TROISIEME ECOLE D'ETE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Ateliers du dimanche 8 juillet 1984

animés par:

Yves Chevallard,
Marie-Alberte Johsua
et Alain Mercier

PROBLEMES D'INGENIERIE DIDACTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES DEBUTS DE L'ALGEBRE

Le document ci-après est constitué de la Séquence 1 d'un cours préparé pour la classe de quatrième, ainsi que de son Commentaire (adressé au professeur). Il est souhaitable que les participants en prennent connaissance avant la séance de travail en atelier, laquelle sera construite autour de ce document. Ici encore, il convient de souligner que le texte présenté aux participants, fragment d'un cours couvrant l'ensemble d'une année, ne devrait pas être mis en circulation à l'extérieur de l'atelier pour lequel il est prévu.

Y.C.

SEQUENCE 1

NOMBRES ET LETTRES

SEQUENCE 1

Nombres et lettres

Le domaine de référence est l'ensemble N des nombres entiers.

ACTIVITE 1

Problème 1.1.

Je pense à un nombre impair; je lui ajoute 5. Le nombre que j'obtiens est-il pair ? Est-il impair ? Ou bien est-ce que ça dépend ?

THEORIE 1

En arithmétique on a affaire à des nombres bien déterminés. Par exemple, le problème suivant relève de l'arithmétique en ce sens:

"Je pense au nombre 127; je lui ajoute 5. Le nombre que j'obtiens est-il pair ou impair ?".

En revanche, l'algèbre a affaire à des nombres dont certains peuvent être laissés "indéterminés". Le problème examiné en activité (et laissé en suspens) relève de l'algèbre en ce sens puisque y figure un nombre entier sur lequel on ne possède d'autre information que le fait qu'il est impair (ce peut être 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc.).

La présence de nombres "indéterminés" nous amène à introduire des lettres qui servent de noms pour désigner de tels nombres. Par exemple, dans le problème examiné, on peut désigner par la lettre x le nombre impair "auquel je pense". A partir de ce nom donné au nombre "auquel je pense", on peut alors former un nom du nombre obtenu en lui ajoutant 5, à savoir "x+5". Notre problème peut alors être reformulé ainsi:

"Si x est un nombre impair, le nombre x+5 est-il pair ? Est-il impair ? Ou bien est-ce que ça dépend ?".

Le nom d'un nombre "indéterminé" nous montre certaines propriétés de ce nombre. Ainsi le nom "x+5" nous montre que le nombre x+5 est supérieur à x (puisque ce nombre est égal à x plus un nombre strictement positif, à savoir 5); il nous montre encore que x+5 est supérieur à 5. En revanche le nom "x" du nombre x ne nous montre pas si x est pair ou impair; il en est de même du nom "x+5" en ce qui concerne le nombre x+5.

Si l'on nomme x le nombre "auquel je pense", le nombre x+5 possède encore d'autres noms: par exemple "x+2+3", ou "x+1+4", ou "2x-x+5", ou "3x-x-x+5", ou "5x-4x+2+3", etc.

Toutes ces remarques sont valables aussi pour les nombres "déterminés". Ainsi le nombre 10 a pour nom d'abord son nom usuel en écriture décimale (que l'on peut appeler aussi son nom standard), à savoir "10". Mais il possède encore les noms suivants: "8+2", "2x5" (nom qui montre que 10 est un multiple de 5, et aussi un multiple de 2, c'est-à-dire un nombre pair), "1+2+3+4" (nom qui montre que 10 est la somme des quatre premiers nombres entiers non nuls), etc.

EXERCICES 1

Exercice 1

Trouver un nom du nombre (dont le nom usuel est) 16 montrant que ce nombre est un carré. Même question pour 121 et pour 2x24x3.

Exercice 2

Trouver un nom du nombre 16 montrant que ce nombre est la différence de deux carrés.

Exercice 3

Ecrire le nombre 5(3+2) de manière à le faire apparaître comme la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair.

Exercice 4

Choisissez un nombre, prenez son successeur, puis le successeur de son successeur, et ajoutez ces trois nombres. Donnez alors un nom du nombre obtenu montrant que ce nombre est un multiple de 3.

Exercice 5

Soit x un nombre entier. Comment pouvez-vous écrire son prédécesseur y ? Son successeur z ? Trouver alors une écriture du nombre x+y+z montrant que ce nombre est un multiple de 3.

Exercice 6

Soit x un nombre entier. Soit y son prédécesseur, et soit z son successeur. Montrer alors que le nombre y+z est pair.

ACTIVITE 2

Problème 2.1.

Comment nommer un nombre dont nous savons qu'il est pair, de manière que le nom choisi nous montre qu'il est pair ?

Problème 2.2.

Soit x un nombre impair. Son prédécesseur est pair, et s'écrit donc sous la forme 2n, pour un certain entier n. Montrer que l'on a alors x = 2n+1. Inversement, montrer que si un nombre x s'écrit sous la forme 2n+1 pour un certain entier n, alors x est un nombre impair.

Problème 2.3.

Soit n un nombre entier strictement positif. Montrer que le nombre x = 2n-1 est un nombre impair (en montrant que son successeur est pair). Inversement, si x est un nombre impair, montrer que x peut s'écrire sous la forme 2n-1 pour un certain entier n.

Problème 2.4.

En utilisant un nom bien choisi pour désigner l'entier impair x, montrer que x+5 est un nombre pair.

THEORIE 2

A propos de la <u>parité</u> des nombres entiers, on notera que

- 0 est un nombre pair;
- le successeur d'un nombre pair est impair;
- le successeur d'un nombre impair est pair;
- le prédécesseur d'un nombre impair est pair;
- le prédécesseur d'un nombre pair est impair;
- tout nombre pair peut s'écrire sous la forme 2n, pour un certain entier n positif ou nul;
- tout nombre impair peut s'écrire sous la forme 2n+1, pour un certain entier n positif ou nul;
- tout nombre impair peut s'écrire sous la forme 2n-1, pour un certain entier n strictement positif.

En mathématiques, on emploie souvent le verbe "montrer" pour dire "démontrer". Nous avons employé le verbe "montrer" dans un sens plus particulier, en disant que tel nom d'un nombre <u>montre</u> telle ou telle propriété de ce nombre. En fait, il n'y a pas contradiction entre ces deux usages du verbe "montrer": quand on a réussi à obtenir, pour un nombre donné, un nom de ce nombre montrant telle propriété, on a par cela même <u>démontré</u> que ce nombre possède cette propriété.

EXERCICES 2

Exercice 7

Soit n un nombre entier. Montrer, en donnant à n des valeurs particulières bien choisies, que le nombre $x = 3n+1$ est pair ou impair selon les valeurs de n.

Exercice 8

Choisir un nombre impair (exemple: 127), prendre son successeur dans la suite des nombres impairs (129), additionner ces deux nombres impairs (256). Observer que la somme obtenue est divisible par 4. Démontrer, en utilisant un nom bien choisi, que cette propriété est générale (c'est-à-dire est vraie quel que soit le nombre impair choisi).

Exercice 9

Si x est un nombre impair, $x+1$ est pair et $x+2$ est impair. Retrouver ces résultats en partant d'un nom de x montrant qu'il est impair et en formant à partir de là des noms de $x+1$ et $x+2$.

Exercice 10

En utilisant des noms bien choisis, montrer que

- si x et y sont des nombres pairs, le nombre $x+y$ est pair;
- si x est pair et y est impair, $x+y$ est impair;
- si x et y sont impairs, $x+y$ est... ?

Exercice 11

Montrer que la somme de deux nombres pairs consécutifs est un nombre pair qui n'est jamais divisible par 4.

Exercice 12

On considère un nombre entier x et son successeur $x+1$ dans la suite des entiers. Que peut-on dire de la parité de la somme de ces deux nombres ?

SEQUENCE 1: COMMENTAIRE

Séquence 1: commentaire

NOMBRES ET LETTRES

1. Présentation générale

1.1. Objet de la séquence

Cette séquence a pour objet d'amorcer la mise en place de l'outil algébrique, plus exactement de l'outil constitué par le calcul littéral. Le domaine de problèmes dans lequel cet outil est introduit est celui des questions de parité dans l'ensemble N des nombres entiers. D'où le titre de la séquence: "Nombres et lettres".

1.2. Un problème didactique majeur

Le problème didactique majeur auquel nous sommes confrontés dans cette entreprise - et que l'on retrouvera fréquemment par la suite, notamment à propos de l'introduction d'autres sous-objets de l'algèbre: équations, etc. - est essentiellement le suivant: dans les problèmes pour la résolution desquels l'outil algébrique peut être invoqué, cet outil rencontre la concurrence d'autres outils, plus anciennement installés, et qui peuvent en certains cas, effectivement, apparaître à l'élève, au moins à court terme et localement, comme d'un emploi plus efficace et plus facile dans la mesure même il les a mieux en main étant donné leur antériorité dans l'apprentissage.

1.3. Exemple

Supposons que l'on propose à l'élève l'exercice suivant:

> "Montrez que la somme d'un nombre entier quelconque et de son successeur est toujours un nombre impair".

La solution "attendue" - à savoir la solution utilisant l'outil du calcul littéral - consiste ici à répondre:

> "Soit x le nombre entier considéré; son successeur est x+1. La somme des deux nombres est alors:
>
> $$x+(x+1)=2x+1,$$

ce qui montre que la somme est un nombre impair".

Or cette réponse, relativement sophistiquée étant donnée sa nouveauté, peut entrer en rivalité, chez au moins certains élèves (en général parmi les meilleurs, c'est-à-dire manipulant avec le plus d'assurance les outils antérieurement appris), avec une réponse de type "arithmétique", comme celle qui suit (et qui a été effectivement observée:

> "Si le nombre considéré est pair, son successeur est un nombre pair plus 1. Donc la somme est la somme de deux nombres pairs plus 1. C'est donc un nombre pair plus 1, c'est-à-dire un nombre impair. Si le nombre considéré est impair, il est égal à un nombre pair plus 1 et son successeur est pair. Donc la somme est égale à la somme de deux nombres pairs plus 1. C'est donc un nombre pair plus 1, c'est-à-dire un nombre impair".

1.4. Une solution "classique"

La première solution - rendue classique par certains travaux de didactique - consiste à tenter de créer une situation-problème dans laquelle l'outil contre lequel on veut introduire l'outil algébrique (ici) se trouve disqualifié à cause de la difficulté de sa mise en oeuvre - à cause de son "coût". Dans l'exemple considéré plus haut, on pourrait par exemple modifier la situation-problème de la manière suivante:

> "On considère un nombre entier quelconque et le successeur de trois fois ce nombre. Montrer que la somme de ces deux nombres est un nombre impair".

Cette nouvelle situation-problème disqualifie à peu près certainement la solution arithmétique. Quant à la solution algébrique, elle demeure relativement simple:

> "Si x est le nombre choisi, le successeur de trois fois ce nombre est 3x+1. La somme des deux nombres est donc x+(3x+1)= 4x+1, expression qui montre qu'il s'agit d'un nombre impair".

Toutefois, cette solution apparaît vraisemblablement déjà trop complexe pour être mobilisée par l'élève au début de l'apprentissage de l'emploi de l'outil algébrique lui-même (à cause de la difficulté de la détermination de l'expression algébrique du successeur de trois fois le nombre, de la reconnaissance d'un nombre impair sous l'expression 4x+1, etc.). De sorte qu'avec l'outil arithmétique c'est l'outil algébrique lui-même qui se trouve disqualifié...

Sans doute peut-on envisager de rechercher une solution-problème satisfaisant mieux les contraintes affichées (disqualification de la solution arithmétique, appel obligé à la solution algébrique). Mais cette technique - que l'on pourrait appeler "du rasoir didactique"... - est d'une mise en oeuvre difficile et aboutit souvent à des constructions subtiles mais quelque peu controuvées.

1.5. La socialisation mathématique

La solution retenue ici est différente et s'inscrit dans une perspective qu'on pourrait appeler de "socialisation mathématique". Tout en acceptant l'idée que la didactique des mathématiques n'est pas tenue de reproduire la genèse socio-historique - "spontanée" - de la connaissance mathématique, et qu'elle se doit au contraire de construire librement une "épistémologie artificielle" didactiquement adaptée et viable, on n'en retient pas moins l'obligation de proposer un enseignement voulu comme initiation culturelle, moyen d'accès à la culture mathématique, à ses valeurs et à ses concepts - au sens large: mathématiques, paramathématiques (*) et protomathématiques (*) -, soit encore comme processus qu'on peut effectivement appeler de socialisation mathématique.

Or le problème didactique mentionné plus haut n'est en aucune façon un problème propre au processus didactique. On le trouve déjà dans le fonctionnement savant des mathématiques où, autour d'un même champ de problèmes, plusieurs types d'outils (concepts, méthodes, techniques d'attaque, etc.) peuvent se trouver en concurrence. Où, plus précisément, un ou plusieurs outillages anciens, bien installés dans la culture mathématique (et donc dans la culture des mathématiciens) entrent en rivalité avec un outillage nouveau dont ils tendent à gêner ou à freiner la mise en place et le développement. L'apparition de problèmes de même type dans le champ de l'enseignement ne doit donc pas être traitée comme un fait contingent, car il ne constitue en rien un "bruit" lié au fonctionnement didactique du savoir. Tout au contraire ce phénomène doit-il être regardé comme partie intégrante du fonctionnement "normal" des mathématiques et, dans la ligne de l'initiation culturelle évoquée plus haut, il convient d'en prendre une mesure aussi exacte que possible afin d'en proposer un traitement didactique adéquat et non dénaturant.

1.6. A quoi joue-t-on quand on fait des mathématiques ?

Pour cela on partira ici d'une certaine notion de jeu, appliquée à l'activité mathématique: à quoi joue-t-on, en effet, quand on fait des mathématiques ? Une première réponse, suffisante pour le moment, peut être formulée ainsi: à propos d'un certain domaine de réalité (par exemple le numérique, ou le géométrique), il s'agira de parvenir à une connaissance de ce domaine, sous la forme d'assertions portant sur la réalité considérée (à propos de l'ensemble N des nombres entiers par exemple, on pourra formuler l'assertion suivante: "La somme d'un nombre et de son successeur est un nombre impair"). A propos de ces assertions, deux notions doivent être distinguées (nous verrons plus loin les conséquences didactiques de cette distinction): d'une part une assertion peut apparaître comme vraie (ou être tenue pour vraie), d'autre part elle peut avoir été démontrée. Du point de vue de la psychogénèse - il est essentiel de le souligner - ces deux notions doivent être, l'une et l'autre, construites, la première étant, semble-t-il, d'apparition précoce, la seconde ne s'installant véritablement - dans le cadre du processus actuel de socialisation mathématique développé par l'enseignement scolaire - qu'avec la classe de quatrième précisément. La construction de la seconde - la notion de démonstration - se fait en interaction avec la première - la notion de vérité - dont elle tend à remanier la signification pour l'élève, en ce sens même qu'elle se construit (ou doit se construire - le "doit" signalant ici une contrainte à laquelle le didacticien soumet l'épistémologie artificielle qu'il se propose de réaliser) comme garant - comme preuve - de la vérité, sans pour autant, toutefois, se substituer à elle (l'idée d'axiome - proposition prise pour vraie mais non démontrée, quoique qu'éventuellement démontrable, dans le système axiomatique choisi - marquant sans ambiguïté le non recouvrement de la notion de vérité par la notion de démonstration).

1.7. Une stratégie didactique générale

Dès le départ on marquera donc de manière très nette la distinction de ce qui apparaît vrai à l'élève (et que l'on acceptera comme tel, en lui donnant sa pleine valeur psychologique de certitude collectivement partagée, selon une reconnaissance trop souvent interdite, de fait, dans l'enseignement scolaire) et de ce qui a été démontré (et qui, de ce fait, est vrai - sous réserve que la démonstration donnée soit valide...). Or la notion de "proposition à démontrer", et l'idée même de démontrabilité, se construisent solidairement avec la maîtrise progressive de techniques de démonstration: la capacité de maîtriser techniquement l'"organe" (les techniques de démonstration) permet seule de concevoir plus clairement la "fonction" (la pratique démonstrative) et d'en enrichir progressivement le sens. L'accès à l'idée de démonstration passe ainsi par l'accès aux techniques de la démonstration: en quelque sorte, l'élève pratiquera la démonstration en pratiquant telle ou telle technique démonstrative (liée plus ou moins spécifiquement à la question étudiée), avant même - et afin même - de savoir qu'il démontre et avant même qu'on lui enjoigne de démontrer - tout de même que Monsieur Jourdain faisait de la prose... L'accent sera donc mis - par le biais de la consigne - sur la technique démonstrative, et non sur le fait de démontrer lui-même. Ainsi devra-t-on reformuler le problème pris pour exemple plus haut de la manière suivante:

> "Soit x un nombre entier et soit y son successeur. Donnez un nom du nombre x+y montrant que ce nombre est impair".

Ici, il ne s'agit plus alors de démontrer seulement, mais de démontrer d'une certaine façon. Mieux: formellement, on ne demande pas de démontrer, et ce n'est qu'après coup que l'on découvrira que, en produisant un nom de x+y qui montre que ce nombre est impair, on aura, en fait, et du même coup, démontré que ce nombre est impair. Ou plutôt, que l'on aura ainsi donné une certaine démonstration de ce fait (un nom d'un nombre, qui montre telle ou telle propriété de ce nombre, fournit une démonstration de ce que ce nombre possède cette propriété). Et qu'il en est d'autres, tout aussi valides (et valables) en tant que démonstrations - et par exemple la "vieille" démonstration arithmétique...

On verra (notamment à propos du Problème 1.1.) que la réalisation de cette stratégie passe parfois par des schémas plus complexes que celui décrit ci-dessus. Mais, quoi qu'il en soit des tactiques adoptées localement, l'idée générale demeure: l'organisation didactique de l'action (au sens large) doit procéder d'une conception claire du "jeu auquel l'on joue". Cette exigence suppose en particulier une conscience nette du rôle assigné à la réalité étudiée d'une part (ici, l'ensemble N des nombres entiers) et à l'outil d'étude d'autre part (ici, le calcul littéral).

1.8. Le choix de la réalité étudiée

L'ensemble des entiers est choisi dans cette séquence comme réalité à étudier parce qu'il est riche en propriétés

- familières à l'élève, ou du moins de conceptualisation assez immédiate pour faire sens pour lui (du premier cas relève ainsi la propriété, pour un nombre, d'être pair; du second cas, la propriété, pour un nombre, de ne pas être divisible par 4);

- offrant à la mise en jeu du calcul littéral des situations à complexité contrôlable - simples mais non triviales;

- et autorisant en même temps un contrôle de l'élève sur la vérité de la proposition qui est l'enjeu de l'action (le contrôle de la vérité étant entendu comme certitude personnellement assumée et collectivement partagée).

Ces exigences posées a priori expliquent le choix de N, par exemple contre le choix - tout aussi envisageable à première vue - de l'ensemble Z des nombres relatifs (voire de l'ensemble D des nombres décimaux): les difficultés, bien connues des enseignants, liées à la manipulation de l'opposé et de la soustraction dans Z suffiraient en effet à créer un "bruit" se surajoutant à l'action et venant en perturber et le déroulement et le sens (pour l'élève, et pour l'enseignant).

1.9. Le rôle de la réalité étudiée

Les "attendus" évoqués pour soutenir le choix de N comme réalité à étudier devraient en outre rendre manifeste le fait que, si l'objet de l'action de l'élève se réfère bien à des propriétés de N, ces propriétés - qui constituent les points d'appui indispensables à la dynamique de la séquence, et entrent dès lors dans l'histoire intellectuelle de la classe (où elles apparaîtront désormais comme du "déjà-vu-ensemble", auquel il sera ensuite légitime de se référer, selon des modalités précises et précisées par le contrat didactique en cours) - ne sont pas pour autant l'objectif essentiel de cette séquence. Et, a fortiori, que si, dans l'activité mathématique de l'élève à propos de ces propriétés (à propos par exemple de la démonstration de telle ou telle assertion), le calcul sur les nombres est bel et bien présent au titre de moyen ou d'adjuvant de l'action, il ne saurait en aucune manière constituer un objectif dont la gestion soit prise en charge par l'organisation didactique de cette séquence.

L'enseignant devra donc se garder de céder à la tentation de vouloir faire de la séquence - implicitement ou explicitement, par le biais de décisions rapportées se surajoutant au plan didactique proposé - l'occasion d'un rappel sur les nombres entiers (et en particulier sur le calcul sur ces nombres). Ce faisant, il s'imposerait ainsi un objectif supplémentaire, apparemment peu exigeant, mais dont cette séquence ne prétend en aucune façon fournir les moyens de l'atteindre. Outre que cet objectif aurait dès lors peu de chances d'être réalisé de manière efficace (et satisfaisante aux yeux de l'enseignant), les manoeuvres déterminées par sa poursuite pourraient créer un bruit de fond hypothéquant le fonctionnement didactique effectivement visé.

1.10. L'outil d'étude

C'est donc bien autour de l'outil d'étude - le calcul littéral - que cette séquence est conçue. Encore faut-il préciser qu'à ce stade de la construction didactique que cette suite de séquences doit réaliser, la dextérité dans le maniement des expressions littérales n'est pas la priorité: là encore, il convient de noter que la présente séquence ne prétend pas fournir les moyens d'atteindre un tel objectif (légitime, mais prématuré).

Il s'agit en revanche de commencer à construire le sens-pour-l'élève du calcul littéral considéré comme outil de résolution (et, en fait, de formulation) de problèmes. Et pour cela, de créer les conditions qui amèneront l'élève à faire fonctionner le calcul littéral en tant qu'outil. Un exemple éclairera le sens de cette exigence.

1.11. Usage formel et usage fonctionnel du calcul littéral

Une stratégie didactique alternative de celle adoptée ici - et qui est la stratégie traditionnellement reçue - consiste à introduire l'élève au calcul littéral en le mettant aux prises, non avec les usages instrumentaux (fonctionnels) de ce calcul, mais avec la manipulation formelle des expressions littérales. Ainsi, du problème déjà évoqué

> "Soit x un nombre entier et soit y son successeur.
> Donnez un nom du nombre x+y montrant que ce nombre
> est impair",

dans la résolution duquel le calcul littéral peut intervenir en tant qu'outil ou instrument (c'est-à-dire de manière fonctionnelle), la stratégie de l'usage formel du calcul littéral ne retiendra que le problème suivant:

> "Calculez x+(x+1)".

A ce propos, on se contentera de formuler deux observations.

D'une part, ce dernier problème ne constitue pas à proprement parler un sous-problème du problème d'origine, dans la mesure où la décontextualisation dont il résulte modifie le sens-pour-l'élève de la tâche proposée: s'il est vrai que, résolvant le problème initial, l'élève rencontre bien le calcul de $x+(x+1)$, ce calcul, finalisé par un objectif qui n'est pas alors le simple fait d'avoir à calculer, ne prend pour lui ni la même valeur (la même "importance"), ni la même signification en cela qu'il n'est pas exigé par la consigne mais se trouve appelé par une exigence interne à la tâche poursuivie.

D'autre part, l'usage formel d'un outil mathématique, c'est-à-dire son usage "à vide", hors d'un contexte qui le ferait précisément apparaître comme outil, est en général assujetti à un code implicite déterminant les manipulations formelles possibles, et écartant de fait certaines manipulations qui peuvent pourtant fort bien apparaître dans les usages instrumentaux de cet outil. C'est ainsi que si l'approche formelle du calcul littéral peut en effet amener l'élève à la production de l'égalité

$$x+(x+1) = 2x+1,$$

en revanche elle sera incapable de susciter la création de l'égalité de sens inverse, à savoir

$$2x+1 = x+(x+1),$$

égalité dont l'apparition est en quelque sorte interdite par le code d'action implicite qui soutient l'approche formelle, mais qui peut apparaître très naturellement dans l'approche fonctionnelle du calcul littéral, comme dans le problème suivant:

"Soit x un nombre impair. Montrez que x peut s'écrire comme la somme de deux entiers successifs".

Séquence 1: commentaire

2. Activité 1

Le Problème 1.1., auquel se réduit l'activité 1, opère d'emblée une rupture de contrat, qui pourtant ne pourra être perçue comme telle que plus tard (au cours de la deuxième sous-séquence): c'est un problème qui, d'une part, fait assez vite sens pour les élèves (après l'examen de quelques exemples, qui prendront ensuite le statut d'essais numériques), mais que, d'autre part, ceux-ci ne peuvent pas en principe résoudre, à ce stade, dans une forme acceptable (par l'enseignant). Il y a bien quelque chose à démontrer, à savoir une conjecture (le mot pourra être introduit par l'enseignant), qui découle "naturellement" du constat de régularité issu des essais numériques: "Quand on ajoute 5 à un nombre impair, on obtient un nombre pair". Mais les moyens de démonstration manquent.

Pourtant, cette rupture de contrat n'apparaîtra telle aux élèves qu'à travers l'indication, par l'enseignant, que le problème considéré, une fois formulée la conjecture appropriée, devra être laissé provisoirement de côté - ce qui constitue bien une rupture de contrat -, sa solution devant attendre que soit devenu disponible l'outil algébrique. (On retrouvera alors le "même" problème, sous la forme du Problème 2.4.).

On notera - c'est ce qu'indiquent toutes les enquêtes effectuées dans ce sens - qu'en ce début de quatrième, la plupart des élèves n'ont pas une notion claire de l'exigence démonstrative. En cinquième, "démontrer" est encore majoritairement perçu comme un synonyme quelque peu inusuel de "montrer"; on "démontre" au sens où un démonstrateur (d'appareils ménagers par exemple) fait une "démonstration", en montrant aux clients comment tel appareil fonctionne... Le jeu sur "montrer" et "démontrer", encore très incertain et ambigu à ce stade, et dont un début d'institutionnalisation (*) apparaîtra dans la Théorie 2, sera poursuivi pour aboutir progressivement, en principe, à une maîtrise mieux assurée.

Les élèves rencontrent ici, pour la première fois, la réalité (bien connue d'eux, depuis longtemps) qu'ils étudieront pendant un certain temps: les entiers, abordés sous l'angle des propriétés de parité (qu'ils ont manipulées en cinquième). Rien de nouveau donc, à ce stade. En revanche, la question posée, qui fait sens en particulier par le biais de son aspect "ancien" (puisqu'elle porte sur la parité d'un nombre), comporte une part de nouveau, liée à la présence d'un "nombre indéterminé". Ce problème aboutit donc à une promesse de nouveau; mais, à la fin de cette activité, c'est une promesse encore non accomplie. Ce qui demeure ouvert, c'est à la fois la vraie nature de la difficulté rencontrée (difficulté dont la présence au moins est sensible à l'élève à travers l'attitude du professeur: "On reviendra sur cela plus tard", etc.), à savoir l'exigence démonstrative, et le moyen de l'affronter, à savoir l'outil algébrique, qui donnera une forme concrète à cette exigence.

Séquence 1: commentaire

3. Théorie 1

Il n'est pas question, dans la construction didactique proposée ici, d'ambitionner de faire construire, ou de faire découvrir par les élèves eux-mêmes, le code (*) que constitue le langage algébrique. Dans cette Théorie 1, l'enseignant se fait, comme on l'a souligné plus haut (voir le §§ 1.5.), l'initiateur des élèves à une réalité culturelle qui est un produit de l'histoire: la création et l'affinement progressif, sur plusieurs siècles, du langage algébrique, et plus particulièrement de l'usage des lettres pour désigner des nombres "indéterminés" (*) (voir le document 1.1 ci-après).

Du point de vue didactique, on a pris soin seulement de sensibiliser les élèves à l'intérêt de ce code, par le moyen du Problème 1.1., exemple d'une catégorie de problèmes auxquels l'usage de lettres permet d'apporter, avec une formulation facile, une réponse plus aisée (par le biais du calcul littéral). D'autres emplois du langage algébrique seront vus suite (notamment avec les équations). On se contente donc ici de faire apparaître le code algébrique comme un outil susceptible d'être mis en oeuvre dans une certaine catégorie de situation-problème.

La mention de l'opposition traditionnelle (mais gommée par l'évolution récente de l'enseignement à ce niveau) entre arithmétique et algèbre doit permettre de faire apparaître à la fois la continuité dans le type de question abordée et le renouvellement dans la manière de l'aborder que permet l'outil algébrique.

On notera toutefois que le type de situation-problème retenu ici permet d'éviter la concurrence entre deux types possibles de solution: solution arithmétique, d'une part, solution algébrique, d'autre part. La présentation traditionnelle du passage de l'arithmétique à l'algèbre, en effet, prenait pour type de situation-problème les problèmes conduisant (du point de vue algébrique) à la résolution d'une équation (du premier degré), en montrant comment de tels problèmes sont susceptibles à la fois d'une solution arithmétique et d'une solution algébrique (pour un exemple, voir le document 1.2., ci-après). Cette concurrence (que l'on pourra retrouver bien entendu à l'occasion de l'étude des équations, mais dans des conditions plus favorables, l'outil algébrique étant alors mieux installé dans la pratique des élèves) pourrait gêner la mise en place de l'outil algébrique, que les élèves devraient s'approprier alors contre un outil déjà disponible et plus familier. On a noté toutefois, dans le §1 de ce commentaire, qu'une solution arithmétique existait bien, même dans le cas du Problème 1.1.: "Si le nombre considéré est impair, il est égal à un nombre pair plus 1; si on lui ajoute 5, soit un nombre pair plus 1, on obtient un nombre pair - somme de deux nombres pairs -, plus 2; soit un nombre pair". Mais cette solution, d'un type en fait peu pratiqué dans les classes antérieures, a une bien plus faible probabilité d'apparition.

Deux thèmes essentiels sont ici abordés: le langage algébrique permet de former des noms pour désigner des "nombres indéterminés", et ces noms ont, à côté de leur pouvoir désignatif (ils désignent leur référent, à savoir un "nombre indéterminé"), un pouvoir monstratif (ou ostensif): ils nous montrent certaines propriétés de leur référent - mais non toutes! A cet égard, un troisième thème est introduit: celui du choix pertinent, par rapport à la question traitée, du nom à retenir (à construire). A la fin de cette Théorie 1, pourtant, cette thématisation est encore fort peu avancée: ainsi, ce n'est qu'avec l'Activité 2 que l'on se demandera comment il convient de nommer un nombre dont on sait qu'il est pair, ou impair, par exemple.

L'apport de la Théorie 1 n'est donc pas immédiatement opératoire: la situation demeure ouverte, et il est nécessaire d'avancer rapidement afin que le sens de ce qui aura été vu au cours de cette première sous-séquence puisse être complètement dégagé - et il ne le sera qu'avec la sous-séquence 2, voire avec les Exercices 2. L'enseignant devra donc éviter tout commentaire, tout piétinement qui ralentirait l'avancée, et passer rapidement aux exercices qui suivent.

Séquence 1: commentaire

4. Exercices 1

Comme on l'a signalé à la fin du §3 de ce commentaire, l'avancée vers la sous-séquence 2 doit se faire à un rythme soutenu; dans cette perspective les Exercices 1, s'il ne doivent pas être négligés, ne doivent pas non plus constituer une dérive qui invaliderait la constitution du sens, pour les élèves, de ce qui a été vu jusqu'ici. Tout au contraire, ils doivent soutenir la constitution de ce sens en permettant une maîtrise conceptuelle et technique mieux assurée des notions présentées dans ce qui précède. Les exercices apparaissent ici véritablement comme le temps des élèves, moment "négatif" (mais essentiel) du processus didactique: à l'issue de ce temps (qu'il faut lier au temps d'étude, en classe et à la maison, de la Théorie 1), les élèves devraient pouvoir prendre part d'une manière efficace à l'activité proposée dans la sous-séquence 2.

Les Exercices 1, 2 et 3 font manipuler les notions de nom et de pouvoir monstratif à propos de nombres déterminés: ils prolongent donc les dernières lignes de la Théorie 1.

Le premier cas proposé dans l'Exercice 1 (16 est un carré) a pour but de s'assurer de la compréhension de la consigne; le deuxième cas (121 est un carré) ajoute seulement une petite difficulté d'identification (121 est le carré de quel nombre ?). Le troisième cas (2x24x3 est un carré) mettra, sauf exception, en évidence la mentalité "arithmétique" des élèves, qui "effectueront", c'est-à-dire qui reviendront toutes affaires cessantes au nom standard du nombre étudié (2x24x3 = 144), avant et afin d'identifier celui-ci comme un carré. L'enseignant, tout en acceptant évidemment cette solution, saisira l'occasion pour montrer une autre manière (algébrique!) d'opérer sur des écritures numériques:

$$2 \times 24 \times 3 = (2 \times 3) \times (6 \times 4) = 6 \times 6 \times 4 = 6^2 \times 2^2 = (6 \times 2)^2 = 12^2.$$

L'Exercice 2 complexifie légèrement le type de question posé dans l'exercice précédent: au lieu d'un carré, il s'agit de mettre en évidence une différence de carrés. La compréhension de la consigne, ici, n'est sans doute pas immédiate; mais le nombre choisi, 16, dont on vient de voir qu'il peut s'écrire comme un carré, doit empêcher, en principe, que les élèves se bloquent sur cette dernière réponse - attitude qui constituerait alors, et en vertu de ce qui précède, une rupture de contrat (*). La solution dont l'apparition est alors la plus probable est fournie par l'écriture $16 = 25-9 = 5^2-3^2$. L'enseignant indiquera aussi, si elle n'est pas spontanément apparue, la solution

$16 = 4^2-0^2$.

L'Exercice 3 est vraisemblablement plus ouvert que les exercices précédents: il n'y a pas de réponse véritablement surdéterminée. Toutefois, et là encore, la mentalité arithmétique poussera nombre d'élèves, sinon tous, à effectuer: 5(3+2) = 5x5 = 25 (on notera qu'ici l'effectuation fournirait immédiatement la réponse si... la question était de montrer que 5(3+2) est un carré). A partir de l'écriture standard - 25 - diverses solutions apparaîtront. Mais là encore, en les acceptant, l'enseignant proposera aussi une solution plus "algébrique": 5(3+2) = 5x3 + 5x2 = 15 + 10 = 10 + 15.

L'Exercice 4 fait fonctionner au plan numérique la propriété étudiée algébriquement dans l'exercice suivant. Il constitue donc, en un sens, une préparation à l'Exercice 5. Mais cette préparation concerne essentiellement le sens du problème, la signification de la consigne, et non la technique de résolution - puisque le traitement numérique procède par d'autres voies que le traitement algébrique. L'enseignant s'assurera que le démarrage de l'exercice ("Choisissez un nombre") est bien compris (chaque élève doit choisir un nombre, à sa guise, et effectuer les opérations indiquées à partir du nombre qu'il aura choisi). Ceci étant, l'exercice ne devrait pas présenter de difficulté.

L'Exercice 5 fait entrer véritablement dans l'algébrique. Les difficultés, qui ne sont pas insurmontables, sont pourtant multiples, dès lors que la manipulation d'expressions algébriques est requise. L'écriture du successeur de x et de son prédécesseur imposera à maints élèves quelques tâtonnements... Mais surtout, une fois arrivés à l'expression x+(x+1)+(x-1), beaucoup d'élèves, voire la plupart, vont se trouver bloqués.

On peut voir à cela plusieurs raisons, d'ordres différents. Il y a tout d'abord une difficulté qu'on peut dire "objective": les élèves se trouvent ici confrontés, pour la première fois, à un calcul portant sur une expression d'une certaine complexité (ils n'ont rencontré jusqu'ici que les exemples donnés dans la Théorie 1: x+5 = 5x-4x+2+3, etc.). Mais il y a avantage à interpréter cette difficulté à la lumière du contrat didactique (*). D'une part, celui-ci tend à bloquer l'élève dans la position indiquée (obtention de l'expression x+(x+1)+(x-1), ou d'une expression "voisine"), car l'élève peut considérer que, bien qu'il n'ait pas répondu à la question posée, il aura fait à ce stade-là un travail suffisant pour éprouver le sentiment d'avoir rempli son contrat (l'exercice comporte donc une difficulté didactique, et pas seulement "mathématique"). D'autre part, le même contrat didactique rend difficilement acceptable, par l'élève qui aurait franchi ce premier blocage, le résultat attendu (à savoir 3x). En effet, de l'expression x+(x+1)+(x-1) à l'expression 3x, il y a réduction brutale de la complexité ostensive (*) (en d'autres termes, une expression "compliquée" devient une expression réduite à presque rien); or les clauses du contrat régissant la gestion par l'élève des écritures qui lui sont confiées - clauses élaborées antérieurement, à l'occasion de sa pratique du calcul numérique, clauses en voie de remaniement (cet exercice est un des éléments de ce remaniement!), mais non encore remaniées - enjoignent qu'il n'y ait pas de perte brutale de complexité ostensive. Aussi ne devra-t-on pas s'étonner d'observer, chez les élèves qui tenteront le calcul, des résultats en apparence aberrants - comportant par exemple des puissances de x, ou encore présentant des calculs numériques non effectués. De tels résultats ne doivent pas être interprétés comme manifestant l'absence chez l'élève d'une capacité abstraite (c'est-à-dire indépendante des conditions didactiques particulières de son actualisation) de calcul sur les expressions algébriques. Ils répondent en fait, en dépit de leur caractère apparemment "n'importequiste", à un mobile déterminé: leur "intérêt", aux yeux de l'élève, sera d'abord de réduire, mais de ne réduire que partiellement, la complexité ostensive de l'expression de départ (au prix d'un calcul qui peut sembler incontrôlé, mais qui est en fait "ajusté" pour satisfaire aux contraintes imposées par le contrat).

Sauf exception, ce sera alors à l'enseignant de montrer le calcul, et surtout (et nous retrouvons là le rôle d'initiateur "culturel" qui lui est dévolu) de mettre en acte, devant les élèves, un type nouveau de rapport - moins "timoré", si l'on veut - que l'élève devra désormais faire sien, avec la manipulation et la transformation des écritures littérales. On voit donc que cet exercice, sur lequel le succès des élèves est rien moins que sûr (ce dont l'enseignant doit être prévenu, et dont il ne doit pas se désespérer!), joue un rôle essentiel dans l'évolution du contrat didactique en ce qui concerne le rapport de l'élève aux écritures algébriques. Ce point est d'autant plus important que, après que l'élève aura appris à agir plus "librement" à cet égard (notamment par le travail qu'il accomplira dans la deuxième sous-séquence de cette séquence), la Séquence 2 le ramènera - momentanément - à un rapport plus contrôlé et plus strict, plus ascétique si l'on veut, avec le calcul algébrique.

L'Exercice 6 prolonge alors le travail amorcé: il doit consolider l'évolution engagée avec l'exercice précédent. Le calcul à effectuer est ici légèrement plus simple:

$(x-1)+(x+1) = 2x$, et l'on peut attendre que plus d'élèves y prendront une plus grande part - sans attendre toutefois que cela se fasse aisément...

Dans ces deux derniers exercices, la difficulté proposée par le calcul ne doit pas faire oublier que celui-ci n'est qu'un moyen d'apporter une réponse à la question posée (nous faisons ici un usage fonctionnel, et non pas seulement formel, du calcul: voir le §§ 1.11.), et que la conclusion devra être soigneusement et nettement soulignée: la forme $3x$ montre que le nombre étudié est un multiple de 3; la forme $2x$ montre que le nombre considéré est pair.

Séquence 1: commentaire

5. Activité 2

Cette activité a pour but de mettre en oeuvre l'outil algébrique, que les élèves ont commencé à manipuler dans les Exercices 1, afin de résoudre - par ce moyen - le problème laissé en suspens (en ce qui concerne sa démonstration, non son résultat) dans la première sous-séquence.

A la fin de la première sous-séquence, et notamment après les exercices 5 et 6, on doit considérer que les élèves sont entrés, sauf exception, dans la problématique d'emploi du langage algébrique, qui comporte ici deux aspects successifs: d'une part, codage d'un nombre (déterminé: exercices 1, 2 et 3, ou indéterminé: exercice 5 notamment) par le moyen d'un nom qui en montre certaines propriétés; d'autre part, et après des calculs fonctionnellement ordonnés à la fin poursuivie, détermination de telle ou telle propriété d'un nombre par le biais du nom auquel on sera alors parvenu (exercices 5 et 6).

Les propriétés sur lesquelles les élèves se sont fait la main sont des propriétés avec lesquelles ils ont eu l'occasion de se familiariser en cinquième - celles d'être un multiple de tel ou tel nombre (3 ou 2, ici). Le Problème 2.1., qui amorce la présente activité, est là seulement pour faire le point et servir d'introduction à une question d'un type différent (dans les Problèmes 2.2. et 2.3., en effet, on ne se demande plus comment montrer qu'un nombre est un multiple de tel nombre, mais comment montrer qu'un nombre n'est pas un multiple de 2). Ce problème ne devrait donc pas faire difficulté, et en pratique il pourra être résolu "collectivement" - même si l'enseignant demande ensuite aux élèves d'en rédiger la solution sur leur cahier.

Les difficultés présentées par le Problème 2.2. sont, en grande partie, des difficultés de "compréhension de l'énoncé". On peut penser d'abord que l'idée que, si un nombre est impair, son prédécesseur (et son successeur) sont pairs, est familière aux élèves: elle ne devrait donc pas faire obstacle ici. Par ailleurs le jeu du passage d'un nombre à son prédécesseur, et du retour - du prédécesseur au nombre lui-même -, qui était à l'horizon de l'Exercice 5 notamment, devrait encore se faire sans grande difficulté. En revanche, le jeu sur les écritures correspondantes est déjà moins évident: si le passage de x à $x-1$ a été formellement réalisé précédemment (dans les Exercices 5 et 6), en revanche le retour (de $x-1=2n$ à $x=2n+1$) est nouveau, à moins qu'il ne soit perçu comme le passage d'un nombre (x-1) à son successeur (x).

Afin de saisir la nature de certains des blocages possibles, il faut convoquer ici la notion de difficulté protomathématique. C'est en effet une difficulté protomathématique, bien attestée à ce niveau, que rencontrent les élèves quand il s'agit pour eux de considérer une question posée (au cours d'un problème ou d'un exercice) non comme un isolat, mais en référence à des faits antérieurement établis, que ce soit dans un problème ou un exercice précédent, ou dans une question précédente (étiquetée séparément ou non) du même problème (schème d'enchaînement des questions et des réponses à ces questions au cours d'un problème, en particulier). Dans le problème qui nous occupe ici, on peut repérer ainsi au moins trois points de difficulté protomathématique probable:

- l'enchaînement avec le résultat établi dans le Problème 2.1., à propos de l'affirmation: "Son prédécesseur est pair, et s'écrit donc sous la forme 2n";

- l'enchaînement avec les exercices 5 et 6, à propos de la question: "Montrer que l'on a alors x=2n+1";

- l'enchaînement à l'intérieur même du problème, manifesté par l'expression: "Inversement, montrer que...".

Il faut insister à ce propos sur le fait que, sous la rhétorique (*) du discours mathématique, dont l'élément que l'on vient de mentionner ("Inversement, etc.") est encore inconnu ou, au mieux, méconnu des élèves, se cache un schème de pensée dont l'acquisition n'apparaît ni simple, ni immédiate. A cet égard, l'enseignant se gardera du diagnostic trop fréquent qui verrait dans l'incompréhension manifestée en cette occasion par les élèves la conséquence du fait "qu'ils ne connaissent pas le français", ou "qu'ils ne savent pas lire", etc. Tout au contraire, il devra apporter une attention particulière (dans la droite ligne de son rôle d'initiateur à la culture mathématique, qui réapparaît clairement ici) sur les points qui ont été énumérés.

On notera encore, à propos de la relation entre cette activité et les exercices de la sous-séquence précédente, que la difficulté protomathématique générale d'enchaînement se complique ici d'un rupture de contrat. Il n'est pas prévu, en effet, dans le contrat didactique standard (dans lequel on peut penser que les élèves évoluent jusqu'alors), que les résultats établis dans les exercices soient intégrés dans l'ensemble des résultats auxquels il est légitime de se référer (que l'on soit élève ou enseignant) au cours d'une nouvelle activité (sauf dans le cadre d'une succession d'exercices et sous condition d'une indication expresse de l'énoncé). On se reportera à ce sujet aux développements consacrés, dans le Commentaire général, à la fonction des exercices dans ce cours. Mais on doit souligner ici que cette rupture de contrat s'opère, en ce point, pour la première fois d'une manière assez nette: nouvelle source de difficulté pour les élèves, et pour l'enseignant...

Le Problème 2.3. est de structure analogue au problème précédent: les mêmes difficultés s'y rencontrent, avec cette différence (a priori favorable) qu'elles ont déjà été rencontrées, et cette autre (a priori défavorable) que le signe - y remplace le signe +: il sera intéressant d'observer les points d'accord et de désaccord dans l'attitude des élèves face à ces deux problèmes.

Le Problème 2.4. utilise les résultats précédents (ou du moins l'un des résultats précédents: la nécessité de choisir constitue une nouvelle difficulté!) pour établir une démonstration du résultat auquel on était arrivé à la fin de l'Activité 1.

Dans la mesure où l'on peut penser que la technique de démonstration que l'élève doit ici mobiliser est, en ce point, conceptuellement maîtrisée, les difficultés se situent au niveau de la mise en oeuvre de cette technique: effectuation de l'expression x+5 (2n+1+5=2n+6 ou 2n-1+5= 2n+4 selon le choix effectué), qui, bien que ne présentant pas de difficulté du point de vue formel, peut encore être fragilisée par absence de l'anticipation de l'opération suivante - difficulté propre à l'usage fonctionnel du calcul algébrique -, à savoir de la factorisation nécessaire (qui fera apparaître un produit par 2: 2n+6=2(n+3) ou 2n+4= 2(n+2), et dont l'emploi fonctionnel est ici réalisé pour la première fois), opération dont la difficulté, intrinsèque, peut en outre agir en retour sur l'étape précédente, de la même façon que la difficulté d'apercevoir alors, sur la forme obtenue, l'information pertinente (le nombre est un multiple de 2) peut gêner la reconnaissance et la réalisation de l'étape de factorisation elle-même (il y a ainsi un effet de "boule de neige" à rebours, dû aux incertitudes de l'élève quant à la pertinence et à la "légitimité" des opérations successives nécessaires).

Ce problème clôt donc le débat ouvert par le Problème 1.1.. En soulignant ce fait, l'enseignant pourra alors passer à l'examen de la Théorie 2.

Séquence 1: commentaire

6. Théorie 2

En contraste avec la Théorie 1, qui ouvrait sur une perspective nouvelle (par l'introduction du langage algébrique et la présentation de son emploi comme outil d'étude), la Théorie 2, par laquelle l'enseignant va clore la séquence (les Exercices 2 constituant le redoublement - du côté des élèves - de cette clôture), est un moment de capitalisation et d'institutionnalisation de ce qui a été vu jusqu'ici: elle fait le point, avant un nouveau départ (constitué par l'Activité 1 de la Séquence 2).

Cette capitalisation porte d'abord sur des résultats, qui concernent des questions de parité dans N. Certains d'entre eux se présentent comme de simples mentions de propriétés que les élèves ont pu utiliser librement dans ce qui précédait: propriétés que l'enseignant n'a pas remises en cause, de quelque façon que ce soit, lorsque les élèves ont voulu (ou ont dû) en faire usage, et qu'il reprend plus officiellement à son compte ici (le successeur d'un nombre pair est impair, etc.). D'autres constituent à proprement parler l'institutionnalisation, c'est-à-dire l'officialisation (avec la garantie qui l'accompagne) du savoir élaboré par les élèves dans l'activité à laquelle ceux-ci auront travaillé jusqu'ici (tout nombre impair peut s'écrire sous la forme 2n+1, etc.). Ces résultats, qui appartenaient déjà à l'histoire intellectuelle de la classe, entrent par cela dans le fonds de connaissances en lequel il sera ensuite absolument légitime de puiser (que l'on soit élève ou professeur).

La capitalisation porte ensuite (au second paragraphe) sur des questions de méthode, ou encore d'épistémologie des mathématiques. La relation entre "montrer" (au sens où une écriture algébrique montre telle ou telle propriété) et "démontrer", relation qui était présente en acte dans le travail mathématique réalisé jusqu'ici, est désignée alors explicitement. Manière pour l'enseignant d'introduire une ponctuation, à effet structurant de reprise, au niveau de réflexion que l'on peut appeler métamathématique (*), sans oublier que ce niveau - celui du travail des élèves sur les mathématiques, vues comme activité spécifique, avec ses fins propres et ses moyens particuliers - est, au moins dans des limites dont on reste ici bien en-deçà, partie intégrante du travail des élèves en mathématiques.

7. Exercices 2

Au contraire de ce qui se passait pour les Exercices 1, il ne faut pas s'inquiéter ici de s'arrêter longuement sur les exercices proposés: ils constituent le lieu où l'ensemble des notions rencontrées dans la présente sous-séquence, et plus largement dans l'ensemble de cette séquence, vont pouvoir graduellement (mais sans doute pas parfaitement) être maîtrisées par les élèves. La séquence suivante proposera de tout autres difficultés.

L'Exercice 7 n'a pas pour but d'utiliser l'outil algébrique (comme on l'a fait par exemple dans le Problème 2.4.) mais, en un sens, d'apprendre à mieux connaître cet outil, afin de mieux l'utiliser (au lieu de mettre en jeu l'outil d'étude, on étudie l'outil d'étude). En cela il se rapproche des Problèmes 2.1., 2.2. et 2.3.. Mais ici il ne s'agit plus d'établir un résultat "positif" (du genre: un nombre qui s'écrit 2n+1, pour un certain entier n, est impair), mais, par un résultat "négatif" (un nombre qui s'écrit 3n+1 n'est ni nécessairement pair, ni nécessairement impair), de mettre en garde contre des conclusions abusives, observables chez les élèves à ce stade. Notons que, si le choix de 3n+1 s'explique ici par l'attraction éventuellement exercée par la forme 2n+1, qui peut amener l'élève à penser que le nombre 3n+1 est impair, on aurait pu choisir également la forme 3n qui, par opposition à la forme 2n (ce qui distingue ces formes ayant alors le pas sur ce qui les fait ressemblantes), est souvent vue par l'élève comme désignant un nombre impair.

Cet exercice s'oppose en outre à ce qui précède par l'outil mis en oeuvre: recours, non pas aux lettres, mais aux nombres: un exemple numérique suffit pour démontrer que 3n+1 n'est pas toujours pair (resp. n'est pas toujours impair). Cette technique sera reprise et thématisée (avec, notamment, l'introduction du mot de contre-exemple) dans la première sous-séquence de la Séquence 2. Par rapport à l'apprentissage de l'emploi de l'outil algébrique, elle peut représenter une apparente "régression" (et devrait pour cela apparaître "facile" aux élèves). Son intérêt dans la construction du langage algébrique comme outil est de maintenir ouvert le débat sur les situations d'emploi pertinent des lettres (quand suffit-il d'utiliser des nombres ? quand faut-il recourir aux lettres ?), à un moment où la propension à "prouver" par de simples exemples numériques peut à tout instant resurgir. L'Exercice 7 est donc là pour rappeler qu'il n'y a pas opposition entre "nombres" et "lettres", mais dialectique, cette dialectique opérant selon un critère simple (ou, disons, simplifié), qui sera précisé dans la première sous-séquence de la Séquence 2: celui qui régit les cas d'emploi de la démonstration "par les lettres" d'une part, et de la démonstration par un contre-exemple numérique d'autre part.

On notera que, en démontrant le résultat visé par l'Exercice 7, les élèves (ou, du moins, quelques-uns d'entre eux) pourront arriver à une conclusion plus précise: à savoir que 3n+1 est pair quand n est impair, et inversement. Cet exercice serait donc le point de départ d'un autre exercice (ou de la seconde question d'un exercice dont il constituerait alors la première), hypothèse que l'on n'a pas retenue ici à cause, notamment, de la relative difficulté des calculs algébriques nécessaires. Mais dans le cas où la conjecture que l'on vient de mentionner serait formulée par les élèves (et après avoir souligné que l'exercice traité n'en demande pas tant...), l'enseignant pourra montrer collectivement la démonstration de cette propriété (si $n=2k$, alors $3n+1=3(2k)+1=2(3k)+1=2m+1$, où $m=3k$; si $n=2k+1$, alors $3n+1=3(2k+1)+1=3(2k)+3+1=2(3k)+4=2(3k+2)=2m$, où $m=3k+2$), ce qui aura pour effet de reserrer la dialectique dont on a parlé plus haut, d'une part, et, d'autre part, de préparer les élèves au maniement des calculs littéraux qu'ils auront à effectuer ensuite, en attenuant leurs scrupules quant à ce qu'il est permis - et en diminuant leur incertitude quant à ce qu'il est éventuellement nécesaire - de "faire subir" aux écritures algébriques qui leur seront confiées.

L'Exercice 7, en rouvrant le débat "lettres ou nombres", pourra venir faire un certain bruit dans les exercices suivants, dont le but est la maîtrise du maniement de l'outil algébrique. Il pourra y provoquer, momentanément, la régression à l'emploi de simples exemples numériques multipliés.

L'Exercice 8 ménage à cet égard une transition. La première partie de cet exercice, en effet, consiste en une observation numérique, qui n'a pas pour but, d'ailleurs, de fournir la base d'une conjecture, laquelle est affirmée comme vraie par l'énoncé (mais sous une forme légèrement implicite - "Démontrer (...) que cette propriété est générale" -, que les élèves devront expliciter à partir de l'indication de la première partie de l'énoncé). Elle s'oppose explicitement en cela à la seconde partie, qui demande une démonstration valable pour tous les nombres, et exige donc le recours au langage algébrique.

Là encore, cependant, cette exigence est formulée de manière semi-explicite seulement, par le moyen de l'indication "en utilisant un nom bien choisi". A ce stade, cette indication, qui utilise des mots de la tribu (l'expression de "nom bien choisi" a été utilisée au moins une fois, dans le Problème 2.4.), devrait faire sens pour les élèves; dans les quelques cas (en principe rares) où il n'en serait pas ainsi, on pourra faire l'hypothèse d'une difficulté à entrer dans le langage que la classe se construit en son histoire singulière, signe éventuel d'un refus, ou d'une réticence, à accepter le système d'enjeux, de valeurs, et donc de langage, que cette histoire commune et partagée propose aux élèves de reprendre à leur compte, en les validant par leur participation à l'activité en cours.

Les difficultés à affronter dans l'Exercice 8 sont, en fait, nombreuses. Difficulté liée d'abord à la conception de la technique démonstrative elle-même, qui n'a véritablement été mise en oeuvre, jusqu'alors, que dans les et 6 dans le Problème 2.4.. Ainsi, certains élèves pourront-ils écrire correctement les nombres concernés (par exemple sous la forme 2n+1 et 2n+3) et écriront aussi le nombre somme sous la forme 4m (ou 4x, etc.), puisque ce nombre est divisible par 4 (difficulté constante dans les débuts de l'emploi de la technique "par les lettres", et qu'on aura pu rencontrer déjà à l'occasion des Exercices 5 et 6 et du Problème 2.4.)...

La première difficulté pourtant consiste à donner un nom aux nombres considérés. Les écrire comme nombres impairs est relativement facile, au vu de ce qui précède. Ecrire que l'un est le successeur impair de l'autre est déjà plus difficile. On pourra donc voir apparaître soit le système 2n+1, 2m+1 (nombres impairs sans relation entre eux), soit un système du genre 2n+1, 2n+2 (l'un est le successeur - simple - de l'autre), et ceci même s'il a été reconnu que l'on passe du premier nombre à son successeur impair en ajoutant 2, etc. On notera à cet égard que si la forme 2n+1 montre bien que le nombre choisi est impair, la forme qui en découle alors pour le successeur impair - à savoir 2n+3 - n'est pas l'une des formes standard vues précédemment comme propres à désigner un nombre impair - ce qui pourra éventuellement gêner l'élève.

Deuxième difficulté, dans l'effectuation de la somme (2n+1)+(2n+3): les élèves ont jusqu'ici peut manipulé même des expressions aussi simples. Des résultats du genre 8n (somme de tous les coefficients numériques, suivie de n), ou 2n+4 (effectuation séparée, mais avec oubli d'un terme 2n), voire des erreurs surcomposées (2n+5, 1+3 donnant 5), etc., pourront être observées.

Un problème didactique difficile est ici posé, lié à l'ambiguïté du statut des lettres, dans la mesure, précisément, où l'on n'a pas commencé par le calcul formel sur les expressions littérales, mais par leur emploi fonctionnel. On a introduit les lettres, en effet, non comme des indéterminées, au sens que l'on donnait autrefois à ce mot, soit comme des variables formelles, mais comme des représentants de nombres ("indéterminés"): or il est vrai que l'on peut librement ajouter des nombres à des nombres. Pour contester des écritures du type 2n+1+2n+3=8n, le moyen le plus conforme à cette conception (assez primitive) des lettres consiste à montrer qu'une telle égalité est fausse pour certaines valeurs au moins (pour toutes sauf une en fait!) données à n. C'est ce point de vue qui sera adopté, dans la Séquence 2, de manière systématique, et que l'enseignant peut anticiper ici (comme il aura pu le faire dans des occasions précédentes).

En supposant obtenue l'égalité (2n+1)+(2n+3)=4n+4, il reste encore deux difficultés à franchir. Tout d'abord, beaucoup d'élèves voudront conclure sur cette forme: le nombre est un multiple de 4 - à savoir 4n -, plus 4, c'est donc un multiple de 4. L'évidence est telle que l'idée d'aller plus loin pourra non seulement faire défaut, mais même être refusée. Et refusée parce que ne sera pas conçue l'opération par laquelle on pourrait "aller plus loin": la factorisation (qui, formellement, devrait être connue, dans ce cas simple, depuis la cinquième). On rencontre ici un phénomène exemplaire: c'est la capacité technique de réaliser une certaine opération (la mise en facteur de 4) qui conditionne la possibilité que cette opération soit intégrée, conceptuellement, dans un ensemble d'opérations à accomplir pour atteindre un certain but (à savoir, obtenir une forme de type 4 fois "quelque chose"), et qui conditionne même la possibilité que ce but soit conçu comme tel (obtention d'une forme du type 4 fois quelque chose comme solution au problème posé).

La dernière difficulté, que l'on distingue ici à part, mais qui est donc solidaire de celle précédemment mentionnée, est la factorisation elle-même, regardée comme calcul formel. L'élève butera éventuellement sur la complétion de l'écriture (assez sûrement obtenue) 4n+4=4(n+): n+4? n+2? etc. La vérification par l'opération inverse (le développement 4(n+k)=4n+4k) est sans doute le moyen de parvenir au résultat.

On notera enfin qu'un certain nombre des difficultés signalées ici s'évanouissent si l'élève fait choix des noms 2n-1 et 2n+1. L'enseignant présentera, lors de la correction, les deux voies, inégalement facile à parcourir. On pourra observer ici que l'expression "un nom bien choisi" ne détermine pas entièrement le choix à effectuer, qui comporte une certaine fléxibilité: "2n+1" est certainement un nom bien choisi pour désigner le premier nombre impair considéré, mais ce choix standard n'est pourtant pas le plus judicieux, étant donné le problème à traiter. La notion de "nom bien choisi" - qu'on peut dire paramathématique - se complète ainsi d'une seconde détermination, qui demeure, elle, d'ordre protomathématique. (L'élève retrouvera éventuellement, plus tard dans ses études, ce schème protomathématique - choix judicieux, c'est-à-dire pertinent, non pas relativement à une propriété considérée dans l'absolu, mais relativement à un problème où cette propriété intervient - à propos de géométrie analytique par exemple: choix judicieux d'un repère, d'un paramétrage, etc.).

L'idée de choix judicieux se retrouve encore dans l'Exercice 9. L'élève qui choisit pour nom de x la forme 2n-1 obtient aussitôt le résultat: x+1=2n, donc x+1 est pair; x+2=2n+1, donc x+2 est impair.

Le choix de 2n+1 pour nom de x ramène les problèmes évoqués à l'occasion de l'Exercice 8. En ce qui concerne x+1 (=2n+2), on retrouve la difficulté liée à la mobilisation fonctionnelle de la factorisation, même si la factorisation en question est formellement simple: 2n+2=2(n+1). En ce qui concerne x+2, la difficulté est nouvelle: une factorisation ici ne suffit plus. Le but fonctionnellement poursuivi (mettre l'expression 2n+3 sous la forme 2m+1, ou 2m-1) ne doit pas être perdu de vue. S'ils ne parviennent pas d'eux-mêmes à la forme souhaitée, ce qui est probable à des exceptions près, les élèves devraient ici suivre sans difficulté le calcul productif que l'enseignant sera amené à présenter: 2n+3=2n+2+1=2(n+1)+1=2m+1, où m=n+1.

On notera, toujours à propos de l'Exercice 8, qu'il pourra être l'occasion d'une autre "régression" par le biais d'une fausse compréhension de la consigne - qui était plus improbable sur l'Exercice 8. Certains élèves pourront en effet se contenter, en un premier temps, d'une réponse du type: "x étant impair, son successeur x+1 est donc pair; et x+2, successeur du nombre pair x+1, est impair". (Dans l'Exercice 8, la propriété à démontrer, bien que considérée comme vraie et vérifiée sur un exemple, n'appartenait pas au "bien connu" et ne pouvait donc pas être simplement répétée comme allant de soi). Devant cette réponse on pourra se contenter de rappeler l'élève au contrat passé antérieurement: les propriétés manipulées, qu'elles apparaissent "évidentes" ou même "bien connues" (et, en tant que telles, éventuellement déjà utilisées - ce qui est le cas ici: voir le Problème 2.2.), doivent être maintenant démontrées, et démontrées "par les lettres".

Il convient de noter, toutefois, que la construction proposée au cours de cette Séquence 1 présente une certaine "ambiguïté" mathématique. Pour démontrer, en effet, que tout nombre impair peut s'écrire 2n+1 (ou 2n-1), on a utilisé (dans les Problèmes 2.2. et 2.3.), en les considérant alors comme allant de soi, les relations entre la parité d'un nombre et celle de son prédécesseur (ou de son successeur); relations qu'il s'agit maintenant (dans l'Exercice 9) de démontrer, en utilisant précisément le fait qu'un nombre impair s'écrit 2n+1 (ou 2n-1)! Il n'y a pas là, cependant, contradiction, mais vérification (implicite) de l'équivalence entre deux définitions possibles des nombres impairs (les nombres pairs étant supposés définis comme divisibles par 2, ou nombres de la forme 2n, définitions immédiatement équivalentes): les nombres impairs sont les successeurs (et donc les prédécesseurs) des nombres pairs (première définition), les nombres impairs s'écrivent sous la forme 2n+1 (deuxième définition).

Dans l'Exercice 10, on travaille à nouveau sur des propriétés qui devraient aller de soi, et qui ont été plus ou moins évoquées depuis le début de la séquence (à propos du Problème 1.1. déjà). Mais la situation ici devrait être plus claire. Après les difficultés rencontrées dans les deux exercices précédents, l'Exercice 10 doit permettre de rassembler la classe, de la cohérer autour d'un savoir-faire maintenant à peu près maîtrisé.

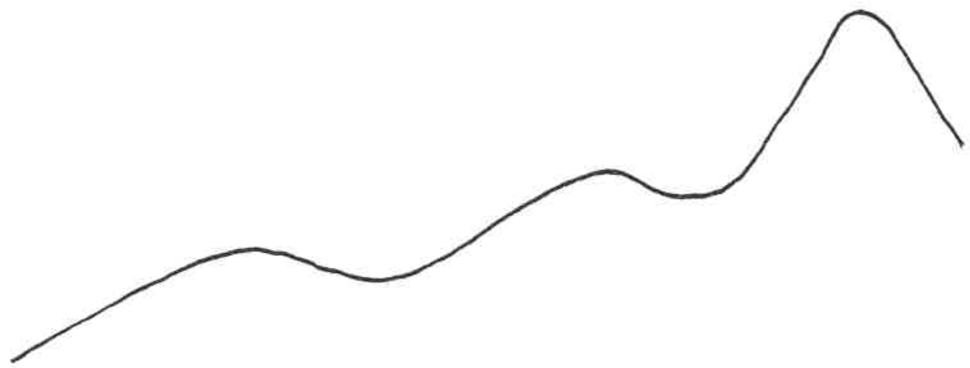
La première question (si x et y sont pairs, x+y est pair) devrait être traitée à peu près immédiatement, la factorisation exigée ne devant pas poser problème, du fait en particulier qu'elle porte sur une expression homogène: 2n+2m=2(n+m).

La seconde question amène à la manipulation d'une expression à peine plus compliquée: 2n+(2m+1)=2n+2m+1=2(n+m)+1=2k+1, avec k=n+m. Là encore, la factorisation porte sur une expression homogène, ce qui devrait d'ailleurs faciliter en retour, par attraction formelle, l'apparition de la factorisation pertinente.

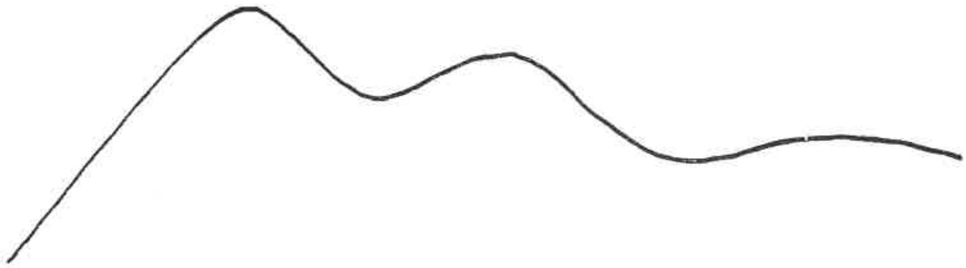
La troisième question est incomplètement formulée. Dans le présent contexte, les élèves devraient donner correctement la formulation complète: la somme de deux nombres impairs est un nombre pair. On notera toutefois que cela n'exclut pas que, plus tard, dans un contexte différent, resurgisse la réponse erronée "classique" (la somme de deux nombres impairs est un nombre impair): l'enseignant ne devra pas s'en étonner, et encore moins s'en désoler. On peut d'ailleurs penser qu'au cas où une telle conclusion serait formulée par un élève au cours d'un échange collectif, le contrôle par la classe serait immédiat.

En ce qui concerne la démonstration de cette troisième question, le calcul à effectuer comporte précisément cette petite difficulté supplémentaire de nécessiter une factorisation portant sur une expression non homogène: $(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(n+m+1)=2k$, où $k=n+m+1$. On observera alors les difficultés et les erreurs déjà décrites (à propos des Exercices 8 et 9), difficultés qui, cependant, doivent être alors plus aisément surmontées.

Il faut observer, en ce point, la logique qui sous-tend la suite des Exercices 8, 9 et 10. Contrairement à une didactique habituelle, qui respecte le principe de la gradation ascendante dans la difficulté des exercices successifs, le choix retenu ici procède à rebours: cette suite en effet commence par un exercice "difficile", passe ensuite par un exercice déjà plus facile, pour arriver enfin à un exercice qui, étant donné ce qui vient alors d'être fait, apparaît comme de moindre difficulté. La motivation didactique de ce choix est la suivante: dans la didactique "du facile au difficile", le contrat didactique peut agir de telle manière qu'un certain nombre d'élèves, qui se satisfont d'occuper une position moyenne par rapport à la progression de l'ensemble de la classe, estimeront en avoir assez fait quand ils auront résolus (plus ou moins bien) l'Exercice 10, voire l'Exercice 9, et, dans la mise en oeuvre de leur propre tactique, n'accorderont plus alors que peu d'importance à la résolution de l'Exercice 8. Si l'on représentait (métaphoriquement) la progression proposée par une courbe indiquant la difficulté dans la progression, il faudrait tracer alors une courbe du type suivant:



En revanche, le choix ici mis en oeuvre conduit plutôt à la courbe que voici:



Cette didactique "inversée" aboutit en principe à ceci: ou bien on passe, et on passe alors (par) la difficulté la plus élevée; ou bien on ne passe pas du tout, ce qui est un choix nettement moins facile à assumer. L'Exercice 10, en particulier, n'est plus la première étape d'une ascension dont la difficulté va aller s'accentuant. Il fonctionne au contraire comme une difficulté secondaire, où le "peloton" (la classe) se retrouve, et où ceux qui ont peiné dans les ascensions précédentes peuvent refaire leurs forces...

L'Exercice 11, dans sa formulation actuelle, offre une difficulté considérable: il s'agit de démontrer qu'une certaine catégorie de nombres ne sont pas divisibles par 4. Cette situation fait contraste, et rupture, par rapport à ce qui a été vu généralement jusqu'ici, à l'exception de l'étude de l'écriture des nombres impairs (nombres qui ne sont pas pairs), dans laquelle d'ailleurs la difficulté avait été tournée par l'utilisation des relations entre parité d'un nombre et parité de son successeur (ou de son prédécesseur), comme on l'a rappelé plus haut.

Le but poursuivi, ici, n'est pas évident, et la manipulation fonctionnelle de l'expression considérée, à savoir $2n+(2n+2)$, n'est pas assujettie à l'obtention d'une forme attendue *a priori*. Cette situation, pourtant, n'est pas artificielle: elle présente un caractère qui apparaît normalement assez fréquemment dans l'emploi du calcul algébrique (obtenir une forme qui montre - mais comment ? - telle propriété). Le calcul formel supplée alors momentanément le calcul purement fonctionnel: on commence par calculer "pour voir", avec une certaine idée en tête, mais sans avoir une idée précise de ce qu'il faudrait faire apparaître. Et c'est une fois une certaine forme obtenue qu'on découvrira éventuellement la manière de "faire parler" cette forme dans le sens requis.

La première difficulté, qui devrait être aisément surmontée, consiste d'abord à déterminer des noms "bien choisis" (dont on ne peut d'abord que supposer qu'ils sont judicieusement choisis) pour les nombres considérés: 2n et 2n+2 (ou 2n-2 et 2n). L'effectuation formelle de l'expression 2n+(2n+2) conduit alors à l'expression 4n+2. Dans la ligne des exercices précédents, l'essai d'une factorisation - opération un peu plus délicate - apparaît naturel. On arrive alors à l'expression 2(2n+1).

Cette expression montre d'abord que le nombre somme est pair. Le raisonnement peut être conclu alors en observant que, dans la division par 2 d'un nombre divisible par 4 (4m), on obtient un nombre pair (2m); alors que la division par 2 conduit ici à un nombre impair: 2n+1.

Une autre manière de faire parler l'expression manipulée est plus subtile (moins "naturelle" dans le présent contexte). Elle consiste à ne pas effectuer de factorisation, et à interpréter alors la forme "brute" 4n+2, à l'aide de la théorie de la division euclidienne (vue en cinquième): le nombre x=2n+(2n+1) a un reste non nul (égal à 2) dans la division par 4. Il n'est donc pas divisible par 4. Il est peu douteux que cette solution n'apparaîtra pas spontanément. Mais l'enseignant pourra éventuellement la présenter.

L'Exercice 12 propose une situation apparemment simple. Il "suffit" en effet d'effectuer l'expression x+(x+1) pour voir apparaître immédiatement un nombre impair: 2x+1. Pourtant le contexte fournit un distracteur assez puissant, en entraînant les élèves à distinguer les cas (notion protomathématique qui peut apparaître ici pour la première fois): si x est pair, on écrira x=2n, et alors x+(x+1) =2n+(2n+1)= 4n+1=2(2n)+1=2m+1, où m=2n; si x est impair, x=2n+1, et alors x+(x+1)=(2n+1)+(2n+2)=4n+3=4n+2+1 =2(2n+1)+1=2m+1, où m=2n+1 (ou, mieux, x=2n-1, et alors x+(x+1)=(2n-1)+2n=4n-1=2(2n)-1=2m-1, où m=2n). On ne commentera pas ici les difficultés, déjà examinées à propos des exercices précédents, que proposent ces calculs.

Un autre attracteur est constitué par l'Exercice 10, qui, joint au résultat démontré dans l'Exercice 9, peut suggérer l'idée d'exploiter la distinction de cas sans calculs: si x est pair, x+1 est impair, donc la somme de ces deux nombres est impaire; si x est impair, x+1 est pair, donc la somme de ces deux nombres est impaire. On notera que cette solution met en jeu le schème d'enchaînement entre exercices successifs, dont on a parlé dans le commentaire de l'Activité 2 (voir, supra, §5). Elle dénote donc une familiarité facile avec les modes de la discursivité mathématique.

DOCUMENT 1.1.

extrait de: M.-L. Hocquenghem, C. Missenard, F. Monnet, A.-M. Serfati, G. Tartary, Histoire des mathématiques pour les collèges, Cédic, Paris, 1980, pp.95-98.

3 – NOTATIONS ALGEBRIQUES

Voici un premier tableau, montrant l'évolution des notations pour quelques notions importantes en algèbre.

symboles pour → chez		addition +	soustraction -	multiplication ×	division $: \frac{a}{b}$	égalité =	inconnues x, y, z etc.	puissances de l'inconnue 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6
Egyptiens	XVII^e av. J.-C.	⅃⅃	└└		$\frac{1}{3}$ noté			
Diophante	2^e siècle	inutile l'addition étant obtenue par juxtaposition	⋔		$\frac{1}{3}$ noté γ' γ signifiant 3		une seule inconnue ς	M^o ς Δ^Y K^Y $\Delta^Y\Delta$ ΔK^Y $K^Y K$
Chuquet	XV^e	p	m				1^1 une seule inconnue	1^0 1^1 1^2 1^3 1^4 1^5 1^6 pour noter $12x^3$ Chuquet écrit 12^3
Tartaglia	XVI^e	p	m				R une seule inconnue	N, R, Q, C, QQ, β, QC
Stevin	XVI^e	+	-				0	2 3 4
Viète	XVI^e	+	-	in	$\frac{3}{4}$		A, E, I, etc.	1, A, AQ, AC... (quadratus, cubus)
Descartes	XVII^e	+	-		$\frac{3}{4}$	$\propto$	z, x, etc.	1, z, z^2 .....

A noter :

C'est l'Anglais Recorde qui introduit en 1557 le symbole « = » pour l'égalité (« j'userai d'une paire de parallèles ou lignes jumelles d'une certaine longueur parce que rien n'est plus pareil que deux jumeaux »).

Les symboles + et – apparaissent pour la première fois dans « Arithmetica Integra » de l'Allemand Widmann en 1489.

Le signe « > » est de l'Anglais Maniot (1560-1621).

Le signe « √ » est de l'Allemand Rudolf (1500-1545).

Le signe × est de l'Anglais Oughtred (1547-1660).

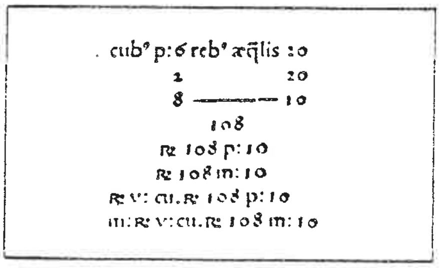
Regardons, pour illustrer un peu ce tableau, comment se présente avec ces diverses notations un calcul tel que :
$4x^2 \times 6x^3$

★ **avec nos notations modernes**
$4x^2 \times 6x^3 = 24x^{2+3} = 24x^5$
La notation exponentielle permet l'utilisation d'une règle simple : addition des exposants.

★ **pour Diophante :**
$\Delta^Y\delta$ multiplié par $K^Y S$ égale $\Delta K^Y \ \kappa\delta$
Dans la mesure où, dans les notations diophantiennes, la puissance 5 est obtenue par juxtaposition des symboles correspondant aux puissances 2 et 3, le calcul ne présente guère de difficulté ; l'inconvénient majeur est que ce type de notation des puissances se généralise mal – Diophante utilisait des symboles jusqu'à la puissance 6.
Dans un calcul comme $x^{10} \times x^{23}$ notre règle fonctionne encore ; pas celle de Diophante.

★ **par Tartaglia** (vers 1500-1557)
4q multiplié par 6c égale 24β
Dans ce cas l'inadaptation de la notation au calcul à effectuer est très nette : le calculateur qui veut effectuer « 4q multiplié par 6c » doit :
– traduire : q est le carré
c est le cube
– appliquer une règle : le produit du carré par le cube est le premier relate (puissance 5)
– traduire : le premier relate se note β donc « 4q multiplié par 6c égale à 24β ».
Tartaglia utilise, d'ailleurs, un tableau de correspondance qui, en facilitant les phases de traduction, évite un important effort de mémoire :

O	1	2	3	4	5	6	7	8 ......
N	R	q	c	qq	β	qc	..	..


cub⁹ p:6 reb⁹ æq̃lis 20
2 20
8 ———— 10
108
R 108 p: 10
R 108 m: 10
R v: cu. R 108 p: 10
m: R v: cu. R 108 m: 10

Extrait d'un manuscrit de Cardan (1545)

★ **pour Chuquet**
4^2 multiplié par 6^3 égale à 24^5
même règle, même facilité, même généralité qu'avec nos notations modernes.

★ **pour Viète**
4A quadratus in 6A cubus aequatur 24A quintus
On retrouve les inconvénients de la méthode de Tartaglia.

★ enfin, **pour Descartes**
$4z^2$ multiplié par $6z^3 \propto 24z^5$

Après ces quelques lignes illustrant : « Heurs et malheurs de la notation exponentielle » on peut se demander pourquoi Viète est souvent considéré comme le fondateur de l'algèbre moderne... S'il n'a pas vu l'intérêt de cette écriture exponentielle, il a par contre introduit des notations permettant d'écrire plusieurs inconnues et des expressions à coefficients littéraux.
Il décide de représenter par les lettres de l'alphabet A, B, C... toutes les grandeurs intervenant dans les calculs, qu'elles soient connues ou inconnues ; il réserve les consonnes pour les grandeurs connues et les voyelles pour les inconnues.
Il écrit par exemple l'équivalent de notre $ax^2 + bx = c$ sous la forme :
Bin A quadr. + C plano in A aequatur D solido
Dans la mesure où les grandeurs intervenant sont encore considérées comme des grandeurs géométriques, Viète s'oblige à indiquer la nature de ces grandeurs afin de respecter la loi d'homogénéité : c'est ce qui explique les mots « plano » et « solido ».
Avec la généralité au niveau de l'écriture des grandeurs connues et inconnues acquise par Viète et la commodité de la notation exponentielle de Chuquet, les successeurs parviendront à une algèbre symbolique efficace qui est en usage depuis, à peu près, le milieu du XVII[e] siècle.

Voici maintenant un second tableau retraçant l'évolution de l'écriture de quelques expressions algébriques simples.

moderne	$15 + 5x = 20$	$x^2 + x = 3$	$x^3 - 5x^2 + 8x - 1$
Babyloniens Egyptiens	ne savent pas écrire une telle équation, mais savent résoudre des problèmes se ramenant à ce type d'équation	idem	
Diophante	ς ε M̊ ιβ εστι X inconnue 5 unité 12 égale 20	Δ^Υα ς inconnue carré 1 inconnue 1 εστι γ	K^Υα ςη ⋔ inconnue cube 1 inconnue 8 moins Δ^Υε M̊α inconnue carré 5 unité 1
Chuquet	12^0 p5^1 egault 20^0	1^2 p 1 egault à 3	1^3 m 5^2 p8^1 m 1^0
Tartaglia	12Np5R equale 20N	1q p 1R equale 3	1C m5q + 8R m 1N
Viète	12 + 5in A aequatur 20	A quad + A aequatur 3	A cubus − 5in A quad + 8in A − 1
Descartes	$12 + 5z \propto 20$	$z^2 + z \propto 3$	$z^3 - 5z^2 + 8z - 1$

En guise de conclusion.

Chez les Babyloniens, les Egyptiens et les Grecs jusqu'à Diophante, on trouve une **algèbre** dite **terminologique** c'est-à-dire que les raisonnements sont écrits en toute lettre, à l'exclusion quasi totale de toute notation. (voir thème 6).

Avec Diophante apparait **l'algèbre syncopée** c'est-à-dire un début de symbolisme, encore mêlé à des éléments de phrases et à des abréviations. Chez Chuquet, Tartaglia, Viète, il s'agit encore d'algèbre syncopée.

Il faudra attendre le début du XVII^{e} avec en particulier Descartes pour que **l'algèbre** devienne presque entièrement **symbolique**.

woorde the tediouse repetition of these woordes : is e-qualle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. $14.\mathrm{ze}. + .15.\varphi = 71.\varphi.$
2. $20.\mathrm{ze}. - .18.\varphi = .102.\varphi.$
3. $26.\mathfrak{z} + 10\mathrm{ze} = 9.\mathfrak{z} - 10\mathrm{ze} + 213.\varphi.$
4. $19.\mathrm{ze} + 192.\varphi = 10\mathfrak{z} + 108\varphi - 19\mathrm{ze}.$
5. $18.\mathrm{ze} + 24.\varphi. = 8.\mathfrak{z}. + 2.\mathrm{ze}.$
6. $34\mathfrak{z} - 12\mathrm{ze} = 40\mathrm{ze} + 480\varphi - 9.\mathfrak{z}$

1. In the firste there appeareth .2. nombers, that is $14.\mathrm{ze}.$

Extrait de « Whetstone of Witte » de Recorde (1557)

DOCUMENT 1.2.

extrait de: J.-F. Blanc et J. Soler, <u>L'algèbre à l'école primaire</u>, Librairie Ferran & Cie, Marseille, 1924, p.3.

Emploi des lettres dans la solution des problèmes

Problème. — *On a un coupon de drap d'une certaine longueur et un deuxième coupon qui a 4 mètres de plus. Ces deux coupons ont ensemble 40 mètres. On demande la longueur de chaque coupon.*

SOLUTION ARITHMÉTIQUE

Représentons la longueur du 1er coupon par une ligne.
Une ligne semblable augmentée de 4 m. figurera le 2me coupon.

En examinant cette représentation graphique, on voit de suite que : petit coupon + petit coupon + 4 m. ou 2 fois le petit coupon + 4 m. = 40 m.

par conséquent, 2 fois le petit coupon = 40 m. — 4 m. = 36 m.

d'où, petit coupon = 36 m. : 2 = 18 m.

et, grand coupon = 18 m. + 4 m. = 22 m.

SOLUTION ALGÉBRIQUE

$$40 \text{ m.} \left\{ \begin{array}{ll} 1^{er} & x \\ 2^{me} & x + 4 \text{ m.} \end{array} \right.$$

Au lieu de la ligne, mettons pour le 1er coupon la lettre x.
Nous aurons pour le 2me coupon : $x + 4$.

Nous avons ainsi sous les yeux, comme pour la solution précédente, une image très nette de l'énoncé et nous pouvons écrire :

$$x + x + 4 = 40 \text{ m.}$$
$$2 \text{ fois } x + 4 = 40 \text{ m.}$$
$$2 \text{ fois } x = 40 \text{ m.} - 4 \text{ m.} = 36 \text{ m.}$$
$$x = 36 : 2 = 18 \text{ m.}$$

et, grand coupon = 18 m. + 4 m. = 22 m.

Chaque fois que nous emploierons des lettres dans la résolution des problèmes, nous ferons de l'algèbre

La solution algébrique est plus simple, plus rapide que la solution arithmétique. Elle dispense de faire de longs raisonnements.