RAPPORTS ENTRE RAISONNEMENT ARITHMÉTIQUE ET UTILISATION DE L'ALGÈBRE EN QUATRIÈME :
Etude du cas d'un élève prénommé Simon.

Dominique Woillez

LADIST - Bordeaux

L'atelier présente l'analyse du comportement d'un élève de quatrième sur un problème de transcription algébrique. Selon la théorie des situations, cette analyse implique celle de la situation (et éventuellement celle du milieu), à laquelle cet élève est confronté.

Dans une première partie nous étudierons le comportement de Simon dont nous proposerons une interprétation que nous justifierons à l'aide d'un modèle. Puis dans une seconde partie nous montrerons l'analyse a priori de la situation que nous voulions créer. Enfin, dans une troisième partie nous décrirons et commenterons la situation effectivement réalisée.

PARTIE I

I.1. Les faits

Des élèves d'une classe de 4° ont appliqué le programme de calcul suivant : « réduire de 10%, augmenter le résultat obtenu de 20% » à des nombres simples. La consigne est : Proposez une expression algébrique de ce programme.

Transcription de la séquence vidéo.

Au tableau sont accrochées des affiches écrites par les élèves. Sur ces affiches figurent des programmes de réductions et d'augmentations appliquées au nombre cent.

Affiche du programme A :

$$100-100\times\frac{10}{100}=90 \quad (-10\%)$$

$$90+90\times\frac{20}{100}=108 \quad (+20\%)$$

Au nombre 100, le réduire de 10%

Augmenter le résultat obtenu de 20%

1. Simon : madame, on a le A.
2. P : Ah! j'écoute ...
3. Simon (en dictant): ça fait x moins x fois zéro virgule un, plus x moins x fois zéro virgule un, plus x moins (sic) x fois zéro virgule deux.

   Le professeur écrit sous le programme A au fur et à mesure que Simon dicte : « $x-x\times 0{,}1+$ $x\times x$ » et perd le fil.
4. P: tu recommences parce que...

   Simon recommence sa dictée.

Le professeur écrit cette fois au tableau « x-x×0,1+ x-x×0,1»

5. P: alors x moins x fois zéro virgule un plus la même chose ?
6. Simon : oui..
7. P: ensuite ?
8. Simon : plus x moins x fois zéro virgule deux.

Le professeur écrit. Au tableau figure maintenant : « x-x×0,1+ x-x×0,1+ x - x × 0,2»

9. P: C'est l'écriture du programme A ? Est-ce que tu peux m'expliquer pourquoi ?
10. Simon : parce que le premier x moins x fois zéro virgule un c'est réduire de dix pour cent ... *(Le professeur écrit sous x-x×0,1, réduire de 10%)* ... et après c'est notre nombre obtenu, c'est notre x moins dix pour cent qu'on va calculer avec x moins x fois zéro virgule deux.
11. P: donc, tu reprends ce nombre là *(en montrant x-x×0,1)* et c'est ce que tu écris ici *(en montrant l'expression algébrique complète).* Mais tu as écris une somme !
12. Simon : ouais! En fait on pourrait le faire en deux étapes, si on mettait le nombre réduit de dix pour cent égal à y par exemple et on fait y plus y multiplié par zéro virgule deux.

Le professeur écrit au tableau « x-x×0,1= y et y + y × 0,2 » et dit :

13. P : il appelle le premier résultat y et c'est ce y qu'il va changer maintenant. Voici l'expression du premier programme.
14. Simon: mais c'était juste ce que j'avais dit tout à l'heure !
15. P: non, parce que tu les additionnais. Est-ce que là on additionne les résultats ?
16. Simon : non

Fin de la transcription.

Le professeur en proposant le programme, attendait de ses élèves d'abord l'écriture :

« (1-0,1)x » [resp.0,9x] pour « réduire de 10% », qui avait été travaillé un mois auparavant, puis, soit « 0,9x + 0,2×(0,9x) », soit « 1,2×(0,9x) » pour le programme complet. La proposition de Simon la surprend donc, elle ne la comprend pas (lignes 4 à 9) et doit lui demander de recommencer.

I.2. Interprétation du comportement de Simon

Dans une première tentative, pour exprimer le programme, Simon propose l'expression: « $x - x \times 0{,}1 + x - x \times 0{,}1 + x - x \times 0{,}2$ ».

1. La réduction de 10% est transcrite par « x−x×0,1 », et non par 0,9x qui a pourtant été étudiée en classe; cette formulation est très proche des calculs sur les nombres effectués auparavant.

Une transcription encore plus proche des calculs, qui en conserve parfaitement l'ordre, serait l'expression incorrecte « x×0,1−x ». Cette formulation est effectivement proposée par d'autres élèves de la classe (non transcrit ici).

2. On note aussi que l'opération de multiplication est dictée contrairement aux usages algébriques (lignes 3, 5 et 8).

3. Simon reprend volontairement le même nombre pour la seconde partie du programme, c'est la raison pour laquelle « x−x×0,1 » est répété: « et après c'est notre nombre obtenu, c'est notre x moins dix pour cent qu'on va calculer » (ligne 10).

4. La substitution est rendue ici par la somme. La composition des applications verbalement exprimée par « et après », traduite algébriquement par la substitution, est ici formulée par une addition .

Nous rapprochons ce comportement, d'un autre bien connu qui consiste à se servir du symbole d'égalité comme connecteur d'une suite d'opérations.(exemple : 3+4=7+2=9-1=8 pour le calcul de 3+4+2-1). Ici, de la même façon, l'addition sert de relais entre plusieurs opérations. Je réduis de 10% : « x−x×0,1 », « et après c'est notre nombre obtenu »: « x−x×0,1 + x−x×0,1 », « qu'on va calculer avec x moins x fois zéro virgule deux » : « $x-x\times 0{,}1+x-x\times 0{,}1+x-x\times 0{,}2$ ». Nous formulons l'hypothèse que ce comportement est typique de la pensée arithmétique se manifestant en algèbre.

Pour repérer plus précisément ce que sont les problèmes d'arithmétique élémentaire et les méthodes de résolution et parallèlement ce que sont les problèmes d'algèbre élémentaire et leurs méthodes de résolution, nous avions élaboré deux modèles. En effet, les mathématiques ne répondent pas à cette question, et le découpage traditionnel des classes de problèmes est insuffisant pour les caractériser.

I.3. Les modèles

1) Les règles d'une résolution arithmétique élémentaire

Le traitement arithmétique des problèmes peut être modélisé de la façon suivante :

Les valeurs initiales

- Les données sont des nombres positifs appartenant à N^+, D^+ ou Q^+.
- Ces nombres sont soit des scalaires nommés (éléments du corps de base ou rapports d'homothétie), soit des mesures.

Les valeurs calculées

- La solution est la production d'un ou plusieurs nombres, scalaire (taux, échelle, rapport de grandeur...) ou une mesure de grandeur (un couple (nombre, unité)).
- Ce nombre est annoncé par une expression en langue naturelle indépendamment du calcul.

Le passage des valeurs initiales aux valeurs calculées se fait en une suite finie et ordonnée de calculs.

- Ces calculs se font à partir des nombres de l'énoncé, de nombres supposés par le résolveur, des nombres déjà calculés (d'où l'ordre des calculs).
- Ces calculs se font à l'aide de l'une des quatre opérations simples : addition, soustraction, multiplication, division.
- Ces calculs se font sur deux nombres
- Chaque résultat est annoncé en langue naturelle dans les termes de l'énoncé.
- Les résultats intermédiaires sont des nombres de N^+, D^+ ou Q^+ en termes de mesures ou bien de scalaires bien repérés et étiquetés (taux, pourcentage, ...)
- Les fonctions en présence sont des fonctions linéaires ou affines (la distinction étant pertinente)

Dans l'arithmétique élémentaire sont traités implicitement : les relations et les fonctions (conservation des rapports, proportionnalité), des raisons du choix d'un nombre (fausse supposition), l'ordre des calculs, le raisonnement.
En revanche sont l'objet d'un traitement explicite : les nombres, les unités de mesure, les opérations, les formules arithmétiques, les algorithmes (opérations, règles de trois ou fausse supposition, croix des mélanges)

Enfin, formellement, le répertoire est la langue naturelle, les symboles (=, +, -, ×, :) importés de l'algèbre comme abréviations et les algorithmes (croix de St André, règle de trois) ont une forme stéréotypée.

2) Les règles d'une résolution algébrique élémentaire

Parallèlement, le raisonnement algébrique peut se modéliser :

<u>Données initiales</u>

- Les données comportent des relations (égalités ou inégalités) explicites ou non entre termes.
- Les données sont des variables et/ou des constantes.
- Les constantes sont des nombres appartenant à Z, D, Q ou R.
- Les variables prennent leurs valeurs dans les ensembles cités précédemment.

<u>Etat final</u>

- On demande une ou des égalités (inégalités) entre nombres et variables ou entre termes.

<u>Le passage de l'état initial à l'état final se fait en une suite ordonnée d'égalités (d'inégalités) entre termes.</u>

- Les termes sont formés suivant les règles des prédicats du premier ordre.
- Un terme peut être transformé en un terme égal soit en calculant sur les constantes, soit en utilisant les propriétés des opérations (structure d'algèbre). Ces propriétés ne sont pas énoncées dans la pratique.
- On peut substituer dans un théorème un terme par un terme égal localement ou non.
- Les égalités (inégalités) sont soit données, soit établies à partir des données.
- Le passage d'une formule à une autre se fait par la même opération licite appliquée aux deux termes ou bien par utilisation d'un théorème que l'on énonce.
- Les fonctions en présence sont soit des fonctions linéaires ou affines (la distinction est pertinente) ou leurs inverses, soit des fonctions quadratiques ou leurs inverses (ensemble des fractions rationnelles).

En algèbre élémentaire le choix des inconnues, les quantificateurs seront traité de manière implicite et l'écriture des termes, la transformation des termes et les relations entre termes seront explicites.

Le répertoire est la langue naturelle et celui d'un langage du premier ordre.

Nous allons maintenant tenter de montrer comment le comportement des élèves dans ce cas précis est conforme à la pensée arithmétique et pas encore à l'algèbre.

I.4. Justification

1) Les calculs et leur ordre sont respectés sauf pour « x–x×0,1 ».

L'erreur trouvée « x×0,1–x » respecte davantage l'ordre et puisque l'arithmétique ne s'occupe que de grandeurs (positives), la question du signe de « x×0,1–x » ne se pose pas.

2) La succession des opérations est rendue par l'addition qui sert de connecteur entre les différentes manipulations. Le résultat à produire est <u>une</u> expression algébrique (un terme) qui ne doit pas comporter de signe d'égalité, il lui faut relier les différents calculs entre eux, et le choix se porte sur l'addition interprétation traditionnelle de « et ».

2) Comme le calcul arithmétique ne se fait que sur des constantes, la substitution d'un terme non calculé à un autre n'existe pas en arithmétique, c'est en revanche une caractéristique algébrique. Simon montre qu'il peut le faire dans « x–x×0,1 », il l'a appris, mais cette capacité à effectuer les emboîtements est limitée. Des contraintes ergonomiques l'empêche de la faire. C'est pourquoi, il propose dans une seconde tentative : $\begin{matrix} x - x \times 0{,}1 = y \\ y + y \times 0{,}2 \end{matrix}$ qui consiste en <u>deux</u> écritures. Il sait la technique de nommer les termes et n'a pas les moyens de différencier la deuxième écriture de la première (ligne 14 : « c'est la même chose »).

I.4. Conclusion

Ainsi la seule transcription algébrique de certaines suites de procédures arithmétiques fait apparaître que certaines des connaissances arithmétiques vont entrer en conflit avec des stratégies algébriques.

En effet la substitution d'un terme par un autre n'a pas d'existence en arithmétique et est traduite soit par l'addition comme ici, soit par l'égalité. Par ailleurs, même après enseignement, les élèves renoncent difficilement à certaines caractéristiques de leurs calculs arithmétiques comme le nombre de calculs (x-0,1×x au lieu de 0,9x), l'ordre de ces calculs (x×0,1–x), et la mise en évidence des opérations (×).

PARTIE II

Nous allons maintenant examiner les conditions que nous avons créées pour que Simon produise son message.

L'objectif de départ était de construire une situation qui exige la production d'une égalité comme message. Pour faire correspondre à une connaissance une situation appropriée, la théorie des situations propose une série de questions et de techniques : quelles fonctions distinctes doivent apparaître ? Qui doit dire quoi, à qui et dans quel but ?

II.1 Analyse a priori d'une équivalence

Soit une équivalence A≡B. La situation doit être résolue par la production du message « A≡B ». Il faut un émetteur E_1, un récepteur R_1 et une situation d'action S_1 où le renseignement « A≡B » est nécessaire.
« A » doit donc désigner un objet O_1 et « B » un objet O_2 et dans S_1, l'objet O_1 est remplaçable par l'objet O_2.
R_1 ne doit pas savoir que l'objet O_1 est remplaçable par l'objet O_2 et pourtant il doit pouvoir avoir un rapport avec ces deux objets, au moins à travers leurs noms. Et pour que les noms

« A » et « B » existent il faut qu'ils figurent dans des cultures différentes qui ne communiquent pas.
Donc il existe pour R_1 une situation de communication où un émetteur E_2 peut désigner O_2 pour un récepteur R_2 par « A », et un autre E_3 qui appelle O_2 par « B ».

Le déploiement précédent se réalise dans la classe de la façon suivante:

1.1. Un groupe d'élèves G_1 utilise O_1 et en parle en le nommant A pour agir sur un certain milieu.
1.2. Un groupe d'élèves G_2 ,distinct de G_1, utilise O_2 et en parle en le nommant B pour agir sur un certain milieu.
2.2. Un groupe d'élèves G_3 utilise O_1 ou O_2 indifféremment et doit connaître ou éprouver leur interchangeabilité dans certaines cas et pas dans d'autres.
2.3. Un groupe d'élèves G_4 distinct du groupe G_3 et qui a la même tâche que celle de G_3, ne peut expérimenter et demande au groupe G_3 s'il doit utiliser O_1 ou O_2 , le groupe C doit alors lui dire l'équivalence de A et B pour certains cas.
3. L'équivalence de A et B devra être prouvée et argumentée dans un débat.

II.2. Conséquences d'autres études

Par ailleurs une travail parallèle permet de prévoir des situations où l'arithmétique élémentaire est moins performante que l'algèbre tout en se limitant aux problèmes du premier degré.

L'une de ces situations est la somme ou la différence de l'application identique avec une application linéaire ($x \pm kx$). L'analyse fait apparaître les variables didactiques suivantes :

1) {donnée du coefficient k; donnée d'un couple (x_0, kx_0) }

2) {somme; différence}

3) {donnée de k et demande de l'application somme; donnée de l'application somme et demande de k}.

Une autre situation est la composition d'applications linéaires. Les variables didactiques sont alors:

1) Le mode de données de l'application linéaire comme au 2) précédent.

2) Le nombre d'applications linéaires à composer.

3) Pour deux applications linéaires: {données des deux applications et demande de l'application composée; donnée de l'application composée et d'une application et demande de la seconde}.

II.3- Motivations du choix de la situation:

1. L'étude précédente a permis de retenir : la composition de deux fonctions linéaires, et la somme de deux termes liés par une fonction linéaire. Ces deux lois de composition sont internes dans l'ensemble des applications linéaires.

2. Les fonctions linéaires sont vues ici comme programmes de calcul (premier usage de la lettre) et l'algèbre peut être à ce niveau un instrument de preuve. L'articulation algèbre arithmétique peut être repérée à cet endroit.

3. L'analyse a priori d'une situation d'un problème d'équivalence, les considérations précédentes et les programmes de 4° imposent les contraintes suivantes:

- il doit y avoir deux programmes distincts équivalents
- l'équivalence ne doit être ni sémantique, ni formelle

- l'équivalence doit être suffisamment problématique

4. Parmi les équivalences de a) structures de problèmes, b) de formules c) de termes, nous avons choisi une équivalence de termes qui nous paraissait le moins lourd (mais les autres restent à l'étude) au niveau 4°.

II.4- Le choix de la situation

La relation pourcentage de variation- application linéaire ayant été travaillée en classe, il a été choisi de faire travailler les élèves sur la composition de deux applications linéaires générées par des pourcentages de variation. Le résultat étant jugé suffisamment étrange et troublant pour les élèves.
Une autre piste non retenue a été la vitesse moyenne (jugée trop difficile).

II.5- Analyse du projet de leçon

Savoirs :
Enchaîner successivement deux variations données en pourcentage
Trouver le pourcentage relatif à l'application composée
Prouver qu'il est indépendant des valeurs initiales

Objectifs opérationnalisés :
Appliquer un pourcentage et l'additionner ou le soustraire
Enchaîner une augmentation et une réduction données en pourcentages
Remplacer les deux opérations par une seule
La composée est encore une application linéaire qui s'interprète ensuite en une réduction ou une augmentation
Les pourcentages ne s'additionnent pas
Faire obtenir les résultats précédents à l'aide des écritures algébriques.

Types d'exercices que l'on aurait pu poser à la fin de la leçon
A quelle réduction (augmentation) revient une réduction de a% suivie d'une réduction de b% ?
Sophie dit à son amie au téléphone : aux galeries on solde les maillots de bain à 20% et avec ma carte j'ai une réduction de 30%. Ainsi je paierais les maillots de bain à 50% de leur valeur . Qu'en pensez-vous ?
J'ai payé mon maillot 100F. Quel était son prix d'origine?

II.6- Leçon minimale pour atteindre ces objectifs

1- Rappel : Augmenter de 10% revient à multiplier par 1,1.

Exemple : $50 + 50\times 10/100=55$ et plus généralement $x + x\times 10/100=x\times(1+0,1)$
Exercice : augmenter de 20 % veut dire ....
de même réduire de 10%

2. Maintenant j'ai le nombre de départ et le nombre d'arrivée d'une application linéaire. Comment trouve-t-on le coefficient ?
Exemple: 100------->180. Le coefficient de l'application est 180/100=1,8.
Exercice: quel est le coefficient de l'application linéaire qui, à 100 fait correspondre 0,8 ?

3. Ai-je augmenté ou réduit ? De quel pourcentage ? 180-100=80 pour cent; ou bien 1,8=1+0,8=1+80%
Exercice : même question avec l'application linéaire de l'exercice précèdent.

4. Maintenant j'augmente de 10% et je réduis le résultat de 20%

Exemple : pour 50, augmenté de 10% donne 55 puis $55 \times 0,8= 44$
Exercice : augmentez de 30% et réduisez ensuite le résultat de 30%

5. A quel pourcentage de variation cela correspond-il ? C'est une réduction de 50-44=6 pour 50 c'est à dire 12%.
Exercice : calculer le pourcentage de variation de l'enchaînement précédent.

6. Conclusions

II.7- Leçon classique avec progression raisonnable ayant les mêmes objectifs didactiques

1.Rappels :
L'application qui fait correspondre un prix au prix réduit (ou augmenté) est une application linéaire
Calcul du coefficient directeur en fonction du pourcentage de variation
Comment calculer le pourcentage de variation connaissant le coefficient de l'application linéaire

2. Reconnaître deux applications linéaires enchaînées
Calculer une image par la composition, un antécédent
Calcul de l'application linéaire composée
Comment décomposer une application si nécessaire

3. Calculer un enchaînement de variations
Théorèmes d'enchaînement
Comparer des enchaînements
Calculer le pourcentage de variation associé à l'application composée

4. Maniement des expressions algébriques comme preuve d'équivalence
Substitution

Cette leçon ainsi traitée dépasse de loin les programmes et des objectifs visés plus haut.

II.8- Objectifs non mathématiques

Faire débattre pour savoir si les deux applications sont équivalentes pour toute valeur
Utiliser le langage algébrique comme preuve syntaxique
Ces deux derniers objectifs sont détruits par les deux cours précédents.

III. - La situation réalisée

1. A est le programme : « réduire de 10%, augmenter le résultat obtenu de 20% », B est le programme « augmenter de 8% ».
2. Deux groupes d'élèves G_1 et G_2 appliquent leurs programmes à des nombres simples.
3. Un groupe G_3 constitué d'élèves ayant travaillé sur A et sur B constatent qu'ils donnent les mêmes résultats.
4. Un groupe G_4 doit effectuer des calculs rapidement, et n'a en main que le programme A, il demande de l'aide à G_3 qui lui dit que A et B donnent les mêmes résultats.
5. La question est d'expliquer pourquoi ces deux programmes donnent le même résultats. Les élèves proposent alors d'écrire les programmes dans le cas général et c'est alors que se pose le problème de transcription algébrique du programme A (c'est à ce moment précis que Simon intervient) qui devra être comparée à celle du programme B.

La situation expérimentée n'est pas satisfaisante, en particulier nous n'avons pas trouvé une situation correcte des phases 3 et 4.0