TROISIEME ECOLE D'ETE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Ateliers du vendredi 6 juillet 1984

animés par:

Yves Chevallard,
Marie-Alberte Johsua
et Alain Mercier

LE PROBLEME DES PROBLEMES "CONCRETS"

Le document ci-après propose un ensemble de thèses élaborées dans le but de nourrir le travail de l'atelier consacré à l'examen du problème des problèmes "concrets". Ce document n'est en aucune manière auto-suffisant. Un apport d'information important doit le compléter. Certaines des thèses ici présentées auront été examinées dans le cadre du premier cours donné par Y. Chevallard; d'autres seront (re)discutées à l'occasion du deuxième cours (le dimanche 8 juillet). La plupart cependant seront associées à la présentation, au cours de l'atelier, de documents complémentaires qui en éclaireront la signification. Il apparaît toutefois utile que les participants aient lu, de manière assez précise, le texte qui suit avant la séance de travail en atelier. Deux remarques doivent encore être faites à cet égard: ce travail ne consistera pas en un débat d'opinions sur l'opportunité de la présence de problèmes concrets dans l'enseignement des mathématiques, mais en une analyse didactique des conditions et des modalités de cette présence (actuelles et/ou envisageables); le présent document doit être regardé comme strictement interne à l'atelier: sa décontextualisation (par une diffusion sauvage, même limitée, par exemple) est donc strictement déconseillée.

Y.C.

THESES
(pour un débat)
SUR LES CONDITIONS ET LES MODALITES DE LA PRESENCE
DES PROBLEMES "CONCRETS"
DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Statut et rôle des problèmes "concrets":
les différences sectorielles

Thèse 1

Le problème des problèmes "concrets" est consubstanciellement lié, dans l'histoire des mathématiques et dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques, au secteur de l'arithmétique (comme opposée et à la géométrie, et à l'algèbre). Dans ce secteur, les problèmes "concrets" jouent le rôle de substitut d'un langage adéquat, historiquement non encore élaboré ou simplement absent au niveau du cursus d'enseignement considéré, permettant de poser des problèmes. Sous l'habillage "concret", ce sont des structures mathématiques abstraites qu'ils servent à présenter (en les représentant, au sens diplomatique du terme), la succession - dans le temps didactique - des différents types de problèmes constituant alors une manière de "traiter le programme". En conséquence, ces problèmes "concrets" peuvent se permettre de se référer de manière parfaitement irréaliste aux situations concrètes qu'ils utilisent comme signifiants.

Thèse 2

La place des problèmes "concrets" n'est plus la même dès lors que surgit l'algèbre, parce que le rôle qu'ils jouaient est alors rempli de manière plus satisfaisante par le langage algébrique, qui permet de faire l'économie de leur médiation comme moyen de présentation de structures. En conséquence, et bien que, traditionnellement, les traités d'algèbre élémentaire prétendent s'attaquer au même corpus de problèmes que l'arithmétique - mais avec des moyens autres, plus puissants -, les problèmes "concrets", encore présents en leur début afin d'assurer la continuité et l'unité de la problématique d'exposition du savoir algébrique, disparaissent rapidement dans la suite des développements de ces ouvrages.

Thèse 3

La situation est autre en géométrie (élémentaire). Dès le départ, en effet, il existe ici un langage spécifique

satisfaisant, celui des figures, la figure "générique" jouant le rôle que jouent les variables (ou les indéterminées) dans le langage algébrique. A l'assertion "Soit n un entier" répond alors l'assertion "Soit ABC un triangle", etc. Ce langage n'est certes pas parfait, et suppose des distinctions de cas, les "cas de figure". Mais il est optimal à un certain niveau. En conséquence, les problèmes "concrets" de la géométrie, bien moins nombreux qu'en arithmétique, ne jouent pas le rôle de représentation de situations mathématiques assigné aux problèmes "concrets" en arithmétique, et peuvent donc être plus nettement réalistes.

Statut et rôle des problèmes "concrets": l'évolution récente

Thèse 4

Dans l'histoire de la place et du statut dévolus dans l'enseignement aux problèmes "concrets", la réforme des mathématiques modernes joue un rôle tout particulier: elle consacre (momentanément) la déchéance de ces problèmes. Pourtant elle ne répudie pas le concret. Au contraire: elle se situe (pour y jouer son rôle historique) dans une évolution qui promeut les thèmes - interprétés dans un registre empiriste-sensualiste - de l'observation et de l'expérimentation. Mais le réel, le "concret" sont ici intramathématiques: ce sont les structures numériques qui, dans la réforme française du début des années soixante-dix, se trouvent constituées en réalité objet d'étude.

Thèse 5

La réaction suscitée par la mise en oeuvre des programmes réformés aboutit (autour de 1977) à une contre-réforme à la fois antithéoriciste (ce qui l'oppose à la réforme antérieure), empiriste (ce qui approfondit ou du moins perpétue le mouvement amorcé antérieurement à la réforme du début des années soixante-dix) et soumise idéologiquement aux mots d'ordre conjugés de "retour au concret" (entendu comme retour à l'extramathématique) et d'"ouverture de l'école sur la vie". En conséquence, les manuels correspondants reprennent, quoiqu'à des degrés divers, l'ancien corpus des problèmes concrets, mis à jour par l'introduction de problèmes se référant à des situations de la vie moderne.

Thèse 6

Il existe une différence fondamentale entre la situation

ainsi créée et la situation qui prévalait dans l'ancienne arithmétique. Les problèmes "concrets" présentés dans l'enseignement actuel se trouvent intégrés dans le texte d'enseignement soit à titre de motivation (en consonance étroite avec l'objectif d'"ouverture de l'école sur la vie"), soit à titre d'application d'un thème mathématique donné. Sauf exception, ils ne jouent plus alors le rôle, qu'ils assumaient anciennement, de moyen de présentation et de représentation (au sens vu dans la Thèse 1) des structures mathématiques véritable objet enseigné, fonction pour laquelle ils ne sont plus désormais nécessaires. En conséquence, dans l'écologie didactique du savoir enseigné, ils n'occupent plus la même niche écologique. L'ancien équilibre n'existe plus: une fois traités les problèmes "concrets", il reste encore... à traiter le programme (lequel était anciennement traité à travers des problèmes "concrets"). Il n'existe pas de niche nouvelle qui paraîtrait adéquate (c'est-à-dire qui les rendraient viables à terme dans le milieu où ils doivent trouver place, tel que celui-ci est actuellement organisé). Signe de cette difficulté écologique, la seconde édition de certains manuels (relative aux mêmes programmes) montre une réduction nette de la place qui leur est accordée.

La place des problèmes "concrets" dans l'enseignement:
un débat social "rampant"

Thèse 7

Il existe pourtant une pression sociale diffuse, mais nette, poussant au retour au "concret" et aux problèmes "concrets". On doit noter qu'un mouvement idéologiquement proche - bien que ce mouvement ne puisse pas être seulement caractérisé par la réémergence des problèmes "concrets", la situation américaine ayant toujours été plus "archaïque" en ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre élémentaire - est devenu dominant aux Etats-Unis au cours des dernières années, où il a été popularisé par le slogan "Back to the basics" et a pris la forme plus technique d'un débat et de recherches portant sur l'opportunité et les moyens de définition de "compétences minimales". Signe de cette pression, la publication en France, en 1983, d'un ouvrage intitulé Calcul pratique, arithmétique et géométrie, qui est rapidement devenu un best-seller et que le public peut découvrir jusque dans les supermarchés (1). Le slogan - "progressiste" - de l'"ouverture sur la vie" peut en ce point rencontrer le programme - "réactionnaire" - du "retour aux enseignements de base" et des "compétences minimales".

Thèse 8

Il existe donc un débat social "rampant" sur le problème des problèmes "concrets", de leur place et de leur statut dans l'enseignement secondaire français. Il n'existe pas a priori de nécessité historique qui pousserait à confier cet enseignement aux professeurs de mathématiques. En fait, ce qu'il existe actuellement d'un tel enseignement se répartit au moins entre l'enseignement des mathématiques, l'enseignement des sciences physiques et l'éducation manuelle et technique - sans parler ici de certains enseignements spécialisés, techniques par exemple, dans lesquels la tradition n'a, par obligation de nature, jamais été rompue.

Enseignement et consensus social

Thèse 9

La possibilité de constituer en objet d'enseignement un élément quelconque issu de certaines pratiques de savoir "laïques", savantes ou non, d'en mener à bien l'enseignement dans des conditions didactiquement satisfaisantes, ne dépend pas que d'une décision des "clercs", de la noosphère et de l'autorité politique. Elle dépend de l'existence d'un consensus assez puissant pour imposer à la société toute entière - dès lors qu'est concerné l'enseignement général, et non tel ou tel enseignement particulier - les pratiques de savoir considérées comme dignes d'être enseignées et d'exiger de la part des enseignants et des élèves l'effort adéquat. On comparera sur ce point le mouvement semblable, mais autrement puissant, qui gagne la société française en faveur de l'enseignement des rudiments de la programmation.

Les didacticiens face au problème des problèmes "concrets"

Thèse 10

Il existe un certain nombre de recherches attirant l'attention des chercheurs et, au-delà, des responsables de l'enseignement, sur les difficultés spécifiques liées, dans les conditions sociales actuelles de l'enseignement des mathématiques tout au moins, à l'introduction de problèmes "concrets" dans l'enseignement. Leurs résultats tendent implicitement ou explicitement à montrer que la place qui leur est éventuellement donnée dans l'enseignement actuel est insuffisante, et leur statut inadéquat, si l'on entend réellement y traiter de ce type de problèmes. (De ces

recherches on peut aussi tirer - éventuellement contre la volonté de leurs auteurs - qu'une grande partie des élèves n'acquièrent pas les "compétences minimales" permettant de "répondre aux besoins de la vie quotidienne": elles alimentent donc indirectement le débat sur le "retour aux bases", l'exigence de redéfinir des "compétences minimales", etc.).

Thèse 11

Ces résultats de la recherche demeureront sans doute pour partie valables quelles que soient les conditions sociales dans lesquelles pourrait fonctionner un tel enseignement. Mais ce qui, en revanche, est susceptible de changer en fonction de ces conditions, ce sont les types de solutions, et la plus ou moins grande facilité à les mettre en oeuvre dans les classes, qui permettraient de dépasser de manière satisfaisante les difficultés constatées.

Thèse 12

En conséquence, le travail des didacticiens ne saurait se limiter à des recherches "microdidactiques" sur les faits d'enseignement. De telles études supposent implicitement que les systèmes didactiques sont fermés ou quasi-isolés. Du point de vue théorique et méthodologique, cette dernière hypothèse conduit à travailler sur une première approximation de la réalité didactique, qui est en bien des cas suffisamment réaliste. Mais certains thèmes de recherche supposent, à certaines époques historiques, la prise en compte des interrelations entre les systèmes didactiques et leur environnement le plus large. Ces études "macrodidactiques" font intégralement partie du champ de recherche des didacticiens.

Thèse 13

Les didacticiens peuvent évidemment, à quelque titre que ce soit, prendre part au débat sur la place et le statut qui pourraient être donnés aux problèmes "concrets" dans l'enseignement secondaire français. Mais, quoi qu'il en soit, ce débat, son état de développement, les conditions et les modalités d'une éventuelle "redidactification" d'un certain secteur de savoir, constituent pour eux, en tant que communauté, un objet d'étude. L'intégration dans le débat social des résultats de recherche qu'ils seraient susceptibles d'obtenir dans ce genre d'études est a priori un autre problème. Toutefois, il convient de noter que c'est un problème pertinent du double point de vue didactique et social.

Une typologie des problèmes "concrets"
inspirée par les contraintes "modernes"
sur leur enseignement

Thèse 14

Dans l'abord de cet objet d'étude, un premier point consiste à examiner ce que sont les problèmes "concrets" - ce que l'on appelle, en anglais, "word problems" - traditionnellement repérés sous ce nom dans l'enseignement. H.O. Pollak a proposé une classification que nous reprenons ici (2):

- 1) "Immediate use of mathematics in everyday life";
- 2) "Problems that use words from everyday life and pretend, in varying degrees, to be applications";
- 3) "Problems that use words from other disciplines";
- 4) "Problems of whimsy";
- 5) "Genuine applications in real life";
- 6) "Genuine applications to other disciplines".

Ce découpage du champ est réalisé suivant deux critères croisés. Le premier concerne le fait que le réel dont nous parle le problème est celui de la réalité quotidienne ou celui auquel s'attache une discipline scientifique particulière. Selon ce critère, les types 1, 2 et 5 s'opposent aux types 3 et 6. On notera que dans les deux cas, quoiqu'à des degrés divers, certaines connaissances - sociales ou scientifiques - sont en principe requises de qui voudrait résoudre le problème. Le second critère concerne le réalisme ou l'irréalisme (voire l'invraisemblance), ou, plus justement, la pertinence ou la non pertinence, de la manière dont l'énoncé proposé prétend modéliser la réalité de référence. Selon ce critère, le type 5 s'oppose au type 2, et le type 6 s'oppose au type 3. On notera que les problèmes de type 4 ("problems of whimsy") échappent à ces deux critères, parce que la "réalité" à laquelle ils se réfèrent est visiblement une réalité imaginaire, imaginée pour les besoins de la cause: ils jouent de manière particulièrement nette le rôle que jouaient en général les problèmes "concrets" dans un certain état des mathématiques et/ou de leur enseignement (voir la Thèse 1). Une distinction secondaire est en outre faite entre les problèmes "réels", "en vraie grandeur" et donc généralement complexes (de types 5 et 6) et les problèmes "simples", quoique réalistes (de type 1).

Une difficulté scientifique et (donc) didactique

Thèse 15

On examine d'abord le second critère mis en oeuvre par l'auteur. Il convient d'abord de noter, en accord avec l'auteur, que les problèmes de types 2 et 3 doivent être disqualifiés, du point de vue scientifique déjà, en tant que problèmes appliqués, ce qu'ils ne sont pas puisque la mathématisation qu'ils mettent en oeuvre, dans le cas de problèmes se référant à la réalité physique par exemple, fait l'économie du modèle physique qu'il conviendrait d'abord de constituer pour le mathématiser (ou de constituer en le mathématisant). Un modèle mathématique se trouve alors "forcé" sur la réalité physique, qu'il asservit sans la servir (sans en permettre la connaissance, ou du moins sans en permettre une connaissance physiquement contrôlée). La "réalité" invoquée n'est ici qu'un prétexte pour une activité mathématique préalablement posée.

Une difficulté didactique intrinsèque

Thèse 16

Toutefois, cette analyse est insuffisante. Les "problems of whimsy" aussi sont de faux problèmes appliqués - ce qui ne suffit pas à les rendre scientifiquement inintéressants. Mais les deux genres de problèmes (les types 2 et 3 d'une part, le type 4 d'autre part) diffèrent dans la manière dont ils se réfèrent à la "réalité", et donc par le type de "réalité" qui leur tient lieu de référent. Dans le second cas, on a affaire à un réel d'opérette, qui n'existe que comme projection d'un réel mathématique antérieur: il n'y a, en principe, nulle ambiguïté en cela. Dans le premier cas, le problème renvoie à une "réalité" autrement réelle, qui motive et informe le modèle mathématique au lieu d'y être préformée. Du point de vue du sujet, il est alors nécessaire, pour entrer dans le problème, de croire à l'existence objective, externe, indépendante du modèle mathématique éventuellement suggéré par l'énoncé, de la situation et du réel qu'elle met en jeu. Mais, dans le même temps, le sujet est soumis à une seconde exigence, contradictoire de la première: pour résoudre le problème proposé, il doit savoir que le sort de cette réalité (qu'il a dû d'abord reconnaître dans son existence indépendante) est par avance réglé, selon un code que l'usage enseigne, par tel modèle mathématique qu'il s'agit alors seulement d'identifier de manière conforme. Le sujet est donc pris dans une situation de double contrainte. On notera bien entendu qu'il n'est pas exclu qu'un "problem of whimsy", reconnu tel par tel sujet, fonctionne pour tel autre à la manière d'un problème de type 2 ou 3.

Thèse 17

La relation entre modèle (mathématique) et réalité enferme toujours, pour le sujet, la possibilité d'une double contrainte. Le réalisme du modèle que l'on a en tête (ou plutôt: que l'énoncé a en tête, si l'on peut dire) suppose implicitement que certaines hypothèses qu'il incorpore soient vérifiées, ce qui suppose à son tour certaines propriétés de la réalité visée à travers le modèle. En d'autres termes, une fois posé le lien de principe entre un modèle et une réalité, toute propriété du modèle vient renforcer la réalité de la réalité: la réalité existe bien, puisqu'elle a des propriétés! Mais, dans le même temps, cette réalité apparaît comme la simple projection d'un modèle qui lui préexistait, ce qui en accroît le caractère "fantomatique". Il y a déjà ainsi une difficulté fondamentale, intrinsèque, concernant la dévolution des problèmes "concrets".

Une réponse possible à cette difficulté

Thèse 18

Ici comme ailleurs, une manière de sortir d'une position de double contrainte consiste à métacommuniquer à propos de la situation qui l'a engendrée. Dans le cas qui nous occupe, la métacommunication a pour objet l'interrogation sur l'adéquation entre modèle et réalité. Cette interrogation, nécessaire aussi bien scientifiquement que psychologiquement, est au coeur de l'activité de modélisation. En réalité, c'est son absence qui est invalidante, plus que le type de problème posé. D'une part, en effet, certains "mauvais" problèmes (au sens de Pollak) peuvent envelopper un modèle (de la réalité étudiée) qui soit, non seulement un modèle "acceptable", mais en fait un bon modèle, dès lors que sont énoncées et validées ses conditions d'emploi. D'autre part, il n'existe pas, même dans les cas les plus simples et les plus "évidents", de modèles qui seraient acceptables sans examen: même les modèles de comptage fournis par l'ensemble des nombres entiers ne sauraient, en principe, et comme le soulignait naguère Henri Lebesgue, être acceptés sans discussion. C'est cette activité spécifique de la modélisation qui se trouve généralement laminée dans le traitement scolaire des problèmes "concrets".

Cette réponse suppose la redéfinition de l'objet enseigné

Thèse 19

L'exigence d'examen explicite de l'adéquation d'un

modèle et d'une réalité donnés est liée au fait que cette adéquation ne peut être jugée selon un critère absolu (qui permettrait par exemple d'accepter sans (re)discussion un modèle traditionnel d'une réalité anciennement modélisée). Le "réalisme" du modèle est toujours relatif; il est fonction de l'emploi que l'on veut en faire. Un modèle d'une réalité "donnée" n'est pas une représentation la plus fidèle possible de cette réalité, au sens où il contiendrait des traits correspondants à tous les traits de la réalité étudiée, et à ceux-là seulement. Un bon modèle peut fort bien ne pas incorporer tous les traits discernables d'une réalité donnée - fort heureusement! - et, en même temps, posséder des traits qui n'ont pas de contrepartie dans la réalité modélisée (c'est le cas par exemple chaque fois qu'on utilise un ensemble infini pour modéliser une réalité finie: ainsi des modèles continus en dynamique des populations). En conséquence, la question du "réalisme" (relatif) se présente d'abord comme un problème à poser, avant d'être une exigence à satisfaire (le contenu de cette exigence devant être lui-même chaque fois redéfini en fonction des conditions d'emploi que l'on envisage). Il ne s'agit pas d'être le plus près possible de la réalité, mais d'en être suffisamment près pour tel ou tel usage du modèle. On peut ne pas être le plus près possible et être déjà assez près; et on peut être le plus près possible sans être encore assez près. La construction et la mise en fonctionnement d'un modèle doivent s'accompagner de l'examen des conditions et de la problématique d'emploi dans lesquelles ce modèle est adéquat. Sans cela, ce modèle ne serait plus un modèle, en ce sens qu'on ne pourrait plus préciser en quoi et de quoi il est modèle.

Thèse 20

La distinction de "bons" et de "mauvais" problèmes du point de vue du réalisme ou de l'adéquation est pertinente dans la mesure où le problème de l'adéquation du modèle à la réalité n'est pas posé, comme il en va ordinairement dans le cas des problèmes "concrets" tels qu'ils apparaissent dans l'enseignement. Dans le meilleur des cas, il y a alors enseignement de modèles (en général traditionnels), et non enseignement de la modélisation. Les modèles introduits sont présentés le plus souvent comme allant de soi: on indiquera par exemple "comment calculer le développement d'un vélo" et, quelquefois, on donnera même une table de valeurs calculées (3).

Les difficultés liées à la situation actuelle, à nouveau

Thèse 21

L'absence de débat sur l'adéquation, la pertinence, le réalisme du modèle mis en oeuvre laisse de côté toute une zone de présupposés, qui change chaque fois que change le modèle. Ces changements indiscutés peuvent créer pour l'élève des difficultés liées à l'identification du cadre de référence par rapport auquel il convient de situer le modèle et son emploi. Ainsi l'élève qui aura résolu de nombreux problèmes du type suivant:

"Un paysan mesure son champ et trouve que sa longueur est 234,8 m, sa largeur 142,2 m. Quelle est la superficie de son champ ?"

pourra, un peu plus tard dans le cursus de ses études, rencontrer pour la première fois cet autre problème:

"Un géomètre est chargé de mesurer un champ rectangulaire. Il trouve 234,8 m pour la longueur et 142,2 m pour la largeur. En supposant ces mesures exactes à moins d'une unité de leur dernier chiffre, avec quelle approximation pourra-t-il obtenir la superficie du champ ?".

Alors que, jusque-là, tous les personnages de ses manuels avaient obtenu des mesures exactes - le mot lui-même n'était pas prononcé, la chose allant de soi - voici qu'un géomètre se met à mesurer approximativement!

La relation du savoir enseigné aux pratiques sociales de savoir

Thèse 22

Dans la construction scolaire du savoir, la relation entre les caractéristiques du savoir obtenu et les différents types de contraintes qui peuvent en partie les déterminer (contraintes proprement didactiques, contraintes liées aux outils mathématiques disponibles ou non, etc.) n'est généralement pas examinée. On ignore si le modèle utilisé est seulement un prétexte à mettre en oeuvre tel outillage mathématique, ou bien s'il s'agit (aussi) d'un modèle réellement utilisable en pratique, dans telles ou telles conditions d'emploi, et encore s'il s'agit d'un modèle effectivement utilisé dans telle ou telle pratique sociale (commerciale, industrielle, etc.). Bien plus, l'étude de ce problème n'est généralement pas regardée comme source d'un savoir susceptible de recevoir un statut scolairement acceptable. On notera au passage que si, dans beaucoup de cas, les modèles effectivement utilisés ne sont pas scolairement présentables parce que trop complexes, dans beaucoup de cas aussi ces modèles ne sont pas

scolairement présentables parce qu'ils s'éloignent des normes en vigueur dans la discipline, et ne sont donc pas "enseignables". En revanche, ils pourraient être examinés et discutés (leur validité pourrait être mise en débat); mais ils ne peuvent paraître dans la classe à ce titre si l'emploi de modèles, et non leur discussion, s'y trouve seul assumé.

Thèse 23

L'absence de mise en débat des modèles enseignés hypothèque ainsi l'"ouverture de l'école sur la vie" - sur les pratiques sociales hors de l'école. L'introduction de problèmes "concrets" n'est pas en soi un facteur d'ouverture: ces problèmes peuvent être complètement "scolarifiés" et entièrement coupés de leurs racines dans les pratiques sociales existantes. C'est le type de rapport avec ces éléments de savoir que l'école est, à un moment donné, capable d'offrir aux élèves et de leur faire vivre qui est déterminant. C'est le type de débat qu'elle peut instituer à leur propos qui déterminera le degré de mise en rapport des connaissances scolairement appropriées par les élèves avec les connaissances mises en oeuvre dans les pratiques sociales hors de l'école, c'est-à-dire le degré d'"ouverture sur la vie".

Le poids du fonctionnement passé et actuel du savoir social sur la nature et le fonctionnement du savoir enseigné

Thèse 24

Bien qu'inégalement selon les secteurs, le problème de l'adéquation du modèle mathématique et de la réalité modélisée est longtemps demeuré, même dans les pratiques savantes, hors du champ de conscience du "modélisateur". S'il est aujourd'hui posé dans son principe, il reste toutefois fréquemment mal résolu (par exemple en économie). Son émergence est liée à celle de l'attitude expérimentale elle-même. Au XVIIIe siècle encore, dans son Introduction à l'analyse infinitésimale, Euler utilise un modèle de croissance exponentielle de la population du globe pour montrer que, après le Déluge, 10 hommes ont pu suffire à repeupler la planète. Ce calcul et d'autres de même type, également présentés dans le chapitre sur la fonction logarithme, ne sont pas regardés par l'auteur comme de simples exemples d'application, sans portée réelle. Euler en tire explicitement argument contre "ces incrédules, qui nient que toute la terre ait pu être peuplée en si peu de temps par un seul homme"; par eux, il entend conforter la version biblique de la création et de l'histoire du genre

humain. A cet égard, la Thèse 1 ne vaut qu'en tant qu'analyse objective de la fonction anciennement remplie par les problèmes "concrets" au sein du discours mathématique, et non comme description de la signification de ces problèmes pour ceux qui les proposent. Dès lors qu'ils ont perdu leur rôle de moyen d'expression des structures mathématiques sous-jacentes, les problèmes "concrets" sont introduits à titre d'exemples d'application de tel ou tel outil mathématique. Cette perspective amenait normalement à poser le problème du réalisme des modèles utilisés, mais cela ne sera en fait réalisé que bien tardivement.

Thèse 25

Il faut revenir ici à la première distinction avancée par Pollak: celle de la "réalité quotidienne" et de la réalité étudiée par une discipline scientifique particulière. Les modèles se rapportant à la réalité quotidienne sont en général traditionnels et simples (calcul de l'aire d'un champ par exemple). Ils deviennent plus complexes lorsqu'il sont pris en charge par un secteur scientifique ou technique spécifié: un modèle suffisant "pour les besoins de la vie quotidienne" est souvent insatisfaisant en tant que moyen de connaissance scientifique. En conséquence, le départ entre "réalité quotidienne" et réalité "étudiée par une discipline particulière", à la fois évolue dans le temps, et fluctue, à un moment donné, selon les besoins de l'utilisateur du modèle: la frontière n'est ni stable, ni intrinsèquement dessinée.

Thèse 26

On peut a priori distinguer, parmi les modèles "relatifs à la vie quotidienne", ceux qui se réfèrent à une réalité "physique" (non conventionnelle) et ceux qui se réfèrent à une réalité sociale conventionnelle, dont ils sont une partie constitutive. Dans ce dernier cas, le problème de l'adéquation ne se pose pas. Ainsi, si je place un capital C_0 au taux r , au bout de n années mon capital sera devenu, par définition de la pratique sociale correspondante, $C_n = C_0 (1+r)^n$. L'application du même modèle de croissance à l'évolution d'une population ne va pas de soi: elle sera quelquefois adéquate, quelquefois non.

Thèse 27

En fait, la distinction entre ces deux cas tend à la longue à être oblitérée: les modèles de la réalité physique tendent, pour des raisons culturelles de familiarité, à être regardés comme allant de soi, comme si la nature leur

était nécessairement soumise; les modèles de la réalité "conventionnelle", en sens inverse, se "naturalisent", et leur caractère de convention entre les hommes tend à être oublié. Pour cela, les modèles traditionnels de situations de la vie quotidienne, qui sont aussi des modèles traditionnellement utilisés dans la vie quotidienne, sont généralement indiscutés. Ainsi, on se demandera seulement: "Comment fait-on (déjà) pour calculer la superficie d'un champ rectangulaire?", aussi bien que: "Comment fait-on (déjà) pour calculer le rapport d'un capital placé au taux r pendant n années?". Les modèles traditionnels de la réalité "physique" (non conventionnelle), qui relèvent d'abord de la loi naturelle, du logos, tendent donc à être regardés, selon la pente du juridisme qui imprègne notre rapport au monde, comme étant de l'ordre de la loi imposée par le législateur, de l'ordre du nomos, la "réalité" étant alors implicitement supposée se plier à cette loi.

Un exemple historique

Thèse 28

Ce passage est particulièrement visible quand, pour les besoins de l'activité sociale, un modèle prétendant décrire objectivement la réalité est validé par la loi de la cité comme régissant les rapports entre les hommes à propos de cette réalité (que l'on peut appeler alors "semi-conventionnelle"). Un bon exemple historique est fourni par le problème du calcul du prix de vente du pain (4). Celui-ci était vendu soit à prix constant, le poids variant alors en fonction du prix de la farine, soit à poids constant, le prix étant alors fixé en fonction du prix de la farine. Un modèle "physique" approximatif consistait à considérer que le poids (à prix constant) était inversement proportionnel au prix de la farine et que le prix (à poids constant) était directement proportionnel au prix de la farine. C'est ce modèle qui reçut force de loi, comme le montrent par exemple des réglementations publiées en Angleterre par Henri II (1154-1189). Ainsi, un modèle mathématique tenu pour à peu près adapté à la réalité était imposé par la législation pour régler les rapports sociaux à propos de cette réalité.

La transposition didactique et les problèmes "concrets": du savoir social au savoir enseigné

Thèse 29

La scolarification de modèles mathématiques utilisés

dans certaines pratiques sociales, leur coupure d'avec ces pratiques sociales, scotomisent le débat social - et jusqu'à l'idée même de la nécessité d'un débat pourtant réellement existant en-dehors de l'école - qui avait abouti à une disposition réglementaire expresse. Dès 1512, un auteur de manuel propose le problème suivant:

"Si de vno misura de grano che costa 10 carlini mi dano 4 vnze de pano per vno dinaro si voi sapere se de vna altra misura che costera 20 carlini quante vnze ne darano per uno medesimo dinaro".

Dans une arithmétique américaine de 1837, ce problème - qui ne disparaîtra que dans la seconde moitié du XIXe siècle - prend la forme suivante:

"If when wheat is 7s. 6d. the bushel, the penny loaf will weigh 9 oz. what ought it to weigh when wheat is 6s. per bushel ?".

Dans de tels problèmes, les lois de variation "pertinentes" (proportionnalité ou inverse proportionnalité) sont supposées connues de l'élève, bien qu'elles n'aillent nullement de soi. Le rapport entre modèle et réalité a ici un destin étrange, mais systématique. En passant de la vie quotidienne au manuel, au lieu de s'explicitier (comme il conviendrait, puisqu'on s'adresse alors à des profanes), ce rapport s'implicite, puisqu'on passe d'une table explicite à une "hypothèse" non reconnue comme telle: il doit être évident pour l'élève que le poids du pain d'un penny est inversement proportionnel au prix du blé.

Thèse 30

Cette caractéristique du processus de scolarification de modèles mathématiques plus ou moins explicitement en usage dans les pratiques sociales hors de l'école a dû agir puissamment pour faire apparaître comme naturels et allant de soi bon nombre de modèles, ceux notamment mettant en jeu la proportionnalité ou l'inverse proportionnalité, sans que la pertinence de ces modèles soit discutée (la question de leur manipulation correcte étant un autre problème). Du point de vue de l'écologie didactique du savoir, cette situation pouvait se maintenir (et peut être maintenue) tant que le corpus des problèmes est implicitement - mais fermement - maintenu à l'intérieur du domaine des problèmes du premier degré, domaine par excellence de l'arithmétique traditionnelle. Dans tous les cas cependant, ce n'est pas le caractère "rudimentaire" de ces modèles qui fait problème, mais l'absence de leur mise en débat. Une hypothèse de linéarité par exemple est en fait des plus intéressantes dès lors qu'elle apparaît adéquate. Ainsi, parlant des modèles de Léontief, un commentateur écrit: "... une idée de génie fut de formuler, prolongeant Walras,

une hypothèse, certes simplificatrice, mais puissamment opératoire car elle permettait de doter le tableau d'une structure, c'est-à-dire d'un ensemble de relations cohérentes à paramètres stables. Cette hypothèse consiste à postuler que, pour toute branche j , le rapport des flux de consommation intermédiaire (x_{ij}) à la production totale de la branche (x_j) est constant quel que soit le volume de la production considérée" (5). Lorsque de tels modèles sont présentés aux étudiants dans le cadre d'un cours de mathématiques, c'est le plus souvent à titre d'applications de l'algèbre linéaire et donc, le plus souvent aussi, sans commentaire sur l'"idée de génie" qui permit de les faire entrer dans le domaine de la linéarité (et qui valut à son auteur le prix Nobel d'économie en 1973).

Une réponse actuellement proposée:
le mouvement en faveur de l'enseignement de la modélisation

Thèse 31

Il existe aujourd'hui en divers pays, et notamment aux Etats-Unis, un mouvement, attesté par de nombreuses publications, en faveur de l'enseignement de la modélisation, ou, encore, de l'enseignement des mathématiques (et en particulier des mathématiques appliquées) par la modélisation. Concernant à l'origine les enseignements supérieurs professionnels (ingénieurs, etc.), il s'est tourné ensuite vers l'enseignement supérieur en général et vers l'enseignement secondaire lui-même, pour y proposer une forme de rénovation de la tradition des "word problems". Il ne semble pas qu'un mouvement analogue, semblablement développé, existe en France à l'heure actuelle. Quoi qu'il en soit, et sans prendre parti sur la question de son intérêt didactique et/ou social, il convient d'examiner les conditions de possibilité de l'introduction d'une telle modification dans le système d'enseignement. Une première condition porte sur la place éventuellement reconnue à un tel enseignement. Il ne saurait s'intégrer à l'enseignement des mathématiques en n'y occupant qu'une place marginale (comme c'est le cas actuellement des problèmes "concrets"), parce qu'il suppose une problématique assez éloignée de la problématique qui prévaut traditionnellement dans cet enseignement et parce qu'il exige un volume horaire important. Il doit, pour exister de manière durable, se voir reconnu une place pleine et entière, et pour cela obtenir la reconnaissance de sa dignité et de son intérêt. Il doit donc apparaître au moins comme un objet d'enseignement socialement légitime et, éventuellement, socialement souhaité.

Les "solutions" effectivement essayées

Thèse 32

Face à ce problème - qui met en jeu des rapports de force au sein de la société toute entière -, il existe des stratégies d'évitement, qui tentent d'apporter des solutions locales, traitant les problèmes d'écologie didactique du savoir sans affronter les problèmes "macroécologiques" liés à l'insertion du système d'enseignement dans une société donnée. Certaines de ces stratégies sont permanentes et structurelles: il en est ainsi dans les enseignements professionnels ou à finalité professionnelle, à quelque niveau qu'ils soient situés (enseignement des mathématiques financières par exemple). Dans ce cas, un tel enseignement est souvent donné à part, à titre de spécialité justifiée et exigée, non par les demandes de la société en général, mais par les besoins d'un secteur professionnel particulier. En revanche, une autre stratégie consiste à (tenter de) détourner l'enseignement des mathématiques, en promouvant un enseignement "par les modèles". Il semble qu'en France du moins (mais sans doute aussi en d'autres pays) cela ne soit toléré que dans les filières d'enseignement sur lesquelles le contrôle et la pression des mathématiciens (comme communauté se tenant pour responsable de ce qui s'enseigne sous le nom de mathématiques) se trouvent relâchés (enseignement des mathématiques pour les étudiants en sciences sociales, en biologie, etc.). Enfin, une troisième stratégie consiste à tenter d'intégrer, dans des proportions variables, l'étude et l'emploi de modèles dans un enseignement mathématique globalement traditionnel. Dans le cadre d'un enseignement de mathématiques général (et non spécialisé), cette troisième solution apparaît encore moins viable à terme que ne l'est la précédente.

Les difficultés de la solution proposée

Thèse 33

Dans tous les cas cependant, il y a une propension à enseigner des modèles - éléments de savoir bien définis et dont l'enseignement peut donc faire l'objet d'une négociation explicite -, plutôt que "la modélisation", activité plus floue, sur laquelle le contrôle social et administratif manque de prises. A rebours de "l'enseignement des modèles" (ou "par les modèles"), l'activité de modélisation semblerait mieux admise par les mathématiciens (parce qu'elle se rapproche de l'activité mathématique savante, dans laquelle la "modélisation" existe aussi, même si elle porte sur une réalité elle-même

mathématique). Mais, bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit donc du non mathématique dans un enseignement de mathématiques. En fait, il y a là une difficulté qui n'est pas liée à l'humeur des mathématiciens (elle est ressentie aussi bien par les enseignants et par les élèves), mais, plus profondément, à l'état du champ scolaire du savoir et à son découpage entre les diverses disciplines enseignées. L'introduction dans l'enseignement de l'activité de modélisation supposerait une redéfinition du découpage en matières enseignées, qui introduirait par exemple une discipline intitulée "modélisation mathématique", ayant son statut, ses horaires, ses enseignants plus ou moins spécialisés, etc. Cela suppose en amont un consensus social assez puissant pour faire apparaître l'activité de modélisation comme une pratique digne d'entrer à l'école, dont l'intérêt fasse à son tour apparaître acceptables au sein de l'école la matière première sur laquelle elle porte et les produits de l'activité de modélisation - les modèles - eux-mêmes.

Thèse 34

La difficulté à ce qu'apparaisse un tel consensus est liée au fait que la fabrication sociale de modèles aussi bien que leur mise en oeuvre dans des pratiques sociales spécifiques sont des faits socialement "cachés". Hormis en ce qui concerne les "grands modèles" (ceux de la physique, etc.), les pratiques correspondantes manquent en général de dignité scientifique et (donc) sociale, puisque ce sont le plus souvent des ingénieurs, des techniciens ou des chercheurs non mathématiciens - membres invisibles de la communauté scientifique, ou extérieurs à la communauté mathématique - qui en sont les agents. Le blocage est ici consubstantiel à une transparence sociale insuffisante des pratiques de savoir spécifiques au sein de la société.

Thèse 35

L'effort à fournir pour atténuer l'opacité qui retranche la plupart des pratiques de savoir spécifiques de la vue de ceux qui n'en sont pas les agents directs ou les familiers immédiats est immense et ses résultats, incertains. De plus, on ignore dans quelle mesure cette opacité n'est pas fonctionnellement nécessaire à la perpétuation de ces pratiques: il se pose ici un problème, théorique et pratique, d'écologie des savoirs au sein de la société (et plus seulement au sein de l'école). On atteint ainsi une limite possible de notre capacité actuelle de poser et de résoudre, théoriquement et pratiquement, le problème étudié.

NOTES

1. Lucien Chambadal, Calcul pratique, arithmétique et géométrie, Hachette, Paris, 1983.
2. H.O. Pollak, How can we teach applications of mathematics ?, Actes du premier congrès international de l'enseignement mathématique (Lyon, 24-30 août 1969), Reidel, Dordrecht, pp.261-272.
3. Voir Chambadal, op. cit., p. 335.
4. Voir D.E. Smith, History of Mathematics, vol.II, Dover, New York, 1958, pp.566-567.
5. J. Bénard, Comptabilité nationale et modèles de politique économique, PUF, Paris, 1972, p.209.