$ deux tiers plus le douzième

Il lui reste les $\frac{3}{12}$ de ses économies $\left(= \frac{1}{4}\right)$

Règles : Pour pouvoir additionner deux fractions, il faut que les fractions ai le même dénominateur. Comment les additionnes tu alors ?

Pour soustraire deux fractions ou plus, il faut qu'elle aient le même dénominateur

Lorsqu'on multiplie deux fractions, il faut multipli le dénominateur et le numérateur par le même nom

Pour classer des fractions dans un ordre croissant, si elles ont le même dénominateur, on les classe selon le numérateur. ou α 0,5