

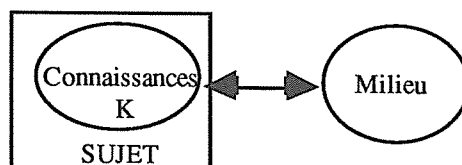
STRUCTURATION DU MILIEU ET MODELE LOCAL A PRIORI

Lalina Coulangue & Annie Bessot

Laboratoire Leibniz
Université Joseph Fourier, Grenoble I

Le travail présenté s'inscrit dans une recherche plus large, celle de Coulangue¹ sur l'enseignement des systèmes linéaires dans le Secondaire. Notre projet est ici de montrer l'intérêt de la notion théorique de milieu (Brousseau, 1986, 1990) pour conduire une analyse des pratiques des enseignants dans une situation didactique, analyse indissociable de celle des élèves (cf. le compte-rendu qui suit du travail dirigé, p.53).

Nous renvoyons le lecteur au cours de Margolinas dans les mêmes actes pour la présentation de la notion de milieu et de sa structuration en situations emboîtées. Un modèle général de situation dans la théorie des situations peut être schématisé comme suit, le sujet pouvant être aussi bien un élève qu'un enseignant :



Rappelons seulement que Margolinas différencie les niveaux de situations emboîtées (et éventuellement des situations de même niveau) par les connaissances² permettant une interaction avec le milieu (situation d'un niveau inférieur).

Cette structuration permet :

- de décrire différentes positions pour un même élève (niveaux : -3, -2, -1, 0 et 1 du schéma donné par Margolinas) suivant une temporalité didactique
- de déterminer la possibilité de différentes situations pour les élèves (dans une même situation didactique).

Les niveaux (-1, 0, 1, 2, 3) des situations emboîtées, décrivent de façon symétrique les positions de l'enseignant³.

Une observation

Le 6 mars 1998, nous nous sommes entretenues avec un enseignant de Troisième sur son projet d'enseignement puis les 20 et 25 mars 1998, nous avons observé dans sa classe de manière « naturaliste »⁴ la réalisation des deux premières séances de ce projet. Le texte de l'entretien, les protocoles⁵ issus des observations, l'analyse préalable des séances écrites par l'enseignant et les documents distribués aux élèves forment un corpus sur lequel s'appuie notre travail de recherche. L'objectif des séances observées est double : introduire les systèmes linéaires et enseigner la méthode de résolution dite « par substitution ».

¹ thèse en cours, dans l'équipe de DDM du laboratoire Leibniz (co-direction de A. Bessot et J-L Dorier)

² Dans le schéma de structuration du milieu, l'élève est modélisé par ces connaissances.

³ On peut envisager dans l'analyse différentes positions pour un même enseignant selon une temporalité plus complexe que la temporalité des positions de l'élève (voir Margolinas 1998).

⁴ Nous ne sommes pas intervenues ni dans la conception ni dans la gestion de ces deux séances laissées à l'entière responsabilité de l'enseignant.

⁵ « Le protocole est le document qui restitue la chronique du discours de la classe, il intègre certaines notes recueillies par l'observateur sur ce qu'il juge important de relever. Ce travail de reconstitution est sous-tendu par des choix méthodologiques et la problématique de la recherche. » (Comiti et al. 1995, p.99)

Analyse ascendante de la situation « Bouteille et bouchon »

Lors de la première séance observée, l'enseignant a commencé par poser à l'ensemble de ses élèves de Troisième le problème « Bouteille et bouchon ». Nous présentons ce problème tel qu'il a été énoncé par l'enseignant dans sa classe, en distinguant les consignes orales de celles écrites au tableau par l'italique⁶ :

- (a) C'est un problème simple.
- (b) Vous avez une bouteille et son bouchon.
- (c) Si je pèse ma bouteille et son bouchon
- (d) la bouteille plus le bouchon, elle fait cent dix grammes
- (e) *110 g*
- (f) Je vous dis que la bouteille pèse cent grammes de plus que le bouchon.
- (g) *la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon*
- (h) Combien pèse le bouchon
- (i) *Combien pèse le bouchon*
- (j) bouteille et son bouchon, la bouteille bouchée, c'est cent dix grammes
- (k) *bouteille et bouchon 110g*

L'analyse ascendante⁷ va nous permettre de produire un *modèle a priori* local des situations et des positions possibles pour un élève de troisième à qui est proposé ce problème particulier.

1 - Le point de vue de l'élève

a. Trois milieux matériels

La position du sujet « objectif » E-3 est « très loin » de celle de l'élève E0 en situation didactique : E-3 interagit sans initiative et de façon *non finalisée*⁸ avec le milieu « matériel » M-3. Le travail de résolution de problème est projeté dans l'avenir.

Le milieu matériel doit contenir des « objets », présents ou évoqués, suffisants pour la *compréhension* du problème. Ces objets sont des connaissances « naturalisés »⁹ (et donc transparentes), et culturellement repérées.

Ici nous pouvons envisager trois milieux matériels M-3. Nous montrerons plus loin que les connaissances du sujet objectif E-3 *intervenant dans l'interaction avec M-3* sont différentes dans chacune des situations S-3 ainsi déterminées.

• Un milieu « minimum » possible contient des nombres et des objets sans relations entre eux. Nous le décrivons comme une liste de deux entiers (100 et 110 donnés par la numération écrite) ou éventuellement de trois entiers (cent, cent-dix et dix donnés par la numération orale) et d'une liste distincte de trois objets évoqués (Bouteille, bouchon et Bouteille bouchée) :

Milieu M-3 (C)

Bouteille (évoquée)	[numération écrite]	[numération orale]
Bouchon (évoqué)	100	Cent
Bouteille bouchée / Bouteille et bouchon (évoquée)	110	Cent dix dix

• Les connaissances culturelles de la pesée peuvent déterminer deux autres milieux matériels : ces connaissances mettent en relation nombres et objets par une opération de mesure.

⁶ consignes écrites

⁷ Dans l'analyse ascendante, on commence par décrire la situation la plus « intérieure » de l'emboîtement (S-3) pour remonter vers des situations de plus en plus extérieures, la situation de niveau n devenant le milieu de la situation de niveau n+1 ($S_n = M_{n+1}$).

⁸ E-3 ne cherche pas encore à résoudre le problème posée ou même à répondre à une question de l'énoncé.

⁹ Ce sont des objets avec lesquels l'élève entretient un rapport de connaissance stable.

Dans le deuxième milieu matériel considéré, on attribue aux entiers et aux objets évoqués dans la consigne *une nature différente* : la mise en relation correspond à la métaphore de la pesée par affichage (balance à affichage numérique).

Milieu M-3 (A)

Bouteille (évoquée) Bouchon (évoqué) Bouteille bouchée / Bouteille et bouchon (évoquée)	Nombres entiers de grammes [numération orale] Cent Cent dix ou [numération écrite] 100 110	Balance à affichage (ou fonction-mesure entre un ensemble d'objets et un ensemble d'entiers)
--	--	---

Un troisième milieu matériel met en relation les nombres et les objets évoqués dans la consigne en leur attribuant une *même nature*, les nombres étant considérés comme des objets « marqués » : cette mise en relation est interprétable par la métaphore de la pesée par équilibre (balance à plateaux).

Milieu M-3 (B)

Bouteille (évoquée) Bouchon (évoqué) Bouteille bouchée (évoquée) / Bouteille et bouchon (évoqués)	Objets marqués: [numération orale] Cent Cent dix ou [numération écrite] 100 110	Balance à plateaux (ou relation binaire "équilibre" entre des objets marqués et des objets non marqués)
---	---	--

De ces trois milieux matériels M-3 (A), M-3 (B), M-3 (C) possibles découlent trois emboîtements de situations possibles.

b. Les emboîtements des situations C

i. La situation objective S-3 (C)

Avec ses connaissances de la vie courante (sur l'ordre), l'élève objectif E-3 imagine un ordre « petit, moyen, grand » sur les trois objets bouchon, Bouteille et Bouteille bouchée. Indépendamment, avec ses connaissances sur les entiers, il envisage soit un ordre « petit, moyen, grand » sur les trois entiers de la numération orale soit l'ordre « petit, grand » sur les deux entiers de la numération écrite « 100, 110 ».

ii. La situation d'action S-2(C)

Pour simplifier, nous considérons comme milieu objectif M-2(C) le résultat des interactions entre E-3 et M-3 (dans la situation S-3(C)), c'est à dire deux collections *distinctes* de nombres et d'objets, ordonnés selon l'ordre « petit, moyen, grand » ou « petit, grand ».

Le sujet agissant E-2 réfléchit aux actions de l'acteur objectif. Ses interactions avec M-2(C) sont *finalisées* par la recherche de la solution du problème posé : le poids du bouchon. Les connaissances mises en jeu restent très élémentaires. E-2 cherche à mettre en relation objets et nombres par l'ordre « petit, moyen, grand » : il cherche le plus petit entier, parmi trois entiers, à attribuer au plus petit objet « bouchon ». Soit il a déjà ce nombre « dix » par la numération orale ; soit il l'obtient¹⁰ par ses connaissances sur les opérations en effectuant une soustraction sur les deux entiers en présence : « $110 - 100 = 10$ ». L'attribution possible par la même règle du plus grand entier 110 (cent dix) au plus grand objet « Bouteille bouchée » est conforme à la consigne, et donc peut valider le résultat 10.

On obtient en S-2(C) un résultat « 10 (ou dix) » qui peut donner lieu dans la classe à une réponse quasi-immédiate en situation didactique S0, sans passage par la situation d'apprentissage (niveau S -1).

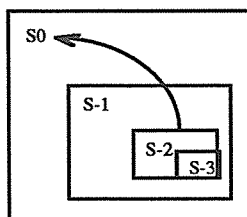
¹⁰ « 100 », le plus petit de 100 et 110, ne peut être ce nombre, « un bouchon étant beaucoup plus léger qu'une bouteille » (connaissance de la vie courante) !

iii. La situation didactique S0(C)

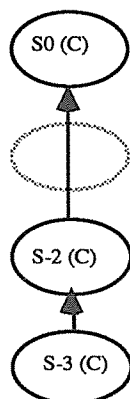
Le niveau S0 est en effet le niveau où l'élève rend public (soit uniquement à l'enseignant soit à toute la classe) sa réponse au problème posé.

Ici, l'élève E0 répond oralement « dix » ou écrit publiquement « poids du bouchon = 10 » en justifiant éventuellement cette réponse sous l'effet d'une connaissance du contrat didactique spécifique à la résolution de problème « *On écrit les opérations numériques qui ont permis d'obtenir la solution* » par l'opération « $110 - 100 = 10$ ».

En résumé, représentons la famille de situations emboîtées C, par un schéma mettant en évidence le saut de S-2 à S0 et la structure dite « en oignon » des situations :



On peut également faire le schéma suivant¹¹ qu'on réutilisera pour les familles de situations A et B afin de représenter les bifurcations possibles dans le passage des niveaux n à $n+1$:



c. Les emboîtements des situations A

i. La situation objective S-3(A)

E-objectif interagit avec M-3(A) sans finalité avec des connaissances élémentaires sur les poids (vie courante), sur l'ordre des nombres et sur la *mesure des poids* « *par affichage* ». Il imagine les affichages inconnus de la bouteille et du bouchon, l'affichage connu (110) de la bouteille bouchée et par l'intermédiaire de ces connaissances de la vie courante un ordre sur ces trois affichages.

ii. La situation d'action S-2(A)

On peut considérer le résultat des interactions de E-3 avec M-3(A) comme milieu objectif pour S-2(A) :

M-2(A)

affichage de Bb ¹² : 110 affichage de B : ? affichage de b : ? affichage de Bb > affichage de B > affichage de b
--

¹¹ Les flèches du schéma représentent l'inclusion.

¹² On pourra noter par la suite l'objet « Bouteille bouchée » par Bb, l'objet « Bouteille » par B, et l'objet

E-2 agissant a des interactions avec ce milieu finalisées par la recherche de l'affichage du bouchon. Pour trouver le poids du bouchon, E-2 met en relation des opérations sur les objets avec des opérations sur les nombres affichés. Cela lui permet d'interpréter la phrase (g) « la bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon »¹³ de la consigne. Cette stratégie de base lui permet d'envisager les affichages possibles, mais se trouve *bloquée pour produire l'affichage du bouchon*.

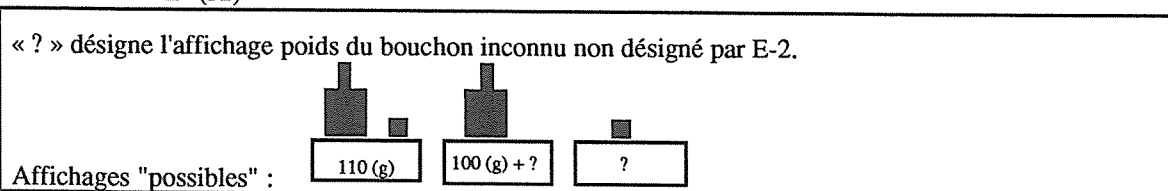
iii. Les situations d'apprentissage S-1(A-arithm) et S-1(A-alg)

P

Des connaissances de nature mathématique différente peuvent permettre à E-1 apprenant de dépasser le blocage de sa stratégie de base *par réflexivité* sur les interactions de la situation précédente S-2 (A).

Le milieu d'action M-1 est le résultat des interactions du niveau -2 :

Milieu M-1 (A)



Pour la production d'un réponse au problème posé, deux types de connaissances mathématiques, arithmétiques ou algébriques, sont possibles : ceci sera représenté dans le modèle local par une *bifurcation* conduisant du niveau S-2(A) à deux situations possibles : S-1(A-arithm) et S-1(A-alg).

• La situation d'apprentissage S-1(A-alg)

Avec une connaissance du *contrat didactique* propre à l'algèbre (*on peut désigner les nombres inconnues par des lettres*) et spécifique à la classe de quatrième¹⁴ (*on cherche à se ramener à une seule inconnue*), E-1 en position d'apprenant désigne l'affichage inconnu du bouchon par la lettre x . Puis par l'intermédiaire d'un raisonnement substitutif (non élémentaire) et de connaissances liées à la mise en équation et aux signes algébriques, il écrit l'équation à une inconnue : $x + (x+100) = 110$ ¹⁵. Il résout ensuite cette équation en mettant en jeu les règles d'algèbre élémentaire et trouve : $x = 5$.

• La situation d'apprentissage S-1(A-arithm)

E-1 en position d'apprenant peut mettre en œuvre une connaissance de type arithmétique (*On peut faire des essais et vérifier avec les données de l'énoncé*). Il s'engage alors dans une procédure de suppositions et de vérifications. E-2 commence par essayer un premier entier, sans doute 10 (obtenu par la numération orale « dix », ou par l'opération « $110-100$ »). Puis il vérifie par exemple comme suit :

« bouchon » par b afin d'alléger le texte.

¹³ Il utilise pour l'interprétation de cette partie de la consigne, soit une connaissance de type arithmétique qui lui donne immédiatement « affichage de $B = 100 +$ affichage de b » ou retrouve cette égalité par l'intermédiaire de l'information « affichage de $B >$ affichage de b » du milieu M-2(A) associée au nombre 100 cité.

¹⁴ En troisième, l'apprentissage des systèmes linéaires rompt cette règle du contrat. Si on avait analysé la même situation d'enseignement en classe de seconde ou en fin de troisième, on aurait eu à envisager une autre situation de niveau -1 S-1(A-alg bis) où E-1 aurait désigné l'affichage de b par x , l'affichage de B par y et où la mise en équation aurait abouti à l'écriture d'un système linéaire.

¹⁵ On peut aussi envisager que E-1 écrive l'équation $100 + x = 110 - x$. Mais cela semble moins probable, car dans cette deuxième équation, l'égalité n'a pas le sens d'effectuation qui est la signification la plus courante en arithmétique et qui pose moins de difficulté à des élèves de ce niveau.

Vérification 1. B pèse 100 de plus que b ; b pèse 10, donc l'affichage de B : $10+100 = 110$. C'est le poids de la bouteille bouchée *contradiction*

Vérification 2. Bb affiche 110 donc l'affichage de B : $110-10 = 100$. B fait donc 90 de plus que b *contradiction*

Vérification 3. B pèse 100 de plus que b ; b pèse 10 donc l'affichage de B : $10+100 = 110$ donc Bb pèse $110 + 10 = 120$ *contradiction*

Il fait ensuite de nouveaux essais en utilisant éventuellement des connaissances sur l'ordre des entiers.

iv. Les situations didactiques S0(A-alg) et S0(A-arithm)

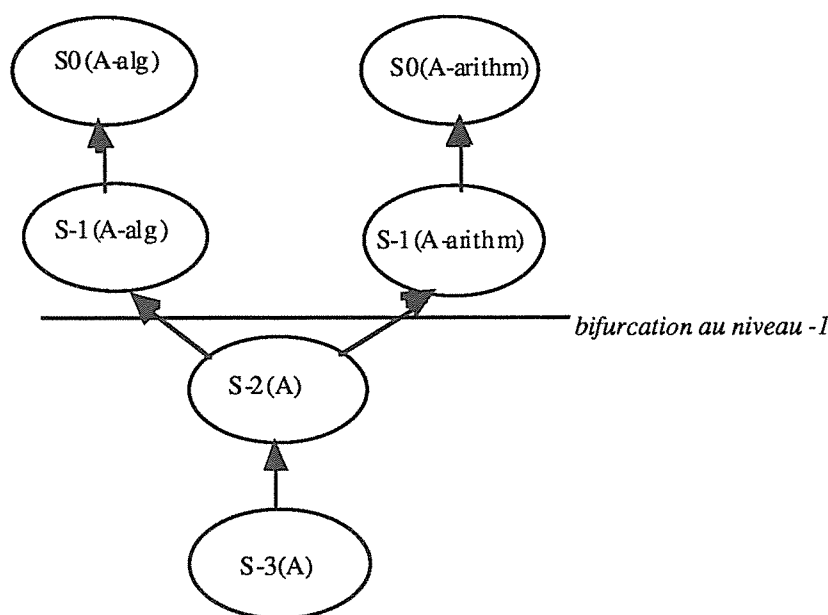
• La situation didactique S0(A-alg)

E0 en position d'élève réfléchit à S-1(A-alg) à l'aide de connaissances du contrat didactique spécifique à la rédaction d'une solution d'un problème de type algébrique. Il écrit publiquement ce que désigne l'inconnue x (le poids du bouchon), l'équation obtenue et la suite d'opérations l'amenant au résultat $x = 5$.

• La situation didactique S0(A-arithm)

E0 en position d'élève rend public son résultat « le bouchon pèse 5g » en l'associant éventuellement à l'opération de sa dernière vérification, avec des connaissances du contrat didactique spécifique à la rédaction de la solution d'un problème (*On écrit les opérations numériques qui ont permis d'obtenir la solution*).

Pour résumer, représentons la famille de situations A par un schéma mettant en évidence la bifurcation possible au niveau -1 :



d. Les emboîtements des situations B

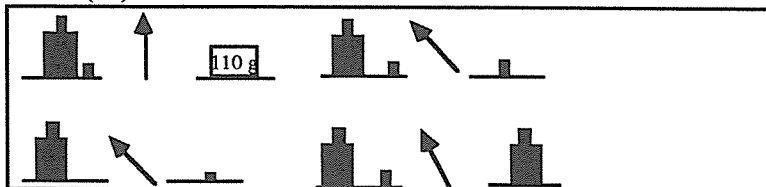
i. La situation objective S-3(B)

E-objectif interagit sans finalité avec le milieu matériel M-3(B) avec des connaissances élémentaires liées à la vie courante sur les poids, à l'ordre sur les nombres et aux « équilibres ». Il imagine des équilibres et des déséquilibres entre objets et « objets marqués » sans envisager d'opérations entre ces objets.

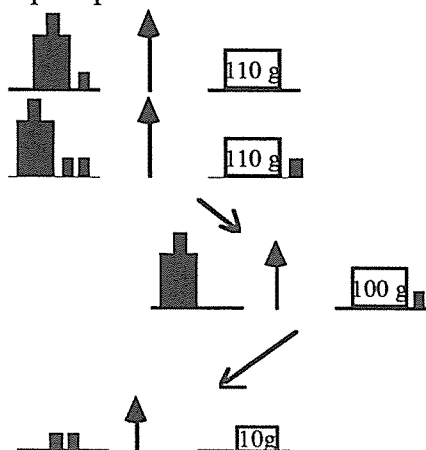
ii. La situation d'action S-2(B)

On peut considérer le résultat des interactions de E-3 avec M-3(B) comme milieu objectif pour S-2(B) :

M-2(B)



E-agissant a des actions sur ce milieu, finalisées par la recherche de l'objet marqué en équilibre avec le bouchon. Avec des connaissances sur les nombres « objets marqués » et sur les équilibres (transferts d'objets qui conservent l'équilibre), E-2 effectue des équilibres possibles entre les objets évoqués (marqués ou non) en les contrôlant par des opérations sur les entiers. Il peut produire ainsi une suite d'équilibres, organisée comme suit :



E-agissant peut arriver ainsi au dernier équilibre : « deux bouchons pèsent 10 grammes ». Sa stratégie de base est alors bloquée : il ne peut, avec ses connaissances d'action sur les objets en équilibre, trouver un équilibre entre *un bouchon et un objet marqué*.

iii. La situation d'apprentissage S-1(B)

On peut considérer comme milieu d'action M-1(B) l'équilibre avec les deux bouchons résultant de la suite d'équilibres effectuée mentalement par E-2.

M-1(B)



E-apprenant interagit avec ce milieu, de manière réflexive par rapport à ses actions du niveau précédent. Il met en jeu une nouvelle connaissance liée à la linéarité de la mesure. A partir de l'équilibre « deux bouchons pèsent 10 grammes », il peut déduire *par linéarité* « un bouchon pèse 5 grammes ».

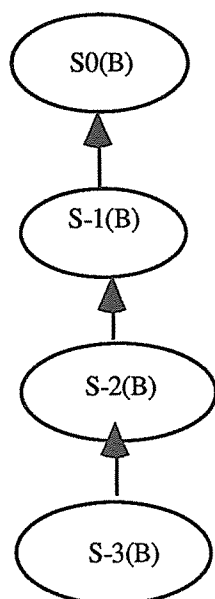
iv. La situation didactique S0(B)

E0, en position d'élève, rend public le résultat « deux bouchons pèsent dix grammes »¹⁶, puis

¹⁶ Il ne rend pas public le raisonnement difficilement communicable (sans l'appui de dessins) qui lui a permis d'obtenir ce résultat. Il peut tenter de le verbaliser à la demande de P0.

avec ses connaissances du contrat didactique spécifique à la rédaction de la solution d'un problème (*On écrit les opérations numériques permettant d'obtenir la solution*) écrit l'opération $10 : 2 = 5$ qui lui permet d'obtenir le résultat « Un bouchon pèse 5 grammes ». Ce raisonnement « par succession d'équilibres » pourrait être caractérisé comme « préalgébrique ». Nous le considérons comme de nature arithmétique : en effet, l'absence de désignation par des lettres rend difficile, voire impossible, l'écriture de la succession des équilibres, écriture permettant l'accès au travail algébrique.

On représente l'emboîtement des situations B par le schéma ci-après :



Vous trouverez en annexe 1 (p. 48) un unique schéma synthétisant les trois emboîtements des situations A, B et C, et en annexe 2 (p.49, p. 50, p. 51) trois schémas plus détaillés.

Nous évoquons rapidement le point de vue du professeur résultant de l'analyse ascendante (niveaux -1 et 0).

2 - Le point de vue de l'enseignant

a. L'enseignant en position P-1

P-observateur observe E-1 en situation d'apprentissage. Il n'intervient pas sur les connaissances mises en jeu par l'élève à ce niveau (il peut éventuellement intervenir sur celles des niveaux précédents s'il voit que la situation d'enseignement se déroule de façon insatisfaisante) mais doit être susceptible de les identifier pour préparer ses interventions en P0.

Ici, P-1 observe la présence de différentes solutions arithmétiques et algébriques : les interprétations de ces procédures vont dépendre des anticipations qu'il a pu faire en position P1 et des interventions « observables » d'élèves.

b. L'enseignant en position P0

P0, en position de professeur utilise les observations (faites en position P-1), des solutions arithmétiques et algébriques qu'il a pu identifier. Il interagit avec ce milieu S-1 pour intervenir publiquement quand cela lui semble pertinent relativement à son projet d'enseignement : *il évalue et institutionnalise les procédures apparues pendant une phase de bilan du travail des élèves.*

3 - Conclusion

Le modèle que nous venons de présenter constitue un outil pour analyser les interactions dans la classe observée¹⁷ au cours de la résolution du problème « Bouchon et bouteille ». Il nous permet déjà de prévoir quelques particularités de cette situation d'enseignement :

- Nous avons déterminé la coexistence éventuelle de trois types de situations (A, B et C) dès le niveau matériel. Des élèves peuvent se trouver dans des situations différentes dès leur première entrée dans le problème.

- Plusieurs types de stratégies arithmétiques et algébriques (correspondant aux différents emboîtements décrits par notre modèle) peuvent être mis en œuvre dans la classe.

Un même résultat exact (la réponse 5) peut ainsi avoir des significations différentes¹⁸ (solution algébrique ou arithmétique) qui correspondent à des apprentissages différents de la part des élèves.

Le résultat 10 est obtenu par des élèves qui restent à un niveau d'interprétation du problème très élémentaire (élève en situation C).

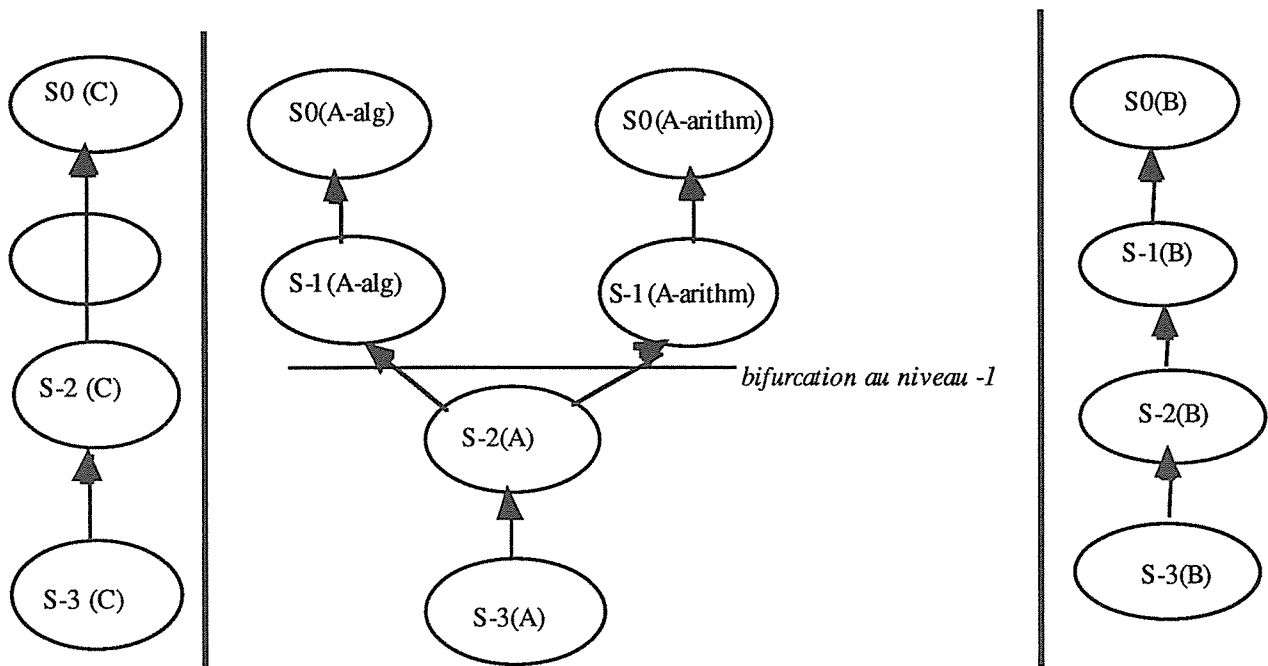
- Les connaissances mises en jeu pour la résolution du problème peuvent être d'origines diverses. Nous avons pris en compte pour construire notre modèle des connaissances algébrique, arithmétique, "de la vie courante", correspondant à des éléments pérennes du contrat didactique propre à l'algèbre ou à l'écriture de la solution d'un problème...

¹⁷ Soulignons que ce modèle est local. Pour le construire, nous avons pris en compte la manière dont la consigne du problème a été posé dans la classe observée

¹⁸ que grâce à notre analyse a priori, nous serons à même d'identifier.

ANNEXE 1

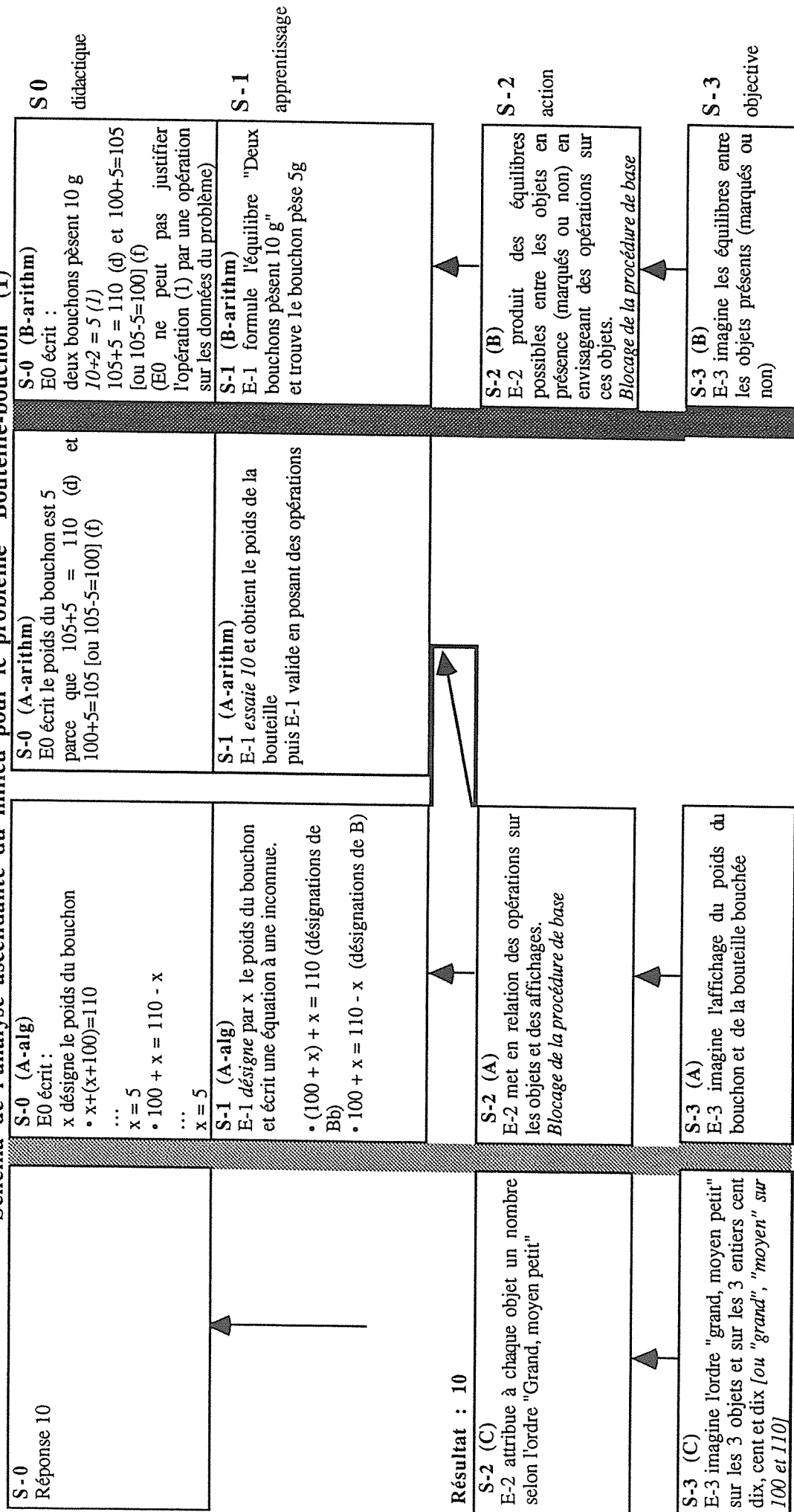
SCHEMA GLOBAL DES DIFFERENTES SITUATIONS A, B ET C ET DE LEURS EMBOITEMENTS



Dans ce schéma les *flèches* indiquent l'inclusion de chaque situation
comme *milieu* d'une situation de niveau supérieur

ANNEXE 2

Schéma de l'analyse ascendante du milieu pour le problème "Bouteille-bouchon" (1)



Dans ce schéma les flèches indiquent l'inclusion de chaque situation comme *milieu* d'une situation de niveau supérieur

Schéma de l'analyse ascendante du milieu pour le problème "Bouteille-bouchon" (2)

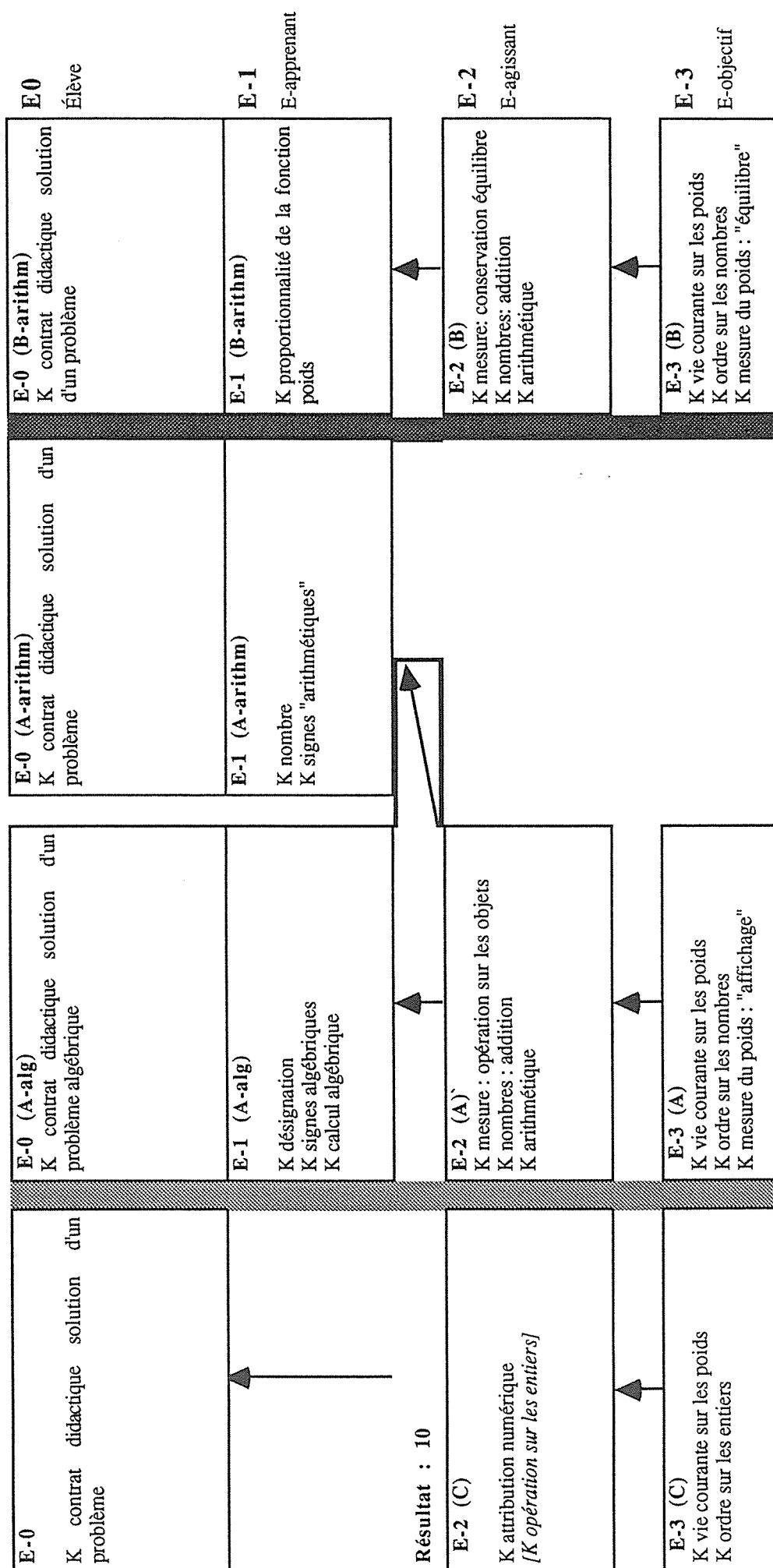


Schéma de l'analyse ascendante du milieu pour le problème "Bouteille-bouchon" (3)

