

Vendredi 25 août 1989

**Conférence : "Rationalité scientifique et rationalité quotidienne face au problème de la preuve en mathématiques"**

par Marc **LEGRAND**

Université J. Fourier, GRENOBLE

Cet exposé se situe à la suite du cours de G. Arsac "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France". Il se propose de pointer un aspect particulier, mais néanmoins central (à mon sens) de ce domaine.

Il s'agit ici de mettre en exergue une hypothèse qui était implicitement à la base des recherches menées par l'équipe "Apprentissage du raisonnement" IREM de Grenoble (1985) et du groupe "Didactique de l'analyse dans l'enseignement supérieur" M. Legrand et all (1988), hypothèse qui ne semble pas prise en compte dans l'organisation dominante des enseignements scientifiques et qui nous a conduit à construire pour en étudier les effets le système didactique du "débat scientifique en situation de cours".

Cette hypothèse ne semble pas non plus être à la base des expériences rapportées par N. Balacheff (1988) dans sa thèse, en particulier en ce qui concerne les travaux menés avec G. Arsac dans le groupe du "problème ouvert" de l'IREM de Lyon, (G. Arsac, G. Germain, M. Mante 1988) et c'est paradoxalement ces expériences qui, confrontées aux nôtres, me permettent d'en donner aujourd'hui une formulation plus précise.

### **Le problème de la question épistémologique préalable.**

Quand, à la fin d'une "belle démonstration", Karine, élève de seconde, pose la terrible question: "Madame, tout ça..... à quoi ça sert ?", les élèves et le professeur hésitent un instant et se regardent : faut-il renchérir ou rire bruyamment pour se désolidariser de Karine, ou du professeur ? ou bien se replier dans un silence mélodramatique, interrogateur ou complice ?

Il est clair que ne pas répondre à l'(im)pertinente question de Karine, c'est assurément fermer la porte du sens et de la compréhension à tous ceux pour lesquels ce problème du rapport des mathématiques aux autres domaines de réalité est premier et consubstantiel de tout engagement intellectuel; il est clair aussi que vouloir y répondre au coup par coup, c'est se lancer dans une entreprise qui va se révéler à chaque instant de plus en plus acrobatique et incertaine.

En effet, nous pensons que la question de Karine, bien que totalement justifiée de son point de vue (c'est plutôt l'absence de telles questions qui est inquiétante), ne peut pas admettre de réponse satisfaisante dans le cadre où elle est posée. Les affirmations générales du type "les mathématiques servent partout!" ou encore "les mathématiques forment l'esprit" sont reçues comme de véritables provocations par ceux qui éprouvent des difficultés à les comprendre; les réponses plus précises qui tentent d'expliquer le rôle de la rigueur dans telle ou telle application et par suite de justifier localement les activités de définition, d'axiomatisation, de preuve avec intention d'universalité, i.e. la construction de démonstrations, sont en général très peu convaincantes pour l'élève qui n'est pas déjà entré dans une problématique scientifique. Ces explications sont donc le plus souvent considérées comme une injonction scolaire, comme un truc (carotte ou bâton) de prof de math pour faire travailler les élèves en imposant ses manies professionnelles.

En définitive, l'élève qui pose avec insistance ce genre de question épistémologique comme une question préalable à son engagement scientifique, se persuade au fil des années qu'on ne lui apportera jamais de vraie réponse ! Parce qu'on ne veut pas ? parce qu'on ne peut pas ? parce qu'il n'y a pas de réponse ? (Les mathématiques ne seraient-elles pas alors cette activité "absurde" qui ne sert à rien d'autre qu'à sélectionner ceux qui acceptent de la pratiquer sans se poser la terrible question du "à quoi ça sert?" Telle est malheureusement la trace que l'on retrouve bien souvent dans l'imagerie sociale.)

### **Rationalité du quotidien et rationalité scientifique.**

Nous analysons l'impossibilité de répondre directement à la question fondamentale "à quoi ça sert" de la façon suivante :

Quand Karine pose cette question de nature épistémologique, elle se place essentiellement dans son système de valeur personnel avec sa problématique et tout le système de raisonnements (par moment très complexes et apparentés à ceux de la logique mathématique) qu'elle s'est

progressivement forgé pour s'expliquer le monde qui l'entoure, résoudre ses problèmes quotidiens, comprendre et maîtriser ses échanges avec les autres; elle se place donc dans une rationalité que j'appellerai ici rationalité du quotidien et elle entend que le professeur lui réponde sur ce terrain.

Or en restant dans cette rationalité on ne peut lui apporter de réponse satisfaisante, car la rigueur introduite en sciences, notamment dans la construction de preuves et de démonstrations mathématiques, et les critères de vérité sur lesquels on s'appuie (critères établis dans une perspective de généralité et d'universalité qui engendre une autre forme de rationalité : la rationalité scientifique) ne se justifient pas rationnellement dans le contexte de la vie courante, puisqu'ils ne sont pour ainsi dire jamais adaptés et performants pour résoudre les problèmes privés. Evoquer les mécanismes de preuve scientifique comme des recours accessibles dans un tel contexte conduit donc inévitablement à faire soit de la publicité mensongère, soit de la contre-publicité.

Le paradoxe didactique est alors le suivant : pour pouvoir répondre réellement et de façon pertinente à la question de Karine, il faudrait qu'elle soit déjà entrée dans cette autre rationalité qui est celle des scientifiques en général et des mathématiciens en particulier; or, vu son exigence épistémologique, elle ne peut accéder à cette rationalité-là puisqu'on n'a pas pu répondre de façon honnête et convaincante à sa question existentielle !

**Le problème de didactique des sciences** qui se pose alors est le suivant : par quel type de contraintes didactiques l'élève peut-il saisir ce qui fonde ces différents types de rationalité, afin de pouvoir passer à bon escient d'une rationalité à une autre?

En dehors de la didactique archaïque des sciences qui ne se préoccupe pas de ce problème parce qu'elle suppose qu'on apprend les sciences essentiellement par monstration, par imitation et par répétition, il est clair que les systèmes didactiques plus évolués envisagés pour tenter de le résoudre seront grandement fonction des hypothèses qui seront faites sur les rapports qu'entretiennent ces deux types de rationalité.

#### **Première hypothèse:**

Si on suppose que ces deux rationalités sont en filiation (la rationalité scientifique serait un affinement, un approfondissement, un enrichissement de la rationalité du quotidien), un premier niveau de réponse à ce problème semble pouvoir être apporté par ce que j'appellerai ici **"un système didactique canonique de formulation de conjectures et de débat de validation"**.

Il s'agit par là de désigner une organisation pédagogique commune à de très nombreuses expériences didactiques menées ces dernières années sur la base du modèle cognitif constructiviste et sur la théorie des situations de G. Brousseau (1987).

Les points communs de ces systèmes didactiques sont regroupés dans le schéma suivant:

- A partir de situations problématiques qui entretiennent le plus souvent un rapport étroit avec des problèmes concrets ou des problèmes d'apparence simple ou proches de situations familières,

- les élèves ont une consigne de travail qui les pousse à formuler des conjectures révélant ce qu'ils pensent personnellement être vrai, (par exemple, il n'est jamais précisé qu'il y a "une bonne réponse" qu'ils doivent savoir);

- il est organisé un débat entre deux, un petit groupe d'élèves ou la classe entière, c'est-à-dire entre pairs (le maître et/ou l'observateur essayant de garder une certaine neutralité scientifique pour que joue la contrainte épistémologique, la recherche de preuve dans ce cas étant la réponse normale à l'incertitude sur la validité des résultats proposés);

- la situation d'interaction sociale est gérée de façon à faciliter l'apparition de contradictions et de demandes d'explications qui conduisent les partenaires à pousser plus loin leurs raisonnements, à les formuler et à les expliciter, et finalement les rapprochent épistémologiquement de certaines contraintes de la démonstration. (L'injonction magistrale: "justifiez votre réponse, démontrez que.. etc." est en principe exclue des interventions de l'enseignant, même sous la forme interrogative persistante: "êtes-vous bien sûr que c'est juste", et ce, afin de ne pas pervertir la signification des actions de preuve et de démonstration engagées.)

- Des phases d'institutionnalisation sont organisées à certaines étapes du débat et peuvent servir de point de départ à une nouvelle séquence.

### **Les limites de cette hypothèse montrées par ce dispositif.**

Un tel dispositif didactique est présent dans le "système du débat scientifique en situation de cours" étudié à Grenoble, comme il l'est dans la plupart des expériences analysées par N. Balacheff dans sa thèse et en particulier dans le "système du problème ouvert" de l'équipe de Lyon. On constate dans toutes ces expériences qu'un tel système permet effectivement à de nombreux élèves (y compris ceux qui sont en retrait des activités mathématiques traditionnelles) de s'investir parfois très fortement dans la recherche de solutions, et que le débat qui s'engage entre pairs est le plus souvent riche de potentialités scientifiques.

Toutefois il semble que si on ne rajoute pas de contraintes à ces systèmes didactiques, ils ne permettent pratiquement jamais de faire émerger la rationalité mathématique comme une nécessité. Les élèves se contentent de traiter les cas particuliers ou moyennement généraux qui s'imposent à eux et c'est très souvent l'observateur ou l'enseignant qui ne pouvant résister à la pression déontologique (on est en cours de math quand même!) se sent obligé d'intervenir : rompant la consigne de neutralité scientifique et de non-intervention magistrale qui avait été explicitement convenue, il relance le jeu vers les mathématiques en rappelant la règle d'universalité non institutionnalisée ("ça doit marcher pour toutes les figures, etc."), alors que précisément la situation didactique, notamment la production de contre-exemples par un pair, aurait dû naturellement pousser l'élève vers une recherche de plus grande généralité de ses solutions.

On remarquera que dans tous ces cas (excepté celui qui caractérise le système du débat scientifique de Grenoble) il n'est pas fait officiellement référence aux règles de fonctionnement d'une communauté scientifique, il n'est pas organisé en début d'année ou en début d'expérience de séquences spéciales méta-mathématiques (voir l'atelier Circuit) qui auraient eu pour fonction d'institutionnaliser dans la classe les règles spécifiques du débat mathématique.

Dans les conclusions de sa thèse, N. Balacheff constate à propos du traitement des réfutations :

"Le seul point sur lequel nous pensons pouvoir avancer une hypothèse est celui qui concerne le rôle joué par la "robustesse" des conceptions mobilisées par les élèves. Alliée à un domaine de "taille" significative de la conjecture en question, cette robustesse conduit à privilégier les traitements revenant à la mise à l'écart du contre-exemple : exception, exclusion du domaine de validité des objets dont le contre-exemple paraît être un représentant, etc.

Le traitement d'une réfutation ne conduit pas nécessairement à une remise en question des fondements de la conjecture comme on pouvait le penser a priori, notamment lorsque celle-ci est fondée sur un empirisme naïf. "

Ainsi on peut observer que le mouvement naturel de l'élève face à une situation problématique qui sollicite fortement ses convictions intimes serait plutôt celui qu'on observe dans les interactions sociales ordinaires : "rejet de celui ou de ce qui provoque la contradiction plutôt que tentative d'analyse et d'approfondissement de ses propres convictions pour tenir compte et dépasser la contradiction."

Il semble donc que la règle mathématicienne qui attribue force de loi au contre-exemple ne puisse apparaître comme une nécessité de la rationalisation des problèmes, fussent-ils déjà mis sous une forme très mathématisée.

N. Balacheff écrit d'ailleurs, quelques lignes plus loin : "Ainsi le fait d'entrer dans une dialectique de la validation ne suffit-il pas à lui seul à permettre une évolution des processus de preuve engagés. L'étude que nous avons réalisée au chapitre IV montre bien que le progrès ne peut provenir que d'une problématisation du sens de la contradiction, ou encore d'une remise en question ou d'une réorganisation des conceptions des élèves qui ne va pas de soi."

### **Une deuxième hypothèse:**

L'ensemble de ces travaux renforcent donc notre hypothèse de base sur la non-filiation de ces différents types de rationalité, hypothèse qui semble néanmoins totalement ignorée dans les coutumes didactiques dominantes.

En effet, si on regarde ce qui se produit dans les enseignements scientifiques, on observe le plus souvent que tout se passe comme s'il n'y avait pas plusieurs, mais une seule rationalité : la rationalité scientifique qui pourrait éventuellement suivant les circonstances jouer un rôle plus ou moins important.

Pour preuve de la généralité et de la prégnance de ce point de vue, on peut constater qu'avant la classe de quatrième l'organisation des enseignements est faite de telle sorte que l'élève puisse le

plus souvent bien réussir en mathématiques tout en mettant en œuvre des raisonnements très voisins de ceux qui lui sont nécessaires dans la résolution des problèmes de la vie courante, et que brutalement en quatrième le jeu mathématique change radicalement dans ses règles et dans ses critères et que c'est résolument dans la rationalité du mathématicien qu'il faudrait se placer pour résoudre en compréhension les problèmes posés.

Jusqu'à ces dernières années la filiation semblait tellement naturelle qu'il suffisait de décréter ce changement dans les programmes pour qu'il se produise effectivement dans la réalité de l'enseignement.

En fait, indépendamment des rejets scolaires que provoque ce passage subrepticement négocié d'une rationalité à une autre, toutes les observations que nous avons pu effectuer de la sixième à la préparation à l'agrégation nous ont montré que ce miracle (de passage spontané ou "à l'usure" d'une rationalité à une autre) ne se produisait que très rarement et que sur un très petit nombre d'individus.

Ce qui permet néanmoins au système didactique classique de survivre à cette réduction du problème, c'est la mise en place dans les différentes disciplines scientifiques de conditions d'enseignement qui rendent crédible l'existence d'une certaine rationalité scientifique dans le comportement des élèves. En effet, si on ne regarde pas comme des contraintes de raisonnement extrêmement fortes les indications qui sont données dans les exercices et problèmes qui contrôlent l'activité personnelle de l'élève, on peut "objectivement" lire une rationalité scientifique là où le plus souvent il n'y a qu'application d'une consigne ou répétition d'une activité maintes fois montrée. (Ceux qui rédigent les problèmes d'examen le savent bien, même s'ils ne le reconnaissent pas nécessairement.)

#### **Reformulation de cette hypothèse sous forme de thèse.**

Cet ensemble de faits me pousse donc à défendre la thèse suivante : "Les rationalités quotidienne et scientifique sont tellement différentes dans leurs fondements épistémologiques qu'il faut au niveau didactique considérer comme une variable déterminante des apprentissages scientifiques le fait d'atténuer leurs différences ou au contraire de les mettre en exergue."

L'adoption de cette thèse permettrait de sortir de l'illusion naturaliste de la transparence entre réel et modèle et d'abandonner la croyance en une sorte de genèse spontanée de la seconde rationalité par simple amélioration et sophistication de la première. De ce fait on pourrait mieux exploiter les "systèmes didactiques canoniques" précédemment évoqués qui ont effectivement la vertu de forcer l'élève à affiner, à enrichir et à approfondir sa rationalité quotidienne.

Il faudrait alors compléter ces systèmes pour permettre à l'élève de confronter dans l'action ces différents types de rationalités, afin que progressivement la rationalité scientifique se distingue dans sa spécificité.

En reprenant la terminologie de Y. Chevallard (1989), on peut affirmer que cette distinction est nécessaire à l'élève pour qu'il puisse "établir un rapport personnel aux objets de savoir scientifique enseignés qui soit idoine aux rapports institutionnels correspondants."

En effet, comme il est clair que dès la classe de quatrième les rapports institutionnels sont conçus presque exclusivement dans la rationalité mathématicienne, il ne peut y avoir identité avec un rapport personnel qui se situerait lui essentiellement au niveau de la rationalité quotidienne : les rapports aux mêmes objets de savoir n'étant plus fondés sur les mêmes bases épistémologiques, ils ont toutes les chances de diverger au niveau du sens, même s'il y a convergence de forme.

C'est à partir de cette hypothèse que nous avons construit le système didactique du débat scientifique en cours (Voir Atelier circuit et M. Legrand 1988). Le pari qui est fait dans cette construction didactique est que l'individu plongé dans ce débat "de type scientifique" accepte dans un premier temps de s'assujettir (Chevallard 1989) en tant qu'élève aux formes mathématiques strictes imposées à certaines étapes de ce débat (ce qui, à ce stade, semble peu différent de la méthode d'enseignement de la démonstration par accoutumance à l'emploi de règles formelles) et que c'est la consistance épistémologique de l'ensemble de ce débat qui permettra de transmuter cet assujettissement du scolaire vers le scientifique : la manipulation par l'élève et par ses camarades d'une forme d'argumentation mathématique mise en confrontation et en concurrence avec des formes d'argumentations plus quotidiennes pour avancer dans la résolution de problèmes de nature scientifique "doit" révéler une supériorité très nette de la première (par exemple quand elle permet de débusquer les naïvetés et de dépasser les faux paradoxes propres à la seconde).

Ce pari sera considéré comme gagné lorsque l'élève éprouvera le besoin de distinguer ce qui dans un problème naïf peut devenir un problème de nature scientifique et saura d'expérience qu'il ne peut espérer aller bien loin dans la résolution du problème général sous-jacent sans s'astreindre à une reformulation scientifique qui lui interdira de le traiter dans la rationalité du quotidien. Il saura ainsi d'expérience qu'en restant dans le cadre des formulations vagues et chargées d'affectivité et des raisonnements qui lui sont les plus coutumiers il ne pourra, au niveau d'une certaine généralité, dépasser le stade des opinions et des affirmations péremptoires qui font le bonheur des conversations du café du commerce. (Certains exercices proposés à l'école d'été de didactique de Plestin les Grèves, par exemple "le forum des problèmes, questions naïves" correspondaient, me semble-t-il, à cette problématique : remplacer les termes élèves, mathématiques et café du commerce respectivement par professeurs de mathématiques, didactique des mathématiques et salle des professeurs.)

Il est clair que des systèmes didactiques de type "débat scientifique en cours" ne jouent le rôle qu'on vient de leur attribuer, c'est-à-dire ne permettent à l'élève de découvrir en quoi consiste la rationalité scientifique et l'intérêt qu'il a à l'adopter pour résoudre certains types de problèmes, que s'ils sont par eux-mêmes une réponse permanente à la question fondamentale de Karine "à quoi ça sert?"; "par eux-mêmes" signifiant que la mise en demeure de l'élève sommant l'enseignant de se justifier, perd sa raison d'être dans la mesure où la question épistémologique préalable devient le moteur des actions et ne peut de ce fait prendre un caractère revendicatif externe : cette question est devenue communautaire, voire réflexive ("pourquoi as-tu, avons-nous, ai-je fait ceci ou dit cela dans ce cas précis? est-ce pertinent, pratique, utile, nécessaire, juste, fondé, etc. ?).

Il nous reste sur ce plan beaucoup de de travail de recherche à effectuer pour expliciter sous quelles conditions ce type de questionnement (que nous croyons savoir provoquer dans des situations bien particulières) peut devenir la pratique courante d'une classe de mathématiques.

#### BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. GERMAIN G. MANTE M. (1988), Problème ouvert et situation problème, publication de l'IREM de Lyon et du LIRDIS. Université Lyon 1.

BALACHEFF N. (1988) : Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège. Thèse d'état. Grenoble Université J. Fourier.

BROUSSEAU G. (1987) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, vol 7. 2, p. 33-115.

CHEVALLARD Y. (1989): Le concept de rapport au savoir, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 13 Marseille.

IREM de Grenoble (1985): Apprentissage du raisonnement, Publication de l'IREM de Grenoble, Université J. Fourier.

LEGRAND M. (1988) : Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique: le débat scientifique en situation d'enseignement. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, (C. Laborde éd.) La pensée sauvage, Grenoble.