ANALYSE D'UN PROBLÈME DE FONCTIONS EN TERMES DE MILIEU. STRUCTURATION DU MILIEU POUR L'ÉLÈVE ET POUR LE MAÎTRE.

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, équipe DIDIREM, Université Paris 7
et IUFM Nord-Pas-deCalais, Université d'Artois

J'ai choisi d'illustrer l'analyse des situations en termes de milieu à partir d'un exemple : un problème posé en classe de seconde et mettant en jeu les fonctions. Il est extrait d'un DEA soutenu en 1996 à Paris 7 par Didier Pihoué et dirigé par M. Artigue. Les analyses a priori et a posteriori de Pihoué mettent en avant un point de vue épistémologique et sont centrées sur les notions de cadres, de registres et de ce qu'il appelle « différents modes de pensée ». Je vais essayer, à partir des extraits qu'il nous donne de faire une analyse a priori de la situation et une analyse des résolutions de deux groupes d'élèves en utilisant la théorie des situations et la notion de milieu. Il s'agit ici d'utiliser la théorie pour un problème assez complexe et très ouvert : aucune démarche n'est suggérée, ce qui fait que les élèves sont obligés pour résoudre le problème posé de le transformer et de se poser de nouvelles questions, d'identifier de nouveaux problèmes abordables avec les outils dont ils disposent. L'analyse a priori du travail de l'élève et de l'enseignant a été exposé dans l'atelier ; l'analyse a posteriori du travail des groupes faisait l'objet du T.D. Le choix d'un travail déjà rédigé nous met dans des conditions un peu particulières qui risquent d'amener quelques limitations dans les analyses a posteriori que nous pourrons mener :

- un choix a déjà été fait au niveau de l'information et nous ne disposons que de ce qui est écrit, notamment en ce qui concerne l'organisation de la classe et le travail des élèves : nous devrons nous contenter des extraits d'enregistrements fournis et d'éventuels compléments d'information apportés dans les commentaires. Cependant une observation très précise avait été prévue (un observateur par groupe d'élèves, avec une grille fournie, et enregistrement audio du travail de chaque groupe)

- l'auteur de la recherche est en même temps l'enseignant de la classe. Il n'y a pas d'analyse du rôle de l'enseignant dans le travail mais les raisons des choix de la séquence et son organisation sont très explicites. En revanche les observations rapportées se limitent à la résolution du problème par les élèves. Le professeur n'intervient donc que dans cette phase. Il nous manque donc toute la mise en commun et l'institutionnalisation.

1 . QUELQUES PRECISIONS CONCERNANT L'UTILISATION QUE NOUS ALLONS FAIRE DE LA NOTION DE MILIEU ET QUELQUES QUESTIONS.

1.1. Milieux emboités. Analyse ascendante et analyse descendante

La notion de milieu a été introduite par G. Brousseau dans sa modélisation des situations didactiques comme système antagoniste du sujet. Il a développé à l'école d'été de 1986 un modèle de structuration du milieu, qu'il a repris et précisé à l'école d'été de 1989 (RDM 9/3). Ce modèle a été retravaillé et légèrement modifié par C. Margolinas (Débats). Il s'agit là d'une structuration que j'appellerai verticale du milieu qui permet une analyse en termes de situations emboîtées et de milieux emboîtés, où par exemple la situation adidactique correspond à un certain niveau : elle est contenue dans une situation didactique et contient une situation de référence qui contient elle-même une situation objective. C. Margolinas a surtout élargi le modèle dans les niveaux qu'elle appelle "surdidactiques", pour mieux prendre en compte le rôle du maître, introduisant ce qu'elle appelle situation de construction et situation noosphérienne. Elle a aussi introduit une position du maître dans la situation adidactique et changé la numérotation de Brousseau. J'utiliserai cette numérotation qui me paraît plus facile à mémoriser, en gardant la terminologie de Brousseau. En même temps, C. Margolinas propose deux analyses :

- l'analyse ascendante part de la situation objective et aboutit à la situation de projet, elle permet surtout d'appréhender le point de vue de l'élève

- l'analyse descendante part de la situation noosphérienne et aboutit à la situation d'apprentissage adidactique, elle permet surtout d'appréhender le point de vue du professeur.

Dans la première présentation de ce modèle (séminaire de Grenoble, 1993), C. Margolinas constate, sur l'exemple choisi, un certain décalage entre l'analyse descendante et l'analyse ascendante à propos des connaissances relevées à chaque niveau. Nous reviendrons sur ce décalage dans l'exemple choisi. Pour ma part, il me semble que, pour faire l'analyse du rôle du maître préparant son cours, il faut envisager à chaque niveau un autre milieu. Le maître interagit avec deux milieux : celui qui correspond aux situations de niveaux supérieurs jusqu'au niveau noosphérien éventuellement et celui qui correspond aux situations de niveaux inférieurs qui sont anticipées. Nous reviendrons sur ce point à propos de l'exemple choisi.

Les conditions particulières liées au choix des données font que nous pourrons mener une analyse a priori ascendante à peu près complète mais que nous ne pourrons mener l'analyse a posteriori que jusqu'à la situation d'apprentissage adidactique, nous centrant sur le travail des élèves en phase de résolution. Pour l'analyse descendante, nous disposons de beaucoup d'informations sur les intentions de l'enseignant ; la situation noosphérienne est particulièrement développée puisqu'il s'agit d'un DEA. Je montrerai à son propos ce qui m'amène à repenser le milieu du maître.

1.2. Milieu en théorie des situations et milieu dans l'approche anthropologique

Chevallard (1989) définit ainsi le milieu : "Au cours de l'évolution temporelle de l'institution (...) des sous-systèmes du système général des objets institutionnels vont se stabiliser durablement, en ce sens que les rapports institutionnels à ces objets vont, sur une période assez longue, cesser d'évoluer, se révéler 'robustes' face aux perturbations extérieures et se 'naturaliser' en devenant transparents aux acteurs de l'institution. (...) De tels sous-systèmes d'objets vont assumer, pour les acteurs de l'institution, une fonction de milieu, celui-ci apparaissant doué d'une objectivité échappant au contrôle et à l'intentionnalité de l'institution : on pourra dire alors que le milieu est 'a-institutionnel'. Le 'jeu' de l'acteur avec ces objets lui apparaîtra alors comme un jeu à un joueur, un jeu 'contre la nature', dépendant uniquement des propriétés intrinsèques de la 'nature' et de ses propres choix (et non de telle ou telle convention particulière à propos de la nature).

Dans un texte postérieur (Chevallard, 1992, p. 93-94)), il apporte quelques précisions : "Pour qu'un système didactique (SD) fonctionne, il faut que se crée un contrat didactique. Mais, pour qu'un tel contrat se crée, il lui faut un point de départ assuré. (...) pour qu'un SD fonctionne, il faut qu'à chaque instant – par rapport au temps propre du SD comme institution – il existe un ensemble d'objets institutionnels qui, pour les sujets du SD, *aillent de soi.* Des objets O, donc, tels que les rapports institutionnels $R_I(p, O)$ (où p = e, E) soient *localement stables.* En d'autres termes, il faut minimalement *qu'il existe un milieu.* (...) Bien entendu le fonctionnement d'un système didactique fait bouger le milieu ... Certains des éléments du milieu vont être déstabilisés et cesseront momentanément d'appartenir au milieu, avant de s'y restabiliser ensuite, dans une organisation économiquement et écologiquemqnt différente. (...) A chaque instant le milieu apparaît subjectivement comme un donné ; mais c'est en vérité un *construit permanent."*

La notion de milieu n'est donc pas liée chez Chevallard à celle de situation. De plus le milieu est composé d'objets institutionnels pour lesquels il existe un rapport stable, notamment des objets de savoir. La théorie des situations a été construite au départ pour analyser des situations de l'école élémentaire, ce qui a eu une influence sur le vocabulaire utilisé pour désigner les différents niveaux de situation et de milieu. Ainsi, dans les situations utilisées à l'école primaire, le milieu de la situation objective est en effet souvent matériel ou presque. Ce n'est plus le cas quand on s'intéresse à des situations s'adressant à des élèves de lycée.

Dans ce cas, le milieu matériel est surtout constitué de savoirs antérieurs qui doivent être aussi des "connaissances disponibles" (Robert) pour fournir des rétroactions suffisantes aux actions du sujet dans la situation de référence de façon à permettre l'apprentissage dans la situation adidactique. Pour jouer le rôle de milieu, ces connaissances disponibles doivent apparaître extérieures à l'élève, c'est pourquoi, au moins pour assurer la dévolution du problème, il ne peut s'agir que de savoirs "naturalisés". Ainsi, le milieu matériel de la situation objective doit contenir les savoirs nécessaires à la compréhension du problème, il est donc contenu dans le milieu au sens de Chevallard. De même les connaissances que l'élève doit mettre en jeu dans la situation de référence pour agir sur le milieu constitué par la situation objective sont nécessairement des connaissances disponibles nécessaires à la dévolution du problème, elles correspondent à des rapports stables à des objets qui doivent faire partie du milieu au sens de Chevallard. C'est la réflexion sur ces actions, au cours de la situation adidactique d'apprentissage, qui va mettre en jeu des connaissances qui, elles, ne sont plus disponibles mais objet de l'apprentissage. Dans le milieu de la théorie des situations, on n'aura qu'une partie des objets de savoir naturalisés, ceux qui sont représentatifs de la connaissance visée, ceux qui vont être susceptibles de fournir des rétroactions aux actions du sujet. Dans le cas d'un problème complexe, pour mieux analyser ce qui se joue pour l'élève, j'éprouve le besoin de découper le problème en plusieurs situations au sens de la théorie des situations, situations qui peuvent être traitées successivement par les élèves. Dans ce cas, les connaissances et résultats issus d'une situation antérieure interviennent dans le milieu des situations suivantes, même si ce ne sont pas des rapports stabilisés à un objet de savoir. C'est ce que je vais développer sur l'exemple choisi.

1.3. Analyse a posteriori. Structuration horizontale du milieu. Milieu potentiel et milieu effectif ou activé.

Pour faciliter l'analyse de ce qui se passe dans des situations assez complexes et mettant en jeu beaucoup de connaissances mathématiques antérieures, pour permettre une analyse a priori différenciée suivant des types d'élèves et pour l'analyse a posteriori, je distingue dans le milieu trois composantes qui peuvent intervenir du milieu matériel au milieu didactique:

- la composante matérielle est constituée de données objectives, matérielles ou non, y compris des instruments,

- la composante cognitive est constituée de savoirs, de connaissances disponibles nécessaires pour mettre en place un mode de résolution. Ce sont forcément des connaissances institutionnalisées.

- la composante sociale est constituée des autres acteurs qui peuvent intervenir dans la résolution : partenaires, autres élèves, professeur. En principe, elle n'intervient qu'à partir du milieu didactique. Une intervention de cette composante peut amener un changement dans le milieu cognitif des niveaux inférieurs donc le passage d'une situation à une autre. En réalité cette troisième composante peut se ramener à la seconde : l'existence d'un partenaire dans une situation pouvant se ramener à des connaissances ou des savoirs.

Ces composantes ne sont pas indépendantes. Une modification de l'une d'entre elles entraîne en général une modification des autres. Par exemple, dans une construction géométrique, si l'on modifie les instruments disponibles, on modifie par là même les connaissances à mettre dans le mileu matériel.
En principe, la composante sociale n'intervient qu'à partir du niveau didactique quand il s'agit du maître. Une intervention du maître peut être interprétée comme un changement dans la composante cognitive du milieu matériel (données objectives indépendantes de l'élève) et va donc changer la situation adidactique.
Bien sûr, il ne faut pas perdre de vue que d'autres connaissances interviennent dans une situation et qui ne font pas partie du milieu matériel : celles qui vont être en jeu dans la

situation et éventuellement produites par la situation. Elles pourront éventuellement faire partie de milieux de niveaux supérieurs.

Pour l'analyse a posteriori, il me faut encore distinguer la composante cognitive potentielle et la composante cognitive activée. C'est ce qui me permettra d'expliquer d'une part que les élèves ne sont pas tous dans la même situation adidactique, d'autre part comment un élève peut passer d'une situation adidactique à une autre en cours de résolution d'un problème.

Le milieu cognitif potentiel est constitué des connaissances disponibles (au sens d'Aline Robert) et bien rodées de l'élève : celles qu'il est capable de mobiliser tout seul, des savoirs anciens, naturalisés (Chevallard). Il comprend aussi les conceptions relatives aux objets du milieu matériel. Le milieu cognitif activé est la partie du milieu cognitif potentiel qui est effectivement activée dans la situation adidactique. Ne fait partie de la composante cognitive du milieu matériel et du milieu de référence que le milieu cognitif activé. Ceci explique que des élèves différents puissent être dans des situations différentes à propos du même problème.

La composante matérielle du milieu matériel est fixée et c'est a priori la même pour tous les élèves. Du moins c'est le cas dans la situation qui nous occupe. Ce n'est peut-être pas vrai en général. Je crois que L. Coulange et A. Bessot nous présentent un exemple où il y a des différences dès ce niveau. Le milieu cognitif potentiel est déterminé par les analyses préalables, les informations concernant l'environnement des élèves. On peut prévoir un milieu cognitif potentiel maximal (les savoirs et connaissances utiles pour la résolution qu'on peut au mieux espérer au niveau où on propose la situation) qui vont déterminer les procédures attendues, et des variations suivant les groupes d'élèves, certains savoirs et certaines connaissances n'étant disponibles dans le milieu potentiel que pour une partie des élèves.
Le milieu cognitif d'une situation peut faire intervenir plusieurs cadres et plusieurs registres de représentation dans lesquels s'exprimeront les connaissances relevant de chacun des cadres en jeu et qui permettront les différents traitements que mettra en jeu la résolution.
Une intervention du maître peut ainsi injecter une connaissance dans le milieu objectif et modifier par là même la situation objective et donc la situation d'apprentissage : la connaissance fournie n'est plus objet d'apprentissage dans la situation d'apprentissage. Une intervention d'un autre élève non reprise par le maître ne fait pas forcément passer la connaissance concernée dans le milieu matériel : c'est quelque chose qui demande examen et ne peut être considéré comme une donnée.

2 . LE PROBLEME DE L'ABREUVOIR.

2.1. Informations sur le contexte.

Le problème se trouve en annexe (cf. p.32). Il a été proposé en mai 1996 à des élèves de seconde qui ont traité la partie "fonctions" du programme. Ils ont rencontré des problèmes modélisés par des fonctions, problèmes posés dans des contextes mathématiques ou non, ils ont étudié les fonctions usuelles et leurs variations mais ont fait peu d'exercices sur des études de variations. Ils ont l'habitude de travailler en groupes et de rencontrer des problèmes assez ouverts.
Dans cette séquence les élèves travaillent par groupes de 3 ou 4. Ils doivent rédiger un compte-rendu commun et remettre leurs brouillons (pour les besoins de l'expérimentation). Cette dernière demande est exceptionnelle ainsi que la présence d'un observateur par groupe. Ces deux conditions sont liées à la situation expérimentale.

2.2. Analyse mathématique du problème

Pour être traité, le problème qui est posé ici nécessite de formuler plusieurs questions intermédiaires. Plusieurs voies sont possibles. Nous allons d'abord identifier un certain nombre de problèmes pouvant intervenir dans la résolution du problème Q posé :
Q : graduation de la jauge
Q_0 : calcul du volume total de l'abreuvoir
Q_1 : calcul du volume de l'abreuvoir pour une hauteur donnée

Q'_1 : expression du volume de l'abreuvoir en fonction de la hauteur
Q_2 : calcul de la grande base du trapèze pour une hauteur donnée
Q'_2 : expression de la grande base du trapèze en fonction de la hauteur
Q_3 : calcul de la hauteur pour un volume donné
Q'_3 : expression de la hauteur d'eau en fonction du volume rempli
Les problèmes Q_i et Q'_i se distinguent par les cadres dans lesquels ils se posent et se résolvent: cadre numérique pour les problèmes Q_i pour lesquels nous avons utilisé le mot "calcul", cadre algébrique pour les problèmes Q'_i pour lesquels nous avons utilisé le mot "expression".

Une solution experte consisterait à mobiliser le cadre des fonctions pour déterminer la grande base du trapèze en fonction de la hauteur ($L = 6+0,5h$), puis exprimer le volume d'eau en fonction de la hauteur ($V = 10\ h^2+240\ h$), et enfin chercher la fonction réciproque en résolvant une équation du second degré avec paramètre. Si on ne peut pas résoudre une équation du second degré avec paramètre, on peut résoudre graphiquement ou algébriquement 11 équations du second degré à une inconnue. Dans le premier cas, cela suppose de mobiliser le sous-cadre fonctionnel du cadre algébrique et d'articuler dans ce cadre les registres graphique et algébrique. Dans le second cas, on mobilise le sous-cadre de la résolution des équations et le registre algébrique. Pour l'expression de la grande base en fonction de la hauteur, on peut rester dans le cadre algébrique : reconnaître une fonction linéaire et chercher son expression, ou passer dans le cadre géométrique et utiliser le théorème de Thalès. Dans ce cas, les élèves ne disposant que du théorème de Thalès dans le triangle, ils auront à chercher un triangle convenable. Plusieurs solutions sont possibles.

Ce problème peut aussi être résolu par approximations dans le cadre numérique en s'appuyant sur le fait que le volume d'eau est une fonction croissante de la hauteur, ce qui est une connaissance du milieu matériel. Cela demande autant de résolution que de volumes choisis (donc 11). Il est envisageable de rester entièrement dans le cadre numérique pour un volume fixé, mais si on doit le faire 11 fois de suite, il est fort probable que cela incite l'élève à passer au cadre algébrique.

Une solution incorrecte permet de rester dans le cadre numérique : celle qui consiste à identifier croissance et proportionnalité et à considérer que la hauteur d'eau est proportionnelle au volume : à partir du volume total on détermine ainsi toutes les hauteurs par une technique de quatrième proportionnelle.

3 . ANALYSE A PRIORI ASCENDANTE OU ANALYSE DU TRAVAIL DE L'ELEVE.

Nous allons maintenant faire l'analyse a priori du problème Q posé en identifiant différents chemins que peuvent prendre les élèves et en faisant l'analyse a priori de toutes les situations rencontrées. En même temps nous aborderons le rôle du maître pendant la phase de recherche des élèves.

3.1. Le problème initial Q : fabriquer une jauge

3. 1.1. Situation objective. Niveau -3.

- Milieu matériel :

. composante matérielle : abreuvoir évoqué, jauge évoquée, abreuvoir qui se remplit (évoqué), quantité d'eau. C'est le même pour tout le monde

. composante cognitive : "La quantité d'eau dans l'abreuvoir augmente avec la hauteur. Une jauge est graduée, il faut définir les graduations". Il faut ajouter les connaissances permettant de reconnaître un prisme, un trapèze. Dans la mesure où les mots sont écrits dans le texte et où les dessins sont fournis, on peut mettre ces connaissances dans le milieu matériel. Il faut ajouter les formules permettant de calculer l'aire d'un trapèze et le volume d'un prisme, si elles ont été rappelées par le professeur ou fournies dès que nécessaires.

- E-3 imagine l'abreuvoir qui se remplit et constate que le volume d'eau augmente en même temps que la hauteur d'eau jusqu'à une valeur maximale correspondant à l'abreuvoir plein. Il imagine une jauge, c'est-à-dire une graduation.
Ainsi décrite, on peut penser que la situation objective est la même pour tous les élèves. Il regarde les dessins fournis, reconnaît le trapèze et le prisme comme des modèles de l'abreuvoir. On pourrait déjà faire diverger à ce niveau entre ceux pour qui graduation est synonyme de graduation régulière et les autres.
A ce niveau, l'élève ne peut pas répondre au problème posé. Il va devoir prendre des décisions d'action qui vont être des calculs de volumes ou de hauteurs.

3.1.2. Milieu potentiel pour les situations de référence : connaissances disponibles pour l'action sur la situation objective.

Pour calculer des volumes à l'aide des formules, il faut une articulation dans le cadre géométrique du registre des figures, du langage naturel et du registre des formules (il faut par exemple savoir reconnaître que ce qui joue le rôle de la hauteur du prisme c'est la longueur de l'abreuvoir), connaître les unités légales de longueur, aire et volume, les conversions de ces unités, au moins entre m et dm, entre litres et dm^3.
Il se peut que certaines de ces connaissances ne soient pas disponibles pour tous les élèves. On peut attendre des difficultés au niveau de l'articulation entre les figures, le langage et les formules (en particulier à propos des bases et des hauteurs qui prennent des sens différents pour l'abreuvoir, pour le prisme et pour le trapèze).

Il faudrait aussi mettre dans le milieu cognitif potentiel des connaissances sur la proportionnalité, les techniques de calcul des quatrièmes proportionnelles notamment, les fonctions linéaires ou affines, des connaissances de calcul algébrique, notamment concernant la substitution, le tracé point par point d'une fonction à partir de son expression algébrique, la résolution graphique d'équations du type $f(x) = k$, et aussi la mise sous forme canonique des équations du second degré. Ces connaissances font partie du milieu cognitif potentiel mais ne peuvent être supposées activées pour tous les élèves. Leur présence effective ou non va amener à des situations différentes. Nous pouvons prévoir qu'il y aura plusieurs situations possibles à partir du niveau de la situation de référence.

En revanche, nous ne pouvons pas mettre dans le milieu cognitif potentiel de connaissances concernant la fonction comme objet, comme la recherche de la réciproque d'une fonction bijective qui permettrait d'aboutir à la solution experte. Le cadre fonctionnel est absent des savoirs des élèves à ce niveau.

3.1.3. Situations de référence possibles.

La traduction mathématique du problème revient au calcul de la hauteur d'eau pour un volume donné (Q_3). La situation de référence la plus accessible est celle du volume de l'abreuvoir pour une hauteur donnée (Q_1). Le seul calcul pour lequel l'élève dispose de toutes les données est celui du volume total de l'abreuvoir (Q_0). On peut l'attendre même s'il n'apporte pas clairement une avancée vers la solution parce que cela fournit un moyen de validation par la suite. En réfléchissant sur les actions possibles, sauf s'il utilise la proportionnalité, l'élève s'aperçoit qu'on ne peut pas répondre directement au problème, rien ne permettant de trouver directement la hauteur d'eau pour un volume donné (Q_3). Il va donc se poser une nouvelle question, identifier un nouveau problème qui peut être Q'_3 ou Q'_1. Il peut aussi mettre en œuvre Q_1 pour commencer une procédure d'approximations dans le cadre numérique. La répétition de Q_1 devrait amener à soulever les problèmes Q'_1 et Q'_3. Que l'on parte de Q_1 ou de Q_3, je situe l'identification des nouveaux problèmes au niveau de l'apprentissage par rapport au problème posé (réflexion sur l'action). En revanche si l'élève applique la proportionnalité, il calcule le volume total (niveau -2) puis applique une technique de calcul de 4ème proportionnelle (niveau -2) ; il n'y a pas de situation d'apprentissage : l'élève met en jeu deux actions qui lui permettront de donner une réponse. Il va passer directement en S_0 sans se mettre en position -1 sauf s'il décide de vérifier la réponse en calculant le volume correspondant à la hauteur trouvée. Le milieu ne peut pas apporter de feed-back puisqu'aucune vérification n'est demandée, ni le calcul pour des valeurs aisément vérifiables comme pour la hauteur moitié. Une intervention du maître est indispensable dans ce cas. Le calcul du volume pour une hauteur donnée (de niveau -2) pourrait servir de feed back mais ce n'est pas automatique.

Nous allons maintenant examiner les problèmes Q_0, Q_1, Q_3 et Q'_3 qui sont les premières traductions mathématiques du problème qu'on peut attendre.

3.2. Problème Q_0 : calcul du volume total.

- La situation objective (niveau -3) est la même que précédemment sauf qu'on ne considère que l'abreuvoir plein et non en train de se remplir.

- La situation de référence (niveau -2) consiste à calculer le volume en appliquant la formule. Les connaissances à mobiliser dans le milieu potentiel concernent surtout l'articulation entre langage, dessin et formule pour reconnaître les éléments pertinents : la base du prisme est le trapèze qui est une face de l'abreuvoir, sa hauteur est la longueur de l'abreuvoir, la hauteur du trapèze est en revanche la hauteur de l'abreuvoir. Les autres connaissances concernent les unités légales et les conversions.

Cette situation est entièrement au niveau de l'action (-2). Il n'y a pas de situation d'apprentissage. La situation objective peut amener un feed-back en termes d'ordres de grandeur et permettre éventuellement de déceler un défaut dans les conversions d'unité. Cependant, dans la mesure où l'abreuvoir n'est qu'évoqué, la validation complète ne peut venir que du maître ou d'un autre élève, au niveau didactique (0).

3.3. Problème Q_1 : calcul du volume pour une hauteur donnée

Le milieu matériel est le même ainsi que la situation objective. La situation de référence (niveau -2) est celle d'un calcul de volume. Elle bloque puisqu'on ne connaît pas la grande base du trapèze quand la hauteur n'est pas maximum. La réflexion sur la possibilité de cette action amène à identifier le problème Q_2 de calcul de la grande base du trapèze pour cette hauteur. Nous plaçons l'identification de ce problème au niveau -1. En revanche il se peut que l'élève ne se rende pas compte du blocage de la situation d'action et considère que la grande base du trapèze vaut 8. Dans ce cas, il obtient les mêmes résultats qu'avec la proportionnalité et la situation objective ne lui apporte aucun feed-back. Là aussi une intervention du maître est nécessaire.

3.4. Problème Q_3 : calcul de la hauteur pour un volume donné

Le milieu matériel et la situation objective sont inchangés.

La situation de référence correspondante qui serait la résolution d'une équation à une inconnue bloque parce qu'on ne connaît pas la grande base du trapèze. La réflexion sur l'impossibilité de cette action amène à identifier le problème Q_2 ou plutôt Q'_2 puisque la hauteur est inconnue : exprimer la grande base en fonction de la hauteur ou à passer à la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues et dans ce cas à chercher une autre équation (SE). Ces nouvelles questions peuvent être considérées comme de niveau -1 puisqu'elles sont formulées à partir d'une réflexion sur l'action envisagée. Dans le cas où l'élève ne se rend pas compte du blocage et prend 8 comme grande base, nous sommes dans le même cas que ci-dessus : une intervention du maître est nécessaire.

Nous avons ici examiné le problème Q_3 dans le cas où il est posé en premier. Il n'en est pas de même si l'élève le considère à un moment où il a déjà traité certains des autres problèmes. Nous y reviendrons.

3.5. Problème Q_2 : calcul de la grande base pour une hauteur donnée

La situation objective est une partie de la situation objective initiale : celle qui concerne le trapèze. Au niveau de l'action (-2), l'élève peut soit utiliser un dessin à l'échelle et mesurer soit utiliser la proportionnalité directement (technique de calcul de quatrième proportionnelle) ou via le théorème de Thalès, ce qui demande d'identifier un triangle où on peut l'appliquer (situation que nous pouvons placer au niveau -1 de réflexion sur l'action). Dans le cas où il fait un dessin à l'échelle, il reste au niveau de l'action.

Si l'élève a traité le problème Q_2 parce qu'il l'a rencontré à partir de Q_1 il pourra continuer Q_1 et la répéter plusieurs fois sans que ce soit trop coûteux. Il n'est pas obligé de passer au cadre algébrique puisqu'un seul dessin à l'échelle permet de mesurer toutes les grandes bases possibles. La remise en cause de cette procédure ne pourrait venir que d'un souci de précision. Dans la mesure où il faut réaliser une jauge à l'échelle 1/2 donc avec une précision limitée, il est possible que les élèves considèrent que la précision obtenue à partir de leur dessin est suffisante.

3.6. Problème Q'_2 : calcul de la grande base en fonction de la hauteur

Le milieu matériel est le même que pour Q_2. Les connaissances à mettre en œuvre pour l'action sont presque les mêmes aussi, sauf qu'il faut ajouter le calcul algébrique et que l'utilisation des techniques de quatrième proportionnelle ou du théorème de Thalès doivent se faire avec une variable. Le dessin à l'échelle ne permet plus de résoudre.
L'élève peut se placer dans le cadre de l'étude des fonctions affines étudiées en 3ème et dans le contrat de l'expression d'une variable en fonction d'une autre, qui a été réactivé tout au long de l'année de seconde. Pour cela il peut chercher directement une fonction linéaire à partir des valeurs numériques en faisant l'hypothèse d'une variation proportionnelle ou chercher à appliquer le théorème de Thalès. Dans tous les cas, il utilise ensuite du calcul algébrique pour exprimer L en fonction de h.

En principe la situation de référence permet tout de suite de donner une réponse, sans passer par le niveau -1 sauf dans le cas de l'utilisation du théorème de Thalès où se pose le problème de la recherche d'un triangle convenable. Nous laissons au lecteur l'étude de cette situation qui amènerait encore à identifier des connaissances concernant l'articulation du registre des figures et du registre de la langue naturelle.

3.7. Problème Q_3-SE: recherche et résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

La situation objective est celle du problème initial. Pour l'action, l'élève se place dans le cadre de la résolution des systèmes, en faisant appel au contrat de la résolution des systèmes linéaires (qu'il faut prolonger ici) et cherche une deuxième équation, par exemple volume plein + volume vide = volume total (comme le fera un des groupes), ou identifie le problème Q'_2 et cherche à exprimer une inconnue en fonction de l'autre.
La résolution du système amène à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue, ce que les élèves peuvent faire par la mise sous forme canonique. Les connaissances nécessaires ne peuvent pas être supposées stables chez tous les élèves de ce niveau. Il peut se produire un blocage et dans ce cas bifurcation vers Q'_1 et résolution graphique ou résolution numérique par approximations puisque Q_1 peut maintenant être résolu de nombreuses fois de façon économique : on peut même programmer la calculatrice. Cette bifurcation se situe au niveau -1.

Dans le cas où la résolution des équations du second degré par mise sous forme canonique est disponible, la résolution d'une telle équation se situe au niveau -2 mais, pour résoudre le problème Q, il faudra reproduire 11 fois cette action, ce qui devrait amener une réflexion pour trouver une procédure économique : repérer ce qui change et ce qui ne change pas quand on passe d'une équation à une autre, et peut-être passer à Q'_3. L'élève peut identifier les invariants dans sa résolution et proposer une formule générale donnant h en fonction de V, ou au moins pour des volumes multiples de 100.

3.8. Problème Q'_1 : calcul du volume en fonction de la hauteur

L'élève se place dans le cadre algébrique et veut calculer le volume en fonction de la hauteur, ce qui l'amène à calculer l'aire du trapèze. Là un autre problème se pose : on ne connaît pas la grande base. C'est l'identification du problème Q'_2. Après résolution de ce problème, l'élève peut rester au niveau de la situation de référence et utiliser ses connaissances algébriques disponibles pour substituer à L puis à B sa valeur en fonction de h, pour exprimer V.

3.9. Retour au problème Q_3

Supposons qu'on ait obtenu une expression de V en fonction de h. Le retour au problème de départ amène à déterminer la hauteur pour un volume donné (Q_3). L'expression de la fonction inverse n'étant pas dans le milieu potentiel, on se ramène comme ci-dessus à la

résolution d'une équation du second degré (ou plutôt de 11 équations de ce type). Pour ce problème, on a alors 3 situations de référence possibles suivant que les connaissances correspondantes peuvent ou non être convoquées et donc figurent ou non dans le milieu cognitif activé :
- résolution algébrique par mise sous forme canonique
- résolution numérique par approximations
- tracé du graphe de la fonction et recherche graphique de 11 antécédents.

Il resterait à analyser le problème de résolution graphique lui-même, ce que nous laissons à la charge du lecteur.

3. 10. Bilan sur le problème initial

Nous allons ici reprendre les quatre grandes voies de résolution possibles en indiquant les sous-problèmes identifiés et les cadres mobilisés (milieu activé) dans le milieu potentiel.

voie 1	voie 2	voie 3	voie 4
cadre numérique	cadre numérique	cadre algébrique résolution d'équations	cadre algébrique fonctions
Problème Q3 niveau -2 Calcul du volume total (Q0) et proportionnalité Pas de niveau -1 réponse directe Nécessité d'une intervention de l'enseignant pour poser Q1 et amener à l'identification de Q2	Problème Q1 niveau -2 : action 'calcul du volume' impossible (si calcul avec L = 8, intervention de l'enseignant nécessaire) niveau -1 : identification de Q2 niveau -2 pour Q2 : voie 2.1 dessin à l'échelle voie 2.2 proportionnalité itération du problème pour une procédure d'approximations : * possible en restant au niveau -2 dans la voie 2.1 * débouche sur Q'2 dans la voie 2.2. (voir voie 4)	Problème Q3 niveau -2 résolution d'une équation pour chercher h niveau -1 : il y a une autre inconnue voie 3.1. identification de Q'2 (voir voie 4) voie 3.2. recherche d'une autre équation niveau -2 : résolution du système par substitution et résolution de l'équation du second degré par mise sous forme canonique répétition du problème niveau -1 : recherche d'une économie, recherche des invariants de la résolution de façon à ne changer que ce qui est nécessaire	Problème Q'1 niveau -2 : reconnaissance de la variable h et de la fonction V mais blocage : on a deux inconnues niveau -1 : identification de Q'2 niveau -2 voie 4a.1 reconnaissance d'une fonction linéaire ou d'une fonction affine voie 4a.2 appel au théorème de Thalès niveau -1 : recherche d'un triangle pertinent puis retour à Q'1 : niveau -2 : substitution retour à Q3 voie 4b.1 : résolution numérique niveau -2 : Q1 niveau -1 : utilisation de la variation pour choix des valeurs voie 4b.2 : résolution algébrique de 11 équations : voir voie 3 voie 4b.3 : résolution graphique niveau -1 : choix de l'échelle niveau -2 : tracé du graphique et lecture

Ici une partie de l'apprentissage consiste dans tous les cas à identifier les problèmes successifs pour mettre en place la démarche de résolution. Dans chacune de ces situations de niveau -1, situations d'apprentissage, on doit pouvoir identifier la connaissance nouvelle qu'on apprend, qui est ici le plus souvent une connaissance de mise en relation de problèmes et de techniques. On pourrait qualifier ces connaissances de métamathématiques parce qu'elle portent sur des objets que Chevallard a qualifiés de para voire proto mathématiques. L'analyse que nous avons faîte en découpant le problème en sous-problèmes considérés chacun comme une situation didactique conduit à introduire une certaine temporalité. On peut aussi considérer l'ensemble du problème comme une situation didactique. Dans ce cas, on a pour l'élève des aller-retour entre les niveaux -2 et -1 : l'élève met en service des savoirs déjà familiers.

La réflexion sur cette action et sur les rétroactions du milieu l'amène éventuellement à en convoquer d'autres qui vont le ramener un moment au niveau de l'action avant d'accéder à une nouvelle réflexion. A chaque instant l'élève en situation d'apprentissage peut se reporter à des niveaux inférieurs pour imaginer des actions et les rétroactions du milieu qu'elles provoqueraient. Les niveaux de milieu emboîtés ne sont donc pas des niveaux successifs.

Les interventions de l'enseignant nécessitées par l'insuffisance du milieu en cas d'utilisation de la proportionnalité nous paraissent en fait des actions de dévolution : le but n'est pas de travailler la proportionnalité mais la notion de fonction, l'enseignant doit donc intervenir pour que les élèves voient la nécessité de se placer dans le cadre algébrique. L'insuffisance du milieu pour rejeter la proportionnalité peut se justifier par le fait que ce n'est plus un enjeu d'enseignement. L'enseignant peut se réserver la possibilité de compléter le milieu pour les groupes d'élèves qui en auraient besoin.

L'analyse a priori ascendante devrait se poursuivre par l'analyse du niveau didactique : ce qu'il y a à retenir de cette situation et la gestion que peut en faire le maître. Nous n'aborderons pas ce niveau ici. Il le sera dans l'analyse descendante.

4 . ANALYSE A PRIORI DESCENDANTE OU ANALYSE DU ROLE DU PROFESSEUR.

Elle correspond à l'analyse du travail du professeur avant la séquence d'enseignement. Pour l'analyse dans ce sens, j'ai quelques difficultés à emboîter les milieux à la manière de C. Margolinas, et à voir Sn comme Mn+1. Il me semble que c'est insuffisant et qu'à chaque niveau le professeur interagit avec deux milieux : le milieu M'n = Sn-1 en effet qui correspond à la projection que peut faire le professeur de la situation en classe avec ses élèves et comprend d'ailleurs tous les niveaux inférieurs dans lesquels l'enseignant peut aussi se projeter, mais aussi un milieu M"n issu de Sn+1. Le professeur se projette dans l'action avec les élèves (milieu M'_n, une situation englobant tous les niveaux inférieurs : les couches de "l'oignon" sont translucides pour le professeur, comme le faisaient déjà remarquer C. Margolinas et D.Grenier) mais aussi se reporte à son projet d'enseignement et à ses expériences noosphériennes (milieu M''_n). Nous allons en discuter sur l'exemple.

Ici, nous sommes dans un cas très privilégié pour cette étude : puisqu'il s'agit d'un mémoire de DEA, les études préalables et les références sont nombreuses et très explicites, ce qui fait que la situation noosphérienne est très développée. De plus, nous sommes en situation d'analyse a priori : les niveaux supérieurs du milieu vont intervenir de façon plus explicite que les niveaux inférieurs qui seraient beaucoup plus présents dans une analyse a posteriori.

4.1. S3, situation noosphérienne

Le milieu M''_3 est constitué de tous les travaux didactiques auxquels l'auteur se réfère pour analyser l'enseignement des fonctions en seconde (Douady : DOO, Sfard : procedural/ structural, Dubinsky : processus/ objet, Chevallard : modélisation, Duval : registres de représentation sémiotique) ainsi que des programmes officiels et des manuels qu'il a analysés. La situation S3 consiste en l'analyse de ces divers documents pour en tirer des choix sur l'ensemble de son enseignement et des principes concernant l'enseignement des fonctions et la situation qui nous intéresse, c'est-à-dire ce qui constituera le milieu M''_2 de la situation de construction, en l'occurence :

- ce qu'il appelle les différents modes de pensée qui interviennent , qui sont en fait les cadres de résolution possibles avec les registres associés et leur articulation : mode de pensée arithmétique, mode de pensée algébrique, mode de pensée fonctionnel.
- ce qu'il appelle un problème fonctionnel, c'est-à-dire un problème posé dans un autre cadre que le cadre fonctionnel (aucune fonction n'est mentionnée), mais tel qu'une modélisation du problème conduit à introduire une fonction dont l'étude des propriétés permet de résoudre le problème.
- l'idée de faire intervenir la fonction comme outil de résolution de problèmes, comme processus, à travers différents registres de représentation qu'il s'agit d'articuler pour contribuer à faire émerger l'objet fonction.

- des programmes, il retient l'insistance sur l'apprentissage par résolution de problèmes, l'étude de situations complexes qui alimente le travail de recherche individuel ou en équipe, le fait que de nombreux travaux doivent faire intervenir simultanément diverses parties du programme, qu'il faut étudier des situations issues d'autres disciplines et consolider la pratique conjointe du calcul numérique et du calcul littéral en relation étroite avec l'étude des fonctions, exploiter des tracés graphiques...
Le milieu M''_2 est le produit de la situation S_3 et en garde la trace, c'est en cela qu'il la contient.
Mais dans la situation S_3, le professeur interagit aussi avec ce qu'il sait de sa propre classe et de la possibilité de faire tel ou tel choix sur la présentation des fonctions, c'est-à-dire avec la projection qu'il fait d'une telle réalisation dans sa classe, c'est-à-dire les situations S_2 possibles. Il a donc une position réflexive par rapport à toutes les S_2 possibles.

4.2 S2, situation de construction

Les conclusions de la situation noosphérienne vont servir de milieu à la situation de construction où P_2 va essayer de faire intervenir la fonction comme outil dans une suite de situations de modélisation et à travers différents registres de représentation. Il essaie donc de trouver des problèmes qui répondent à toutes les contraintes qu'il a définies dans la situation noosphérienne et qu'il pourra effectivement réaliser (projection en S_1 et niveaux inférieurs). Pour cela il consulte les manuels qu'il a analysés, choisit plusieurs problèmes dont celui du manuel Belin (voir annexe), dont il modifie éventuellement les textes en fonction de son milieu M_2 (M''_2 et M'_2 correspondant à la projection de P_2 vers les niveaux adidactiques). Ces choix vont constituer le milieu M''_1 de la situation de projet. Ici P_2 est réflexif d'une part par rapport à S_3 et aux choix qu'il y a faits et d'autre part par rapport à toutes les S_1 restant possibles avec ces choix.

4.3 S1, situation de projet

C'est dans la situation de projet qu'apparaît l'élève. En effet il ne connaîtra rien de tout le travail précédent du professeur et ne verra que le texte produit dans la situation précédente. En réalité, pour le professeur, l'élève est déjà présent dans la situation précédente à travers les conditions définies dans le milieu M_2 : hypothèses sur l'apprentissage (plutôt M''_2) et sur les connaissances disponibles des élèves (plutôt M'_2).

Dans la situation de projet S_1, P_1 choisit un problème, en écrit le texte et organise les interactions que les élèves auront avec ce texte. Il produit le texte du problème que nous avons analysé dans l'analyse ascendante. Il organise le travail en groupes à partir de la réalité concrète de sa classe, prévoit les différentes stratégies que peuvent utiliser les élèves, les erreurs qu'ils peuvent commettre et les difficultés qu'ils peuvent rencontrer, et les aides qu'il apportera éventuellement pendant la résolution sans nuire à l'apprentissage. Il détermine ce que seront les rôles de E_0 et P_0 : ce que E_0 va apprendre et ce que P_0 va institutionnaliser, au niveau du problème proprement dit et à un niveau plus général qui serait celui de l'élève E_1, réflexif par rapport à la situation S_0 : ici l'élève doit apprendre qu'on peut utiliser les fonctions avec leurs différents registres, notamment le graphique, comme outils pour modéliser des situations où on peut repérer des variations liées de deux quantités. Ici, il s'agira de voir que les variations du volume et de la hauteur d'eau sont liées de façon biunivoque et qu'on peut déterminer l'une à partir de l'autre. On peut représenter graphiquement la relation la plus facile à exprimer algébriquement et tirer du graphique des informations sur l'autre variation.

En fait ce type de connaissance, pour qu'il devienne un savoir de l'élève, demandera à être institutionnalisé à partir de plusieurs situations, c'est pourquoi dans les situations de rappel du 2ème type (Perrin-Glorian 1993), je disais qu'il faudrait imaginer un milieu qui contienne plusieurs situations adidactiques, en fait dans ce milieu on aura les connaissances produites dans plusieurs situations adidactiques, déjà institutionnalisées au niveau didactique correspondant et reprises avec les situations adidactiques qu'elles contiennent pour une institutionnalisation de niveau supérieur.
Le produit de S_1 est donc le milieu M''_0 du professeur dans la situation didactique S_0 : la situation prévue, en fait contient le niveau S_0 et le niveau S_{-1} : le professeur doit prévoir aussi

son rôle au moment de la résolution : ses interventions de niveau didactique mais aussi son rôle d'observateur pour jouer le rôle P_0 après la résolution.

On voit que pour le professeur, la position P_1 est vraiment cruciale puisqu'elle contient à la fois les niveaux inférieurs et les niveaux supérieurs : c'est ici que l'analyse ascendante et l'analyse descendante se rejoignent pour lui. En analyse a priori les niveaux inférieurs sont projetés, les supérieurs réalisés. En analyse a posteriori, les niveaux inférieurs sont réalisés, les niveaux supérieurs peuvent correspondre à une projection dans le futur : que va-t-il y modifier compte-tenu de ce qui s'est passé ?

4.4. S_0, situation didactique

Dans la situation S_0, P_0 gère la situation didactique, c'est-à-dire fait la dévolution du problème et institutionnalise les connaissances nouvelles. Il est attentif à ce qu'il a déterminé dans l'analyse a priori mais au moment de la réalisation, il devra aussi prendre en compte ce qu'auront fait les élèves dans la résolution, ce qui suppose, comme l'avait remarqué C. Margolinas qu'il soit présent comme observateur dans la situation d'apprentissage en position P_{-1}. Le milieu du professeur pour la situation didactique se dédouble de façon plus manifeste: il est constitué du milieu M''_0 déterminé par l'analyse descendante, c'est-à-dire issu de son projet a priori mais aussi du milieu ascendant M'_0, c'est-à-dire la situation d'apprentissage, non pas projetée mais vécue cette fois, qui est en revanche le seul milieu présent pour l'élève. Pour l'élève, il y a dans la situation didactique un autre élément dans le milieu, c'est le professeur lui-même et c'est à travers lui que l'élève a un accès aux constituants de l'analyse descendante.

4.5 S-1, situation d'apprentissage

Dans la situation d'apprentissage, le professeur a un rôle d'observateur. Là encore il a un double milieu. Au niveau P_1, il a prévu les situations de niveau négatif pour l'élève : il dispose de sa propre analyse a priori déterminée à travers l'analyse descendante, l'un des milieux est donc cette analyse a priori et ce qu'il projette au niveau didactique. L'autre milieu est constitué des situations S_{-2} qu'il identifie chez les élèves. Il pourra intervenir pour modifier le milieu des élèves et donc la situation dans laquelle ils se trouvent s'il considère qu'elle ne permettra aucun des apprentissages visés. Il se replace alors en position S_0 pour un travail de dévolution. Mais il observe aussi les situations S_{-1} et donc S_{-2} que rencontrent les élèves et intervient éventuellement pour constituer son deuxième milieu quand il sera à nouveau en position S_0 après la résolution, pour l'institutionnalisation.

5 . ANALYSE A PRIORI ASCENDANTE DU PROBLEME DU MANUEL.

Nous laissons à titre d'exercice l'analyse a priori ascendante du problème du manuel. Du fait de la présence de toutes les questions intermédiaires nécessaires, les élèves vont pouvoir se contenter de rester le plus souvent au niveau de l'action. Le seul endroit problématique concerne la construction (choix de l'échelle notamment) et l'utilisation du graphique (question c_α notamment). Cela est bien en accord avec les objectifs du programme d'utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des problèmes et notamment des problèmes issus des autres disciplines.

6 . ANALYSE A POSTERIORI DU TRAVAIL DU GROUPE 1.

Il serait trop long de donner ici tous les extraits des travaux des élèves qui ont alimenté le travail du groupe. Nous nous contenterons d'esquisser les étapes du travail du groupe et de les relier à l'analyse a priori en la complétant éventuellement. Nous donnons dans l'annexe leur production finale.

Le groupe 1 est constitué de 3 filles et semble assez homogène : tous les élèves participent et il ne semble pas y avoir de leader.

Les élèves calculent d'abord le volume total de l'abreuvoir, ce qui prend une demi-heure. Les discussions sont motivées par la difficulté à articuler les trois registres : celui du langage naturel (base, hauteur, prisme, trapèze), celui des formules et celui des figures. La base de l'abreuvoir est un rectangle représenté par un parallélogramme alors que la base du prisme est un trapèze. De plus la hauteur de l'abreuvoir est celle du trapèze alors que la hauteur du prisme est la longueur de l'abreuvoir, c'est-à-dire la longueur de la base de l'abreuvoir. Le problème se règle par discussion entre les élèves : ici le travail en groupes enrichit le milieu et permet les rétroactions nécessaires, ce qu'un travail individuel n'aurait peut-être pas permis. Un autre problème se pose au niveau des conversions des mètres en décimètres, réglé par des considérations d'ordre de grandeur. Ici le milieu matériel semble jouer le rôle attendu.

Pour résoudre le problème posé, les élèves se placent dans le cadre numérique et divisent le volume total par 12 (nombre d'intervalles de la graduation). Elles trouvent 0,33. Le maître leur demande de vérifier que ça fait 100 l. Elles gardent 8 comme grande base mais comme le volume total est 1120 l et non 1200 l, elles ne trouvent pas 100 l, rejettent 0,33 et font un produit en croix ce qui leur donne 0,357. Le professeur intervient pour demander de vérifier si ça fait 100 l : elles refont le produit en croix, nouvelle intervention du professeur qui demande une vérification par une autre méthode. Elles font le calcul avec 8 pour grande base. Il faut une nouvelle intervention du professeur pour leur faire remarquer que la grande base n'est pas toujours 8. Elle échouent dans le calcul de la grande base et réalisent un dessin à l'échelle pour faire leur vérification et rejeter le modèle proportionnel. Ce faisant, elles ont identifié le problème Q'_2 et c'est à la résolution de ce problème qu'elles consacreront le reste de la séance. En fait elles restent dans le cadre numérique, reconnaissent la progression linéaire ("sur 4, ça va augmenter de 2", puis "ça augmente de 0,5 tous les cm" et "il y a une proportion") et c'est la réponse qu'elles produiront (voir annexe).

Nous voyons que ce groupe a eu un apprentissage sur la proportionnalité. Comme le milieu n'était pas organisé pour cela, l'intervention du maître a été nécessaire à plusieurs reprises. Ils ont appris à valider ou invalider des relations de proportionnalité. A aucun moment les élèves de ce groupe ne travaillent vraiment dans le cadre algébrique même s'ils utilisent x et y dans leur rédaction finale. Ils ont identifié deux variables dépendantes mais le traitement de cette dépendance se fait au niveau numérique. On n'arrive pas à l'expression générale de y en fonction de x. Le milieu activé est celui du calcul numérique avec les techniques de calcul d'une quatrième proportionnelle et ce qui concerne les mesures et les calculs de volume.

7 . ANALYSE A POSTERIORI DU TRAVAIL DE LUDOVIC DANS LE GROUPE 4.

Le groupe 4 est composé de deux garçons et deux filles. Ludovic joue un rôle de leader. Dans un premier temps les filles ont calculé le volume total et les garçons cherchent une équation permettant de trouver h connaissant V. Ludovic détecte l'erreur de conversion des filles par un argument d'ordre de grandeur. Il expose ensuite le problème algébrique : "il y a deux inconnues" (la hauteur d'eau et la grande base du trapèze) "et même trois avec le volume!". La connaissance du volume total leur permet de trouver une deuxième relation : "volume plein + volume vide = volume total". Ludovic expose à ses partenaires admiratifs comment il a calculé le volume plein avec x et h puis le volume vide avec x et 4 - h et qu'il n'y a plus qu'à utiliser la relation précédente pour trouver la deuxième équation qui se ramène en fait à exprimer x en fonction de h (voir production finale du groupe en annexe). La substitution ne pose pas de problème et les élèves se ramènent à la résolution d'une équation du second degré, ce qu'ils font par mise sous forme canonique. Le brouillon de Ludovic (voir annexe) permet de se rendre compte de l'apprentissage qui se fait à propos de la résolution des équations du second degré : la résolution détaillée de la première équation en 12 lignes est d'abord condensée en 4 lignes avant d'être reprise pour la deuxième valeur du volume (200). A partir de la troisième valeur du volume, Ludovic écrit directement la réponse en changeant ce qui doit l'être dans la résolution précédente. La production finale du groupe comprend le dessin de la jauge à l'échelle demandée.

Les autres élèves interagissent avec Ludovic et suivent ce qu'il fait mais Ludovic mène clairement l'ensemble du groupe, c'est pourquoi nous référons l'analyse a posteriori à son travail. Il se place dans le cadre de la résolution des équations, ce que nous avons appelé la voie 3 dans l'analyse a priori. Les connaissances qu'il a dans ce cadre constituent bien un milieu pour sa résolution du problème et il apprend sur la résolution des équations du second degré. Il n'active pas le sous-cadre de l'expression algébrique de fonctions pour exprimer une variation même s'il dit "il faut que je trouve un rapport avec cette longueur là et cette hauteur là" quand il constate qu'il a deux inconnues. C'est bien une connaissance du sous-cadre de la résolution des équations qui est activée : si j'ai deux inconnues, il me faut deux équations. Ce n'est que tout à la fin, en entendant parler de graphique à une table voisine (activation par une intervention extérieure d'une partie du milieu potentiel et donc modification du milieu de référence) qu'il s'aperçoit qu'il aurait pu très facilement exprimer x en fonction de h. D'ailleurs l'usage du x pour désigner la longueur lui fait commettre une erreur et il corrige en renommant ses inconnues : x pour la hauteur et y pour la grande base du trapèze. On voit là que c'est un certain usage des fonctions, avec certaines notations qui fait partie du milieu (des pratiques autour des fonctions). Le cadre fonctionnel pour Ludovic est organisé autour de pratiques et d'écritures permettant de mettre en œuvre ces pratiques à propos d'objets institutionnels pour résoudre des problèmes où ils interviennent de façon pertinente.

CONCLUSION

Avant de conclure, donnons un aperçu rapide du travail des deux autres groupes. Le groupe 2 commence par utiliser le produit en croix mais ce calcul est rejeté par les élèves eux-mêmes qui pensent que la graduation ne peut pas être régulière à cause de la forme de l'abreuvoir. Le professeur les aide à identifier la variable grande base pour sortir de l'impasse. Il calculent alors le volume pour les 4 valeurs entières de la hauteur en déterminant la grande base par Thalès. Ils restent dans le cadre numérique (ébauche de voie 2). A la fin de la séance quelques-uns des élèves du groupe commencent une démarche algébrique qu'ils n'ont pas le temps de finir. Le groupe 3 calcule le volume total et se rend compte très vite que la grande base y varie en fonction de la hauteur x et qu'ils ont donc deux inconnues. Pour n'avoir qu'une inconnue, ils cherchent à exprimer la grande base en fonction de la hauteur. Ils reconnaissent une fonction affine "c'est pas ça qui est proportionnel, c'est l'augmentation qui est proportionnelle" et expriment le volume en fonction de la hauteur. Ils veulent alors résoudre l'équation du second degré mais bloquent sur la mise sous forme canonique. L'enseignant les oriente vers la représentation graphique de la fonction et la résolution graphique du problème.

L'analyse a posteriori que nous avons menée n'est qu'ébauchée et il y manque ce qui concerne le rôle de l'enseignant. Nous manquons de temps et de place pour la compléter. L'étude de cet exemple nous a amenée à poser quelques questions et à suggérer quelques précisions à propos de l'utilisation de la notion de milieu et de sa structuration dans l'analyse des situations didactiques. Le lecteur comprendra que les propositions de la première partie, illustrées sur l'exemple, sont soumises au débat dans la communauté des chercheurs et ne sont donc pas à prendre comme des vérités. Le but de cet exposé est de susciter la réflexion en montrant comment on peut utiliser et interroger tout à la fois un cadre théorique.

REFERENCES

BROUSSEAU Guy, 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7 n°2 pp. 33-115, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU Guy, 1990, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n°3 pp. 309-336, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU Guy, CENTENO Julia, 1991, Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 11 n°2.3 pp. 167-210, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

CHEVALLARD Yves, 1989, Le concept de rapport au savoir, *Séminaire Didatech* 1988-1989

CHEVALLARD Yves, 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 12 n°1 pp. 73-111, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

GRENIER Denise, 1998, Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques, *Actes des deuxièmes journées de La Fouly,* Interactions didactiques, Genève.

MARGOLINAS Claire, 1994, Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire Didatech* n°158, année 1993-1994, p.27-83

MARGOLINAS Claire, 1995, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in MARGOLINAS Claire, *Les débats de didactique des mathématiques,* annales 1993-1994, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, 1993, Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 13 n°1.2 pp. 5-118, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

PIHOUE Didier, 1996, *L'entrée dans le mode de pensée fonctionnel en classe de seconde,* mémoire de DEA, équipe DIDIREM, IREM de Paris 7.

ROBERT Aline, 1998, Outils d'analyse des contenus mathématiques enseignés au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, p.139-189.

ANNEXES

Le problème de l'abreuvoir

Un abreuvoir a la forme d'un prisme droit de longueur 4 m dont les extrémités intérieures sont deux trapèzes isocèles isométriques de petite base 6 dm, de grande base 8 dm et de hauteur 4 dm.

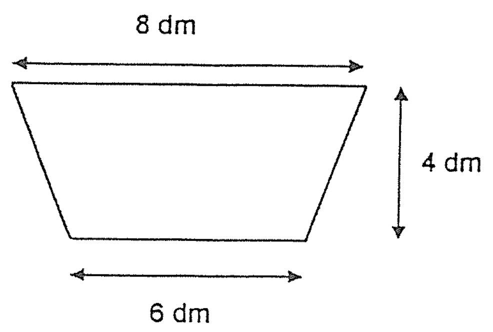
Une jauge est placée verticalement contre l'un des trapèzes.

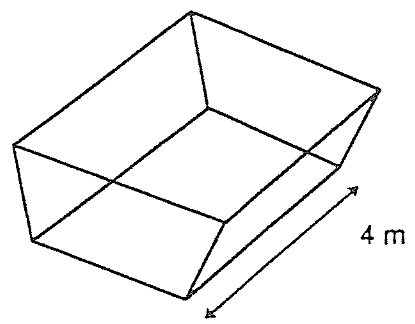
On se propose de la graduer, c'est à dire de préciser le niveau de liquide correspondant à 100, 200, 300, ...etc litres (par exemple).

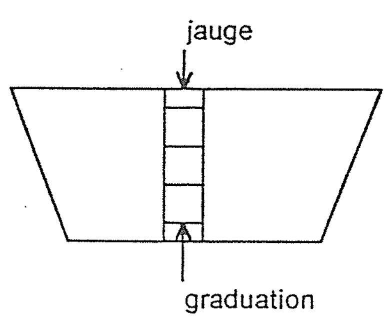
QUESTION :

Etablir à l'échelle ½ la graduation à tracer sur la jauge de l'abreuvoir.

SCHEMAS :







problème de l'abreuvoir

Construction de la situation

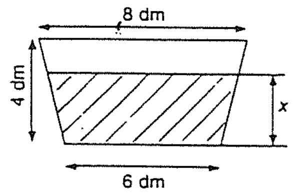
Cette situation fonctionnelle provient du manuel « Math 2de » de l'éditeur Belin. Elle y figure, au numéro 46 de la page 203, sous la rubrique problèmes du chapitre intitulé : « Fonctions carré et cube. Variations et parité ». Nous en avons modifié la formulation. Les phrases de notre énoncé sont toutes extraites du texte original et les schémas que nous insérons sont inspirés de ceux du livre de seconde. La mention « par exemple », qui clôt la graduation de notre énoncé, a été ajoutée par nos soins pour suggérer la recherche d'une solution générale au problème.

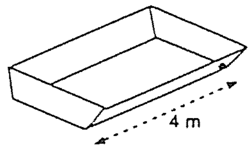
Sous la forme que nous proposons, il s'agit d'une situation fonctionnelle telle que nous l'avons définie lors de l'analyse des principaux manuels en usage dans les classes de seconde des lycées. Elle comporte des variations, deux variables principales prégnantes et il s'agit d'un problème, a priori, non fonctionnel. Elle répond à des conditions favorisant la dialectique outil / objet : l'énoncé a du sens pour les élèves, il fait référence à une réalité palpable car on peut imaginer une baignoire à la place de l'abreuvoir ; il n'y a pas de référence à une fonction dans l'énoncé et les élèves peuvent entrer dans le problème sans son intermédiaire ; l'introduction d'une fonction est un outil adapté à la résolution du problème. Enfin, l'énoncé est ouvert au sens qui nous intéresse, c'est-à-dire celui de la modélisation d'une situation par une fonction.

Nos objectifs sont d'observer les comportements des élèves en autonomie face à un problème « ouvert » et comportant des variations, puis de les décrire en termes de mode de pensée. Nous pensons parvenir ainsi à mieux les comprendre et à isoler des phases de transition avec des changements de cadres et de registres associés.

Problème du manuel Belin "Math 2de"

46. a. Un abreuvoir a la forme d'un prisme droit de longueur 4 m dont les extrémités intérieures sont deux trapèzes isocèles isométriques de petite base 6 dm, de grande base 8 dm et de hauteur 4 dm.
On désigne par x la hauteur de l'eau dans l'abreuvoir.
x varie de 0 à 4 ; 4 dm étant la hauteur de l'abreuvoir.

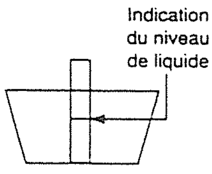




α. En utilisant la propriété de Thalès, calculer en fonction de x l'aire hachurée.

β. Si x est la hauteur, exprimée en décimètres, de l'eau dans l'abreuvoir, calculer le volume d'eau exprimé en litres, noté $v(x)$. Vérifier que l'on obtient $v(x) = 240x + 10x^2$.

b. Une jauge est placée verticalement contre l'un des trapèzes.
On se propose de la graduer, c'est-à-dire, de préciser les niveaux de liquide correspondant à 100, 200, 300, ... litres.
Pour graduer la jauge de l'abreuvoir, on veut tracer la représentation graphique de la fonction v définie sur [0 ; 4] par $v(x) = 240x + 10x^2$.



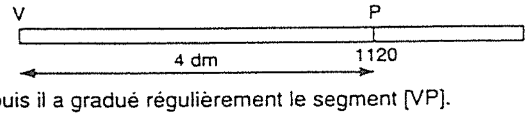
α. Programmer la calculatrice et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$v(x)$	0								1120

Représenter les points de coordonnées (x ; $v(x)$) dans un repère orthogonal convenablement choisi.
Relier les points obtenus par une courbe régulière (on affinera éventuellement le tracé en calculant des valeurs intermédiaires).
On a ainsi représenté la fonction v sur l'intervalle [0 ; 4].

β. Utiliser la courbe pour lire des valeurs approchées du nombre x correspondant aux valeurs suivantes de $v(x)$: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000, 1 100.
Établir à l'échelle 1/2, la graduation à tracer sur la jauge de l'abreuvoir.

c. Un utilisateur, peu mathématicien, a constitué la jauge de la manière suivante :



puis il a gradué régulièrement le segment [VP].

α. Quel est le nombre $w(x)$ marqué à la distance x (en dm) du point V ?
Représenter, sur le graphique de la question **b.** de l'activité, la fonction $x \mapsto w(x)$.
Prouver que l'erreur $e(x) = w(x) - v(x)$ commise pour chaque valeur de x est $e(x) = 10x(4 - x)$.
Indiquer comment il est possible de la lire graphiquement.

β. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e(x)$ sur le même graphique que celui utilisé pour les fonctions v et w. Lire graphiquement la valeur de x pour laquelle l'erreur est maximale. Justifier ensuite par le calcul le résultat obtenu graphiquement.

PRODUCTION DU GROUPE 1

Le problème de l'abreuvoir.

Aire trapèze $= \dfrac{B+b}{2} \times h$

$= \dfrac{8+6}{2} \times 4$

$= 7 \times 4$

$= 28 \text{ dm}^2$

$V = B \times h$

$= 28 \times 40$

$= 1120 \text{ dm}^3$

$1 \ell = 1 \text{ dm}^3$ donc $1120 \text{ dm}^3 = 1120 \ell$.

$0 < x < 4$ et $6 < y < 8$

Pour $x = 1$ $y = 6,5$

Soit x la hauteur recherchée et y la base variant en fonction de la hauteur

Pour $x = 2$ $y = 6,5 + 0,5 = 7$

Pour $x = 3$ $y = 7 + 0,5 = 7,5$

$240h + 10h^2 = 100$

$240h + 10h^2 - 100 = 0$

$10h^2 + 240h - 100 = 0$

$10(h^2 + 24h - 10) = 0$

$10(h^2 + 12 \times 2 \times h - 10) = 0$

$10(h^2 + 24h + 12^2 - 154) = 0$

$10(h+12)^2 - 1540 = 0$

$10(h+12)^2 = 1540$

$(h+12)^2 = 154$

$h + 12 = \sqrt{154}$

$h = \sqrt{154} + 12$

$h = 12\sqrt{10} - 12$

~~$240h + 10h^2 = 100$~~

~~$24h + h^2$~~ $= 10$

~~$h^2 + 24h - 10 = 0$~~

~~$(h+12)^2 - 154 = 0$~~

~~$(h+12)^2 = 154$~~

~~$h + 12 = \sqrt{154}$~~

~~$h = 12\sqrt{10}$~~

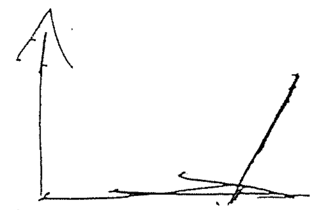
~~$h = \sqrt{154} + 12$~~

$240h + 10h^2 = 100$

$h^2 + 24h = 10$

$(h+12)^2 - 144 = 10$

$h = \sqrt{154} - 12$

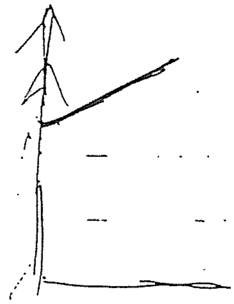


$240h + 10h^2 = 200$

$h^2 + 24h = 20$

$(h+12)^2 - 144 = 20$

$h = \sqrt{164} - 12$ 200

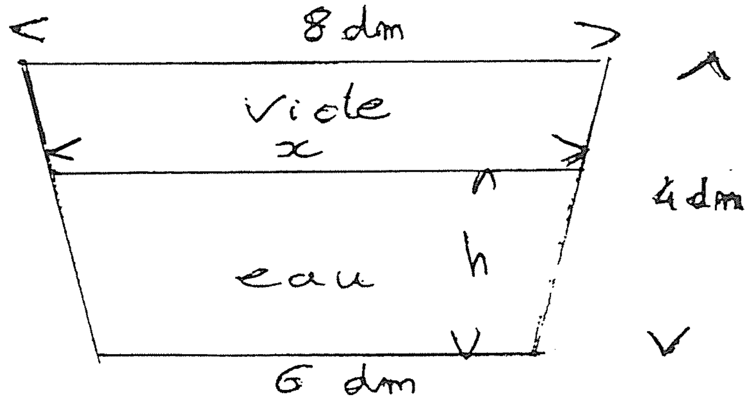


$h = \sqrt{174} - 12$	300	11,9
$h = \sqrt{184} - 12$	400	15,65
$\sqrt{194} - 12$	500	19,28
$\sqrt{204} - 12$	600	22,83
$\sqrt{214} - 12$	700	26,29
$\sqrt{224} - 12$	800	29,67
$\sqrt{234} - 12$	900	32,97
	1000	36,2

$y = \frac{1x}{2} + 6$

$x = \frac{1h}{2} + 6$

PRODUCTION DU GROUPE 4



$$v_{eau} = \left(xh - \frac{(x-6)\cdot h}{2}\right) \times 40$$

(Tous les volumes sont en dm^3)

$$v_{eau} = \left(xh - \frac{xh - 6h}{2}\right) \times 40$$

$$v_{eau} = \left(\frac{xh}{2} + 3h\right) \times 40$$

$$v_{eau} = h\,(20x + 120)$$

$$v_{vide} = \left(8\,(4-h) - \frac{(8-x)(4-h)}{2}\right) \times 40$$

$$v_{vide} = \left(32 - 8h - \frac{32 - 8h - 4x + xh}{2}\right) \times 40$$

$$v_{vide} = \left(16 - 4h + 2x - \frac{xh}{2}\right) \times 40$$

$$v_{vide} = 640 - 160h + 80x - 20xh$$

$$v_{eau} + v_{vide} = v_{total}$$

$$h\,(20x + 120) + (640 - 160h + 80x - 20xh) = v_{total}$$

$$20xh + 120h + 640 - 160h + 80x - 20xh = 1120$$

$$-40h + 640 + 80x = 1120$$

$$80x = 1120 - 640 + 40h$$

$$x = 14 - 8 + \frac{h}{2}$$

$$x = 6 + \frac{h}{2}$$

$$V_{eau} = h \times (20x + 120)$$

je remplace x par $6 + \frac{h}{2}$

$$V_{eau} = h \times \left(20\left(6 + \frac{h}{2}\right) + 120\right)$$

$$V_{eau} = h \times (120 + 10h + 120)$$

$$V_{eau} = 240h + 10h^2$$

Je détermine la hauteur h pour $V_{eau} = 100$ l

$$240h + 10h^2 = 100$$

$$h^2 + 24h = 10$$

$$(h + 12)^2 - 144 = 10$$

$$(h + 12)^2 = 154$$

$$h + 12 = \sqrt{154}$$

$$h = \sqrt{154} - 12$$