

VISITE DE L'ATELIER « THÉORIE DES SITUATIONS »

par Guy Brousseau

LADIST - Bordeaux

Il s'agit plutôt d'un atelier dans un chantier. De toute façon, la T. S. (la théorie des situations) est utilisée par des chercheurs divers et elle leur appartient autant qu'à moi. De sorte que s'il y a souvent coopération entre les chercheurs, il peut y avoir des interprétations et des usages différents et éventuellement divergents. Les exposés sur la théorie des situations n'ont pas été organisés ni même coordonnés.

L'entreprise :

C'était autrefois l'IREM de Bordeaux, puis seulement une de ses parties, puis le Laboratoire Aquitain de Didactique des Sciences et des Techniques de l'Université Bordeaux 1 (LADiST). Aujourd'hui elle est en passe de devenir le Laboratoire « Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Techniques » (DAEST) de l'Université Victor Ségalen Bordeaux 2 et de l'IUFM d'Aquitaine. Pourquoi avons nous changé ? réponse : Bonne question !

Les Ouvriers

Eugène Comin ¹, Doctorant et professeur de lycée. Il travaille sur l'enseignement de la proportionnalité et de la linéarité de l'école primaire au collège

Dominique Woillez, Doctorante et professeur agrégée en collège. Elle travaille sur l'enseignement de l'algèbre au collège et son articulation avec l'arithmétique.

Tous deux en sont à la phase de rédaction.

Guy Brousseau prépare sa retraite pour le mois de septembre 1998.

Le Chantier

C'est celui de la théorie des situations didactiques en mathématiques

a) L'idée de base est de modéliser directement les conditions dans lesquelles s'activent les acteurs de l'enseignement « professeurs et élèves » en ne retenant que celles qui sont « nécessaires » dans un modèle appelé « situation » pour expliquer certains des observables : les déclarations, les décisions, les réponses, etc.

¹ Eugène Comin a animé un atelier pendant l'UE. Fondé sur l'analyse d'un document audiovisuel, le contenu de son atelier n'est pas reproduit dans ces actes.

Le chercheur travaille sur son modèle avec deux types de questions : celles concernant la contingence traitée par son modèle et celle de la consistance de son modèle, consistance interne (non contradiction) ou consistance avec les connaissances déjà établies dans des « théories » scientifiques.

L'idée consiste à prendre directement comme objet d'étude ce que le professeur conçoit, met en œuvre, gère et communique. Dans cette approche, le bénéfice escompté est de permettre un accès plus direct à un mathématicien de formation et une certaine économie dans les cultures psychologique, sociologique, sémiologique, épistémologique etc. nécessaires sinon à la conception de la didactique, du moins à sa délimitation dans ses usages.

b) Une situation est donnée par un ensemble d'états possibles d'un « milieu » parmi lesquels un actant choisit à chacune de ses décisions un nouvel état parmi ceux qui lui sont permis à ce moment là par des règles qui lui ont été proposées. L'actant cherche à mener le milieu à un état final déclaré gagnant et à éviter les états « perdants ». Une connaissance est un moyen de choisir une stratégie ou d'en écarter certaines autres. La connaissance déterminée par une situation est celle qui engendre sa stratégie optimale. On suppose que l'actant cherche à obtenir « le meilleur résultat au meilleur prix ». Les situations peuvent être « effectives » et activer des comportements, voire provoquer des apprentissages, elles peuvent aussi être fictives (par ex. expérience mentale).

c) Dans ce travail, il faut accepter que les termes du modèle soient différents des termes utilisés de façon courante pour désigner les objets de la contingence – l'enseignement - que l'on veut modéliser, surtout de ceux utilisés par les professionnels de l'enseignement. Leurs concepts et leur langage n'ayant pas la même fonction que les concepts et le langage scientifique ne peuvent pas être tenus a priori pour pertinents dans ce dernier rôle (même s'il arrive qu'ils le soient). Réciproquement il n'y a aucune raison pour l'instant de proposer aux professeurs de modifier leur répertoire. Le risque est grand de leur voir mettre leurs concepts habituels sous les nouveaux mots. Il arrive que les contacts fréquents des didacticiens avec les professeurs (ils sont eux même professeurs la plupart du temps) les conduisent à diffuser des points de vues et des termes encore insuffisamment « travaillés » et qu'il est impossible ensuite de reprendre.

d) L'approche systémique n'est pas la seule possible. Elle n'est pas contradictoire avec l'approche anthropologique. Elles seraient plutôt complémentaires, et on peut traiter certaines mêmes questions avec l'une et avec l'autre, et obtenir des résultats similaires. Suivant les sujets et la commodité, j'utilise l'une ou l'autre. Par contre, la nécessité de construire un système scientifiquement cohérent peut amener à éliminer d'un exposé les « concepts étrangers ». La Théorie anthropologique donne un fondement plus général que l'approche systémique. Elle permet une approche plus délibérée, plus souple et plus rigoureuse dans l'observation et l'analyse des objets en présence. La théorie des situations est pour moi plus commode pour l'ingénierie, pour la conception (ingénierie) et l'étude du fonctionnement des systèmes (expérimentation) et pour le questionnement. Toutes les deux visent l'explication et la prévision des phénomènes liés à l'enseignement et prennent en compte les points de vue économiques des actions étudiées et leur clôture écologique.

e) Ainsi, la didactique des mathématiques est l'étude des conditions (spécifiques) de la diffusion des connaissances mathématiques nécessaires aux institutions et aux hommes (Comparer avec la définition de l'économie). Il s'agit de comprendre et de reproduire en la transposant l'aventure spécifique à la création d'une connaissance. Quelle aventure faut-il avoir vécue pour acquérir un usage raffiné de l'algèbre ? Ce n'est sûrement pas la même que celle qui conduit à la géométrie. Quelles genèses didactiques peut-on en proposer aux élèves ? lesquelles sont viables, lesquelles ne le sont pas ? Les activités didactiques (mutatis mutandis les activités économiques) peuvent être décrites et analysées de points de vue très différents (évoqués plus haut) mais elles ne peuvent être produites que par des réorganisations et des « problématisations » des mathématiques qui sont par nature des activités mathématiques (effectuées par les mathématiciens producteurs de mathématiques). D'autre part, la signification didactique de ces analyses ne peut être importée que par le moyen de théories spécifiques (didactiques) . Par conséquent, ces théories qui ont une adhérence mathématique importante, doivent être connues et en grande partie faites par des mathématiciens, à qui elles s'adressent d'ailleurs. Avec Thurston, j'appelle mathématiciens ceux qui accroissent la compréhension humaine des mathématiques.

f) De nombreux concepts « métadidactiques » ont dû être construits mais on essaie de n'en utiliser que le moins possible pour expliquer un phénomène donné. Les études relatives à la didactique des nombres, des rationnels, des probabilités, de la géométrie ou de l'algèbre comme aujourd'hui sont plus importantes pour moi que celles sur les obstacles, sur le contrat didactique, ou sur l'institutionnalisation.

g) La didactique n'est attachée à aucune idéologie pédagogique particulière. Des situations complexes ne marchent pas nécessairement mieux que des simples. Il s'agit d'abord de modéliser, de comprendre et d'expliquer toutes les stratégies d'enseignement et de prévoir leurs résultats.

Les travaux

a) Théoriques (nous n'en parlerons pas) : utiliser la méthode des situations, c'est banalement s'interroger sur les enjeux et pour chaque attente du professeur, sur les raisons qu'aurait l'élève de faire telle chose plutôt que telle autre ? J'ai apporté une grille destinée à interroger un projet de leçon ou une phase d'enseignement afin d'y rechercher les éléments d'identification de la situation et d'en prévoir les effets (cf. annexe du cours de Montréal). Les études théoriques ont pour objet de permettre de vérifier la consistance ou la compatibilité des modèles. La principale vertu des théories, c'est de permettre ne pas perdre les connaissances acquises ; à condition que les chercheurs les utilisent vraiment pour chercher la vérité, en n'hésitant pas à rejeter les modèles contradictoires (faux) ou inadéquats.

b) Expérimentaux

L'introduction de l'algèbre dès l'école primaire et les inconvénients des introductions précoces maladroites ont été étudiées à Bordeaux depuis 1960 :

- l'introduction d'un code pour désigner des objets à l'école maternelle avec la thèse de J. Pérès,
- l'addition à trou,

- l'inversion de la multiplication à trou,
- l'introduction de l'algèbre en troisième par l'étude des inégalités (Mercedes Diez)

Il en est de même pour la proportionnalité et la linéarité, en particulier pour l'étude de situations « fondamentales » (certaines bien connues, telles que les feuilles de papier, le puzzle, le pantographe etc.)

Les résultats présentés

Nos études sur l'enseignement de l'algèbre nous ont donné des indices nets d'un phénomène important. L'enseignement précoce de bribes d'algèbre (les signes +, - etc. et surtout =) et la disparition, sans substitut clairement annoncé, des enseignements de contrôle (par exemple la théorie des rapports au collège) et d'usage (par exemple l'écriture des unités auprès des nombres manipulés) conduisent, avec d'autres circonstances, à des difficultés réelles et à des échecs importants.

NDLR Suite aux interventions des conférenciers, les participants de l'UE étaient invités à formuler des questions. Nous reproduisons, ci-dessous, la liste de questions adressées à Guy Brousseau et les éléments de réponses que celui-ci leur a apportés.

QUESTIONS À GUY BROUSSEAU

- 1) Préciser le terme de « consistance » et la différence entre “ contradiction ” et « paradoxe ».
- 2) La théorie des situations est-elle une théorie des régulations ? Des éclaircissements sont demandés.
- 3) Comment la théorie des situations modélise-t-elle le traitement des erreurs ?
- 4) Les situations fondamentales sont-elles reproductibles ?
- 5) Quelle est la distinction entre contrat pédagogique et contrat didactique ?
- 6) Le problème du transfert a été évoqué. De quel transfert s'agit-il ?
- 7) Des exemples de raisonnements arithmétiques qui ont disparu quand l'algèbre a supplanté l'arithmétique
- 8) Préciser les différences entre proportionnalité et fonction linéaire : quelles sont les difficultés du passage de l'une à l'autre ?
- 9) La proportionnalité s'est formalisée au XVIII^e siècle ! Comment et pourquoi ?
- 10) Quelle est la distinction entre « connaissances » et « savoirs » ?
- 11) Dans quel sens un enseignant pourrait-il utiliser la notion de situation fondamentale dans son travail quotidien !

Éléments de réponses (certains bien trop rapides)

1 . Consistance, contradiction, paradoxes (Q 1)

Consistance : non contradiction.

Un modèle (au sens des sciences expérimentales, pas au sens de la logique mathématique) est composé d'éléments, certains pertinents donc concrètement significatifs, c'est-à-dire observables, autrement dit définis à l'aide d'un modèle de « contingence » d'autres non concrètement significatifs.

Un modèle est un assemblage d'observables et de relations qui permet de prévoir (de calculer) d'autres observables.

Il comprend des calculs et des déclarations qui sont fournis par une théorie (ensemble d'objets et de relations « établis ») et par des raisonnements (formels).

L'ensemble des déclarations liées au modèle doit être consistant, c'est-à-dire non contradictoire.

Si deux modèles prévoient, dans les mêmes conditions, deux observations incompatibles, ils ne peuvent pas entrer dans une même théorie. Formellement, ces deux modèles sont contradictoires.

Supposons maintenant qu'au cours d'une activité de recherche, un « même modèle » conduise à prévoir dans certaines conditions deux résultats incompatibles. Le modèle est « inconsistant », contradictoire. La contradiction peut avoir une origine

- logique, « syntaxique », c'est une contradiction au sens strict : un raisonnement est faux, (la contradiction stricte tient à l'acceptation d'axiomes contradictoires).

- ou sémantique (les objets sont mal choisis, définis ou interprétés, la contingence n'est pas ce que l'on croyait etc).

Le modèle doit alors être rejeté. Cela ne veut pas dire que rien de ce modèle ne peut être récupéré, en particulier dans le cas d'une contradiction avec la contingence, par exemple en distinguant des objets que l'on avait confondus ou en supprimant des conditions que l'on avait admises sans nécessité ou par d'autres moyens. Si un nouveau modèle lève la contradiction, alors on sait que celle-ci résultait d'une mauvaise approche. On dira alors que l'approche précédente était paradoxale parce qu'elle faisait apparaître une contradiction qui a pu être levée.

Par extension on dira « paradoxales » des approches qui tendent à faire apparaître la contingence comme paradoxale parce qu'on postule implicitement que la contingence n'est pas contradictoire et que le monde est intelligible.

En théorie des situations les paradoxes « fondamentaux » montrent que les modèles naïfs « statiques » ne résolvent pas le problème théorique de décrire l'acte d'enseigner et la nécessité de développer en une théorie originale, des instruments d'analyse qui fassent leur place aux composantes dialectiques, historiques et d'intentionnalité des situations.

2 . La théorie des situations est une théorie des régulations (à plus d'un titre). (Q 2)

Dans la théorie des situations non didactiques isolées (comportements stables) ou à usages didactiques (apprentissage) : A partir d'une connaissance (fournie sous une forme quelconque) la T.S. se propose de construire un modèle des conditions qui justifient sa mise en œuvre, puis

son apparition comme moyen de résoudre un « problème » c'est-à-dire comme moyen de maintenir ou de rétablir des conditions acceptables par le sujet (rendues inconfortables par le problème). Ainsi en T.S., le sujet est un homéostat : le milieu détruit les équilibres et le sujet produit des actions pour rétablir ses équilibres fondamentaux. C'est vrai pour l'élève depuis l'approche behavioriste et surtout dans l'approche Piagétienne. C'est vrai aussi pour le professeur.

Les métaphores flatteuses (former, donner, montrer, etc.) qui représentent le professeur comme l'acteur principal mettent l'accent sur ses décisions a priori et sur ses actions en négligeant ses réactions à des indices pour maintenir certaines conditions.

Dans la théorie des situations didactiques (i.e. comprenant un acteur didactique), la plupart des interventions de l'enseignant sont plus faciles à interpréter comme des réactions. D'autre part, la plupart des décisions ne peuvent être fixées de façon définitive indépendamment d'une certaine « historicité » des déroulements, et la plupart des solutions localement acceptables deviennent des absurdités si on les systématise, la plupart des paramètres ne peuvent qu'être optimisés (les maximiser isolément provoque des erreurs grossières). Concrètement, le professeur « régule » un potentiel de motivations, de connaissances, etc. Il choisit des exercices pour modifier « un état de connaissances » (ou plutôt un rapport au savoir) des élèves et cherche en permanence un équilibre entre des conditions contraires.

Exemples : l'évaluation, les régulations internes (erreurs) ou externes (échecs) la régularisation de « l'hétérogénéité » des classes etc. Le sur et le sous apprentissage etc.

Renvoi au paragraphe suivant, à la thèse de Florence Genestoux (quand elle paraîtra) et au texte sur les stratégies du professeur (Cours de Montréal).

3 . Les erreurs et leur gestion, suivant la théorie des situations. (Q 3)

Pour décrire l'apparition, les effets, le rôle et le traitement des « erreurs » dans le système didactique, la T.S. propose un moyen d'analyse assez révélateur de sa méthode. Il s'agit d'abord de localiser le système dans lequel se produit l'erreur, celui dans lequel elle est repérée, celui dans lequel elle est « corrigée » etc. de façon à identifier ses causes, sa fonction, les répertoires où elle va se répercuter etc. Les questions dont nous allons esquisser l'étude sont très générales (du genre quel paradigme de réponses offriront les divers sous systèmes en présence suivant leurs répertoires ? Ou quels peuvent être les effets à long terme de certaines « gestions » des erreurs). Nous laisserons de côté ce qui est le plus important pour la didactique : l'analyse spécifique des erreurs attachées à chaque connaissance, et l'usage qui en est fait dans l'enseignement.

1. Comment un fait, apparu dans l'interaction d'un actant avec un certain milieu va-t-il être interprété comme « une erreur » ?

Pour qu'un fait soit reconnu (par un observateur) comme une erreur il faut :

- a) que ce fait soit identifié comme une production d'un sujet (action, ou message ou preuve etc.)
- b) que ce fait soit rapporté à un système de référence admis comme but (action) ou comme règle de production (langage) ou comme justification (validation)
- c) que le système de référence produise un fait, la « norme », contraire ou incompatible avec le fait relevé (« bonne » décision, « bonne » formulation etc).

Pour que cette erreur soit identifiée par un des acteurs du système, il faut que le fait identifié comme une erreur soit « de conséquence » pour l'action en cours, c'est à dire que la différence entre le fait et sa norme soit

- a) pertinente pour l'action en cours (elle intervient dans une décision ou dans une évolution du milieu)
- b) qu'elle rende la décision ou l'évolution inadéquate (impropre, trop coûteuse etc.) à l'action de celui qui porte le jugement d'erreur.

Par exemple, il se peut qu'une réponse des élèves apparaisse à ces élèves comme correcte (« conforme » à leur répertoire « effectif »), mais qu'elle soit déclarée comme une erreur (de mathématiques par ex.) par le professeur, en référence au répertoire de connaissances qu'il vise pour sa classe, (il lui reste à modifier le répertoire des élèves pour leur faire interpréter ce fait comme une erreur). Et ceci bien que peut-être, formellement, il existe une théorie mathématique où même une conception dans laquelle cette réponse serait tenue pour vraie. D'autre part, il arrive que cette erreur des élèves ait été prévue comme un résultat possible de l'exercice et même que le professeur ait souhaité qu'elle se produise parce que sa correction fait partie de l'apprentissage et de l'enseignement en cours. Alors cette erreur des élèves n'est un « accident » que pour eux, c'est un fait nécessaire à l'activité du professeur, partie intégrante du déroulement de sa leçon. L'étude peut être poursuivie ainsi pour déployer toutes les significations d'une erreur et tous les types d'erreurs.

Il faut donc rapporter les “ erreurs ” aux systèmes et aux situations dans lesquelles elles devront être traitées. La T.S. montrera son intérêt si cette affectation permet une meilleure compréhension, une meilleure gestion des erreurs et une meilleure prédiction des effets du couple erreur/réponse du système à long terme.

On peut trouver de nombreux exemples d'erreurs relatives de ce genre à l'école élémentaire. Une solution (vraie) trouvée “ par hasard ” (à la devinette dira le professeur) sera rejetée comme une erreur (par rapport au projet didactique) alors que la recherche par étude exhaustive de tous les cas (ou par exhaustion) ou même l'exhibition de la solution seront ailleurs saluées comme des réussites légitimes...

2. L'hyposystème : erreurs/situation/répertoire d'identification/répertoire de traitement.

La détermination de ces systèmes peut se faire indépendamment par l'observation et par la modélisation a priori. Cette analyse peut fournir des questions, des explications et des moyens didactiques d'intervention. Les études d'erreurs qui ne les replacent pas dans leur contexte et leur fonctionnement dans les situations didactiques, conduisent généralement à des décisions didactiques fausses.

Exemples d'études d'erreurs et de leurs traitements :

- Dans quels types de situations non didactiques ou didactiques les erreurs jouent elles un rôle négatif, positif ? sont elles « nécessaires » ? l'apprentissage par essais et erreurs est-il avantageux ? toujours ?
- Les erreurs dans l'émergence d'un théorème implicite (qui dira vingt ?) où on montre que seuls apprennent les élèves qui ont fait certaines erreurs (d'où l'usage des contre exemples). Certaines erreurs sont produites par des connaissances, lesquelles sont l'indice d'un obstacle épistémologique ? Pourquoi en situation non didactique, les premières reproductions d'un « algorithme » produisent-elles plus d'erreurs que sa production première ? Quels sont les répertoires d'erreurs diagnostiquées par les

professeur (DEA de Nadine Milhaud), Pourquoi sont-ils ajustés sur les types d'interventions ? Pourquoi un professeur ne peut pas faire usage, dans sa réponse publique à ses élèves, d'une explication « scientifique » des erreurs qu'il perçoit ?

- Toute activité qui donne à l'élève l'occasion de faire des erreurs produit de l'hétérogénéité dans la classe. Toute « correction » est supposée rétablir l'homogénéité par rapport à la question posée, sous quelles conditions ?
- Quelles sont les erreurs qui vont pouvoir être traitées dans l'action didactique, et par conséquent oubliées ? Quelles sont celles qui vont devoir être régulées à l'extérieur du processus normal et qui vont donc constituer des échecs ? Quelle différence y a-t-il entre le traitement des erreurs (régulation interne au système) et celui des échecs qui appellent des régulations externes.
- Le système didactique et la noosphère peuvent-ils oublier ou négliger le fait qu'avec certaines connaissances « intermédiaires », certaines erreurs sont inévitables, qu'il est impossible d'enseigner directement une connaissance achevée qui assure une fiabilité absolue, et que tenter cette gageure est presque toujours inefficace.

Exemple d'erreur didactique dans le traitement des erreurs des élèves : l'usage inapproprié des évaluations par les administrations d'enseignement

- Cette erreur nous a conduit à la sous évaluation des résultats utilisables par les élèves (redoublements inutiles), à un jugement trop sévère sur les projets d'enseignement (trouvés toujours trop difficiles), à la baisse des ambitions didactique et à la baisse du niveau des élèves. Cf. ma communication/prévision à la rencontre interaméricaine de l'ICMI à Campinas (1975) et les explications détaillées données au congrès de Budapest (1988) par J. Centeno et moi.
- Pour résumer, cette évaluation externe des élèves est basée sur leurs erreurs (jamais on ne « peut » prendre en compte les indices de connaissances ou de savoir, surtout ceux qui dépendent des conditions « historiques » dans lesquelles ils prennent naissance). Elle dénie la transposition didactique et ignore le rôle des connaissances dans l'activation et l'apprentissage des savoirs. Ainsi, elle laisse entendre que la totalité des résultats de l'enseignement se situe dans la mémoire des élèves (selon ce modèle les professeurs n'auraient pas à modifier leur enseignement au cours de l'apprentissage). Or, les élèves développent des connaissances non observables avec les tests et les professeurs ne savent pas « gérer » les objectifs de haut niveau taxonomique.

Nous arrêterons là l'étude générale de ce problème très important car la réponse est déjà trop longue, et c'est une erreur !

4 . Situation fondamentale et reproductibilité,(Q 4) Usages didactiques (Q 11)

a) Toute situation « s » mobilise des connaissances comme éléments préalables pour « poser le problème » ou pour envisager la stratégie de base (indispensable pour comprendre la question) mais elle est « fondamentale » pour une certaine connaissance qui commande la mise en œuvre et le contrôle de la stratégie optimale, désignons la par « c » La connaissance de cette situation permet de déterminer les variables cognitives V_i et leurs bornes, donc, le domaine de

cette connaissance $D(s, c)$, (qui est $\Pi [Vi]$). Au delà de ces bornes, d'autres connaissances deviennent solutions optimales de s .

Par conséquent la situation « s » établit des « proximités » entre connaissances (co-présence dans le milieu, complémentarité ou substituabilité dans les solutions, modélisation, reformulation, ou preuve dans la compréhension ou l'explication, succession temporelle, etc.

Certains des rapprochements ainsi réalisés par les situations rencontrées produisent chez les élèves des agrégations de connaissances et donc des connaissances nouvelles. Une partie seulement de ces agrégations présente un intérêt mathématique cognitif ou didactique.

b) Les connaissances données comme fondamentales par la culture sont souvent des agrégats de connaissances plus élémentaires, liées par un tissu serré de relations logiques, mathématiques et didactiques (qui évolue avec le temps). Elles sont le moyen le plus économique pour représenter, communiquer, déduire ou apprendre sous une forme générale un ensemble exhaustif de connaissances particulières ou de cas d'espèces.

Considérons une connaissance fondamentale C pour la connaissance c .

Propriété 1 : Alors si le domaine $D(s, c)$ engendré par les variables cognitives (et didactiques) de s , contient toutes les situations (tous les exercices) relatives à cette connaissance C , alors s est une situation fondamentale de C . Est-elle unique ?

c) Mais il n'est pas sûr qu'une situation « correspondant » à une connaissance fondamentale engendre (par ses variables cognitives) toutes les situations des connaissances « élémentaires » agrégées dans la connaissance fondamentale. Autrement dit, les procédés d'agrégation « logique » des connaissances ne coïncident pas avec les « lois » d'agrégation résultant de la fréquentation des situations. Les causes de la connaissance ou de l'apprentissage d'une notion ne coïncident pas avec les raisons de la « savoir », c'est-à-dire de la déduire de sa place dans la culture.

Ainsi s'impose d'abord la recherche d'une situation qui représente au mieux les différents usages d'un concept fondamental et le milieu où il prend son sens. Cette situation « fondamentale » a des chances de permettre la construction d'un milieu riche en liaisons pertinentes relative au concept visé. Quand on la trouve il arrive qu'elle réalise la propriété 1 ci-dessus.

Un usage primitif de la T.S. a consisté à développer les différentes situations qui représentent les diverses formes, usages et conditions d'acquisition d'une même connaissance, dans un ordre déterminé (s . action $\rightarrow$ modèle implicite/connaissance ; s . formulation $\rightarrow$ message/langage, s . preuve $\rightarrow$ démonstration/théorie)

d) Ensuite, dans la mesure où une telle situation ne peut être investie d'emblée par un sujet, il s'agit d'identifier une situation première qui entamera le processus de « construction progressive » de la connaissance et du savoir visé. Cette dernière situation sera dite aussi « fondamentale » pour ce concept (ou plus exactement pour une certaine genèse de ce concept. Dans ce sens les situations « fondamentales » ne sont ni plus ni moins reproductibles que les autres.

e) En quel sens un enseignant peut-il utiliser la notion de situation fondamentale ? (Q 11)

Sûrement pas comme savoir à enseigner !

Pour maintenir la dialectique au cours d'une genèse didactique

Pour faire dévolution d'un projet d'apprentissage. Etc.

Quelques exemples :

L'intérêt et les dangers des problèmes types, ou de l'apprentissage par analogie.

5 . Quelle est la distinction entre « connaissances » et « savoirs » (Q 10)

La T.S. assume qu'il n'est pas possible de confondre les connaissances dans leurs fonctions de moyens de décision, (outils) et les connaissances comme objets de l'action des institutions qui les identifient, les répertorient ou les justifient (objets) et que nous appellerons « savoirs » . La « conversion » (?) des connaissances en savoirs peut prendre des siècles à l'humanité et les élèves, comme tout individu isolé, ne peuvent pas le faire (sinon par réification et imitation). Inversement la « conversion » des savoirs en moyens d'action (l'application ?) n'a rien d'évident.

La forme la plus pratique des connaissances est la forme *procédurale* et la forme la plus « commode » des savoirs est *déclarative*, mais les deux formes existent dans les deux types de situations (de sorte que les termes connaissances et savoirs ne se traduisent pas exactement par know how -comment faire- et par knowledge -savoir-). De même les relations entre les connaissances sont souvent d'ordre causal, les relations entre les savoirs sont de l'ordre de la raison. Les deux notions sont évidemment loin de coïncider.

Remarquons que les situations d'action révèlent (chez le sujet) des connaissances qui peuvent être aussi bien des connaissances non repérables par le sujet en termes de savoir que des connaissances converties de façon consciente à partir de savoirs parfaitement explicitables par le sujet.

En français et dans les langues latines, les termes « connaissances » et « savoir » bien que parfois synonymes, distinguent bien des sens voisins de ceux introduits ci-dessus.

6 . La distinction entre contrat pédagogique et contrat didactique (Q 5)

Renvoi pour le premier terme à l'ouvrage de Jeannine Filloux « le contrat pédagogique ». Il s'agit bien pour elle de préciser ce que la société, les parents, les élèves et les professeurs peuvent attendre les uns des autres, ainsi que les cadres éthiques, psychologiques et presque juridiques, de cette véritable partie du « contrat social ».

En ce qui concerne le « contrat didactique » une petite note historique s'impose, mais disons tout de suite que le contrat didactique n'est pas un contrat effectif (pas de conditions explicites ni même explicitables et connues des acteurs, pas de clauses de rupture ni de sanctions véritables), il collecte bien les attentes des partenaires et l'idée que chacun se fait des attentes de l'autre etc. mais il ne « fonctionne pas ». Il est condamné à être rompu et c'est au moment de la rupture que tout se passe comme s'il y avait eu un contrat... qui n'a jamais été passé.

Mes premiers travaux portaient sur la modélisation des situations (projetées ou créées par le professeur) à usage didactique. Une situation « didactique » était alors une généralisation d'un problème pour enseigner. Celles qui m'intéressaient étaient celles où le professeur n'avait pas besoin d'enseigner directement l'objet de son enseignement ni même de le montrer. Il se

contentait de « communiquer » l'énoncé et le but dans les termes déjà connus des élèves. Les interventions didactiques étaient des palliatifs à une situation didactique « insuffisante ».

Pour modéliser l'action du professeur j'ai commencé par espérer que ses interactions avec son « milieu » (l'élève et sa situation didactique au sens premier) étaient du même type que celles de l'élève (ou de toute personne) avec son propre milieu. Hélas j'ai dû déchanter : la relation didactique requiert des modèles différents spécifiques. Je ne pouvais pas faire entrer la relation didactique du professeur dans ma théorie des situations à usages didactiques, ni étendre l'adjectif didactique d'un objet qui sert à enseigner à une situation d'enseignement (encore que la situation comme « environnement » et l'action directe du professeur servent bien elles aussi).

Les caractéristiques qui m'apparurent les plus remarquables pour la relation didactique, décrite à l'aide des modèles de situation étaient les paradoxes que soulevaient les ambitions sociales des partenaires (paradoxes fondamentaux). J'entrepris donc alors l'étude de ce leurre qu'était le « contrat didactique ».

Il s'est avéré que l'étude du contrat didactique était exactement celle d'une situation dans laquelle s'exprime un système doué d'intention didactique, c'est-à-dire une situation didactique au sens actuel. Il a fallu replacer les situations précédemment explorées dans ce nouveau décor : situation non didactique (modèle), situation a didactique (contingence) car l'écart tient un rôle important dans l'analyse.

7 . Sur le transfert (Q 6)

Le transfert est un concept (assez grossier) utilisé par certains psychologues pour représenter ce qui se passe lorsqu'un sujet qui a appris une connaissance dans des circonstances précises, mobilise à nouveau ces connaissances dans des circonstances entièrement nouvelles pour lui... Il fait un transfert ! mais rien dans ce concept n'indique à quelles conditions. Les raisons que les observateurs ont de trouver la même connaissance utile dans les deux cas seraient elles les mêmes pour l'élève ? Merveilleuse féerie de l'empirisme : le monde y apparaît comme naturellement intelligible de façon univoque ! Pour moi, c'est une illusion que de vouloir l'importer en didactique. Seule la connaissance précise des situations peut dire s'il y a des raisons ou non d'observer l'usage spontané d'un même schème d'action, s'il y a des raisons pour l'identifier avec les mêmes instruments culturels etc. Inversement, il faut déterminer la cause et la signification pour le sujet de l'usage d'un même concept ou d'une même connaissance.

8 . Raisonnements arithmétiques qui ont disparu quand l'algèbre a « supplanté » l'arithmétique. (Q 7)

Bien connus,

- La disparition des distinctions entre nombres concrets (vecteurs dans une EV ou dans un module) et nombres abstraits (scalaires ou coefficients) et les marques de cette distinction : l'indication des unités et le traitement formel du nom des unités.
- Le raisonnement par fausse position avec une correction par récurrence finie pour les « partages inégaux » additifs auquel on substitue un petit graphe.

- Les raisonnements pour les partages inégaux à parts multiples (calculs sur l'arithme)
 - Le raisonnement par fausse position
 - Les « échanges », les substitutions et les raisonnements par fausse position pour résoudre différents types de systèmes de deux ou plus équations du premier degré. Les « règles de trois » multiples.
 - Les raisonnements arithmétiques pour résoudre les problèmes de barycentre tels que les problèmes de mélange ou d'alliages.
 - L'usage des pourcentages et des valeurs pour donner un allure de nombre naturel aux coefficients...
 - La pratique de problèmes où apparaît un grand nombre de variables liées par des relations simples : linéaires ou affines, les problèmes d'inversion arithmétique de formules affines
 - Etc.
- Voir la thèse de Dominique Woillez quand elle paraîtra.

9 . Proportionnalité et fonction linéaire. (Q 8)

Proportion de nombres

La proportionnalité est à l'origine une propriété qui caractérise certains arrangements de **quatre** nombres (a, b, c, d) pris dans cet ordre. Ce quadruplet est accompagné d'un vocabulaire spécifique pour les couples qui y figurent : les extrêmes sont a et d, les moyens sont b et c, les antécédents sont a et b et les conséquents c et d. Les antécédents et les conséquents expriment des « rapports ».

La proportionnalité s'exprime par une expression « a est à b comme c est à d » qui laisse au destinataire le soin de déterminer ce que a est à b ou plus exactement quelle « opération » fait passer de a à b, la même faisant passer de c à d.

La proportion est arithmétique dans (7, 4, 11, 8). Les rapports égaux (7 ; 4) et (11 ; 8) sont des rapports arithmétiques. Nous traduirions ceci aujourd'hui par $a-b = c-d$ ou par « la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens »

La proportion est géométrique dans (7, 4, 14, 8) et plus généralement quand $a/b = c/d$, autrement dit quand le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Elle est inverse dans (7, 4, 8, 14), c'est à dire lorsque $a/b = d/c$

Elle pourrait être harmonique etc.

Cette « généralisation » permet de mettre en évidence des similitudes entre les opérations « + » et « x » et entre les opérations « - » et « : » et de formuler des théorèmes « généraux » sur les proportions.

On peut considérer par exemple des « proportions continues » c'est-à-dire telles que (a, b, b, c) puis (b, c, c, e) etc. qui engendrent de la même façon, soit une suite géométrique, soit une suite arithmétique ou une suite harmonique selon le type de rapports considérés.

Variables proportionnelles

La proportionnalité est le moyen primitif d'étude des “ fonctions mathématiques ” au sens de relations entre des variables.

La fonction « la plus simple » est celle ou tout quadruplet déterminé par deux objets et leurs images forme une proportion : (a, f(a), b, f(b)) ou bien (a,b, f(a), f(b)). Elle exprime :

- que tout rapport est conservé (Le quadruplet est nécessaire pour exprimer les rapports rationnels avec des entiers
- ou encore que le rapport entre un objet et son image est constant (la rapport suffit dans tous les cas « concrets », si on peut utiliser les rapports rationnels.

On exprime cette propriété en disant que les variables (ou même que les grandeurs que ces variables représentent) sont « proportionnelles ».

On obtiendrait ainsi les translations ($f(x) = x + a$) et les homothéties ($f(x) = a.x$) numériques mais, à l'usage, seules les homothéties permettront d'attribuer aux variables en présence le qualificatif de proportionnelles.

Ainsi la proportionnalité est devenue une relation entre deux variables, ou entre deux suites, ou deux grandeurs ou même deux ensembles de vecteurs (colinéaires toutefois). C'est donc à ce moment une propriété qui caractérise un couple de variables.

Linéarité

Une fonction f est linéaire si $f(u + v) = f(u) + f(v)$ et si $f(\lambda.u) = \lambda f(u)$ (dans un espace vectoriel)

Une homothétie numérique est un cas particulier d'application linéaire car

$\{\forall(a, b) \text{ de } \mathbb{R}^2, b \text{ non nul}, a/b = f(a)/f(b)\}$ équivaut à $\{\{\forall(a, b), b \text{ non nul}, f(a)/a = f(b)/b = k\}$ et donc à $\forall a, \text{ de } \mathbb{R}, f(a) = k.a$

Alors, $f(a+b) = k.(a + b)$ et d'après la distributivité de « . » sur « + » $f(a+b) = k.a + k.b$

D'où la conclusion.

Remarquez bien que la *fonction est linéaire* quand les *variables sont proportionnelles* (et que la distributivité est réalisée), que la fonction est déterminée par un coefficient, la proportion par l'égalité de deux rapports. Les rapports numériques et les coefficients sont accompagnés de « rapports de dimensions » qui suivent les mêmes règles, mais les produits en croix changent pour chaque couple et en général, n'ont pas de signification matérielle.

Fonctions (et fonctions de la linéarité)

Mais les proportions permettent de construire d'autres fonctions :

La fonction affine (les différences entre les images sont proportionnelles aux différences entre les valeurs, ou les rapports entre les variations sont conservés)

Les fonctions quadratiques, homographiques, exponentielles etc. peuvent ainsi être introduites par une proportionnalité entre certains éléments. Cette construction gardait la trace de l'époque où la seule « fonction » concevable était la fonction linéaire, les autres fonctions devant se détacher d'elle et se définir par elle.

Tableaux de proportionnalité

Si deux variables sont proportionnelles à une même troisième, elles sont proportionnelles entre elles. Si A est proportionnelle à B et si B est proportionnelle à C alors A est proportionnelle à C (La composée de deux fonctions linéaires est une fonction linéaire) etc.

Ces propriétés permettent de regrouper plusieurs fonctions linéaires d'un même ensemble en un tableau unique de nombres, que l'on peut traiter avec des techniques homogènes.

En fait, ce genre de tableau peut représenter aussi bien des fonctions numérique que des fonctions « vectorielles ». Exemple, les quantités de produits permettant de faire un gâteau pour divers nombres de personnes peuvent constituer un vecteur image sur lequel le langage de la proportionnalité fonctionne. Mais il n'en est pas de même si on considère les quantités d'un

certain produit comme l'ensemble de départ et les autres valeurs comme les images (elles ne forment pas facilement un vecteur). D'autre part, les lignes et les colonnes du tableau peuvent être interverties pour les calculs, mais pas pour l'interprétation. Si les colonnes sont des variables et les lignes des valeurs, une ligne n'est pas une variable. Cette distinction s'efface dans l'usage routinier des tableaux.

Quelques difficultés de « passage ».

Les difficultés sont nombreuses. Les causes aussi. Elles viennent entre autres de ce que l'usage vernaculaire des termes « proportions » et « proportionnel » est très relâché (proportions = rapports par ex.) et qu'il est spécialisé dans certaines structures numériques (entiers) ce qui le rend « incohérent » dans d'autres, surtout depuis que la théorie des rapports et proportions n'est plus au programme des collèges.

Le même vocabulaire caractérise deux nombres (proportion improprement utilisée comme synonyme de « l'un est multiple entier de l'autre »), trois nombres (pour la recherche d'un terme, dans la règle de trois), quatre nombres (une proportion), deux variables, une fonction, deux suite de nombres, chaque fois avec un sens différent etc.

Les distinctions anciennes ne correspondent plus aux nouveaux usages. Il ne s'agit pas de maintenir en survie des « théories » obsolètes, mais ces nouveaux usages ne permettent pas la manipulation formelle des éléments de sens nécessaires (distinctions entre valeur et variable, scalaire et grandeur etc.) au cours de l'apprentissage.

Il ne s'agit pas non plus d'enseigner à tout prix la « proportionnalité » à l'ancienne puis de « passer » à l'algèbre, mais de fabriquer un environnement de connaissances, de techniques, de technologies et de théories pour traiter correctement ce que l'algèbre laissait à la charge des élèves et qui autrefois était fourni par la connaissance de l'arithmétique. Il n'y a aucun avantage à restaurer les problèmes de robinets, d'alliages ou de trains qui se croisent comme on peut le voir parfois aujourd'hui en troisième mais il faut donner aux élèves un moyen de traiter la mise en équation et la manipulation algébrique appropriée aux problèmes de la vie courante et des sciences appliquées et ne pas uniquement viser les mathématiques pour les mathématiques.

On peut introduire une certaine transposition de l'algèbre dans les classes élémentaires et le faire de façon intelligente et utile, mais, il faut payer le prix : il faut effectuer certaines recherches pour prévoir les difficultés, non seulement des élèves mais aussi celles de l'adaptation des enseignants, et celle des institutions (la didactique de l'adaptation didactique de l'institution), concevoir sur un terme assez long un projet de production de moyens d'enseignement et de formation des professeurs et n'introduire les réformes qu'à mesure de leur possibilité de « contrôle » (il faut d'abord que les mathématiciens qui daignent s'intéresser à la formation et à l'enseignement, et les IPR à qui le gouvernement vient de confier la responsabilité sur l'ensemble des niveaux d'enseignement, consentent à renoncer à leur croisade de conquête des lieux saints et au génocide des malheureux chercheurs en didactique). Pour les suggestions voir la thèse d'Eugène Comin quand elle paraîtra.

Au XVIII^e siècle les proportions... (Q 9)

Le traitement oral ou écrit mais non formalisé des problèmes de proportionnalité est à peu près établi. Nous avons signalé tout ce qui repose sur la position des nombres. Il y a là la première ébauche de « lois » communes à diverses « structures » (une sorte de semi groupe ou

de semi anneau). Cette analyse est porteuse de nombreuses notions encore à l'étude comme nous l'avons signalé.

Or l'algèbre banalise les transformations des proportions en les généralisant et donc rend inutile toute la construction linguistique qui supporte l'usage des proportions.

$a/b = c/d$ est équivalent à $c/d = a/b$ sans qu'il soit besoin de remarquer que les antécédents peuvent permuter avec les conséquents, $a.d = b.c$ est obtenu par des opérations élémentaires de l'algèbre.

Pour éviter que l'algèbre détruise l'édifice, il faut lui donner un environnement formel spécifique qui traduise les formules orales et ne se laisse manipuler que selon les règles de la théorie des rapports et des proportions.

On écrit donc $a/b = c/d$ sous la forme $a : b :: c : d$

Certains ont voulu distinguer (avec des nombres de points différents) les proportions arithmétiques des géométriques mais cela va contre l'idée d'un même objet commun et de toute façon l'entreprise fera bientôt long feu.

Guy Brousseau

