26

CONTRIBUTIONS A

LA SECONDE ECOLE D'ETE DE

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Olivet 5-17 Juillet 1982

édité par les soins de

l'IREM d'Orléans

mai 1983

TABLE DES MATIERES

SECONDE ECOLE D'ETE DE

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

OLIVET 5-17 Juillet 1982

RAPPORT SCIENTIFIQUE

André ROUCHIER
I.R.E.M.
Département de Mathématiques
et d'Informatique
Université d'Orléans

1-INTRODUCTION :

La structuration de la Didactique des Mathématiques comme un champ scientifique original et autonome s'effectue aussi bien sur le plan d'une plus grande variété et d'une plus grande fécondité des recherches entreprises que sur la consolidation des moyens d'échanges et de débats. A cet égard, la possibilité de tenir une seconde Ecole d'Eté , deux ans après celle de Chamrousse , sans constituer à proprement parler un test, pouvait néanmoins apparaître comme un bon indice de la vitalité et de la capacité d'auto-organisation d'une communauté somme toute assez réduite de chercheurs.

Il est important de rappeler que l'Ecole d'Eté est un moyen parmi d'autres: -Séminaire national, Revue (Recherches en Didactique des Mathématiques) et collections associées- de formation, de diffusion et d'échanges au sujet des problématiques, méthodes et résultats de la recherche en Didactique des Mathématiques. C'est , néanmoins , la fonction essentielle de l'Ecole d'Eté que d'assurer un début de formation en direction des nouveaux chercheurs. Certes , il n'est pas possible d'organiser , dans ce cadre, une participation directe de chacun aux travaux expérimentaux, mais la durée même de l'Ecole et le découpage de ses activités permettent un approfondissement réel autour des thèmes proposés.

Près d'une centaine de personnes, 107 exactement, ont participé à l'Ecole d'Eté, soit à titre d'auditeurs soit à titre de conférenciers.Ont suivi les activités de l'Ecole, en particulier, 27 auditeurs étrangers: conférenciers invités, chercheurs et étudiants et 35 enseignants de Collège et de Lycée. Elle était, pour ces derniers, une occasion de confrontation approfondie entre les problèmes rencontrés au cours de leur activité professorale avec les analyses et les résultats des recherches. Sans développer plus avant, nous devons néanmoins souligner l'intérêt porté par ces collègues aux présentations qui ont été faites. La relation entre l'enseignement des mathématiques et la recherche en didactique, sans être à construire en totalité, est loin d'atteindre sa pleine dimension, essentiellement pour des raisons institutionnelles d'ailleurs, mais aussi par l'absence de reconnaissance de la place et du rôle social de la recherche dans notre système d'enseignement. Le très long et très riche débat du 14 Juillet porte témoignage de la large prise de conscience qui est en train de s'opérer, aussi bien du côté des enseignants que des chercheurs (qui sont d'ailleurs, dans leur grande majorité, des enseignants), à ce sujet.

2-PROGRAMME :

La responsabilité du programme a été assurée par un groupe composé de :

Yves Chevallard (Marseille)
Colette Laborde (Grenoble)
Jeanine Rogalski (Paris)
André Rouchier (Orléans)

Comme lors de la précédente Ecole d'Eté, les activités étaient de deux types :

-des cours-ateliers sur des thèmes et selon un volume horaire fixés par le comité de programme. Le choix de ces thèmes a essentiellement été effectué en fonction de l'objectif de formation de l'Ecole et de l'émergence, en ce moment, de travaux significatifs dans un domaine déterminé. Les conférenciers ont été sollicités sur cette base.

-des séminaires de présentation de travaux récents ou de problématiques en cours d'élaboration destinés à fournir des aperçus et-ou des approfondissements sur des travaux n'ayant pas encore une forme définitive.

2-1-Présentation et étude de l'articulation entre les pratiques de recherche et l'élaboration des objets (de nature théorique et problématique) de la didactique :

2-1-1-Des exposés au sujet des orientations théoriques utilisées actuellement en didactique des mathématiques.

- Les objets de la didactique: en s'appuyant sur les travaux (entre autres) de J.Perès, H. El Bouazzaoui et de G. Galvez, on présentera:
  A-Les principales notions élémentaires de la didactique: analyse des situations et des processus, détermination et hiérarchisation des variables didactiques, modèles et conceptions, phénomènes spécifiquement didactiques (obstacles, obsolescence, transposition ...).
  B-On essaiera d'appliquer ces notions dans la présentation des problématiques didactiques dans divers secteurs des mathématiques.
  C-Application à la création de situations en vue de la recherche et de l'enseignement.
  3 cours-ateliers par G. Brousseau (Bordeaux) dont 1 atelier assuré par G. Galvez (Mexique): la Géométrie à l'école élémentaire au moyen de l'espace urbain et 1 atelier assuré par A. Duroux (Bordeaux): la valeur absolue.

- Qu'est ce qu'un concept dans une approche interactive de la formation des connaissances? Pluridimensionalité conceptuelle des situations.
  3 cours-ateliers par G. Vergnaud (Paris).

2-1-2-Des exposés de travaux, en insistant particulièrement sur ce qui relève de la constitution du corpus expérimental:

- Constitution d'un champ conceptuel stable autour de la notion de vitesse moyenne. Construction de séquences didactiques où les notions visées interviennent de façon necessaire. Représentations graphiques comme : outil de conceptualisation , outil de résolution de problèmes.
  1 séminaire de R. Douady ,M.J. Perrin (Paris)
- L'élaboration par l'élève d'une notion opératoire relève-t-elle d'un processus individuel ou de la necessité de prendre en compte le contexte (institutionnel, matériel et relationnel) lors de la saisie d'un niveau opératoire.
  1 séminaire de A.N. Perret-Clermont (Lausanne) et M.L. Schubauer-Leoni (Genève).
- Recueil de données et problématique : évolution au cours d'une recherche.
  1 séminaire par D. Coquin (Poitiers).
- Situations expérimentales d'interaction pour l'étude des comportements de preuve.
  1 séminaire par N. Balacheff (Grenoble).
- Constitution de corpus à propos de l'étude didactique de deux méthodes de mesures rationnelles.
  1 seminaire par H. Ratsimba-Rajohn (Bordeaux).

2-2-Présentation de synthèses organisées de travaux portant sur différents contenus ou sur différents problèmes de l'enseignement des mathématiques:

2-2-1-"Dénombrement" spontané et construction du nombre dans le cadre scolaire :

- Présentation de travaux américains
  2 cours-ateliers par L. Resnick (Pittsburgh).
- La numération comme moyen de contrôle des situations de dénombrement. Problématique et méthode d'approche. Analyse d'un processus d'enseignement.
  Atelier: conjectures et projets d'expériences.
  L'analyse des méthodes d'enseignement du nombre et de la numération.
  Atelier: réexamen des thèses et des dispositifs expérimentaux.
  2 cours-ateliers assurés par G. Brousseau (Bordeaux) en remplacement de H. El Bouzzaoui (Bordeaux) empêchée.

- Résolution de problèmes additifs et soustractifs par des enfants de 6 à 8 ans.
  1 cours-atelier par J. Moser (Wisconsin).

2-2-2-Les représentations graphiques dans l'enseignement, concepts et méthodes d'analyse, domaine de validité, caractères réducteurs et producteurs, conditions de production... Deux exemples:

-la représentation de diverses grandeurs physiques par la droite numérique.

-les représentations graphiques des fonctions comme objet d'enseignement et comme manifestation de la connaissance à propos des fonctions.

2 cours-ateliers de J. Rogalski (Paris) au cours desquels sont intervenus R. Gras (Rennes) et G. Ricco (Paris).

2-2-3-Repères pour l'enseignement de la Géométrie:

- Géométrie dans l'enseignement au primaire
  1 cours atelier par D. Lunkenbein (Sherbrooke).
- A propos d'un premier apprentissage sur la mesure des longueurs classe de CE1 , une analyse de situations.
  1 séminaire par A. Bessot (Grenoble) et M. Eberhard (Grenoble).
- Manuels de géométrie au XXè siècle.
  1 séminaire par C. Berdonneau (Paris).
- Logo et la géométrie de tortue.
  1 séminaire par A. Rouchier (Orléans).
- Evidence et démonstration en géométrie.
  1 séminaire par J. Tonnelle (Marseille).

2-2-4-Travaux sur l'enseignement de l'analyse:

- Recherches en didactique sur l'enseignement de l'analyse dans le supèrieur : illustration des difficultés de mise en place d'une problématique et d'une méthodologie par l'exposé des résultats et des limites d'une recherche sur l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques :
  -problèmes généraux ,
  -les suites numériques: objet de connaissance et objet d'enseignement (avec une étude de manuels)
  -résultats de l'étude sur l'acquisition de la notion de convergence des suites.
  2 séminaires par A. Robert (Paris)
- A propos d'une séquence didactique en classe de première : étude des principaux obstacles dans l'apprentissage de la notion de limite .
  1 séminaire par B. Cornu (Grenoble).

2-2-5-Questions langagières dans l'enseignement mathématique (dans le premier cycle de l'enseignement secondaire).

Dès le début du premier cycle de l'enseignement secondaire,l'enseignement mathématique privilégie une certaine forme de discours qui peut apparaître à certains égards comme une norme au niveau de la rédaction des ouvrages scolaires et de l'expression écrite des élèves. Nous chercherons à mettre en

évidence qu'il n'existe pas un type unique de discours en mathématiques indépendant des conditions de production:
-certes, les textes écrits des manuels présentent certaines régularités,
-mais l'homogénéité du discours écrit n'est pas universelle et la langue orale de l'enseignant s'écarte des conventions qui régissent l'écriture des mathématiques .

L'activité langagière du maître ou de l'élève en mathématiques dépend d'un certain nombre de paramètres. Certains d'entre eux seront dégagés à propos d'une situation expérimentale de communication entre élèves (ce sera notamment l'objet de l'atelier relatif à ce cours).

1 cours-atelier par C. Laborde (Grenoble).

2-2-6-Utilisation de la théorie des situations didactiques en vue de l'identification des objets et des phénomènes pertinents d'une activité de construction d'un code de désignation à l'école maternelle.
1 cours-atelier par J. Perès (Bordeaux).

2-2-7-L'épistémologie des nombres relatifs.
1 cours-atelier par G. Glaeser (Strasbourg).

2-3-Séminaires de présentation de travaux récents:

2-3-1-Description des activités mathématiques dans une classe de première-deuxième primaire (C.P.-C.E. français). Transposition didactique.
1 seminaire par F. Conne (Genève).

2-3-2-Pratique de l'analyse de situations d'enseignement et formation des maîtres
1 séminaire par J. Brun (Genève).

2-3-3-Des manifestations de "transfert" et du "contre-transfert" en situation d'enseignement des mathématiques.
1 séminaire par C. Blanchard-Laville (Paris).

2-3-4-Apprentissage du nombre et des opérations dans la vie et chez les anciennes populations, suggestions didactiques.
1 séminaire par P. Boero et M.P. Rogantin (Gênes).

2-3-5-L'histoire de l'enseignement des mathématiques.
1 séminaire par G. Schubring (Bielefeld).

2-3-6-Le temps dans les systèmes didactiques.
1 séminaire par A. Mercier (Marseille).

Un cours devait être assuré par Y. Chevallard à propos du sujet suivant:

Balisage d'un champ de recherche : l'"algèbre" dans l'enseignement du premier cycle.

Ce cours n'a pas pu avoir lieu mais les textes correspondants ont été communiqués aux participants.

2-4-Présentation de travaux en Didactique des Sciences Physiques:

- Le raisonnement naturel en électrocinétique.
  1 cours-atelier par J.L. Closset (L.D.P.E.S. Université Paris VII).

3-CARACTERISTIQUES DE LA SESSION 1982 DE L'ECOLE D'ETE.

L'énumération précédente, par sa longueur et ses détails, montre, aussi bien que n'importe quel autre discours, la richesse des voies et des orientations de la recherche en didactique. Il n'est certainement pas outrecuidant d'assurer que celà témoigne d'une certaine maturité de la didactique en tant que discipline. On peut relever quelques indices pour témoigner de cette maturité :

-un indice "en creux" d'abord , divers empêchements de dernière minute n'ont pas permis à certains conférenciers d'assurer leur contribution . Au delà de l'absence de développement à propos du thème prévu, ce qui a pu constituer une gêne certaine pour l'équilibre du programme, il a été possible de modifier l'organisation en particulier par une augmentation du temps de parole de certains conférenciers.

-la possibilité de proposer des cours, autrement dit de larges synthèses ne correspondant plus à des relevés d'opinions mais des exposés systématiques de connaissances.

-l'élargissement de la liste des sujets traités au cours des différentes activités correspondant à un élargissement des sujets d'étude de la didactique . Celà témoigne d'une plus grande maîtrise des problématiques et des méthodes.

Il n'avait été fait qu'une publicité assez modeste à propos de l'Ecole d'Eté. Les demandes d'information et les inscriptions, aussi bien par leur origine que par leur nombre, montrent qu'il ne s'agit plus d'une réunion confidentielle, mais d'une institution majeure reconnue dans de larges secteurs de l'enseignement et de la recherche sur l'enseignement, autant en France que dans de nombreux pays étrangers. Il est nécessaire de témoigner, ici , au delà de la présence de nombreux collègues Italiens, Belges, Suisses, Allemands, Américains ... de l'excellence des rapports entre les orientations des recherches menées en France avec de larges secteurs de la recherche dans ces pays.

Enfin, nous ne saurions manquer d'insister sur l'existence d'une demande réelle. Cette demande, manifestée par la présence de nombreux enseignants, formulée aussi bien au niveau de la formation qu'au niveau de la participation à des actions de recherche, crée, il nous semble , une situation nouvelle à laquelle on souhaite que les Pouvoirs Publics accordent toute leur attention. Il y a actuellement constitution d'un ensemble de connaissances organisées , avec leur versant théorique et leur versant pratique; et sans avoir la prétention de détenir des solutions "utilisables" dès aujourd'hui , nous pensons que la didactique des mathématiques est en mesure de participer activement au débat nécessaire (et permanent !) au sujet de l'enseignement des mathématiques. Ce débat , il est à peine utile d'en souligner l'impérieuse nécessité . Nécessaire , en effet , il l'est à divers titres , aussi bien pour les mathématiciens que pour les décideurs en matière d'éducation , aussi bien pour les enseignants que

pour les parents d'élèves et surtout pour les élèves eux-mêmes.

Sur le plan strictement scientifique des efforts réels avaient été faits pour que cette session de l'école d'été ne consiste pas seulement en une "revue de détail" de tous et de tout ce qui se fait en Didactique des mathématiques . Alors que toute une partie du programme peut laisser craindre un certain éparpillement, beaucoup parmi ceux qui avaient assisté à la première école d'été ont pu constater que les efforts de centration n'ont pas été effectués en vain.

On ne saurait, en termes de Recherche, isoler arbitrairement résultats, problématiques et méthodes. Pour la seconde école d'été de Didactique des mathématiques, il avait été choisi d'insister particulièrement sur les problématiques de travail et la construction des dispositifs expérimentaux. Cette insistance a été essentiellement marquée par l'exposé de quelques travaux dont on peut penser qu'ils vont renouveler l'approche de certaines questions d'enseignement, par exemple celles qui concernent la géométrie. Une école d'été n'est pas un endroit où puisse se pratiquer systématiquement le sensationalisme, mais nous pouvons remarquer que c'est une occasion de mise en évidence, par le type de communications qu'elle permet, par les mises en forme qu'elle nécessite, des évolutions significatives d'une discipline. Dans le cas de la Didactique des mathématiques la première session de l'école d'été a permis de dégager une notion importante, celle de Transposition Didactique. Pour ne pas être "en reste", à côté de l'élargissement du champ des objets de l'enseignement des mathématiques: thèmes géométriques, raisonnement et démonstration, algèbre du premier cycle, on a pu constater une plus grande maîtrise des moyens d'élaboration des dispositifs de recherche, l'exemple le plus significatif à cet égard étant actuellement celui de l'Ingéniérie Didactique.

En guise de conclusion, nous nous devons de remercier les personnes et les institutions (S.M.F. , Ministère de l'Education Nationale , Université d'Orléans) qui ont contribué tant par leur aide que par leur soutien à la réussite de la session 1982 de l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Nous ne doutons pas que l'intérêt qui a été porté à cette initiative, notamment par la Société Mathématique de France, trouve l'occasion de se maintenir et de s'approfondir au cours des prochaines années.

Orléans , Octobre 1982 - Janvier 1983

		Lundi 5 juillet	Mardi 6 juillet	Mercredi 7 juillet	Jeudi 8 juillet	Vendredi 9 juillet	Samedi 10 juillet
COURS I	9h30 – 10h15	Séance d'ouverture	J.L. CLOSSET	L. RESNICK (1ère interv.)	L. RESNICK (2ème interv.)	G. VERGNAUD (1ère interv.)	G. VERGNAUD (2è interv.)
COURS II	10h30 – 11h45	J. ROGASLKI (1ère interv.)	G. BROUSSEAU (M.El Bouazzaoui) (1ère interv.)	J.ROGALSKI (2è interv).	G. BROUSSEAU (M.El.Bouazzaoui) (2ème interv.)	J. ROGALSKI (3è interv.)	G. BROUSSEAU (3ème interv.)
SEMINAIRE I / SEMINAIRE II	14h30 – 16h30	BESSOT, EBERHARD / A.ROBERT I	(Chevallard) BROUSSEAU TONNELLE / DOUADY PERRIN	CONNE / ROBERT II BOSCHET	LAVILLE / CORNU	BALACHEFF / BRUN	COQUIN / MERCIER
ATELIER I / ATELIER II	17h – 19h	ROGALSKI GRAS RICCO / RATSIMBA Rajohn (séminaire)	CLOSSET / (Bouazzaoui) BROUSSEAU	RESNICK / ROGALSKI	RESNICK / (Bouazzaoui) BROUSSEAU	VERGNAUD / (Chevallard)	VERGNAUD / BROUSSEAU

		Lundi 12 juillet	Mardi 13 juillet	Mercredi 14 juillet	Jeudi 15 juillet	Vendredi 16 juillet	Samedi 17 juillet
COURS I	9h – 10h15	G. BROUSSEAU (4ème interv.)	LABORDE	Journée Réservée POLITIQUE DF LA DIDACTIQUE, FORMATION DES MAITRES, ... ETC....	D. LUNKENBEIN	J. PERES	BILAN DE L'ECOLE D'ETE.
COURS II	10h30 – 11h45	MOSER	G. GLAESER		- G.GLAESER	G. BROUSSEAU (5ème interv.)	
SEMINAIRE I / SEMINAIRE II	14h30 – 16h30	GALVEZ / PERRET SHUBAUER	Débat : Problèmes didactiques autour de l'apprentissage du nombre à l'école élémentaire.		SCHUBRING / ROUCHIER	ROGALSKI / BERDONNEAU	
ATELIER I / ATELIER II	17h – 19h	BROUSSEAU / MOSER	LABORDE		LUNKENBEIN / BOERO	PERES / BROUSSEAU	

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982 - ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS - OLIVET

G. BROUSSEAU

Séminaire : *Mardi 6 juillet 1982*
Jeudi 8 juillet
Samedi 10 juillet
Lundi 12 juillet
Vendredi 16 juillet

FICHE DE PRESENTATION.

Les Objets de la Didactique des Mathématiques.

1. PETIT PANORAMA DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

La didactique (au sens de Coménius) est l'art d'enseigner, c'est-à-dire celui de faire approprier - intentionnellement - par un élève, un savoir constitué ou en voie de constitution.

1.1 - *Actions didactiques et recherches en didactique.*

Il est assez courant de séparer les activités relatives à cet art en deux grandes branches (diagramme 1).

x La première rassemble les activités qui visent à enseigner une connaissance "déterminée". Ces actions didactiques peuvent être directes en ce sens que les décisions de l'enseignant ne transitent pas vers l'élève par l'intermédiaire d'une autre personne, ou indirectes dans le cas contraire. Remarquons que l'activité didactique directe n'implique pas nécessairement la présence de l'enseignant auprès de l'élève: elle peut se faire par l'intermédiaire d'un produit ou d'un matériel "didactique". Les actions indirectes comprennent le plus souvent (mais pas obligatoirement) par exemple, une description plus ou moins précise de l'action didactique dans la mesure où elles visent directement à faire produire ou reproduire une activité d'enseignement : la méthodologie classique, les curriculas, les programmes, ... etc, sont de cette nature.

x La deuxième branche rassemble des activités qui visent d'abord à expliquer les phénomènes d'enseignement. En ce sens, la didactique est l'étude des phénomènes d'enseignement qui sont spécifiques de la connaissance enseignée sans être réductibles au domaine du savoir auquel elle appartient.

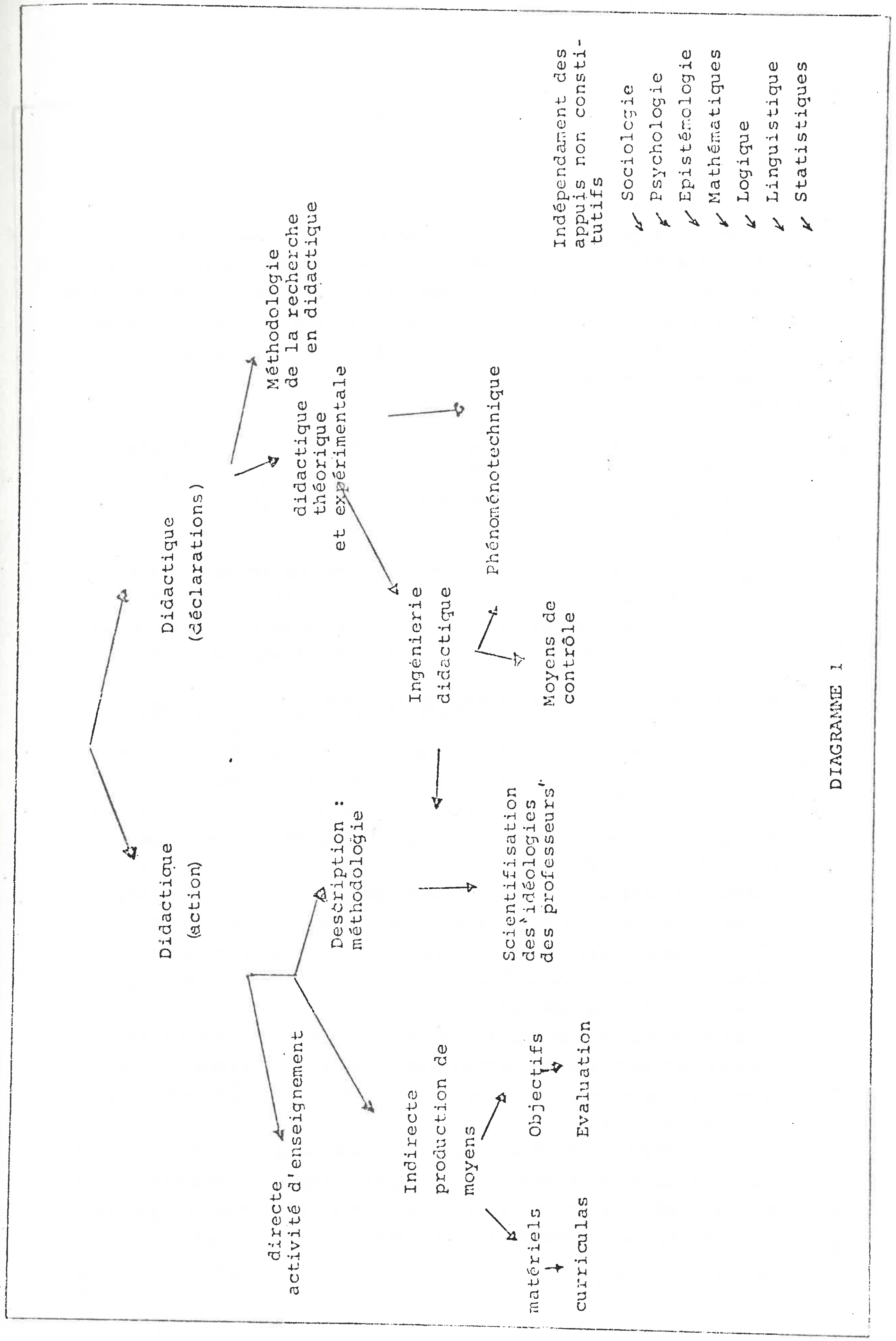


DIAGRAMME 1

Cette deuxième branche englobe de très nombreux travaux de recherche à propos de l'enseignement d'une connaissance. Leur caractère scientifique est dû au fait que, soit la méthodologie de l'étude, soit l'objet de l'étude, et parfois les deux à la fois, sont empruntés à un domaine ou à une discipline bien connue : le plus souvent la psychologie, la sociologie ou la linguistique mais aussi la logique, les mathématiques ou l'épistémologie.

Mais elle comprend aussi des activités réflexives qui témoignent d'un réel effort de scientifisation de la didactique, en ce sens qu'il y a création de concepts théoriques spéciaux.

A première vue, la distinction entre ces deux types d'activités paraît assez simple : les premières activités didactiques, visent à enseigner, les secondes activités en didactique à produire des assertions vraies sur l'enseignement.

1.2 - *La didactique, champ de recherches scientifiques.*

Une étude en didactique, pour ou sur l'enseignement, est donc d'abord caractérisée par un savoir ou une connaissance (par exemple "la fonction linéaire") et un sujet ou un groupe de sujets apprenant (par exemple les élèves de 3ème année du secondaire, cycle court). Elle peut l'être par les particularités du système éducatif - ou du professeur - (par exemple "dans les classes à groupes de niveau"), ou par des particularités du rapport élève-milieu, telles que le choix d'un matériel didactique (par exemple "avec l'aide des calculateurs de poche). Elle peut être encore réduite :

. par le choix d'une multitude de conditions et de caractères plus ou moins "naïfs" de chacun des systèmes en présence (Par exemple, "le vocabulaire" ou encore "les objectifs de hauts niveaux taxonomiques")

. ou par l'importation de concepts ayant un statut scientifique dans un domaine voisin connu, (par exemple : "relation entre la rigidité mentale et la résolution des problèmes de géométrie selon l'origine socio-culturelle des élèves"... etc)

On comprend dans ces conditions qu'il soit presque impossible de présenter la didactique autrement que comme un champ de recherches, peut-être scientifiques mais relevant d'autres domaines et sans objet propre. Le repérage des travaux et le groupement en sujets voisins ne peuvent se faire qu'à partir des structures des disciplines composantes ou des méthodes de recherches : études de comportements, études longitudinales, évaluatoires, inventaires de méthodes d'enseignement, ces études étant relatives à un même concept ou à une même notion mathématique, bien sûr, mais même dans ce cas, la liste des variétés d'aspects, de définitions, de langages, de domaines d'utilisation, d'usage... etc, brave tous les efforts de synthèse.

De plus, l'ambition de produire des déclarations sur l'enseignement ayant un statut ou une valeur scientifique, conduit le chercheur en didactique à s'asservir complètement à des problématiques et à des méthodologies déjà reconnues comme scientifiques, mais en fait, étrangères et centrifuges.

1.3 - *La didactique, théorie d'une pratique d'enseignement.*

Pour échapper à cet éclatement, il apparaît alors que l'on doive revenir aux sources et replacer les études sur l'enseignement dans le cadre d'une action pour l'enseignement.

En fait, ces deux types d'activités sont plus difficiles à distinguer qu'il n'y paraît. Beaucoup de "recherches" par exemple, sont explicitement ou implicitement liées à une action didactique, en ce sens qu'elles doivent, à relativement court terme, se justifier - par une proposition utile à l'enseignement : action didactique, ou production d'un nouveau moyen d'enseignement,

à défaut - par un jugement ou au moins une information, destinés à jouer un rôle, dans les débats du moment, sur la valeur de l'enseignement pratiqué et les moyens de l'améliorer.

Nous trouvons notamment dans ce secteur tous les travaux qui visent à rationnaliser l'enseignement et qui prennent pour base des conceptions familières aux professeurs ou issues de leur pratique.

Fondamentalement acceptées comme pertinentes, ces conceptions sont seulement "rationnalisées" de façon à permettre leur identification et leur définition, par exemple "le niveau mathématique de l'élève","la compréhension","les objectifs","l'erreur","l'intuition géométrique", la"connaissance des identités remarquables".. etc. Des travaux d'observation et de statistiques à leur propos tendent à leur donner un statut plus ou moins scientifique, ce qui permet alors de renvoyer aux professeurs des informations intelligibles dont on suppose qu'ils peuvent faire bon usage. Cette assomption des conceptions des professeurs est un bon moyen - mais pas le seul - d'avoir des résultats de didactique à finalité didactique. Nourris et finalisés par une pratique, ces efforts de scientifisation ont produit des concepts et des théories "originales".

Certaines sont assez peu spécifiques du contenu, comme les taxonomies de Bloom, les "conditions" de Gagné, les classifications d'activités mentales de Guilfort ou de Ausubel. D'autres le sont davantage comme le "processus psychomathématique" de Dienès (*). Enfin certains travaux dans la mouvance de Piaget ou même de Bruner portent sur des phénomènes ou des processus tout à fait liés à des connaissances mathématiques déterminées.

On trouvera aussi, ici, l'heuristique telle que l'entendaient Polya et ses continuateurs (Kilpatrick) dans les années 60 avec l'"action" correspondante : l'enseignement des "problem solving methods".

Toutefois, et peut-être à cause même de leur proximité conceptuelle ou d'objectifs avec la pratique, les travaux de ce type ne développent, dans les meilleurs cas, en didactique théorique, ou bien que des notions très idéologiques, trop générales et pour tout dire métaphoriques, ou bien des notions

---

(*) cf. Brousseau (1981)

had hoc qui n'ont pour mission que de prendre en charge des phénomènes très locaux et très particuliers.

1.4 - *La didactique, théorie des phénomènes didactiques.*

Bien peu de travaux acceptent de se placer dans la perspective d'une théorie qui aurait pour ambition de prendre comme objet d'étude et de critique l'ensemble des phénomènes didactiques. De tels travaux existent cependant, qui visent à transformer en "science" le champ scientifique éclaté dont nous avons parlé plus haut. Et même si ce projet paraît, à certains, très prématuré, l'importance de l'enjeu et l'originalité des moyens mis en oeuvre à ce jour, méritent une étude particulière et une place à part dans ce panorama. Une des caractéristiques de ce point de vue a été de provoquer un véritable "pas de côté" par rapport aux activités visant l'enseignement afin de les soumettre à des analyses de type systémique et de produire des concepts didactiques propres.

A côté de ce champ de la didactique fondamentale, théorique et expérimentale, et en relation étroite avec lui, se développent :

:: d'une part, des réflexions méthodologiques spécifiques de la didactique - essentiellement l'étude des dépendances, des implications, des modèles et des hiérarchies en didactique.

:: d'autre part, appuyée sur cette théorie, une sorte d'ingénierie didactique qui consiste à réaliser des situations d'enseignement répondant à des caractéristiques définies à l'avance dans le cadre de la théorie. Cette ingénierie a pour but :
- soit l'enseignement effectif dans le système éducatif
- soit l'expérimentation ou la recherche, et nous parlerons dans ce cas de phénoménotechnique didactique.

Nous allons exposer cette conception de la didactique dans la deuxième partie de ce texte, mais auparavant nous croyons utile de rappeler deux conditions de son apparition :

a) Elle s'est développée principalement en France dans les IREM et au CNRS en étroite relation :
- avec la formation permanente des maîtres
- avec toutes sortes d'actions didactiques
- avec des terrains expérimentaux et des observations.

b) Elle s'est développée dans la perspective d'un contrôle de la didactique des mathématiques par les mathématiciens - non parce qu'ils sont les plus capables, ni les plus intéressés, mais parce qu'ils sont les premiers à devoir et pouvoir assumer la responsabilité sociale de la vigilance épistémologique nécessaire. Ce sont eux, qui finalement, ont la "responsabilité" de ce qui s'enseigne on s'utilise sous le nom de "mathématique". Cette clause est loin d'être une facilité, aussi bien pour les "didacticiens" que pour les mathématiciens "purs".

2. DIDACTIQUE FONDAMENTALE

Une société transmet les savoirs qu'elle a créés et ceux dont elle a hérité, par différents moyens dont certains sont mis en oeuvre intentionnellement. Elle organise pour cela, à l'intention des "élèves" des situations didactiques qui doivent conduire à la reproduction des comportements et des pratiques qui témoignent de ces savoirs.

2.1 - *L'étude des manifestations de connaissance.*

Didactique au sens restreint.

L'étude de ces moyens de communiquer "un" savoir paraît donc devoir commencer par l'identification, l'inventaire et le classement des manifestations de connaissances relatives à ce savoir, dans la société-enseignante (en particulier dans la société savante).

Elle pourrait alors se poursuivre par la définition ou l'observation des comportements qui manifesteraient l'acquisition de ce savoir chez le sujet-enseigné. Et il paraît évident, au premier abord, que les manifestations de connaissances devraient être les mêmes dans la société - enseignante et chez les sujets-enseignés, ou, au moins se référer à la même organisation du savoir. Il serait alors possible d'observer ou de concevoir les moyens mis en oeuvre pour obtenir ces comportements, de façon a priori indépendante, en se référant, par exemple, à des théories de l'apprentissage ou du développement... etc.

Ce point de vue paraît d'autant plus fondé que le savoir fonctionne dans la société comme le moyen culturel reconnu, permettant de classer, de décrire et de communiquer les connaissances et les pratiques qu'elle a acquises.

Dans cette perspective, les réorganisations les plus récentes du domaine de connaissances envisagé, paraissent les plus indiquées, puisqu'elles bénéficient du panorama le plus complet et probablement le plus simplifié, et parce qu'elles sont le plus près possible de la science du moment, but de la transmission didactique.

En fait, cette approche de la didactique par l'identification des savoirs à transformer en objectifs, se heurte à des difficultés qui ont conduit, sinon à la rejeter absolument, du moins à lui chercher des alternatives.

Parmi ces difficultés, nous retiendrons les suivantes :

- difficulté de mettre en correspondance un savoir avec un ensemble de manifestations de ce savoir. Les systèmes proposés, empruntés à divers domaines ou développés spécialement, fournissent des listes de plus en plus longues d'"exercices", mais les moyens de production de ces listes ne sont soumis à aucune contrainte ni à aucune justification.
- difficulté à délimiter un champ conceptuel ou une collection de savoirs fonctionnant ensemble. Les travaux ayant pour but de structurer ce champ, ont conduit, au contraire, à multiplier les caractères pertinents, et abouti à une parcellisation, à un émiettement des manifestations de savoir.

Il faudrait ici faire un bilan de tous les travaux accomplis à la suite des études de Cronbach-Gleser sur la généralisation (cf. Cardinet-Tourneur), sur la dépendance, l'implication ou les hiérarchies de connaissances (Pluvinage, Gras, Lermann).

Mais les procédés factoriels fournissent aux regroupements de connaissances des arguments qui paraissent bien faibles devant les processus différenciateurs ; ceux-ci posent, par exemple, que deux savoirs diffèrent, et donc doivent être visés séparément, si les épreuves qui les opposent sont sensiblement différentes (analyse synchronique) ou encore si elles sont réussies par une même population à des dates sensiblement différentes (analyse génétique ou diachronique).

Pour vérifier que la traduction d'un savoir en termes de comportements était correcte, il aurait fallu pouvoir observer que la structure du savoir permettait de bien prévoir les comportements des sujets - par exemple en assurant que les élèves qui avaient acquis tel savoir devaient avoir acquis tel autre ou devaient savoir résoudre tel problème. Le fait que l'apprentissage d'une théorie faciliterait celui de toutes ses applications n'est pas établi de façon générale, ni sa réciproque non plus. De même une relation d'implication entre deux assertions ne paraît pas avoir de relations stables avec leur apprentissage. Ce n'est que dans quelques cas très particuliers que l'apprentissage de l'une apparaît comme pouvant dispenser de celui de l'autre. Il en est de même de toutes sortes de relations logiques et mathématiques qui structurent le savoir "savant". Il en résulte :

- des difficultés à réduire le champ des savoirs par la détermination d'une partie d'entre eux dont l'acquisition entraînerait, ou faciliterait, ou serait l'indice de la connaissance des autres,
- des difficultés à faire correspondre un savoir donné - même sous la forme de comportements ou de manifestations de connaissances - avec des situations d'enseignement qui en assurent l'acquisition.

La difficulté principale n'est pas de "réussir" de façon plus ou moins locale ces limitations ou ces mises en correspondance, mais bien plutôt de fournir des justifications théoriques et expérimentales de ces choix et de prendre ces justifications comme sujet de débats scientifiques.

Dans cette conception restreinte, la didactique accepte le savoir constitué comme le résultat d'une activité qu'elle n'a pas à connaître, et à plus forte raison à théoriser. Elle doit seulement traduire ce savoir en objectifs d'enseignement, puis en apprentissages.

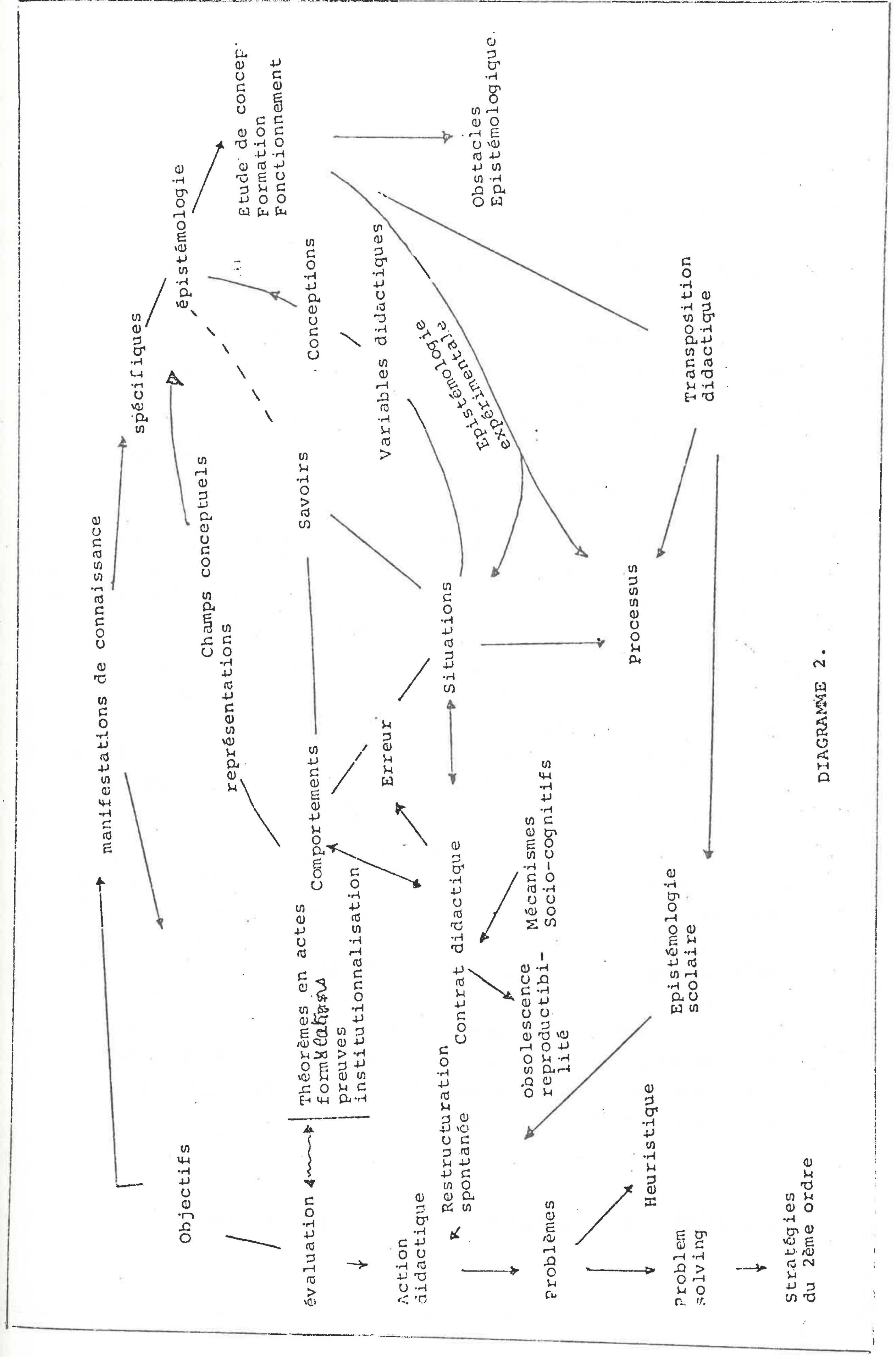


DIAGRAMME 2.

scientifiques ou scolaires, "contaminées" explicitement ou implicitement par ces savoirs. Il est clair que si les savoirs changent les pratiques, l'inverse est vrai aussi : les questions et les problèmes changent et exigent l'extension ou la modification du savoir. Savoir et pratiques se donnent mutuellement un sens.

La reproduction par l'élève d'une pratique transformée ne peut lui assurer la transmission du sens des connaissances qui ont provoqué la transformation, et, inversement, l'acquisition d'un savoir hors du contexte de pratiques qui lui ont donné son sens, le modifie radicalement. Aussi, parmi les manifestations de connaissances provoquées par l'enseignement, certaines sont tout à fait semblables à celles qui leur ont servi de modèle, et d'autres peuvent être sensiblement différentes. Et il est vraisemblable que ces transpositions didactiques jouent un rôle positif dans les processus de création des connaissances et qu'on ne les annulerait pas sans dommage.

Au lieu de considérer les situations didactiques comme de simples moyens "isolés" de produire des comportements désirés, il faudra donc les considérer à l'intérieur d'une chaîne ou d'un processus formant une petite genèse artificielle du concept, ce processus étant autant le but de l'enseignement que son moyen.

Sans renier aucun des résultats que pourrait produire le premier point de vue (restreint), le second change assez sensiblement la façon de considérer et de juger l'organisation de l'enseignement d'une connaissance. Ici, la didactique fondamentale tend à se fondre dans l'épistémologie à laquelle elle propose un champ expérimental et à qui elle demande la production de concepts spécifiques (certains membres du G.R.D.M(*) ont longuement hésité dans les années 74-76 entre le terme d'épistémologie expérimentale et celui de didactique fondamentale pour désigner ce champ d'étude).

(*) Groupe de recherche en didactique des mathématiques.

2.2 - *La mise en avant de l'épistémologie et de la théorie des situations didactiques.*

Dans une autre approche, la didactique va, non seulement se fonder sur une théorie de la connaissance et de la formation des concepts, mais se fondre en elle. Ayant pour objet l'étude des conditions dans lesquelles apparaissent les comportements spécifiques des savoirs considérés, en vue de leur contrôle et de leur reproduction, elle va tenter de prendre directement ces conditions, ces situations comme objet d'étude et comme moyen de déterminer ce qui est comparable ou non, ce qui est reproduit ou non, et ce qui est enseigné ou non. Une situation didactique ne se distingue des situations "naturelles" ou "historiques" permettant l'exercice ou l'apparition de la connaissance, que par leur caractère intentionnel - même si cette intervention d'un tiers change beaucoup de choses, il peut être intéressant de comprendre quoi -

D'ailleurs, l'enseignement et la communication du savoir font partie du procès de constitution des concepts. Ainsi, la situation est renversée. Il s'agit d'appréhender la connaissance par le biais des conditions dans lesquelles elle apparaît, de façon à pouvoir les reproduire au moins approximativement, et par là, de provoquer chez l'élève l'acquisition d'un savoir dont le sens et le fonctionnement soient satisfaisants. Bien sûr, les situations didactiques ne peuvent pas ressembler beaucoup aux situations "historiques" correspondantes. Ce sont leurs effets qui doivent tendre à se ressembler. Il s'agit donc d'accepter cette transposition didactique (Y. Chevallard (1980)) comme un effet inévitable et comme un objet d'étude, afin de la contrôler par le choix de situations didactiques convenables et par la détermination de celles de leurs caractéristiques qui sont les plus décisives à ce sujet. Revenons un instant à notre analyse initiale : dans la société, les savoirs se manifestent, non seulement par des déclarations culturelles sur les connaissances, leur structure, leur fonctionnement, leurs intéractions, leur usage, leur origine... etc, mais aussi par des modifications et des transformations de certaines activités humaines : pratiques, individuelles, sociales

Il faut préciser que chaque concept ou chaque secteur des mathématiques a sa propre didactique comme il a sa propre histoire. On ne découvre pas, on n'utilise pas la notion de fonction dans le même genre de rapports avec son milieu que la notion d'angle, par exemple. Mais cela n'empêche pas l'émergence de concepts proprement didactiques ou épistémologiques destinés à permettre la description des situations didactiques.

Avant de nous demander quel bénéfice on peut tirer d'une telle amplification du domaine à traiter, nous allons examiner les conséquences de cette nouvelle approche en ce qui concerne la problématique et les concepts didactiques utilisés.

Il faut remarquer tout de suite qu'en prenant comme objet d'étude les moyens par lesquels quiconque prétend communiquer un savoir, elle y englobe le premier point de vue qu'elle se doit d'"expliquer".

2.3 - *Situations didactiques.*

Le moyen d'analyse, aussi bien d'un concept que d'un comportement, sera donc, dans cette nouvelle approche, la construction d'une "situation" (ou de plusieurs) qui servira de modèle, soit aux conditions "naturelles", soit aux situations didactiques.

Il s'agit d'expliciter les choix ouverts à la personne (ou à l'élève) qui met en oeuvre la connaissance, par le problème qu'elle s'est posé et par les informations dont elle dispose. Il paraît donc raisonnable de traduire cette activité en terme de jeu, entre cette personne et un "milieu" qui, à son tour, change les états du jeu laissés par le sujet. Le milieu comprend aussi bien "la nature" que les instruments et objets divers qui entrent en scène et que les "autres", éventuellement le professeur. La connaissance est le système producteur et limiteur des décisions du sujet (organisées ou non en stratégies). Les connaissances elles-mêmes s'organisent en représentations qui permettent certains types de contrôles et d'anticipations dans la situation.

Cette modélisation n'est que la systématisation d'une méthode classique de justification et l'apparition de la connaissance mais elle a l'avantage de mettre en avant le rôle de la connaissance et les rétroactions auxquelles elle est soumise (non seulement du point de vue de la pertinence ou de la validité, mais aussi de l'efficacité). Elle permet d'approcher le sens, d'abord des comportements du sujet, mais aussi celui de la connaissance et celui des situations d'enseignement.

Elle permet de placer la prévision des apprentissages dans un cadre théorique accessible au calcul. Dans la mesure où l'efficacité des connaissances peut être sensible à un champ de problèmes, on peut prévoir quelles sont - a priori - les stratégies les plus efficaces, et en retour, les conditions de passage de l'une à l'autre.

Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité... etc)

La signification d'une notion mathématique est donc constituée par un espace de problèmes ou de situations-problèmes associés à des concepts ou à des procédures en étroite relation pour lesquels elles fournissent des moyens de résolution efficaces. Un tel ensemble de problèmes constitue un champ conceptuel (Vergnaud (19)).

Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les variables didactiques. La connaissance des domaines - ensembles de situations - déterminés par les valeurs de ces variables et associés à une connaissance, à une représentation, à une stratégie, permet de prévoir la reproduction des situations et en retour, s'appuie sur cette reproductibilité comme preuve expérimentale, tout en donnant le cadre de précision dans lequelle elle s'exerce. Les variables qui sont apparues en premier lieu sont celles qui fixent la nature des rapports du sujet avec le milieu, les systèmes avec lesquels il est en relation et le genre d'échanges qu'il entretient avec eux. Elles commandent des différences très importantes dans les manifestations de connaissance et dans les types de connaissances qui permettent de les contrôler:

Même relatives à un même concept, une action, une formulation, une preuve ou une convention ne fonctionnent pas de la même manière et l'on ne peut confondre non plus un"modèle implicite"ou un"théorème en acte"avec un langage et une représentation avec un système de preuves ou une théorie ou un savoir. Cette typologie de situations permet de produire et d'analyser de nombreuses situations didactiques, en particulier les situations d'action (Brousseau (   ) Brousseau-Maysonnave (   ) M. Artigues (   ), les situations de communication Brousseau (   ) Laborde-Guillereau (1980-1981) et situations de preuve (Brousseau (   ) N. Balacheff (1980) qui, en reprenant les travaux d'Alan Bell (   ) a montré l'importance d'une dialectique dans l'élaboration d'explications par les élèves. L'élaboration de conventions relève d'un autre processus dit d'institutionnalisation dont l'étude commence.

Les intéractions entre les divers types de situations et la façon dont elles peuvent être conjuguées dans un processus d'apprentissage pour permettre, par exemple, la formulation d'un modèle implicite ou la création d'un langage permettant l'usage d'un système de preuve etc..., sont elles aussi en cours d'étude.

2.4 - *Rapports entre didactique et épistémologie.*

Pour illustrer les rapports qu'entretient cette conception de la didactique avec l'épistémologie, on a recherché dans l'histoire des mathématiques s'il était possible de repérer divers statuts d'un même concept correspondant aux types de situations évoqués.

Examinons, par exemple, le concept "fonction". Euler a pris conscience de son importance et a entrepris l'étude systématique des fonctions élémentaires en "définissant" les fonctions qui l'intéressent : celles de la physique (?) comme des "expressions analytiques". Tout au long du

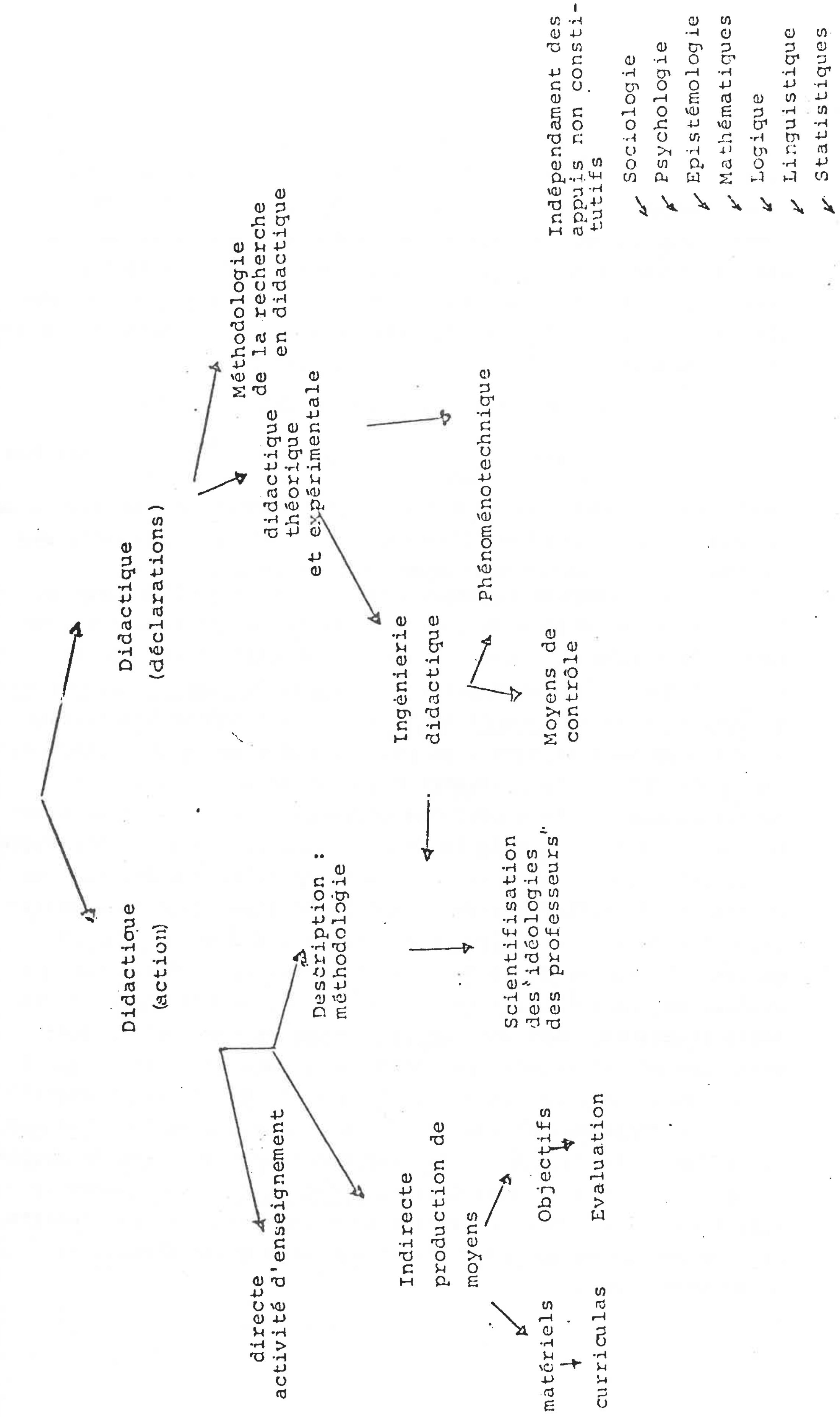


DIAGRAMME 1

XVIIIème siècle, diverses méthodes de "définition" des fonctions vont s'affronter mais les mathématiciens pensent être assez d'accord sur la "chose" qu'il s'agit de décrire et ils exercent donc un contrôle sémantique sur l'usage du terme et sur ses propriétés. Dans cette conception, la convergence simple de fonctions continues devrait produire des fonctions continues (Lagrange) et les fonctions continues être dérivables.

Le contre-exemple célèbre de Weierstrass :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos (2p+1)^n x$$ présentant des

fonctions (?) continues et qui ne sont néanmoins dérivables en aucun point, soulève, outre "l'horreur et l'effroi" (Hermite), des questions sur ce qu'on peut appeler fonction.

Un complet réexamen des fondements de l'analyse et la construction axiomatique des réels, furent nécessaires pour mettre la notion de fonction sous le contrôle d'une théorie mathématique et la faire passer du statut de concept paramathématique à celui de concept mathématique - "comment l'intuition a-t-elle pu nous tromper à ce point", s'étonne encore Poincaré. (Dhombres (19) Houzel-Ovaert Raymond Sansucq 1976). Dans quelle mesure ces deux périodes correspondent-elles respectivement à une dialectique de la formulation, puis à une dialectique de la validation - et peut-on en dériver qu'il y a des statuts et des usages différents de la notion de fonction dans l'enseignement ? Mais avant Euler et depuis la mécanique de Galilée ou les multinomies de Stévin, les mathématiciens écrivaient et étudiaient des relations fonctionnelles et se préoccupaient de leurs propriétés avec une représentation et des règles, dont certaines n'étaient même pas formulées, mais qui intervenaient très clairement : le concept fonctionnait déjà "implicitement" comme les "modèles implicites" des situations d'action. Peut-on justifier cette raison par des rapprochements en terme de situations didactiques et qualifier de protomathématique, comme le fait Chevallard (1980) le statut d'un concept entre sa première mise en oeuvre et son identification comme objet d'étude et sa dénomination.

2.5 - *Variables didactiques : la géométrie.*

Pour donner un exemple plus concret du mode d'analyse que permet cette théorisation des situations et la notion de variable didactique, examinons l'enseignement de la géométrie, par exemple.

A l'âge où l'enfant doit organiser ses rapports avec le milieu, et en particulier avec l'espace (entre 5 et 12 ans), il apparaît que la géométrie qu'on lui enseigne, le carré, le cercle, la symétrie..., est essentiellement une présentation d'objets culturels et non une activité qui a pour but (et pour effet) de lui permettre de contrôler implicitement et explicitement ces rapports. De même, la géométrie de l'enseignement secondaire (*) a pour objet de "contrôle syntaxique" de la théorie mathématique introduite par Euclide et qui n'a jamais eu pour objet la pratique.

Si on se préoccupe de faire émerger la géométrie comme moyen d'anticipation et de contrôle sémantique et pragmatique des représentations de l'élève, on est d'abord conduit à définir le type de situation dans lesquelles elle va fonctionner ainsi (Ex. N. et G. Brousseau ( ) (1975) M.H Salin (1979) G. Galvez (à publier). L'étude des variables didactiques montre que la plus importante est alors la taille des objets qu'il s'agit de reproduire, dont il faut prévoir la position ou communiquer les caractéristiques. Il est clair que tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné n'est pas le même problème selon que la distance du point à la droite est de 3 cm ou de 3 km. Il apparaît alors qu'il n'y a pas non plus une mais trois géométries au moins (G. Galvez) :

- celle du microespace, c'est-à-dire celle des objets que l'élève peut déplacer en tous sens sur une table et où tout peut être mesuré sans difficulté (J. Caron Pargues ( ), G. Audibert, M. Artigues ( ) D. Lunkenbein et al. ( ) C. Laborde et Guillereau ( ).
- celle du macroespace, urbain, rural ou maritime où le problè-

(*) Elèves de 11 à 17 ans

me est de s'orienter, de repérer, de se diriger, et où une mesure d'angle "coûte moins cher" qu'une mesure de distance (Pailhous (   ) L. Paez (   ) G. Galvez (   ))
- celle de l'espace (entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet par exemple) où les déplacements sont relativement coûteux et où les anticipations sont très utiles et les vérifications possibles (l'espace du charpentier) (J. Rogalski, A. Rouchier).

Chacune de ces géométries, du moins sous sa forme spontanée, fait l'objet de recherches tendant à la caractériser. Il reste à identifier les conséquences de ces différences sur les conceptions géométriques des élèves, mais l'inventaire des phénomènes qui s'opposeraient à l'homogénéisation de la conception de l'espace a été entrepris.

Ces travaux ouvrent des perspectives nouvelles à l'étude des moyens * de faire que les modèles spontanés des élèves à propos de l'espace se développent et deviennent des "thèmes de débats" (L. Viennot (   ) E. Saltiel (   )

* puis de leur faire construire une véritable théorie mathématique. On peut observer d'ailleurs dans ce domaine d'intéressantes productions d'ingénierie didactique où des limitations de certaines variables dans des constructions géométriques, conduisent à la production de conjectures et de théorèmes (P. Terracher et al., et bien entendu tous les travaux sur Logo). S. Papert a montré toute l'importance du passage d'une géométrie globale à une géométrie définie localement sur les conceptions théoriques de la géométrie.

On peut étudier sur un tel sujet le fonctionnement des rapports théorie/pratique dans l'enseignement, et l'hypothèse selon laquelle une certaine conception "scolaire" de ces rapports, serait à l'origine de nombreux échecs.

2.6 - *Les processus didactiques.*

Les suites de situations didactiques s'organisent en processus. Les processus classiques sont généralement basés sur l'idée suivante : dans la liste de toutes les questions possibles que l'on peut poser sur un sujet à l'élève, il en existe une partie A_0 à laquelle il peut répondre immédiatement.

Il est possible, à l'aide des connaissances A_0 et des aptitudes générales de l'élève, à la date t_0, de lui enseigner, en un temps raisonnable Δt, les réponses à un ensemble A_1 de questions $A_1 \cap A_0 = \emptyset$, ce qui lui permet de dominer un ensemble D_1 de questions, $D_1 \supsetneq A_0 \cup A_1$. En réitérant, on obtient une chaîne ordonnée par inclusion D_i de questions apprises telle qu'au bout d'un temps fini $\Sigma \Delta t_i = T$, l'ensemble des questions et des réponses est appris. A priori, ce modèle ne dit rien au sujet des rapports que doivent entretenir les questions appartenant à des "niveaux" successifs . Si une théorie, par exemple le conditionnement skinnérien, assure l'acquisition d'une question-réponse de façon presque indépendante du contenu cognitif, alors toute chaîne peut faire l'affaire. Toute amélioration de ce système supposera qu'il est plus facile d'apprendre ou d'enseigner certaines connaissances lorsque d'autres sont déjà acquises, comme nous l'avons dit plus haut.

Cette idée a servi de base, depuis des temps très anciens, à l'organisation de la présentation axiomatique des mathématiques (à moins que ce ne soit l'inverse) A_0 sont les axiomes, les A_i, les théorèmes, les D_i les collections de problèmes. Les relations entre les A_i sont le plus souvent des démonstrations et l'optimisation de cet engendrement de la théorie, conduit à regrouper les démonstrations qui "commencent pareil", et donc à choisir les structures les plus générales pour les enseigner d'abord. Ce modèle classique se heurte à de sérieuses objections d'origines diverses : les plus évidentes proviennent dans les années 70, des travaux Piagétiens. Le modèle revient à nier les accommodations de la connaissance du sujet et toute l'épistémologie génétique argue contre cette conception. L'épistémologie aussi, avec par exemple Bachelard (1938) et Lakatos (1976). Les arguments directement didactiques sont proposés d'abord sur le plan théorique (Brousseau (1970) (1974) (1977) avec la mise en évidence d'une part, de la nécessité pour la connaissance, de fonctionner comme solution de problème afin qu'elle ait un sens et qu'elle soit opératoire, et d'autre part, du phénomène d'économie :

Si une connaissance enseignée - ou découverte - s'exerce et prend son sens comme solution d'un ensemble de problèmes, une tendance à l'économie conduira l'élève à ne retenir ou à ne concevoir d'elle que ce qui est nécessaire aux solutions de ces problèmes (Phénomène détecté par F. Pluvinage et Duval sous le nom de sous-compréhension). Si ces problèmes ne constituent pas un champ conceptuel, le modèle spontané, développé par l'élève, peut échouer sur de nouveaux problèmes, et se complexifier pour s'y adapter, mais sans se remodeler et aboutir à une connaissance lourde et néanmoins fausse. Ce processus est fatal dans le modèle didactique classique, pour peu que les maîtres s'écartent de la présentation de problèmes triviaux et ne sachent pas organiser des activités de remise en question des connaissances acquises :

. la mise en évidence du fonctionnement des erreurs comme indice d'une connaissance autre, et non d'un manque de connaissance (par exemple M.H Salin ( ) mais aussi Landa ( )

. la nécessité de sauts informationnels dans un processus didactique. Cette nécessité étant déduite du principe d'économie (Brousseau ( ) J.M Digneau (1980)).

. enfin l'hypothèse de l'existence d'obstacles épistémologiques (Brousseau (1976) Ratsimba-Rajohn (1981)) ou au moins, d'obstacles didactiques.

Ce point de vue est étayé par les travaux de G. Vergnaud qui a montré l'effet de la complexité psychogénétique des problèmes additifs sur l'ordre des acquisitions. C'est aussi, par exemple, que le succès du modèle additif fait obstacle à la mise en place du modèle multiplicatif (Brousseau 1981, Audibert 1982). J. Perès a utilisé la théorie de l'équilibration pour expliquer l'évolution d'un système de symboles créés par les enfants de 4 ans dans un processus de codages.

Dans quelle mesure ces travaux contredisent-ils le modèle classique ? Les processus d'enseignement de la mesure ou des décimaux construits par F. Colmez ( ), R. Douady (1980) et G. Brousseau (1981) ne contredisent pas la référence à une axiomatique sous-jacente, même si l'accent est mis dans chaque cas sur le caractère dialectique des processus mis en oeuvre.

Les questions posées par la solution d'un problème sont aussi intéressantes que la solution elle-même et c'est la succession des hypothèses, des anticipations, des vérifications, des reprises des questions nouvelles qui doit articuler un processus. Et ceci nous ramène, non point à Poincaré, mais à Lakatos et à Bachelard.

Mais la question demeure posée, et pour l'instant, on n'entrevoit pas la méthode qui permettrait de dire jusqu'à quel point il est nécessaire d'explorer un champ de problèmes ouverts pour donner un sens aux acquisitions de l'élève et à partir de quel moment cette exploration devient inutile ou néfaste. Quels sont les obstacles qui sont constitutifs de la connaissance et ceux qui ne sont qu'un résidu historique, sans intérêt pour l'enseignement.

Comment articuler une suite de situations didactiques pour obtenir une chaîne de représentations, une chaîne de questions et de solutions génératrice du concept ? Et comment, lorsqu'on a plusieurs processus, les comparer ? les tentatives de R. Gras ( ) pour doter la didactique d'un moyen de répondre à ces questions à l'aide de l'analyse factorielle et hiérarchique, sont très intéressantes mais ne donnent pas encore les moyens de pénétrer très loin dans l'analyse des processus.

ces études de situations et de processus :

- sur le caractère social du fonctionnement des connaissances, ce point de vue rejoint ceux mis en avant par N. Perret-Clermont ( ) et M. Schubauer-Léoni d'une part, et J. Brun et F. Conne d'une autre.

- sur l'importance des moments où l'élève est "seul" pour prendre ses décisions ou pour gérer ses rapports socio-cognitifs dans une situation-problème.

2.7 - *Le contrat didactique.*

Il faut bien remarquer aussi à quel point on a essayé - sauf peut-être dans les travaux de R. Douady - de tenir le professeur dans un rôle "effacé" : il est l'organisateur des situations didactiques, celui qui choisit le jeu, qui le propose, en fixe les règles et les objectifs, puis s'efface en se gardant bien d'apporter des informations complémentaires aux élèves, d'intervenir, d'exploiter librement la situation, comme disent les professionnels : la situation proposée doit suffire à mettre le sujet en position de créer et d'exercer ses connaissances. Cet effacement se justifie dans une certaine mesure, aussi bien du point de vue "pédagogique" et didactique (mais il reste à dire pourquoi et dans quelle mesure, car les prises de position à ce sujet sont encore très nettement idéologiques), que du point de vue méthodologique (il s'agit de "contrôler" l'intervention du professeur et "d'observer" l'élève).

Mais il serait prudent de préciser alors que ces travaux se constituent en une "théorie des situations et de processus quasi-isolés des maîtres" et de ne pas en tirer des conclusions hâtives.

Même si ces études sont d'une grande importance,
- pédagogique, puisqu'elles ont produit des méthodes originales et intéressantes
- et méthodologique puisqu'elles donnent les moyens de l'étude du contrat didactique et des processus d'institutionnalisation de la connaissance.

elles ne constituent qu'une partie des modèles cherchés pour représenter les situations didactiques courantes organisées ordinairement par les professeurs.

Il ne faut pas en particulier, prendre encore la responsabilité de les proposer à tous les enseignants. Elles n'ont pu fonctionner quasi-isolément comme il est prévu, que grâce au dispositif expérimental. Car, en fait, le professeur doit habituellement négocier la dévolution de la situation-problème à l'élève et même dans le dispositif le plus précisément déterminé, cette négociation va superposer et même parfois imposer une signification particulière au problème posé : l'étude de ce phénomène commence à peine.

Dans toutes les situations didactiques, le maître tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, mais ne peut pas le dire d'une manière telle que l'élève n'ait qu'à

exécuter des suites d'ordres ; l'élève le sait-il, il a donc à décoder, à comprendre, à identifier un message caché. "Théoriquement", le passage de la consigne du maître à la réponse attendue doit se faire par la mise en oeuvre de la connaissance par l'élève, et seulement par elle, mais "conventionnellement" aussi, le maître est là pour que l'enfant produise sa réponse ; et il doit avoir donné des informations suffisantes pour que l'élève le fasse. Alors l'élève qui ne sait pas répondre se tourne vers le maître qui doit "l'aider" selon un code précis en se justifiant implicitement d'avoir posé une question trop difficile, il va faire un diagnostic qui doit orienter le travail de l'élève.

Ainsi se négocie "un contrat didactique" qui va déterminer, explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire va avoir à charge de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre. A travers les négociations répétées, le maître et l'élève se font une idée de ce que l'autre attend de chacun et ces "contrats", vont limiter leurs choix par de nombreux présupposés souvent insoupçonnables. On s'attend à ce que ce contrat ne se révèle le plus souvent que lors de ses ruptures, provoquant étonnement ou sentiment de révolte... Et ces ruptures sont inévitables car, par essence, le contrat entre le maître et l'élève n'est pas totalement explicitable et il n'est pas "tenable" non plus : il n'y a pas de moyen sûr d'engendrer la connaissance ou la solution d'un problème sans une connaissance elle-même, sauf dans le cas d'algorithmes (ce qui fait que l'enseignement des algorithmes sert de modèle à la négociation de la plupart des contrats didactiques explicites en mathématique).

Le contrat didactique s'appuie fondamentalement sur l'idée qu'il existerait un mécanisme producteur de la connaissance nouvelle par le simple exercice de connaissances anciennes et de règles de détachement à peu près fixées. Alors que la connaissance est essentiellement l'inverse : l'intervention du sujet établissant un ordre là où il n'en voyait pas ou relevant l'inattendu dans un ordre déjà établi. Ce contrat didactique postule la possibilité de l'encadrement du sens et la mise à distance du surgissement du désir du sujet, et par là, nie par avance ce, qu'en fait, il doit gérer (cf. une étude fine du contrat didactique dans le cas de Gaël (Brousseau et J. Perès (1982)).

En fait, l'existence et l'importance de ce contrat didactique ont été soupçonnées au cours d'expériences sur des systèmes quasi-isolés où il se manifestait par des différences inexplicables entre les résultats obtenus par des professeurs différents, ou entre les résultats prévus et les résultats observés, mais aussi par des phénomènes spécifiques comme ceux qui président à l'utilisation des erreurs des élèves (M.H Salin N. Milhaud). Les tentatives d'analyses directes des contrats didactiques n'ont pas bien réussi (analyse de communications entre maîtres au sujet d'une même classe par exemple) parce que les dispositions de ce contrat ne sont pas libres. Elles conditionnent et sont conditionnées par des phénomènes récurrents qui ont pour objet d'entretenir la relation didactique.

Y. Chevallard et O. Schneider ont montré, par exemple, comment, lors du passage des équations numériques aux équations paramétriques, s'établissaient à la fois la continuité et le renouvellement d'un objet d'étude et comment le contrat se nouait autour d'une sorte de quiproquo producteur d'erreurs. La recherche de tels phénomènes se poursuit activement et les travaux de Y. Chevallard et de ses élèves, J. Tonnelle, D. Pascal, sont très prometteurs d'une conception entièrement nouvelle des phénomènes didactiques. Il s'agit, à partir de l'observation d'une anomalie, révélée par référence au fonctionnement "normal" du concept dans la science du moment (la transposition didactique), de rechercher les conditions qui rendent cette anomalie "profitable" à un certain équilibre du processus didactique en postulant que ces écarts ne sont jamais gratuits. Cette approche rejette encore un peu plus l'attitude traditionnelle qui porte le chercheur en didactique à émettre des jugements et des conseils. Il s'agit maintenant de cerner le coeur de la communication didactique et de ses règles.

Les tentatives de cerner les contrats didactiques ont conduit à dégager la notion d'<u>obsolescence didactique</u>, fonda-

mentale pour l'analyse de la reproductibilité - et encore à l'étude - c'est un fait bien connu des professeurs qu'il faut "changer ses leçons et ses exercices" périodiquement sous peine de les voir perdre de leur valeur didactique, une partie de leur sens, de leur intérêt, de <u>leur sel</u>, aussi bien pour le professeur que pour les élèves.

C'est que la reproduction d'une situation didactique et la reproduction d'un déroulement de leçons obéissent à des contrats totalement différents et leurs propriétés didactiques sont vraisemblablement différentes aussi.

Réciproquement, les objets de connaissance vieillissent aussi et doivent être renouvelés ; on cherche une explication convaincante aux absences de reprise et aux changements de langages qui ponctuent l'apprentissage (?) de la fonction linéaire : règle de trois, rapports, proportions etc... Il est vraisemblable que l'on ne sait pas organiser les accommodations.

2.8 - *<u>L'épistémologie scolaire</u>*.

Le contrat didactique précise à chaque instant les positions réciproques des participants au sujet de la tâche et précise la signification profonde de l'action en cours, de la formulation ou des explications fournies : que faut-il faire ? que faut-il savoir faire ? à quoi voit-on qu'on a réussi ? que faut-il faire si on n'a pas réussi ? Que fallait-il savoir pour réussir ? qu'est-ce qui était une erreur et pourquoi ? que faut-il apprendre ? comment ? etc... Ainsi, le contrat précise le rôle conventionnel de la connaissance, de l'apprentissage, de la mémoire et il véhicule une sorte de "théorie" de la connaissance, "naïve" malgré qu'elle amalgame des théories fort complexes et éventuellement scientifiques, inconsistantes et "idéologiques" au sens d'Althusser ( ).

Cette "épistémologie scolaire", ainsi nommée par référence à la grammaire scolaire, se justifie et s'explique, non pas par sa structure ou son contenu, mais par sa fonction. Elle permet la communication didactique, même si elle est fausse en tant que théorie, les corrections pragmatiques permettant toujours de contrôler ce que la "théorie" n'a pas prévu et de l'expliquer à l'aide d'exceptions, de conditionnement des assertions ou froidement de déclarations contradictoires.

Il n'est pas évident qu'une fausse épistémologie soit un obstacle à un bon enseignement mais cette "épistémologie scolaire", conjuguée à l'illusion de la transparence des faits d'enseignement (Chevallard), constitue un obstacle redoutable à l'émergence de la didactique scientifique.

De toute façon, le simple fait de considérer une connaissance ou un savoir comme objet d'enseignement en change déjà le statut. Le savoir enseigné ne ressemble, pendant longtemps et pour beaucoup de personnes, que d'assez loin à la connaissance telle qu'elle se présente dans le corps de la science dont on l'extrait. Il n'est pas étonnant que "l'épistémologie" subisse aussi une transposition duale de la transposition didactique.

2.9 - *L'acquisition des concepts.*

La présentation un peu détaillée que nous venons de faire des tendances que nous considérons comme les plus originales des recherches fondamentales en didactique des mathématiques, ne doit pas faire oublier les efforts importants qui sont faits dans certains secteurs du champ didactique que nous n'avons placés et évoqués que trop rapidement mais qui sont tout aussi intéressants et aussi fondamentaux(*). Il s'agit d'abord des recherches sur l'acquisition des concepts. Vergnaud, par exemple, a utilisé avec succès la méthodologie génétique pour l'étude des "problèmes additifs et multiplicatifs" des énoncés, et du calcul rationnel. Avec J. Rogalski, G. Rico et A. Rouchier, il a mis en évidence, à propos des concepts de volume, de surface et de fonction linéaire, des variables importantes pour l'enseignement.

(*) Le rassemblement d'un grand nombre d'équipes d'origines diverses au sein d'une R.C.P du C.N.R.S témoigne de l'importance des échanges en cours.

D'un autre côté, des travaux sur la solution de problèmes et la planification de l'action (J.F Richard, J. Colomb, M.N Audigier, J.C Guillaume) sur les procédures de traitement et d'anticipation développées par les élèves de divers niveaux (Conzinelle, Marmèche et J. Mathieu) sont à rapprocher des études sur la solution de problèmes et sur l'heuristique - dont nous ne parlons pas ici.

3. CONCLUSIONS

Avec la mise en évidence du contrat didactique, de la transposition didactique, de l'épistémologie scolaire et des processus d'institutionnalisation de la connaissance, s'est ouvert une autre problématique pour la didactique qui réclame la mise au point de méthodes d'études originales. Il serait indispensable, en particulier, d'examiner dans quelle mesure l'approche de l'étude didactique d'un concept mathématique s'en trouve modifiée. Il faudrait aussi revenir sur les problèmes que nous avons soulevés au début de ce chapitre et montrer que les notions que nous venons d'introduire ont fait effectivement progresser les questions soulevées. Il faudrait examiner aussi maintenant les questions méthodologiques ; car si l'ambition des travaux que nous venons d'évoquer est claire en ce qui concerne le désir de leurs auteurs de fonder la didactique comme une branche scientifique, les conditions minimales de ce projet ne semblent pas, pour l'instant, être réunies. Il aurait fallu aussi revenir sur la façon dont cette didactique fondamentale s'articule avec l'étude de chaque concept mathématique particulier et avec la production de situations-problèmes et de décisions pour l'enseignement.

Le recensement des notions abordées est impressionnant (Algèbre, géométrie, nombres, logique, analyse, probabilités et statistiques etc...) et l'examen des résultats obtenus sur chaque sujet nous aurait fait entrer dans la didactique proprement dite.

L'approche systémique et systématique de l'activité didactique que nous venons de présenter, se manifeste d'abord par des exigences de précision. Il aurait pu se faire que ces exigences ne puissent être satisfaites que pour des cas si peu nombreux et si peu importants que le projet apparaisse tout à fait dérisoire. Ce n'est pas le cas, et l'importance et le nombre des concepts mathématiques concernés par cette modélisation en est une première justification.

Il se pourrait que l'alourdissement ainsi imposé à l'analyse des faits d'enseignement paraisse sans rapport avec l'intérêt des résultats obtenus du point de vue de l'enseignement. Il faut donc aussi examiner la théorie des situations du point de vue de sa fécondité didactique en terme de nouveauté, et surtout l'efficacité des points de vue proposés. A ce sujet, la question du sens des apprentissages et de l'intérêt des situations ouvertes pour la découverte et l'emploi des notions mathématiques reste ouverte. Mais les ambitions réelles du projet sont ailleurs : il s'agit de fournir à la didactique une problématique et une méthode scientifique d'approche. Aussi, faudra-t-il examiner le projet du point de vue de sa fécondité scientifique. Il semble assuré qu'il a permis déjà de produire de nombreux concepts de didactique. Il faut faire l'inventaire des assertions qu'il permet aussi de falsifier au sens de Poppert (de les mettre à l'épreuve et d'en prouver la fausseté). C'est seulement alors qu'on saura ce que réellement on a appris. Les points sur lesquels les professeurs attendent des apports concrets, sont des questions de programmes, d'évaluation, de curriculas, de méthodes, de formation des maîtres ; mais la didactique n'a souvent à proposer dans ces domaines que des changements de points de vue, des pas de côtés, des mises en garde et des réserves sceptiques, décevantes pour l'enseignant. Les explications paraissent souvent "évidentes" ou trop complexes et les suggestions banales. Les explications des mécanismes par lesquels les professeurs prennent certaines mesures, identifient des options alternatives et décisives et alimentent les mouvements idéologiques parfois violents qui soutiennent leur intérêt, n'ont guère de chance pour l'instant d'être utiles dans ces vastes phénomènes de didactique "réelle".

3. INGENIERIE DIDACTIQUE

D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique.

En didactique, un problème est une situation didactique particulière.

3.1. Situations didactiques.

3.1.1. Présentation.

Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constitution.

La "détermination" préalable de ce savoir est exigée du système éducatif mais pas nécessairement sous la forme de comportements et d'objectifs opérationnalisés. En fait, dans la mesure où l'organisation d'une activité est intentionnelle et que son organisateur l'a justifiée par la désignation d'un savoir dont l'apprentissage est visé et même si cette activité échoue ou dévie dans son objectif, elle est un objet d'étude pour la didactique.

3.1.2. Négociation de la situation didactique.

Ces rapports sont établis dans une négociation dont le résultat est vécu par le professeur et l'élève comme un contrat fixant à l'un comme à l'autre une sorte de règle du jeu qui laisse à chaque protagoniste un certain nombre de choix, de moyens d'actions, de moyens d'information et d'obligations, dont par exemple, un but.

Ce contrat permet de gérer et de découper le temps didactique en séquences de types variés :

Exemple 1 : Une séquence extrêmement classique comprend un apport d'information, un énoncé, une question, l'élaboration et la production d'une réponse par l'élève, une évaluation (ou renforcement), une décision didactique du professeur (le choix de la séquence suivante) etc...
Dans ces types de séquences, les décisions sont prises différemment.

Exemple 2 : Enoncé, élaboration de réponse, mise à l'épreuve, élaboration de questions, organisation de connaissances, recherche d'information, etc...
Les principaux types de pédagogies des mathématiques sont obtenus par la mise en avant de certaines des relations ou des exigences du contrat didactique avec souvent un écrasement de certaines autres.

3.1.3. Modélisation des situations didactiques.

La modélisation des situations didactiques réelles par des "contrats formels" représentés par les règles d'un jeu, a pour objet de permettre les comparaisons entre ces choix didactiques, la mise en évidence des cas "dégénérés" et de leurs effets, la production de situations appropriées répondant à des critères fixés à l'avance, l'analyse et la prévision de leurs effets.

Le but de ces études n'est pas de promouvoir une pédagogie : enseignement par objectif, programmé, par redécouverte, heuristique ou rationnel, mais de rendre compte de leur fonctionnement et de permettre l'émergence d'une didactique à caractère scientifique.

3. 2. Situations-problèmes.

Les situations problématiques sont celles qui laissent le sujet en charge d'obtenir un certain résultat par la mise en oeuvre de choix ou d'actions dont il a la responsabilité.

3.2.1. Situations quasi-isolées.

La première condition est que cette responsabilité n'est pas, pendant un certain temps, partagée avec le système éducatif (avec le maître) elle peut l'être avec des condisciples par exemple mais le système est provisoirement quasi-isolé du point

de vue de l'information. La dévolution du problème à l'élève se fait le plus souvent par la communication d'un énoncé explicite mais le problème comme sens pour l'élève est composé de bien d'autres informations et de bien d'autres limitations. D'ailleurs le sens du problème pour le professeur est fort différent lui aussi.

La situation problématique la plus générale comprend,

- des relations d'interactions du sujet avec un milieu physique (un système non anticipateur, qui ne fait pas dépendre ses réponses d'intentions ou de finalités) ;
- des relations d'intercommunications avec d'autres sujets, ces relations elles-mêmes classées en trois catégories :
  . des relations de formulation qui ont pour objet la communication d'informations,
  . des relations de preuves qui ont pour objet d'emporter la conviction d'un interlocuteur par des moyens minimaux ;
  . des relations d'institutionnalisation qui ont pour objet de poser des conventions.

Bien que ce qu'on désigne par "problème" dans l'enseignement ne mette traditionnellement en scène qu'un seul acteur effectif, l'élève (les autres pouvant être évoqués, simulés, intériorisés, etc...) il est possible de réaliser des problèmes par la mise en scène de partenaires divers.

3.2.2. Modélisation des problèmes.

Dans ce cas, le problème se réduit à une interaction du sujet avec un milieu réel ou supposé introduit par la consigne. La règle, explicitement ou implicitement communiquée lui donne les moyens d'envisager
- les divers états possibles du jeu X
- l'état initial $i \in X$
- l'application de l'ensemble X des états du jeu vers l'ensemble des parties de X qui définissent les choix permis dans chaque cas $\Gamma : X \to (X)$
$x \to \Gamma(x)$
- l'état final ou les états terminaux t $(\Gamma(t) = \emptyset)$
- une fonction de préférence, définie au moins sur l'ensemble des états terminaux.

. A chaque coup, le joueur effectue un choix ; c'est une application qui fait correspondre à l'ensemble des états permis dans un coup donné, un de ces états.

. L'autre joueur, "le milieu", établit à son tour certains états du système qui, éventuellement, peuvent être lus par le sujet comme des informations, des rétroactions sur son action...

. L'alternance des coups est fixée par une fonction appelée le trait.

3.2.3. Modélisation de l'élève.

Cette interprétation d'un problème permettra de mettre en évidence si c'est le cas :

- quelles décisions peut ou doit prendre le sujet,
- quelles anticipations il peut faire,
- et s'il peut en observer et juger les effets ou non,
- combien de tentatives pourra-t-il faire... etc.

Dans cette modélisation le sujet se manifeste par une suite de choix qui, avec les réactions du milieu constituent une partie.

L'interprétation des "procédures de résolutions" observées se fait par confrontation aux stratégies et aux tactiques que l'observateur peut imaginer, expliquer, et dont il peut étudier les caractéristiques.

Une stratégie est un ensemble de choix définis sur tous les ensembles d'états permis à partir de chaque état possible du jeu et qui, à chacun d'eux, fait correspondre un état préféré, quelle qu'en soit l'issue. Lorsqu'une stratégie est déterminée, le comportement du joueur est fixé jusqu'à la fin de la partie.

Les connaissances du joueur, ou son information, lui permettent de modifier les ensembles d'états de jeu qu'il prend en considération et de réduire les choix qu'il envisage. De cette façon, une représentation, une collection de connaissances, peut permettre au sujet, de réduire entièrement son "incertitude" en ne lui laissant accepter qu'une suite de décisons : sa solution. Mais on peut observer aussi des solutions à l'intérieur d'une représentation qui ne réduit pas entièrement l'incertitude du sujet qui prend alors sa décision, dans une certaine mesure, au hasard. Les connaissances peuvent aussi augmenter l'incertitude du sujet en lui faisant envisager de nouvelles possibilités non explicitées dans l'énoncé. Ratsimba-Rajohn et moi (1980) avions étudié la façon dont certaines connaissances s'organisent en conceptions (ou représentations) différentes en utilisant ce vocabulaire.

3.2.4. Le sens.

Ce point de vue permet la tentative de donner un "sens" aux activités de l'élève et à ses représentations et inversement aux situations didactiques. Dans le premier cas, ce sens est caractérisé par le couple formé du choix effectué et du paradygme des choix rejetés, par les conséquences prévisibles du choix et par divers caractères des stratégies retenues.

Le "sens pour l'élève" peut être évidemment différent du "sens pour le maître", comme il peut être différent avant et après une acquisition. Il est bien sûr qu'il ne s'agit que d'une modélisation, pour une approche. Le lecteur trouvera un exemple de l'utilisation de cette modélisation dans l'analyse clinique dans Gaël (Brousseau 1982).

3. 3. Un exemple.

Avant de dégager de façon plus précise ce que nous attendons d'un problème, nous allons donner un exemple en montrant l'usage qui peut être fait de cette approche, non seulement pour décrire un problème, mais pour le modifier, pour en fabriquer de nouveaux.

3.3.1. Un "problème" classique de soustraction.

Prenons un problème banal, de ceux proposés couramment aux enfants de 6 à 8 ans.

(1) *"12 tulipes ont poussé dans mon jardin, 7 sont rouges, les autres sont blanches. Combien y-a-t-il de tulipes blanches ?".*

Ce problème est le plus souvent l'occasion, pour l'élève, d'une ou plusieurs des activités suivantes :

a) Il doit prendre 12 jetons, mettre 7 d'entre eux de côté et compter les autres.

a') Il doit dessiner 12 tulipes (ou douze traits), il doit en colorier (ou en rayer) 7. Il doit compter les autres. Il témoigne ainsi qu'il a su lire le texte et compris "la situation" (en particulier ce qu'il faut compter).

a") Il doit réciter mentalement sa table d'addition 7 et 1, 8 ; 7 et 2, 9 ... 7 et 5, 12, ou même une table de soustraction 12 moins 4, 8 ... et donner la réponse... 12 moins 5, 7... 12 moins 7, 5.

a"') Il faut compter à rebours sur ses doigts 12 11 10 9 8 7 6 5

a"") Il doit calculer le complément : 8 9 10 11 12
1 2 3 4 5
(éventuellement sur ses doigts).

b) Il doit écrire une petite conclusion comme : "Il y a 5 tulipes blanches", ou bien, plus difficilement, mais plus rituel, "nombre de tulipes blanches : 5".

c) Il doit identifier une opération qui associe les données au résultat. Ici, il prétendra qu'il faut faire "une soustraction".

d) Il doit désigner le résultat, d'abord à l'aide de cette opération : "12-7", puis directement "5" et écrire l'égalité "12-7=5". Dans son esprit c'est l'écriture de l'opération à faire et de son résultat et les signes prennent le sens ("je prends") 12 $\underset{(-)}{\text{("j'enlève")}}$ 7 $\underset{(=)}{\text{("je trouve")}}$ 5").

e) Il présente son travail au maître qui lui dit si l'ensemble de ses activités est satisfaisant, qui confirme le résultat (qui devient alors "juste") ou l'infirme ("faux") et le fait corriger en montrant éventuellement ce qu'il fallait faire.

Aucune activité autre que a, a', a", a"' ou a"" n'est nécessaire pour fournir une réponse à la question posée. Ainsi l'enfant répond à une situation didactique et selon un contrat implicite mais précis. En particulier, l'association entre cet énoncé et l'opération à effectuer (attendue, exigée) ne se fait que par l'interprétation verbale ad-hoc (on "ôte" quelque chose) rien ne permet d'anticiper les résultats d'un choix malheureux (même 7+5=12 ne conviendrait vraisemblablement pas).

Ce problème est utilisé par les maîtres parmi bien d'autres du même type pour enseigner la soustraction.

3.3.2. Transformation en situation-problème.

Comparons-le au suivant (le rôle des crochets sera expliqué plus loin). Les acteurs doivent faire ce qui est indiqué.

(2) *Dans ce sac* $\overset{A}{\textit{[Paul]}}$ *a placé* *[des cubes* $\overset{E}{\textit{de}}$ *plastique]* $\overset{B}{\textit{[Jacques]}}$ $\overset{V_1}{\textit{[peut]}}$ *les compter s'il veut être sûr. [Il y en a* $\overset{n}{\text{[52]}}$*. [Paul retire de ce sac* $\overset{D}{\textit{[quelques pièces]]}}$*. [Jacques]* $\overset{V_2}{\textit{[peut]}}$ *les compter. Il y en a* $\overset{d}{\text{[8]}}$ *. [Jacques] alors essaye de deviner [combien de pièces il y a maintenant dans le sac].*

i Il écrit le nombre qu'il croit juste.

ii Il parie avec [Paul] qu'il a deviné juste

iii [Paul] et [Jacques]$\overset{V_3}{\text{[peuvent]}}$ ensemble compter alors les pièces du sac et noter qui a gagné.

iiii [Paul] et [Jacques] jouent $\overset{p}{\text{[10]}}$ fois à ce jeu. Arriveront-ils à savoir deviner à chaque coup ?

- Le fait que les enfants puissent effectivement manipuler les objets évoqués ne constitue pas une différence fondamentale avec le premier énoncé mais désormais le fait est précisé (les versions a et a' le permettaient). Au contraire, le nombre relativement élevé de pièces 52 rend pénible la solution par le dessin (a') ou par dénombrement direct.
- Mais la réponse de Jacques est une anticipation sur les résultats d'une activité effectuable (et qui sera effectuée aussi longtemps qu'il sera nécessaire) et contrôlable par lui (décision).
- Jacques choisit une réponse en fonction des informations qu'il reçoit mais le caractère "expérimental" de cette réponse est reconnu par l'énoncé.
- Le prix à payer en cas d'erreur est faible et conventionnel il est là pour fournir une fonction de préférence entre les choix. Cela permet des démarches d'essai et d'erreur et des corrections successives.

- Mais en cas d'erreur, la tâche de vérification n'apporte guère d'information sur ce qu'il aurait fallu faire

Données		Dénombrement	
opération ensembliste ↓		⟶	↓ Opération numérique
		⟶ Dénombrement	Résultat.

Figure 1.

Car, comme dans le premier cas, la détermination du nombre de pièces restantes se fait par une voie (opération ensembliste puis, dénombrement) différente de l'opération mentale visée (dénombrements puis opération numérique (figure 1).

- Les conditions et l'objectif de l'apprentissage sont fixé san être formulés en terme de reproduction d'activité sans que soit évoqué le contenu de l'apprentissage, l'accent est mis sur le critère d'efficience.

3.3.3. Variables de la situation-problème, variables didactiques.

Les mots entre crochets peuvent être considérés en fait comme des variables à la disposition du maître qui peut en fixer les valeurs selon l'âge des enfants et l'étape de leur apprentissage.

Remplaçons [Paul] par le nom d'un élève quelconque ou par "je" si c'est le maître qui par le et désignons le premier personnage par A ; [Jacques] est B, et c'est l'élève interrogé, non nécessairement différent de A. [des cubes de plastique] est un référentiel E quelconque ; [peut]peut être remplacé par [ne peut pas] les deux possibilités constituent V_3 . [52] est le cardinal de E - appelons-le n - un entier naturel quelconque ; [quelques pièces] est une partie quelconque D de E, de cardinal d. Ici d = [8]. Le nombre de parties annoncées est N (ici N = 10).

Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages.

Il est clair que le triplet (n, d, N) joue un rôle important avec des enfants jeunes :

- pour n petit n < 5 à partir de 6 ans
  la représentation mentale est susceptible de fournir immédiatement la solution et rend inutile aussi bien les manipulations qu'a fortiori les écritures ou les calculs[1].
- pour n compris entre 10 et 30,
  * si d et n-d ne sont pas trop petits (supérieurs à 5) le dessin ou le recours aux jetons permet des conclusions sûres avec l'exécution d'une tâche pas trop pénible nous dirons peu coûteuse (procédure a')
  * si d est très petit par rapport à n par exemple n : = 25 d : = 3 (a"') les enfants peuvent :

    a) compter par exemple sur leurs doigts à rebours

25	24	23	22	procédure a"'
	1	2	3	

    ce qui leur pose éventuellement des problèmes de mise en correspondance :

25	24	23
1	2	3

    mais la vérification est possible pour ceux qui "possèdent" les connaissances nécessaires. 22 + 3 = 25.

    b) Ce qui conduit souvent les enfants à utiliser directement la vérification comme moyen de recherche mais alors ils doivent

1. *Ceci ne veut pas dire que l'enfant apprend directement les nombres par perception des "gestalts" mais seulement qu'après 6 ans la reconnaissance ou les dénombrements de nombres inférieurs à 5 sont très peu coûteux (cf. Fischer).*

. choisir un nombre plausible comme complément,

. faire "la somme" ou plutôt compter jusqu'à épuisement des doigts représentant ce qui est enlevé

. vérifier qu'ils obtiennent bien le nombre total

. sinon recommencer (procédure a")

* Si (n-d) est très petit la recherche du complément est beaucoup plus "facile" l'enfant utilise le même procédé qu'en b ci-dessus : il compte à partir de la valeur d jusqu'à n (procédure a"')

Exemple : d = 21	21	22	23	24	25
		1	2	3	4

* Si n est grand et si d et n-d sont assez grands aussi, l'élève peut "concevoir" l'opération qu'il pourrait faire mais y renoncer, par exemple parce qu'il prévoit qu'elle sera trop longue, trop coûteuse et donc peu fiable.

. l'élève peut aussi ne pas concevoir l'opération qu'il pourrait faire parce qu'il ne peut pas la conduire à son terme et qu'il conçoit mal ce qu'il ne peut pas accomplir. Nous pourrions discuter cette hypothèse et les rapports qu'elle a avec le passage chez l'enfant du contingent au nécessaire.

. L'élève peut aussi bien sûr effectuer quand il le connaît, un des algorithmes classiques de la "soustraction", écrite ou mentale qui s'appuient sur la base de numération usuelle. Cette décomposition permet de ramener les calculs à effectuer dans le domaine où ils peuvent être faits sans dessin sans dénombrement et sans tâtonnements. Nous avons ici recensé 6 procédures, on peut en trouver d'autres.

3.3.4 - *Domaines des procédures.*

Les domaines que nous avons déterminés grossièrement ci-dessus à l'aide des variables (n et d) paraissent évidents. Mais pouvons-nous rendre compte de cette évidence à l'aide d'un calcul de coût, pour chacune d'entre elles ? Faisons-le à titre d'exercice

Coût du dessin puisqu'il faut dessiner tous les objets le coût de l'exécution sera par exemple de la forme

$$c = (\alpha + \beta)(n+d) + \beta(n-d) = \boxed{(\alpha + 2\beta)\ n + \alpha d}$$

avec α le prix du dessin ou de la suppression d'une barre

β le prix du dénombrement d'une barre

On peut faire entrer en ligne de compte la fiabilité de l'opération et calculer l'espérance de la variable aléatoire "gain"

Si G est le gain dans un pari gagné

E la perte dans un pari perdu

N le nombre de parties jouées

k le nombre de parties gagnées

p_k la probabilité de gagner k parties N

X le gain au cours de N parties alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N} (kG - (N-k)E)\ p_k - N c$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k\ p_k + E \sum_{k=0}^{N} k\ p_k - N E \sum_{k=0}^{N} p_k - N c$$

$$= (G + E) \sum_{k=0}^{N} k\ p_k - N\ (E-c)$$

$$\boxed{E(X) = N\ [G\ p - E\ (1-p) + c]}$$

où p est la probabilité de réussite d'un calcul au cours d'un essai $p_k = C_N^k\ p^k\ (1-p)^{N-k}$

On peut supposer que p est une fonction affine de n et de d, comme c. Alors $E(X)_{(n,d)}$ la nappe qui représente les coûts des problèmes est un plan (en posant p = θc il vient

$$\frac{E(X)}{N} = N\ (G\theta + E\theta + 1)\ [an + bn] - E$$

coût de la recherche d'un complément dans le cas où d est voisin de n, le coût est

$$\boxed{C = 2\ \alpha\ (n-d)}$$

La fiabilité est très bonne, prenons-la égale à 1

$$\frac{E(X_2)}{N} = [G - \alpha(n-d)]$$

coût de la recherche "au hasard" ou par tâtonnements avec des nombres plausibles. Si on admet que l'enfant cherche "sans mémoire" et peut faire plusieurs fois le même choix. Soit Y la V.A nombre de tentatives pour trouver la valeur exacte. Supposons que l'élève cherche les nombres plausibles dans un intervalle de diamètre 2 d, et supposons qu'il fasse ses choix avec une probabilité uniforme.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2d} \cdot i\ (1 - \frac{1}{2d})^{i-1}$$

$$= \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i\ (2 - \frac{1}{2d})^{i-1} = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i\ p^{i-1}$$

$$= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} (\sum_{i=1}^{\infty} p^i) = \frac{1}{2d} \lim_{n \infty} \frac{d}{dp} (\frac{1-p^n}{1-p})$$

$$= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \lim_{n \infty} (\frac{1-p^n}{1-p}) = \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$\boxed{E(Y) = 2\,d}$$

Et le coût d'un calcul est $c = 2\,\alpha\,d$ d'où

$$E(X) = 2\,\alpha\,d\ .\ E(Y) =$$

$$\boxed{E(X) = 4\,\alpha\,d^2}$$

dans le cas où $n = 0$ ou $d = n$ il existe une procédure de coût nul.

Finalement, on peut après comparaison de ces différents coûts par des estimations des rapports entre le paramètre, dresser une carte du domaine de meilleure efficacité des différentes procédures qui a l'allure de la figure 2.

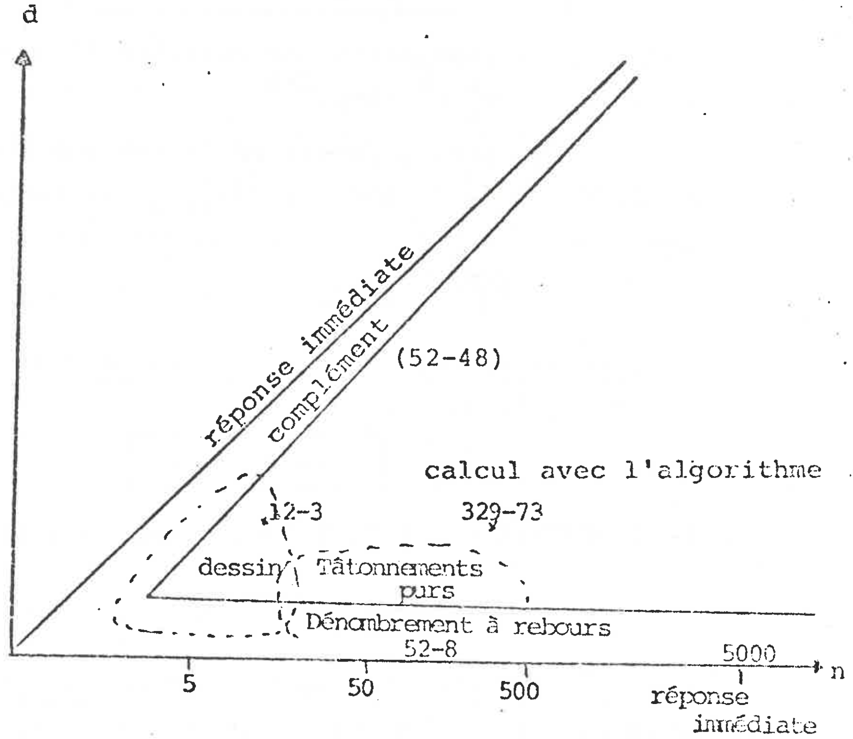


figure 2.

La procédure a''' fournit aux enfants un moyen de vérification anticipé qui modifie la situation. Celle-ci se présente alors comme si, après le choix d'un nombre, par exemple 42, avant que l'enfant parie, on lui disait : "si le nombre que tu dis est juste, il y a 42 pièces dans ce sac et 8 ici, si tu comptais les pièces, combien en trouverais-tu ? (50). La réponse est-elle juste ?

En général, il n'est pas nécessaire de formuler la question de façon aussi précise ni même de la formuler du tout.

Cette procédure peut apparaître d'ailleurs, d'abord au moment de la vérification réelle comme moyen rapide pour l'un des enfants de prouver que le pari de l'autre est perdu. L'intériorisation du procédé de vérification et son inclusion dans la méthode de recherche modifie la situation en ce sens que l'élève peut augmenter de façon décisive le nombre de ses tentatives à n et d constant. De ce fait, la quantité d'information qu'il aura à traiter sera plus grande et l'usage de relations nouvelles va se trouver économiquement justifiée dans des stratégies auxquelles la faible densité en essais de la situation initiale n'aurait pas laissé de possibilité d'apparaître.

3.3.5 - *L'intervention de propriétés mathématiques et leur apprentissage sous la forme d'un modèle implicite.*

Nous venons de voir que les différentes procédures ne sont pas équivalentes. On peut essayer de vérifier que les procédures effectives observées sont conformes aux prévisions dans les différents domaines de meilleure efficacité calculés. Mais le but de ces études est de permettre au maître de provoquer l'apparition de procédures nouvelles par le choix d'un problème dans un domaine nouveau ainsi que l'appropriation de propriétés mathématiques. Voici par exemple une suite de stratégies apparue dans la situation (52-8) décrite ci-dessus, chez un enfant qui utilisait la procédure de tâtonnements (Gaël). Nous les avons rangées par ordre croissant d'efficience qui est l'ordre d'apparition observé (à partir de γ)

[α] Essais au hasard mais on peut essayer plusieurs fois le même nombre si on ne les marque pas ; et si on ne le range pas, la recherche d'un nouveau nombre devient vite coûteuse.

[β] Essais systématiques : on essaie les nombres les uns après les autres jusqu'à l'obtention de la bonne réponse :
35 (35 + 8 = 43 alors pas 35), 36, ... 44 (44 + 8 = 52) 44
Réponse.

[γ] Encadrement du résultat :
"le choix de 35 donne 43 qui est trop petit, alors 35 est trop petit". L'enfant choisit alors 48 par exemple, il oscille autour de la bonne réponse sans s'en approcher (l'enfant utilise ici implicitement la monotonie des translations).

[δ] Correction des encadrements : 43 est beaucoup plus petit que 52, 35 est beaucoup plus petit que le nombre cherché, 56 est trop grand, il faut prendre un nombre entre 35 et 48, plès près de 48 : on observe que les nombres proposés sont à l'intérieur de l'intervalle déterminés par les premiers nombres choisis.

[ε] Utilisation de la différence : 48 donne 56 qui est trop grand de 4, il faut prendre 48-4 (La procédure a ramené le problème à une procédure effectuable.)

Ces exemples montrent comment une propriété mathématique intervient comme moyen de résoudre un problème. Ici ces propriétés sont mises en oeuvre implicitement (l'élève ne pourrait sans doute pas les formuler et encore moins les prouver).

β n'exige que la capacité de faire une liste. Curieusement tous les enfants de 7 à 10 ans ne pensent pas ou ne savent pas utiliser les listes comme moyen de contrôler un dénombrement ou une procédure exhaustive. Peut-être est-ce parce que les désignations d'ensembles ont été introduites en tant que "savoirs" et les dénombrements en tant qu'activité automatique formelle et non en tant que moyen de solution de problèmes ou de contrôle d'une situation γ, V, X, étant le premier nombre choisi par l'élève (par exemple 35 Y étant le nombre visé d la différence (par exemple Y = 52 d = 8) et $f(X_1) = X_1 + d$ (par ex. $f(X_1) = 43$. Si $f(X_1)$ est trop petit (par ex. $43 < 52$) il faut prendre X_2 plus grand.

soit que le dernier nombre examiné (par exemple ici que 43 : l'élève choisit $48 > 43$

soit que x_1 : (ex : $38 > 35$)

mais sans que la correction tienne compte d'une estimation de la différence.

ζ) est un perfectionnement de γ. La correction tient compte de l'encadrement du nombre visé entre deux images :

si $f(x_{n-1}) < Y$ et si $f(x_n) > Y$

alors X_{n+1} est choisi entre x_{n-1} et x_n.

δ réclame le traitement d'un plus grand nombre de données (par exemple 35 → 43 < 52 et 48 → 56 > 52 alors le nombre suivant est choisi entre 35 et 48. Cette méthode conduit l'élève à

nouveau à une énumération, qui va solliciter et renforcer sa connaissance des nombres et de la numération (par exemple, pour trouver le prédécesseur de 40).

Le modèle implicite qui permet de contrôler cette procédure comprend la topologie de ℕ et un "théorème en acte" : la "translation est monotone".

ε) ici la mesure des distances dans N remplace la simple comparaison à un repère et la translation conserve les différences. Cette procédure peut être mise en place par économie et anticipation des résultats de la procédure précédente, ou par une systématisation suivie d'une description et d'une analyse si la situation didactique favorise les attitudes réflexives.

3.3.6 - *<u>La situation-problème comme situation d'apprentissage.</u>*

1°) Remarquons que chacune des procédures que nous venons d'étudier peut s'appuyer sur les précédentes en ce sens qu'elle en est un perfectionnement plus économique du point de vue de l'action et moins incertaine en ce sens qu'elle réduit <u>l'incertitude</u>, le champ des possibles entre lesquels l'enfant hésite. Mais si la procédure la plus performante est oubliée ou si elle échoue pour une raison quelconque, la procédure précédente peut être utilisée et donner lieu à nouveau à la création de la suivante : l'apprentissage peut fonctionner à nouveau. Les connaissances qui sous-tendent ces procédures sont donc prises dans un paradygme où les unes peuvent remplacer les autres et leur servir de <u>signification</u>, de reformulation, de décomposition, d'explication...

Il est facile d'imaginer comment l'utilisation de cette situation et la manipulation des variables didactiques (n, d, N) peut permettre l'apprentissage de la soustraction non pas tant en proposant aux élèves les connaissances, mais en leur proposant des situations qui leur donnent du sens en les rendant nécessaires ou utiles.

2°) Pour que l'élève "comprenne" l'énoncé, il ne suffit pas qu'il sache "interpréter" les mots qui y figurent, il faut aussi qu'il imagine une manière d'y répondre, "qu'il puisse envisager une solution, au moins partielle à l'aide de ce qu'il sait déjà" (R. Douady 1980) qu'il ait ce que nous appelons, une stratégie de base, même si elle fait beaucoup de place au hasard (dans notre exemple α fait parfaitement l'affaire). On peut donc choisir un premier problème dans un domaine tel que la meilleure stratégie de l'élève puisse conduire au résultat, mais au prix d'un "effort" sustanciel qui peut être évalué par son coût (dans lequel l'incertitude intervient). Puis, au fur et à mesure qu'apparaîtront des stratégies nouvelles et après que l'élève ait eu la satisfaction de voir son efficacité s'améliorer, le maître peut proposer des problèmes dans un nouveau domaine.

3°) Il est clair que pour que l'effort de construction d'une nouvelle stratégie vaille la peine, il faut qu'elle soit plus efficace que celle qu'elle va remplacer, ce qui implique d'une part, que l'on pense qu'elle va être utile "assez souvent" et que l'adaptation de connaissances qu'elle nécessite ne soit pas trop coûteuse.

En fait, cette adaptation n'est "bon marché" que dans le cas de ce que Piaget appelle une assimilation. Mais nous avons pu montrer ailleurs (Brousseau (   ) que la filiation des connaissances ou des théories ne pourrait pas être réduite seulement à une succession d'assimilation et d'apports de petites quantités d'informations (et ce, d'autant plus que l'on veut que les connaissances fonctionnent, comme solutions de problèmes et que l'on veut que l'élève participe comme nous verrons plus loin que c'est utile au choix des problèmes).

Le plus souvent, une nouvelle solution réclame une réorganisation des connaissances, un changement de point de vue... Dès lors, il y a intérêt à choisir les nouveaux problèmes de telle manière (c'est-à-dire dans un domaine tel) que la nouvelle solution associée à la connaissance visée soit beaucoup plus économique que l'ancienne. Ce qui oblige à renoncer à de petites progressions régulières le long des variables didactiques et à opter pour des sauts informationnels suffisants. Toutefois, si la stratégie de base devient vraiment trop visiblement inefficace ou impossible, le problème risque de n'avoir plus de sens pour l'élève (sous ma direction, ce problème a été étudié par

J.M Digneau (197).

Nous dirons que la construction d'une nouvelle procédure se fait d'autant mieux que le problème se trouve au voisinage du point où l'efficacité relative de la stratégie correspondante est la plus élevée.

Cette efficacité relative est définie comme le rapport entre son coût et le coût de la meilleure des stratégies concurrentes. Elle peut s'évaluer même si l'on ne connaît pas les coûts eux-mêmes.

4°) La probabilité de créer ces nouvelles procédures est une fonction croissante du nombre d'occasions qui sont offertes à l'élève de le faire, on pourrait penser qu'il existe toujours un N assez grand pour amener cette probabilité aussi voisine de 1 qu'on le désire, mais ce n'est pas exact et d'autres mécanismes didactiques doivent entrer en jeu - nous y reviendrons plus loin (tout de même on peut se rapporter à la querelle entre Chomsky et Skinner ou plus tard Suppes et Nelson).

5°) La possibilité d'organiser de tels processus a été étudiée à plusieurs reprises et à l'occasion de concepts mathématiques très divers. Il ne faudrait pas faire de ce procédé le modèle de tout apprentissage de connaissances, mais il est certain que son usage a été quelque peu ignoré ou négligé.

Les méthodes des études visant à rechercher un processus optimal sont évidentes mais extrêmement coûteuses, ce qui explique qu'elles soient si rares (voir cependant Bessot et Richard (19). La question de savoir si le processus fait partie de la connaissance et donc peut être proposé comme un objectif en soi, a été étudiée par M. Darche (   ) sans qu'il soit possible pour l'instant de se prononcer. Il est probable que les problèmes et surtout les processus de filiations tels que ceux que nous venons d'évoquer sont les moyens d'établir les rapports constitutifs des concepts et de leur fonctionnement, aussi bien de leurs rapports syntaxiques (structurels, logico-mathématiques) que fonctionnels (pragmatiques ou sémantiques) sans qu'on puisse les confondre. Au contraire, "l'oubli" des conditions d'acquisition de la connaissance doit faire partie du processus de détachement nécessaire à la connaissance (je ne dis pas "à l'abstraction", concept \"ad-hoc\" qui n'explique rien et qui est à la mathématisation ce que la vertu dormitive de l'opium a été à la thérapeutique de la morphine).

On peut toutefois penser que la représentation de la soustraction n'est pas réduite à la connaissance d'une stratégie de solution accompagnée de celle d'un prétendu sens de l'opération qui permettrait de l'appliquer, mais qu'elle comporte vraisemblablement la capacité de contrôler plusieurs stratégies en passant de l'une à l'autre selon les circonstances, c'est ce qui organise les connaissances en concept.

Remarquons bien qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre la découverte d'une connaissance et sa mise en oeuvre par une "compréhension" de la situation. La tendance à l'économie favorise le recours à des "automatismes" qui sont accompagnés d'une perte du sens, c'est-à-dire la cessation d'envisager certaines choix possibles. L'acquisition d'un "bon automatisme", c'est-à-dire d'un algorithme, permet un fonctionnement où le sujet ne fait aucun recours au sens. (aux choix possibles, donc aux connaissances qui les commandent). La "compréhension" est en fait la possibilité de restaurer certains moyens de contrôles (par forcément les mêmes) et d'engendrer les alternatives à rejeter.

6°) Mais l'organisation d'un processus n'est pas "réduite" comme on pourrait le croire d'après cette partie de notre exposé au choix par le professeur d'une suite de problèmes dont la "résolution" va produire la connaissance comme une sorte de résidu d'activité. Il s'agira aussi de faire approprier par l'élève le processus de production des questions et des problèmes.

Au niveau le plus bas : la décision de "rejouer", de tenter une nouvelle fois de réussir, doit être remise à l'élève. Pour cela, il faut deux conditions :

- d'une part que la situation-problème s'y prête. On exprime parfois cela en disant qu'elle doit être ouverte. Ce terme dont on a beaucoup usé n'a jamais été correctement éclairci et nous devons revenir sur le sens qu'il convient de lui donner ici.

- d'autre part, que le sujet "entre dans le jeu" ce

qui dépend de l'enjeu - non pas au sens de la récompense, mais au sens du désir, - et de la signification psychologique de la situation. Le terme de motivation ne convient pas très bien car il laisse penser que le désir du sujet serait un moteur qui puiserait sa source hors du procès de connaissance qui ne serait que consommateur de motivation. En fait, le jeu avec la situation-problème peut être producteur de la seule motivation authentique : une motivation endogène. Nous avons commencé à étudier ce phénomène avec F. Kone (1981). La gestion du désir de l'élève fait partie de l'analyse didactique des processus et de la tâche des professeurs (voir aussi G. Dumas "l'affectivité en mathématiques")

Exemple : Comparer les deux problèmes suivants A et B :

A : "démontrez que les trois hauteurs d'un (de tout) triangle sont concurrentes"

B : "dessinez un triangle dont vous tracerez les trois hauteurs en prenant bien garde de ne pas présenter un cas particulier (il faudra le prouver à ses camarades)"

Le défi, même implicite, est certes un moyen de "motiver" l'élève, mais je pense qu'il s'appuie beaucoup plus sur la structure de la situation créée que sur des attitudes psychologiques. Un défi sur une situation fermée n'a aucun sens et aucun effet.

A un niveau plus "élevé" du point de vue cognitif, mais de nature très comparable, la remise entre les mains de l'élève du pouvoir de "choisir" les questions qu'il va traiter - ou plutôt de les élaborer - va faire l'objet d'une négociation, celle du contrat didactique, sujet dont nous allons dire un mot plus loin. Il est clair que ce ne peut être réglé par une simple décision pédagogique de proposer des situations ouvertes (décision qui ne dépendrait pas du contenu cognitif). La plupart des situations didactiques et des problèmes n'ont pas été choisis pour faire poser de nouvelles questions qu'il est nécessaire d'examiner, et dans ces conditions le choix du problème suivant ne peut relever que de la fantaisie du hasard ou de l'idéologie épistémologique (en particulier de l'épistémologie scolaire) et a les plus grandes chances de ne rien produire d'utile.

7°) L'étude des situations susceptibles de provoquer le démarrage d'une véritable dialectique scientifique et d'une authentique genèse d'un concept, sort du cadre de cette étude dans la mesure où l'on essaie de cerner la notion de problème au sens classique. Mais il n'y aurait pas d'obstacles insurmontables à considérer comme des problèmes d'un type nouveau, les situations de communication, de preuve et d'institutionnalisation qui sont étudiées actuellement par de nombreux chercheurs, comme moyens de stimuler et de simuler les processus de genèse des connaissances en situation scolaire. Il faut bien remarquer que ces types de problèmes et les dialectiques qui s'y attachent n'ont que très rarement et très accidentellement été pris en considération par les promoteurs des pédagogies du problème. Or, il s'agit de faire intérioriser par le sujet tous les termes du procès de connaissance (aussi bien le "sur-moi" cognitif à qui il faut prouver ce que l'on croit, que l'interlocuteur intérieur à qui il faut parler le langage commun ou que le "moi" qui réclame sans cesse des actions, des décisions et des jugements pour "exister"), il faut bien admettre que les "problèmes et les conditions qui s'y attachent ne sont qu'une partie, essentielle certes, mais insuffisante du processus.

De nombreux travaux (par exemple Lakatos, mais aussi) montrent qu'il n'y a pas de procès standard qui produisent toutes les connaissances, par voie royale - il faut vivre chaque aventure et les réductions ne sont pas plus évidentes que les productions.

8°) Evidemment un même texte pourra être, selon l'âge ou le niveau des élèves, ou selon le contrat didactique, obtenu par le maître, soit un exercice, soit un problème d'application, soit un problème au sens classique, ou encore une situation de "découverte" etc... (Mais il est clair que le contrat ne permet pas de rattraper dans un problème une structure déficiente, un choix malheureux des valeurs des variables... etc). Mais examinons, toujours sur notre exemple comment ce contrat didactique peut à ce point changer la nature d'un problème par l'intervention de l'idéologie épistémologique du professeur.

Considérons le problème (*) proposé explicitement ou implicitement comme problème d'application (au sens où l'entend Glaeser dans sa classification (19). Cela veut dire que l'on a déjà rencontré des problèmes déclarés semblables - par exemple comme problème introductif - et exhibé une solution, qu'on a érigé un problème "semblable en problème-type - c'est-à-dire convenu qu'on allait devoir s'y référer. Et si l'élève ne sait pas faire le problème il est "convenu" qu'on rappellera le problème "type" et sa solution, ou l'explication qui l'aura accompagné pour faire à nouveau l'économie d'une recherche.

Exemple : "nous avons rencontré plusieurs fois ce genre de problèmes souviens-toi... par exemple... quelle opération avons-nous faite ? et ici qu'est-ce qu'il faut faire ... au lieu de ... nous avons ici quoi ? et on retranche quoi ?... applique la même méthode... fais un dessin..."

La règle qui s'impose dans ce discours, c'est qu'il y a une méthode, que l'on a apprise et qu'il faut "appliquer"... laquelle, pourquoi, quels sont les éléments à mettre en correspondance ? et cela devient "quelle opération faut-il faire ?" Quels sont les signes, les indicateurs qui peuvent me mettre sur la voie : la dernière leçon ? les mots inducteurs...

Le contrat didactique a imposé à l'élève une autre problématique et une incertitude exogène centrée sur les raisons "didactiques" du choix du problème, sur le désir du professeur etc... et pas du tout sur la question posée et les connaissances en jeu.

Ce fait est bien connu des professeurs qui, en réaction, doivent "jouer" par le choix des problèmes à casser les idées fausses "les sous-compréhensions" dirait Pluvinage que leur contrat a pu produire.

Par exemple, je vous laisse découvrir la dialectique erreurs/corrections que peut engendrer la suite d'exercices suivants :

1. Quel est le plus grand décimal x tel que

$$105{,}001 \geq 57{,}3801 + x$$

même question avec $>$ supérieur strictement.

2. Encadrement à 10^{-5} près de 2,8

3. On sait que $3{,}25 \leqslant x < 3{,}28$
et que $27{,}11 \leqslant y < 27{,}12$

Quel est le meilleur encadrement pour $y - x$ et $\frac{y}{x}$ que vous pouvez trouver avec des décimaux à deux chiffres après la virgule.

4. $d \leq \frac{22}{21} < d + 10^{-3}$. Quel est le plus petit décimal s'il existe qui satisfait cette relation ? Le plus grand ? intervalle solution ?

(suite de problèmes posés à des élèves-insituteurs).

Ce deuxième contrat, où chaque nouveau problème conduit à rejeter une erreur possible (peut-être est-ce le "contre-exemple" de Glaeser), est beaucoup plus proche d'une genèse d'un concept que le premier, mais il ést tout aussi déformant que lui. L'analyse des différents types de contrats qui se nouent et des raisons de leurs succès et de leurs échecs est à peine commencée mais il est clair que l'analyse d'une situation-problème et son observation de façon quasi-isolée (du système éducatif) donne des renseignements précieux mais tout à fait insuffisants puisque le contrat change le sens du problème posé.

GALVEZ Grecia

Séminaire : Lundi 12 juillet 1982
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION

La géométrie à l'école élémentaire au moyen de l'orientation dans l'espace urbain.

Cette présentation correspond à une recherche que nous sommes en train de réaliser actuellement, dans le cadre de la théorie des situations didactiques de Guy BROUSSEAU, et dont les points fondamentaux sont les suivants :

1. A l'école primaire on enseigne la géométrie comme un objet culturel et ostensif.
2. Les enfants construisent une grande variété de concepts spatiaux pour établir des rapports avec leur milieu, en marge de leur expérience scolaire.
3. Il est possible de fonctionaliser l'apprentissage de la géométrie à l'école, en construisant des situations didactiques qui vont obliger l'enfant à élaborer des connaissances géométriques dont il se servira pour exercer un contrôle sur ses rapports avec l'espace.
4. L'apprentissage de l'orientation dans le macro-espace constitue, pour l'enfant, un moment très important dans le développement de son autonomie et contribue à le valoriser.
5. Il est possible d'utiliser la problématique posée par l'apprentissage de l'orientation dans le macro-espace et, en particulier, dans l'espace urbain comme source pour la construction de situations didactiques. Ces situations amèneront l'enfant à maîtriser quelques connaissances géométriques et à les utiliser pour contrôler ses rapports avec l'espace.

Dans ce séminaire nous développerons la problématique que nous nous sommes donnée. Nous exposerons des renseignements sur le travail expérimental qui a été déjà fait et, avec la participation des assistants, nous réaliserons deux exercices :

1. L'analyse d'une situation expérimentale, utilisée par Jean Pailhous pour étudier la formation de l'image d'une ville, chez des adultes.
2. L'analyse de deux situations didactiques que nous avons construit pour répondre au propos de cette recherche.

Le séminaire a pour objectif celui de montrer aux participants à cette école d'été une méthodologie pour construire et faire l'analyse des situations didactiques.

A. DUROUX

Atelier : lundi 12 juillet
17h - 19h.

FICHE DE PRESENTATION.

La valeur absolue.

L'opinion commune des enseignants est que la valeur absolue est une source de difficultés, et ceci de la 6ème à la Terminale. Paradoxalement son enseignement occupe une place très marginale dans les manuels.

Il est possible de faire une liste des occasions d'erreurs à propos de la valeur absolue : disjonction des cas, non linéarité, non bijection... ces occasions n'expliquent cependant pas les erreurs, elles se rencontrent à propos d'autres notions (racine carrée, équations paramétriques..) Je fais l'hypothèse que nous pourrons analyser la spécificité de ces erreurs en mettant à jour les obstacles à l'acquisition de la notion de valeur absolue. Nous reprenons ici la notion d'obstacle épistémologique due à Bachelard et nous tentons de l'utiliser dans l'analyse des procès d'acquisition de la notion de valeur absolue. Un obstacle sera caractérisé par les conditions suivantes :

- C'est une connaissance qui fonctionne dans un domaine de validité suffisamment large
- Des erreurs persistantes, apparemment diverses, auront pour source commune cette connaissance appliquée hors de son domaine.
- Elle résistera aux modifications en tentant de s'adapter localement, sans qu'il y ait réorganisation du savoir.
- Enfin le rejet de cette connaissance sera constitutive du savoir.

Nous avons cru déceler un couple d'obstacles à l'acquisition de la notion de valeur absolue.

- La conception du nombre "quantité" qui fait apparaître les négatifs comme "quantité à l'envers". La valeur absolue n'aura alors pas de sens sur les positifs et supprimera ce signe des négatifs.

- La conception du nombre "algébrique" dans laquelle les nombres sont des symboles obéissant à un certain nombre de règles d'opération, n'ayant pas toujours de sens pour l'élève, mais facilitant l'automatisme des calculs.
  La valeur absolue est alors perçue comme scandaleuse, car elle réintroduit une notion de mesure et met en défaut les automatismes ($|a+b| \neq |a| + |b|$).

Dans cette situation, deux types de régulation entre les conceptions de l'élève et l'objet à enseigner apparaissent :

- Une régulation par la valeur absolue, à savoir son utilisation pour rénover l'objet d'enseignement (confère les travaux d'O.Schneider sur les équations paramétriques).
- Une régulation sur la valeur absolue, par adaptation de l'objet (écritures : oppla), z^- ..., définitions : nombre sans son signe..) et par canonisation de la procédure consistant à "enlever la valeur absolue en étudiant le signe de l'expression".

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DE MATHÉMATIQUES
5 - 17 JUILLET 1982 - ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS - OLIVET.

R. DOUADY
M.J. PERRIN

Séminaire : Mardi 6 juillet
14h 30 - 16h 30

FICHE DE PRESENTATION.

Vitesse Constante - Vitesse Moyenne.

I.- INTRODUCTION

Objectif de la recherche.

C'est l'étude et la mise au point de conditions didactiques suffisantes pour l'acquisition de la notion de vitesse dans l'ens eignement élémentaire et secondaire. Il est clair que nous choisissons un point de vue simple sur le temps et l'espace.

Le vécu fournit une expérience quotidienne de la vitesse instantanée, d'un point de vue qualitatif. Cependant sa définition et sa mesure font intervenir 3 notions importantes mais de difficulté inégale :

1 - Mouvement uniforme
2 - Vitesse moyenne
3 - Distance infinitésimale, durée infinitésimale, passage à la limite.

Notre travail actuel porte sur les 2 premières notions avec des élèves de 10 - 11 ans.

Objectif de l'exposé.

1 - isoler des difficultés relatives au fonctionnement de ces notions

2 - contribuer à clarifier des choix didactiques permettant de les surmonter

II. - TEST CHEZ DES ELEVES DE 1ère B, C, E.

Le test ci-joint a été proposé à 29 élèves de 1ère B, 16 élèves de 1ère C, 24 élèves de 1ère E. Pour 15 sur 29 élèves de B, 9 sur 16 élèves de C et pour les 24 élèves de E tout se passe comme si la vitesse à l'instant t était la vitesse moyenne sur l'intervalle $[0, t]$. Pour 4 élèves de B, 1 élève de C, la vitesse est évaluée sur un intervalle, mais pas nécessairement de la forme $[0, t]$. Un seul élève de B exprime une notion de vitesse à un instant donné en se servant d'un théorème de valeurs intermédiaires. Un seul élève de C fait le lien avec la tangente à la courbe en un point.

Nous constatons que l'origine joue un rôle privilégié et que la notion de vitesse moyenne sur un intervalle quelconque, qui ne soit pas de la forme $[0, t]$, fonctionne mal

III.- PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE.

Nous avons porté notre attention sur 2 domaines

1) constitution d'un champ conceptuel stable centré sur la notion de vitesse moyenne
2) construction de séquences didactiques où sont engagées de façon nécessaire les notions repérées.

Pour le premier point nous en avons fait une description :

- d'une part en examinant la définition d'un mouvement uniforme, la définition de la vitesse moyenne sur un intervalle, les différentes notions qui interviennent et les problèmes qu'elles permettent de résoudre

- d'autre part, en faisant une préexpérimentation auprès d'élèves de CM auxquels nous avons proposé des séquences didactiques construites à partir de notre analyse à priori des notions qui nous intéressaient.

- l'observation des enfants, l'analyse de leurs procédures nous ont permis de préciser le champ conceptuel sur lequel nous allions travailler (+). Nous avons ainsi dégagé des principes pour la construction des séquences d'apprentissage :

- la vitesse est conçue à travers ses variations
  . en fonction du temps pour un mobile donné
  . en fonction du mobile s'il y en a plusieurs dont chacun est animé d'un mouvement uniforme.

Les séquences devront prendre en compte ces 2 variables.

- On a besoin d'un mode de représentation des relations entre la durée t de parcours et la distance parcourue pendant le temps t, qui prenne en compte la dynamique du mouvement. Nous avons choisi la représentation graphique en coordonnées cartésiennes. Nous avons fait l'hypothèse que la représentation graphique pouvait remplir deux fonctions :

  + outil de résolution

  + outil de conceptualisation

à condition d'en acquérir une certaine familiarité.

- Chaque séquence doit mettre en jeu des acquis antérieurs. Certaines auront un simple rôle de renforcement, de familiarisation. D'autres introduiront des notions nouvelles ou des notions qui auront déjà fonctionné implicitement et qu'on se propose d'expliciter. Pour ces dernières nous choisirons plutôt des situations de communication. D'autres enfin auront la charge d'institutionnaliser les connaissances. Il s'agira alors de bilan collectif ou de chroniques résumées, phases suivies de synthèse.

- Des tests évaluent les acquis et peuvent servir à modifier le déroulement des séquences prévues.

(+) *Champ conceptuel.*

- *instants - durées / positions - distances*
- *structure de l'espace des durées , de celui des distances, unité de mesure des durées, des distances.*
- *rapports*
- *variation d'une quantité en fonction d'une autre, taux d'accroissement d'une fonction*
- *diverses représentations des lois de variations, en particulier représentation graphique en coordonnées cartésiennes*
- *relations entre grandeurs de même nature, dont les mesures sont de même ordre ou d'ordre différent, entre grandeurs de nature différente .*

IV. - DEROULEMENT DES SEQUENCES.

Nous commenterons 2 séquences : une en début de processus et une en milieu de processus.

Consigne 1 :

a) Vous avez fait une course de 60 mètres, vous connaissez chacun votre temps. Vous allez faire une autre course sur un parcours plus long : 90 m. Vous allez prévoir le temps que vous allez mettre. Le gagnant est celui dont le temps réel est le plus proche du temps prévu.

b) Expliquez la différence entre le temps prévu et le temps réel.

c) Voici vos temps au bout de 30 m., 60 m., 90 m. Avez-vous couru régulièrement ?

Consigne 2 :

Vous décrivez, en le racontant par écrit avec des mots, un mouvement que vous imaginez. Puis vous le représentez graphiquement. Ensuite vous enverrez cette représentation à un camarade. Ce camarade devra décrire le mouvement avec des mots d'après le graphique.

V. - LES TESTS EN CM 2 - 6ème - 5ème.

(Textes ci-joints)

Ces tests ont été proposés à 13 élèves de CM 2, juste après l'apprentissage, à 23 élèves de 6ème 5 mois après, à 24 élèves de 5ème un an après.

Les réponses à ces tests font nettement apparaître le fonctionnement relativement bon de la représentation graphique comme outil de résolution lorsqu'il s'agit d'un mouvement uniforme :

- On sait représenter des mouvements uniformes et faire une interprétation simple de ces représentations pour résoudre un problème (cf croisement de trains).

- On sait associer un mouvement uniforme à un mouvement qui ne l'est pas, à partir de l'origine du mouvement (cf mouvement d'une voiture donnée graphiquement).

Cependant, pas plus qu'en 1ère, on ne sait donner des informations, même qualitatives, sur la vitesse d'un mobile à un instant donné à partir d'informations graphiques sur une représentation espace/temps.

VI. - QUELQUES REFLEXIONS.

Les différentes séquences qui se sont effectivement déroulées ont occupé beaucoup de temps et il était difficile de travailler plus longtemps avec les mêmes enfants sur le même thème.

+ La notion de mouvement uniforme semble bien fonctionner. Associer à un mouvement donné un mouvement uniforme qui coïncide avec lui en 2 points arbitraires entre le départ et l'arrivée du mobile est une opération possible et exploitable si les 2 points choisis sont fixés. C'est une opération très difficile s'il s'agit de faire varier le couple de points et d'avoir à exploiter non pas un mouvement uniforme associé mais une famille de tels mouvements. Nous ne pouvons pas préciser le rôle que peut jouer la représentation graphique pour surmonter les difficultés. Nous espérons pouvoir reprendre la question avec des élèves plus agés. Le déroulement des séquences sur les mouvements uniformes sera sans doute plus rapide et nous laissera plus de temps pour les mouvements non uniformes

I Deux trains A et B partent simultanément de Paris et Lyon à 9heures . Ils roulent régulièrement . La distance Paris - Lyon est de 450 km .

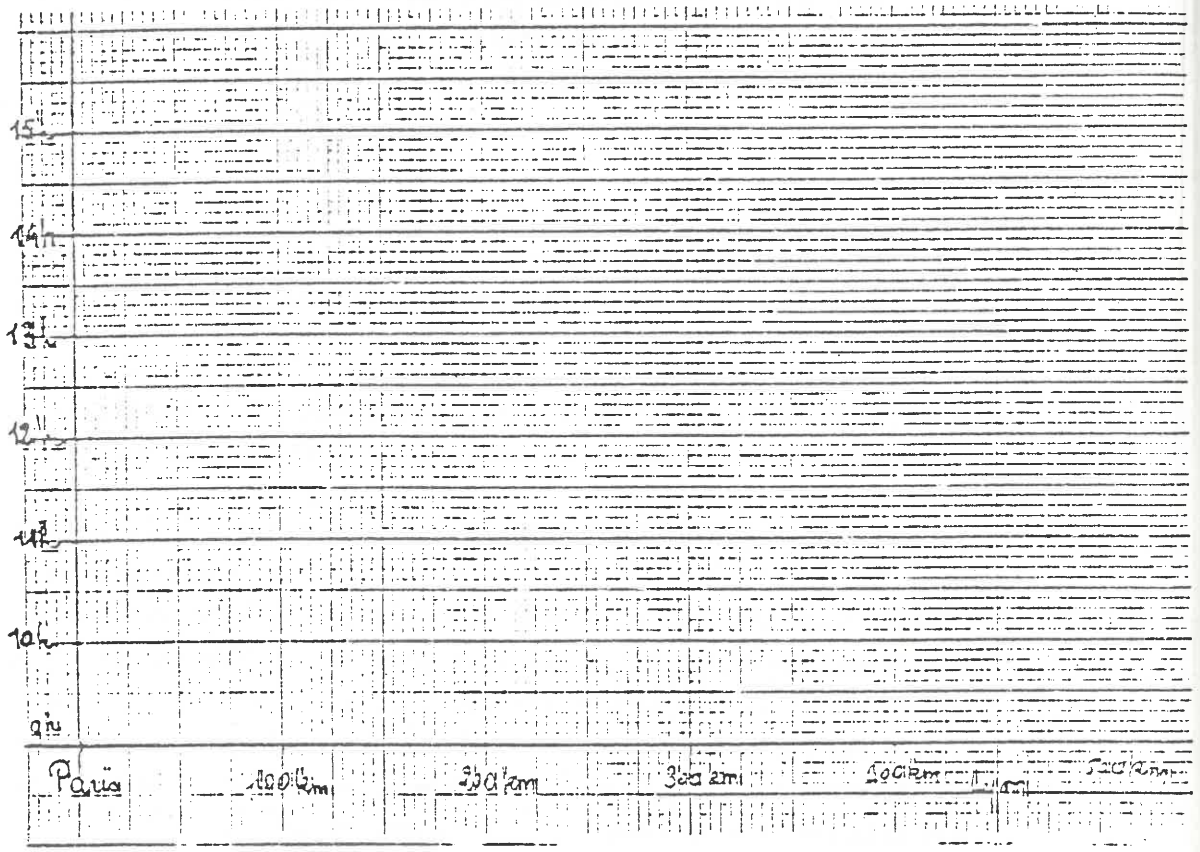
Le train A va de Paris à Lyon et parcourt 5 km en 2 minutes .

Le train B va de Lyon à Paris et parcourt 9 km en 6 minutes .

1) Représenter graphiquement le mouvement des trains A et B sur le schéma ci-joint.

2) A quelle distance de Paris les locomotives vont-elles se croiser ?
(les locomotives sont en tête de train) .

3) A quelle heure les locomotives vont-elles se croiser ?



graphique réduit de moitié

II Une voiture effectue un parcours de 70 km en 36 minutes . Elle ne roule pas régulièrement . La façon dont elle roule est donnée par le graphique ci-joint : le temps est mesuré en minutes , la distance en km . Chaque point représente un couple (t,d) où t est le temps mis pour parcourir d kilomètres , par exemple (36,70) .

1) Quelle est la vitesse moyenne de la voiture sur son parcours ?

2) La vitesse ayant varié au cours du mouvement , indiquer

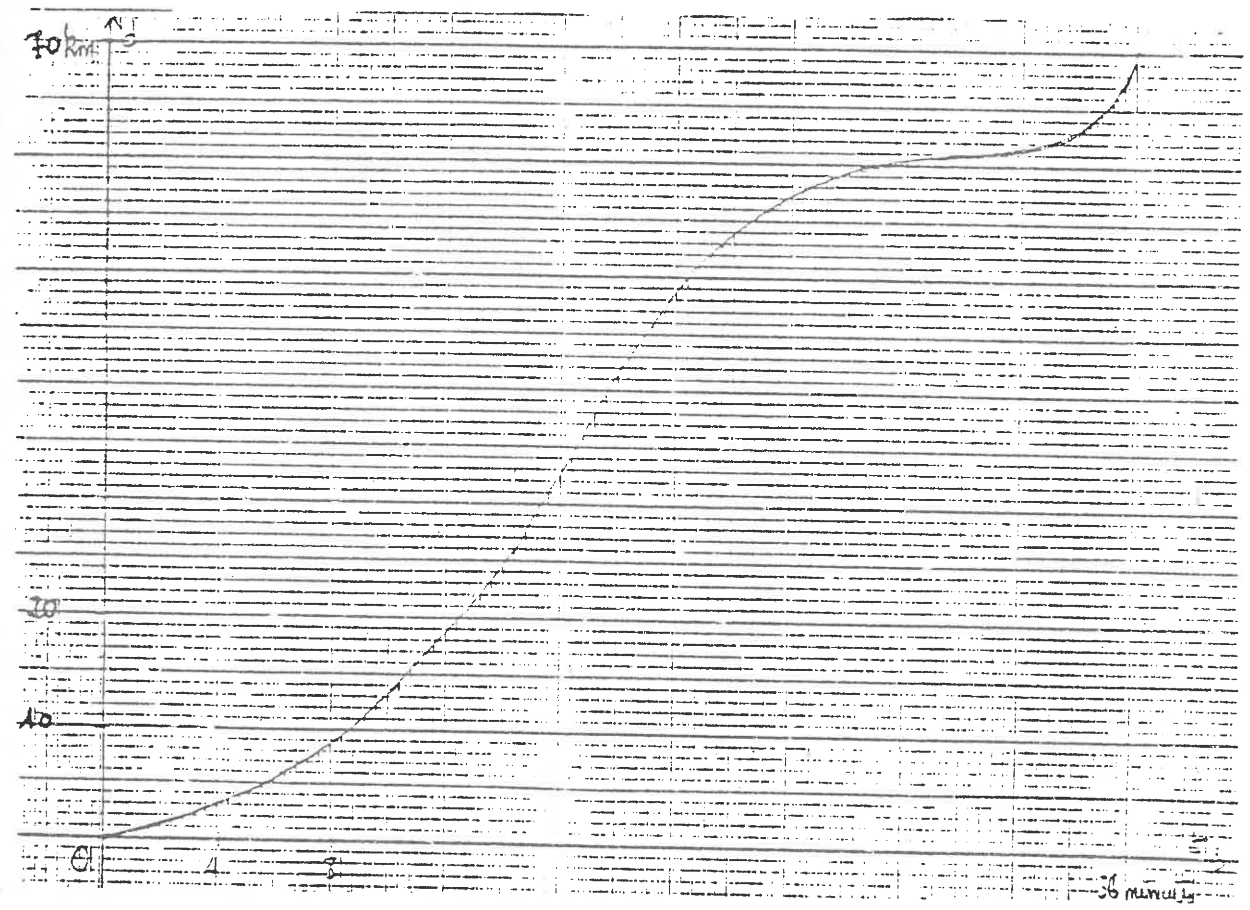
a) un instant où sa vitesse est inférieure à la vitesse moyenne

b) un instant où sa vitesse est supérieure à la vitesse moyenne

c) un intervalle où sa vitesse est inférieure à la vitesse moyenne

d) un intervalle où sa vitesse est supérieure à la vitesse moyenne

3) Y a-t-il un instant où sa vitesse est égale à la vitesse moyenne ?
Si oui , indiquer à quel instant . Y en a-t-il plusieurs ?



Graphique réduit de moitié

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5-17 JUILLET 1982 - ÉCOLE DES ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS - OLIVET

SCHUBAUER Léoni-Maria-Luisa
PERRET-CLERMONT Anne-Nelly

Séminaire Lundi 12 juillet 14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION

L' ACQUISITION D'UNE NOTION OPERATOIRE PAR L'ELEVE RELEVE-T-ELLE D'UN PROCESSUS INDIVIDUEL? ou
De la nécessité de prendre en compte le contexte (cognitif, social et matériel) dans la saisie d'un niveau opératoire

Dans le cadre de ce séminaire nous avons prévu de reconstruire avec vous une démarche de recherche. Nous insistons donc sur le fait qu'il s'agit bien d'une reconstruction dans la mesure où, à postériori la démarche que nous vous livrons a été modulée et transformée -depuis sa logique première- par le processus même d'élaboration théorique mis en acte par les faits expérimentaux. Ainsi notre intention est de vous expliciter comment nous avons construit notre objet depuis la phase d'élaboration théorique "provisoire" jusqu'à l'étape actuelle de connaissance de l'objet, en passant par la mise en scène expérimentale, son intrigue et son dénouement.

UN OBJET DE SAVOIR SPECIFIQUE

L'expérience dont il est question ici a porté sur l'épreuve piagétienne très classique de conservation des quantités de liquides (épreuve "opératoire", "concrète" et considérée "connue" et donc transparente par les psychologues). Nous verrons que les données psychologiques relatives aux mécanismes de l'élaboration de la notion par l'enfant prennent une autre signification que celle classiquement décrite (Piaget et Szeminska 1941; Inhelder, Sinclair et Bovet,1974)si on ne néglige pas les facteurs psychosociologiques et sociologiques en jeu.

Si nous proposons cet objet (notion opératoire au sens piagétien) dans le cadre de la deuxième Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, ce n'est pas parce que nous voudrions plaider la cause d'éventuelles isomorphies, déterminations,interdépendances entre une notion opératoire piagétienne et des contenus de connaissance mathématiques. Nous savons trop que ces derniers ne sont pas réductibles à des notions opératoires au sens piagétien (cf. Brun 1975 et 1979, Vergnaud 1980, Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980) et notre intention ici n'est pas non plus celle de développer l'étude de l'articulation entre ces deux domaines.

QUI APPREND QUOI DE QUI , OU ET COMMENT?

Compte tenu du statut particulier de l'objet de savoir (contenu qui ne se situe pas "normalement" parmi les objets d'enseignement à l'école), notre intention est de consacrer ce séminaire à l'analyse des différentes formes et dimensions que peut prendre le rapport dialectique qui s'établit entre les trois pôles suivants: Expérimentateur - "sujet(s)"[1] - objet, dans le cadre d'une démarche qui articule une approche clinique et expérimentale. Nous mettrons ainsi l'accent sur les aspects méta-contractuels de la communication qui s'instaure entre les partenaires (expérimentateur-enfant dans le cas de l'entretien clinique classique, ou expérimentateur - enfant 1 et enfant 2, lors de mises en scènes particulières où les enfants sont interrogés en couples et appelés explicitement à interagir pour résoudre le problème) en fonction de l'enjeu (social et cognitif) à l'oeuvre dans l'épreuve de transvasement des liquides transformée en tâche de partage de sirop.

Nous avons conçu l'expérience de façon à faire varier certaines dimensions du contexte.

1. Le contexte relationnel du partage qui, selon les conditions mettait en scène:
   - l'enfant et l'expérimentatrice (situation objectivement asymétrique

---

1) *pour une explication des guillemets, voir note page 4*

et vécue par l'enfant de façon différente selon l'"impression" de distance -de statut et de groupe social d'appartenance- ressentie entre lui-même et l'expérimentatrice)

- deux enfants de même degré scolaire (situation de partage par excellence parce qu'elle facilite d'emblée la compréhension de la consigne: le partage sera "juste" entre partenaires ayant droit à autant de sirop l'un que l'autre s'il y a les mêmes quantités)
- deux poupées identiques (présentées comme deux jumelles auxquelles il faut donner autant de sirop à l'une qu'à l'autre : ce contexte de partage entre partenaires égaux place pourtant l'enfant dans un rapport d'extériorité face au partage; il n'est pas ici directement "intéressé" à activer des procédures qui, du moins, ne le lèsent pas).

2. La modalité d'attribution des verres (verre haut et mince ou large et bas). Selon quel verre il se voit attribuer, l'enfant pourra d'emblée avoir l'impression qu'il a plus ou moins de sirop.

3. Les conditions d'interaction sociale et cognitive :
   - avec un pair plus avancé (conservant) ou de même niveau (non conservant)
   - avec un adulte qui lui présente un modèle de comportement conservant.

Nous montrerons que pour que l'enfant puisse traiter cognitivement le problème et formuler une réponse opératoire, il faut qu'il parvienne à faire abstraction des rapports sociaux en jeu. L'interprétation par l'enfant de la signification sociale attribuée à la tâche et à la mise en scène des entretiens constitue une dimension importante de l'activité cognitive qu'il met alors en oeuvre. Il n'est donc pas étonnant qu'une correspondance étroite entre niveau opératoire et milieu culturel d'origine ait été mise en évidence à plusieurs reprises par différents auteurs (pour quelques exemples récents voir Perret-Clermont et al 1982).
Pour nous le problème se pose alors en termes d'identification des conditions intersubjectives qui font que tel enfant (saisi psychologiquement et sociologiquement) parvient ou non à entrer dans la relation qu'autrui lui propose (expérimentateur mais aussi pairs) et à élaborer, hic et nunc, un certain savoir .

Dans cette perspective théorique, nous proposons de considérer tout paradigme expérimental comme constituant une micro-histoire interpersonnelle et cognitive où l'élaboration d'une notion ,opératoire en l'occurence, se fait au travers d'un échange qui se déroule dans un monde social qui est, à priori, seulement partiellement partagé (Rommetveit 1979).

Pour rendre compte de la dynamique d'appropriation d'un savoir spécifique dans des conditions d'apprentissage nous sommes donc renvoyées au delà de la relativement simple entreprise de désignation des caractéristiques sociales de chaque élément de la triade Expérimentateur-sujet-savoir; il nous faut non seulement affirmer que l'individu est constamment inséré dans un champ de relations sociales, mais encore comprendre comment se font ces échanges enfant-environnement. Ainsi, afin de révéler qu'elles sont les caractéristiques de la réalité sociale organisée par l'expérimentateur et proposée à un (des)"sujet(s)", qui revêtent une signification particulière dans le cadre de cette expérience, nous suivrons les différentes modalités d'élaboration des réponses des enfants selon leurs appartenances sociales (milieu d'origine et sexe): certains élèves[1] (et alors lesquels?) vont-ils être plus sensibles que d'autres à des caractéristiques spécifiques du contexte et de la tâche en particulier?

En bref, par ce type de démarche théorique qui nous resitue (en tant qu'expérimentatrices) dans la triade examinateur-savoir-éxaminé nous nous donnons les moyens d'une décentration objectivante:

- au niveau pragmatique, par le truchement de mises en scènes diverses dans lesquelles la personne de l'expérimentateur et celle de l'enfant assument des positions plus ou moins centrales;
- au niveau théorique, en cherchant quels sont les champs de significations en présence : celui du chercheur (qui risque souvent d'interprêter les comportements d'autrui limitativement à travers son regard professionnel et social ethnocentrique) et surtout celui de l'enfant.

1) puisqu'il s'agit bien d'élèves testés,selon les situations,dans une salle de classe vide, un bureau. la salle de travaux manuels, etc, pendant les heures d'école. Cette note, à première vue anecdotique nous permet de rappeler que le sujet dit épistémique est bien toujours incarné par un enfant que nous "cernons", "saisissons" (ah la belle emprise!) dans un lieu précis, institutionellement marqué et véhiculant vraisemblablement des modes d'approche de l'objet et de la situation de questionnement de type "scolaire" (c'est à dire conformes au contrat en vigueur dans la classe). Enlevé momentanément de ses tâches scolaires quotidiennes, l'enfant va-t-il activer d'autres mécanismes intellectuels et socialement recevables que ceux qu'il a appris (plus ou moins bien) à mettre à l'oeuvre en tant qu'élève?

Références

BRUN, J - Education mathématique et développement intellectuel, thèse de 3e cycle, Université de Lyon II, 1975

BRUN ,J.- Pédagogie des mathématiques et psychologie: Analyse de quelques rapports , Cahiers de la Section des Sciences de l'Education , Université de Genève, 12, 1979

INHELDER B, SINCLAIR H.,BOVET M. - Apprentissage et structures de la connaissance. Paris, P.U.F. ,1974

PERRET-CLERMONT A.N., BRUN J, SAADA E.H., SCHUBAUER-LEONI M.L. Learning: a social actualization and recostruction of knowledge. In: H. TAJFEL (ed): The social dimension. Academic Press,London (à paraître)

PERRET-CLERMONT A.N. et SCHUBAUER-LEONI M.L, - Conflict and cooperation as opportunities for learning. In: P. Robinson (ed.). Communication in development, Academic Press, 1981

PIAGET J. et SZEMINSKA A,.- La genèse du nombre. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel & Paris, 1941

ROMMETVEIT R., - Struttura del messaggio, Armando(ed) Roma 1979 Titre original:-On message structure:a framwork for the study of language and communication, Wiley & Sons, Ltd, New-Jork-London, 1974

SCHUBAUER-LEONI M.L. et PERRET-CLERMONT A.N., -Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs, Recherches en didactique des mathématiques, 1, 3, 297-343,1980

VERGNAUD G., - Jean Piaget et le marxisme: un point de vue, L'Ecole et la Nation, 310, 18-20,1980

VERGNAUD G., L'enfant, la mathématique et la réalité , Berne, P Lang,1980

Maria Luisa SCHUBAUER-LEONI (Genève)

Anne-Nelly PERRET-CLERMONT (Neuchâtel et Genève)

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5-17 JUILLET 1982 - ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS - OLIVET.

MARIA - LUISA SCHUBAUER-LEONI

ANNE - NELLY PERRET-CLERMONT

Séminaire : Lundi 12 juillet
14h 30 - 16h 30

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT

L'acquisition d'une notion opératoire par l'élève relève-t-elle d'un processus individuel ? ou de la nécessité de prendre en compte le contexte (cognitif, social et matériel dans la saisie d'un niveau opératoire.

Dans la notice de présentation de ce séminaire nous avons insisté sur le fait qu'il s'agit ici de la reconstruction d'une démarche de recherche. Cette reconstruction se situe sur deux plans :

- Le premier, caractérisé par la pratique qui est la nôtre dans ce cadre et qui est celle d'une pratique de communication voire d'enseignement. Depuis la logique première de la pratique d'invention, nous avons procédé à un travail de tri, de mise en forme des donnés empiriques et développé le processus de théorisation relatif à l'objet d'étude ainsi construit. Or, si communication implique reconstruction, il reste à savoir et à préciser : QUI DIT QUOI A QUI ?

  Compte tenu du fait que nous nous exprimons ici dans le cadre de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques (lieu créé ad hoc pour des échanges légitimes à propos de la didactique des mathématiques) il nous semble important de rappeler que nous allons parler en psychosociologues à un public vraisemblablement pas tout à fait homogène : nous croyons savoir que parmi vous il y a des enseignants, des psychologues, des mathématiciens et ... bien sûr des didacticiens[1]. Mais, puisque vous êtes tous sensés vous "intéresser"[2] à la didactique des mathématiques, nous avons reconstruit et repensé notre démarche de recherche et ses implications théoriques dans la perspective de vous montrer sa pertinence par rapport à la didactique.

- Nous touchons ainsi le deuxième plan de reconstruction de la démarche ; En effet il est nécessaire de rappeler que cette recherche, réalisée en 1977, a été conçue dans le cadre d'un ensemble de recherches, (menées avec W SOISE, G. MUGNY et collaborateurs) visant l'étude expérimentale du développement social de l'intelligence. La logique première de la démarche est donc à resituer dans une perspective de psychologie sociale génétique.

En clair, puisque nous traitons d'une recherche qui n'est pas née en réponse aux préoccupations de la didactique de contenus d'enseignement spécifiques, une première forme de vigilance épistémologique nécessite qu'on resitue d'abord l'objet de savoir dans le contexte qui l'a engendré, en créant ainsi les meilleures conditions à une dé-re-contextualisation éventuelle. En procédant de la sorte, décontextualisation implique reconstruction de l'objet de savoir ; démarche qui n'a plus rien à voir avec le "déductiorisme" propre à certaines perspectives psycho-pédagogiques.

---

1. *En réalité, il s'agit le plus souvent, de "doubles appartenances" : le mathématicien-enseignant, le psychologue-enseignant ou le psychologue mathématicien, etc ; voire d'identités socio-professionnelles à trois places : exemple, le didacticien-mathématicien-enseignant ou le didacticien-psychologue-enseignant. Il se peut que ces "parties" de soi ne constituent pas de simples juxtapositions chez l'individu et qu'un travail en profondeur ait reconstruit un tout très cohérent et indissociable.. Pourtant, selon les circonstances, par la façon que chacun de nous a de recontextualiser et de donner ainsi un sens à ce qui est dit par autrui, n'avons-nous pas souvent le sentiment d'être interprétés de façon spécifique, ce qui activerait tantôt la "carte" "savoir mathématique" ou alors la "formation psychologique" ou encore la "fonction enseignante" ?*

2. *P. BOURDIEU(1980 p.79) nous rappelle que : "(...) dire que nous somme intéressés à un problème, c'est une façon euphémistique de nommer le fait fondamental que nous avons des enjeux vitaux dans nos productions scientifiques. Ces intérêts ne sont pas directement économiques ou politiques, ils se vivent comme désintéressés : (...). Cela veut dire qu'à un certain moment un certain groupe scientifique, sans que personne ne se décide, constitue un problème comme intéressant : il y a un colloque, ou fonde des revues, ou écrit des articles, des livres, des comptes rendus C'est dire que "ça paie" d'écrire sur ce thème ; ça rapporte des profits, moins sous forme de droits d'auteurs (ça peut jouer) que sous forme de prestige, de gratifications symboliques, etc...".*

Si nous voulons participer à l'étude scientifique d'un système (la didactique des mathématiques en l'occurence) nous nous devons de ne pas oublier et surtout de ne pas occulter les conditions sociales de production de l'objet.

"Savoir ce que l'on fait quand on fait de la science -ce qui est une définition simple de l'épistémologie-, cela suppose que l'on sache comment ont été faits historiquement les problèmes, les outils, les méthodes, les concepts que l'on utilise". (Bourdieu 1980, p.81).

Dans cette perspective, nous allons commencer par "prendre au sérieux" l'objet de savoir spécifique qui est le nôtre ici :

L'épreuve piagétienne de conservation des quantités de liquides.
Positions épistémogogiques.

Dans la perspective d'étudier le développement de l'intelligence en remontant jusqu'à ses racines, Piaget et collaborateurs ont conçu de nombreuses épreuves et dispositifs matériels devant permettre de mettre en évidence les instruments de connaissance du sujet aux différentes étapes du développement. Le développement cognitif de l'enfant étant alors caractérisé comme un processus de construction de nouvelles structures qui se manifesteraient chez les enfants à peu près aux mêmes âges moyens[1] dans les différents domaines de la connaissance.

> L'âge de 7-8 ans en moyenne marque un tournant décisif dans la construction des instruments de connaissance : les actions intériorisées ou conceptualisées dont le sujet devait jusqu'ici se contenter acquièrent le rang d'opérations en tant que transformations réversibles modifiant certaines variables et conservant les autres à titre d'invariants. Cette nouveauté fondamentale est due une fois de plus au progrès des coordinations, le propre des opérations étant avant tout de se constituer en systèmes d'ensemble ou « structures », susceptibles de fermeture et assurant de ce fait la nécessité des compositions qu'elles comportent, grâce au jeu des transformations directes et inverses.

(Piaget 1979, p.34).

---

1. *A elle seule, cette prise en compte des réussites aux différentes épreuves à des âges moyens mériterait une mise en perspective sociologique : de quelle population s'agit-il ? La question n'est pas "technique" au sens méthodologique du terme ; ce que l'on veut éviter (et nous aurons l'occasion de revenir sur la question en présentant notre recherche) c'est de*

Piaget continue un peu plus loin : (Piaget 1979, 3è édition p.37-39)

Pour ce qui est des conservations, qui constituent le meilleur indice de la formation des structures opératoires, elles sont étroitement liées tout à la fois à la transitivité et à la fermeture des structures. A la transitivité cela est clair, car si l'on a $A = C$ parce que $A = B$ et $B = C$, c'est que quelque caractère se conserve de A à C, et, d'autre part, si le sujet admet comme nécessaires les conservations $A = B$ et $B = C$ il en déduira $A = C$ en vertu des mêmes arguments. Quant à ces arguments, que l'on retrouve dans la justification de toutes les conservations, ils témoignent tous trois de compositions propres à une structure refermée sur elle-même, c'est-à-dire dont les transformations internes ne dépassent pas les frontières du système et ne recourent, pour être effectuées, à aucun élément extérieur à lui. Lorsque, dans l'argument le plus fréquent, le sujet dit simplement qu'un même ensemble ou un même objet conserve sa quantité en passant des états A à B, parce qu' « on n'a rien ôté ni ajouté », ou simplement « parce que c'est le même », il ne s'agit plus en effet de l'identité qualitative propre au niveau précédent, puisque précisément cette dernière n'entraînait pas l'égalité ou la conservation quantitatives : il s'agit donc de ce qu'on a appelé en langage de « groupes » l' « opération identique » ± 0 et cette opération n'a de sens qu'à l'intérieur d'un système. Lorsque (second argument) le sujet dit qu'il y a conservation de A à B puisqu'on peut ramener l'état B à l'état A (réversibilité par inversion), il s'agit à nouveau d'une opération inhérente à un système, car le retour empirique possible de B à A était lui aussi parfois admis au niveau précédent, mais également sans entraîner pour autant la conservation. En troisième lieu, lorsque le sujet dit que la quantité se conserve parce que l'objet s'est allongé mais en même temps rétréci (ou que la collection occupe un espace plus grand mais devient moins dense) et que l'une des deux modifications compense l'autre (réversibilité par réciprocité des relations) il est encore plus clair qu'il y a système d'ensemble et refermé sur lui-même : en effet, le sujet ne fait aucune mesure pour évaluer les variations et il ne juge de leur compensation qu'a *priori* et de façon purement déductive, ce qui implique le postulat préalable d'une invariance du système total.

.... suite de la page précédente.

considérer comme "loi générale" un principe qui n'est vérité que pour un groupe social correspondant, en fait, qu'à la majorité des sujets !. En s'adressant à ses lecteurs (des intellectuels, bien sûr !) Piaget confie (1972.p 146) : "Quantité de matière, conservation de la matière... chose extraordianire, ce n'est que vers 8 ans en moyenne que ce problème est résolu, par 75 % des enfant. Ce n'est donc qu'une moyenne. Si vous faite l'expérience sur vos propres enfants, vous aurez naturellement un âge plus précoce car vos enfants sont certainement* avancés par rapport à la moyenne. Mais pour la moyenne, c'est 8 ans...".*

(c'est nous qui soulignons).*

Plus particulièrement nous prendrons en compte maintenant la conservation des quantités continues en rappelant brièvement la "technique" adoptée par Piaget et Szeminska (1941) pour tester de type de conservation.

(Inheldel, Sinclair et Bovet 1974, p.333,334).

CONSERVATION DES QUANTITÉS DE LIQUIDES (TRANSVASEMENT)
(Voir Piaget et Szeminska, 1941.)

1 – Technique

Matériel :
- 2 verres identiques (verres témoins A et A') (diamètre environ 5 cm et hauteur 8 cm);
- 1 verre plus étroit et plus haut (verre E) (environ 3 cm de diamètre et 12 cm de hauteur);
- 1 verre plus large et plus bas (verre L) (environ 7 cm de diamètre et 4 cm de hauteur);
- 4 petits verres identiques, pouvant contenir chacun approximativement un quart de volume de A (P_1, P_2, P_3, P_4);
- 2 bouteilles contenant de l'eau colorée de deux couleurs différentes, rouge et vert, par exemple.

Présentation : L'exp. fait d'abord constater à l'enfant que les récipients A et A' sont de dimensions identiques ; il prend ensuite une des bouteilles et verse de l'eau (sirop) dans A. Il demande à l'enfant de prendre l'autre bouteille et d'en verser autant dans A' : « La même chose beaucoup, pas plus, pas moins... » Lorsque l'enfant a versé : « Si tu bois ce sirop (A) et moi (ou ton camarade) celui-ci (A'), est-ce que nous avons bien la même chose à boire ? »

Déroulement de l'épreuve :

Premier transvasement : On verse l'eau de A' en E. « Est-ce que maintenant nous avons la même chose de sirop ou est-ce que l'un a plus que l'autre... ou est-ce que l'un a beaucoup et l'autre peu... qui ? ... Si nous buvions... » On essaie d'obtenir une explication : « Comment sais-tu ? ... Comment devines-tu ? ... Pourrais-tu me montrer ? »

Contre-argumentation :

— En cas de réponse correcte, l'exp. attire l'attention de l'enfant sur la différence de niveau des liquides dans les deux verres : « Mais ici (E), ça monte plus... ne crois-tu pas que ça fait plus à boire là (E) », ou « Un autre enfant m'a dit qu'ici (E) il y a plus à boire qu'ici (A) parce que c'est plus grand (E)... crois-tu qu'il avait raison ou pas ? »

— En cas de réponse de non-conservation, l'exp. rappelle à l'enfant les quantités égales initiales : « Te rappelles-tu comment on avait mis le sirop dans les deux verres (A et A') ? », ou fait porter l'attention de l'enfant sur la dimension que celui-ci néglige : « Mais là (E) c'est étroit tandis que l'autre (A) est plus large, alors peut-être cela fait-il plus de sirop ici (A) ? »

L'exp. demande à nouveau des explications et justifications à l'enfant. Avant de reverser le sirop dans le verre A', on demande à l'enfant : « Si je remets le sirop dans ce verre (A'), est-ce qu'il y aura la même chose à boire que dans l'autre (A) ou pas ? » Si l'enfant ne résout pas correctement ce problème du « retour empirique », on effectue le retour et on fait constater l'égalité des quantités.

On reverse l'eau de E en A' et on pose les mêmes questions que pendant la présentation ; si nécessaire, on égalise à nouveau les quantités d'eau en A et A'.

Deuxième transvasement : On verse l'eau de A' en L et on procède comme lors du premier transvasement, en terminant par le problème du « retour empirique ».

Troisième transvasement : On verse l'eau de A' en P_1, P_2, P_3, P_4 et l'on procède comme pour les autres transvasements en insistant bien sur la comparaison entre les quatre petits verres d'une part, et le verre A d'autre part.

Les contre-arguments portent sur le nombre ou la dimension des petits verres.

N.B. — Les différents transvasements sont effectués tantôt par l'expérimentateur, tantôt par l'enfant.

L'étude décrite de la conservation des quantités de liquides vise donc clairement à atteindre, mieux à révéler la présence de la structure. L'objet, constitué par la mise en scène matérielle, a ici essentiellement un rôle de révélateur de la structure, de l'activité "interne" du sujet épistémique.

L'ouvrage "apprentissage et structures de la connaissance" (Inhelder, Sinclair et Bovet 1974) est à situer dans le prolongement des travaux piagétiens cités. Piaget lui-même rappelle dans la préface de l'ouvrage : "l'un des deux[1] buts essentiels des travaux décrits dans ce volume était de compléter nos informations sur le développement lui-même des fonctions cognitives en cherchant à atteindre les mécanismes formateurs assurant le passage d'un niveau au suivant, sur lesquels nous étions assurément bien trop peu renseignés..."

La genèse des notions de conservation est donc réanalysée par Inhelder, Sinclair et Bovet dans le cadre de procédures d'apprentissage, en réitérant la position épistémologique du maître genevois Ainsi, elles affirment :

> "Du point de vue interactionniste, la connaissance est à considérer comme une relation d'interdépendance entre le sujet connaissant et l'objet à connaître et non pas comme la juxtaposition de deux entités dissociables".

Les auteurs ajoutent immédiatement après :

> "On peut se demander s'il est possible de concevoir une théorie de l'apprentissage en partant d'une perspective génétique et épistémologique qui souligne sans cesse l'activité constructrice du sujet et semble négliger l'apport de l'objet dans la formation des connaissances...".

Voilà que la démarche d'apprentissage semble redonner à l'objet son "épaisseur", il "existe" autrement que comme révélateur de structures. Mais attention, n'oublions pas que dans ces études d'apprentissage "(...) les procédures visent essentiellement la constitution de la forme[1] de la connaissance et insistent donc sur l'aspect abstraction réfléchissante[2] ; par cela elles représentent des "exercices opératoires" Mais elles concernent toujours l'acquisition de notions particulières dont le contenu joue dans chaque expérience un rôle bien spécifique". (Inhelder et al., op.cit. p. 19).

1. Le deuxième but se rapportant aux questions d'apprentissage, en réponse à l'école de Hull qui perçoit l'apprentissage comme étant la seule source du développement (conception behavioriste de l'apprentissage).

Il nous semble donc clair que la notion de conservation de la quantité de liquide n'est pas considérée par ces études d'apprentissage en tant que "contenu d'enseignement". Ces travaux s'inscrivent dans une épistémologie constructiviste sujet-objet et visent à saisir la dynamique du développement. Les auteurs sont clairs :

> "Nos recherches antérieures avaient déjà contribué à préciser une conception des stades, définis par l'ordre constant de leur succession et par la hiérarchie des structures sous-jacentes qui obéiraient à un mode intégratif d'évolution. C'est de mode responsable de la création de conduites nouvelles que nous entendons étudier dans cet ouvrage, notamment par la méthode d'apprentissage, qui est une approche parmi d'autres[3]..." (Inhelder et al. op.cit. p.20,21).

L'apprentissage de la notion de conservation de quantités de liquides a été effectué en utilisant le dispositif suivant :

> - ***Expérience de l'écoulement des liquides***
>
> **Dans cette première expérience (voir fig. 2), la rencontre du sujet avec les observables est sollicitée de différentes manières dont voici les deux caractéristiques fondamentales. D'une part, au lieu d'assister en spectateur au déroulement de l'expérience de transvasement, l'enfant est appelé à agir lui-même pour produire des quantités équivalentes ou non équivalentes. Il est ainsi amené à faire des prédictions et à**

1. C'est nous qui soulignons.

2. L'abstraction réfléchissante -contrairement à l'abstraction empirique qui tire ses rpopriétés de l'objet- extrait ses informations de la coordination des actions du sujet sur l'objet. "Ni ces actions ni cette coordination n'ont leur origine dans l'objet, qui joue seulement le rôle d'un support". (Souligné par nous). (Inhelder et al. op.cit., p.19).

3. Souligné par nous.

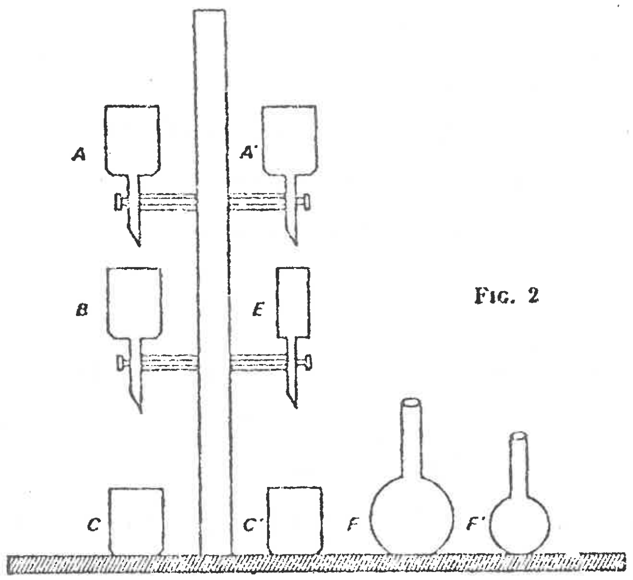


FIG. 2

confronter celles-ci avec les résultats de ses propres interventions. Il est clair que la conservation des quantités, qui précède comme on le sait la compréhension de la mesure, ne peut être ni confirmée ni infirmée par l'observation directe. Nous supposons toutefois que la suite des actions anticipatrices et leur correction concernant les relations entre les niveaux et quantités de liquides mobiliseront tôt ou tard un processus inférentiel de mises en relation et favoriseront un enchaînement de corrections rétroactives et proactives. Selon notre perspective, l'accent n'est pas à mettre sur le constat en tant qu'agent renforçateur, mais sur le processus inférentiel en jeu.

D'autre part, et toujours en nous inspirant des particularités inhérentes à la pensée préconservatoire, nous cherchons à favoriser une décentration des fixations exclusives sur la comparaison des résultats statiques des transvasements, c'est-à-dire la hauteur des niveaux. Nous accentuons la perception de la continuité du vidage et du remplissage correspondants des bocaux dans le système quasi fermé (1) d'écoulement des liquides de trois couples de bocaux superposés. L'occasion est ainsi offerte de saisir les aspects cinétique (élévation du niveau plus ou moins rapide selon les diamètres des bocaux) et causal d'un processus physique continu dans lequel l'état final est égal au point de départ. Comprendre que les différents états d'une transformation physique constituent des moments d'un processus mentalement réversible ne relève évidemment pas de la lecture de l'expérience ; mais, dans certaines conditions psychologiques que notre étude devra préciser, cette compréhension pourrait être facilitée grâce aux procédures expérimentales envisagées.

(Inhelder et al. op.cit. p.64-65).

La procédure se déroule en 4 étapes, au cours des quelles le sujet se familiarise avec "les manipulations de la machine", fait des prévisions et constatations quant à la quantité de liquide écoulé. Les sujets sont préalablement sélectionnés au moyen de deux épreuves de conservation (liquides et matière). Ces épreuves vont aussi servir de post-test à la suite des séances d'apprentissage. La sélection au départ permet aux expérimentateurs de regrouper les sujets en différents groupes hiérarchiques, selon les arguments proposés par les enfants :

Sélection des sujets

Nous avons sélectionné 34 sujets de 5;1 à 7;0 ans au moyen de deux épreuves de conservation des quantités physiques (transvasement de liquides et modification de la forme de boules de plasticine, voir Annexe). Les mêmes épreuves ont servi de post-tests, le premier présenté à la fin de l'apprentissage, le second trois semaines plus tard.

Un premier groupe (« type I NC »), composé de 15 sujets, raisonne d'une manière franchement préconservatoire, sans manifester à aucun moment une hésitation en faveur d'un jugement de conservation. Selon les différents modes de leur argumentation, il a été possible de hiérarchiser ces sujets. Aux degrés inférieurs se situent ceux qui ignorent même la renversabilité (« retour empirique ») et ne sont centrés que sur un seul indice, soit une des dimensions des configurations, soit l'action de modification. Aux degrés plus avancés, on trouve des arguments rendant compte de la renversabilité et de la covariation des dimensions. Notons pourtant qu'au moment où nous avons entrepris cette première recherche d'apprentissage, nous ne possédions pas encore suffisamment de données sur le statut des coordinations partielles que Piaget a caractérisées depuis lors par des systèmes de dépendance fonctionnelle constituant une sorte de semi-logique. Les degrés de formation de tels systèmes nous permettent aujourd'hui, non seulement de mieux hiérarchiser les conduites préconservatoires, mais encore de mieux comprendre les possibilités et difficultés de l'apprentissage cognitif.

Un deuxième groupe, composé de 19 sujets, est caractérisé par des conduites intermédiaires entre la non-conservation et la conservation. A l'intérieur de ce groupe, il a été possible de distinguer 3 niveaux de développement. Le premier (« type II N-F »), composé de 6 sujets, comprend des conduites de non-conservation dans une des épreuves et des conduites de fluctuation entre non-conservation et conservation dans l'autre. Le deuxième (« type III F-F »), composé de 9 sujets, comprend des conduites de fluctuation dans les deux épreuves. Le troisième sous-groupe (« type IV F-C »), composé de 4 sujets, est caractérisé par l'affirmation de la conservation de la quantité dans l'épreuve de la boule de plasticine et par des raisonnements fluctuants dans celle des transvasements de liquides.

> Nous avons tenu à vérifier sur un groupe contrôle de 8 enfants que tous les sujets qui possédaient les notions de conservation de quantité physique résolvaient d'emblée correctement tous les problèmes de la procédure d'apprentissage. En outre, nous avons choisi un groupe témoin de 8 enfants, tous de niveau intermédiaire et qui, en fait, n'ont guère fait de notables progrès.

(Inhelder et al., op.cit. p.70-71).

Les résultats que les auteurs dégagent de cette expérience sont -dans les grandes lignes- les suivants :

> "(...) la sensibilité à la contradiction entre schèmes et observables perçus ou entre schèmes eux-mêmes est fonction de processus inférentiels qui eux-mêmes sont fonction des niveaux de compétence du sujet..."
> (op.cit. p.82 note).

Ainsi, les sujets franchement non-conservatoires au départ ne sont "pas encore en état de profiter de telles sollicitations expérimentales" (ibid. p.81).

Les mécanismes inférentiels semblent ainsi profiter qu'aux sujets sélectionnés au pré-test comme étant de niveau intermédaire.

La méthode utilisée dans les procédures d'apprentissage de l'école piagétienne est la méthode clinique ; "plus significativement appelée méthode d'exploration critique" (Inhelder et al., op.cit. p. 35).

Voici ce que les auteurs appellent les "deux traits majeurs qui nous semblent distinguer cette méthode des procédés expérimentaux usuels" :

> Premièrement, dans la mesure où la méthode est destinée à défricher un domaine nouveau, ses procédés se laissent orienter par les conduites originales imprévues et souvent imprévisibles de la pensée enfantine. Ce n'est que lorsqu'on se croit en possession d'un éventail aussi complet que possible de réactions originales face à un problème particulier que la méthode d'interrogation peut prendre un caractère plus systématique.
>
> Deuxièmement, un autre élément fondamental de notre méthode d'exploration critique consiste en ce que l'expérimentateur fait sans cesse des hypothèses sur les diverses significations cognitives des conduites observées et les vérifie sur le vif. En effet, et contrairement aux méthodes planifiées avec des questions standardisées, il nous a paru plus judicieux et mieux approprié à notre problématique d'analyser d'emblée des processus de pensée plutôt que de procéder à des interprétations après coup et d'imaginer en plusieurs étapes des expériences de contrôle. Cette analyse peut se faire aussi bien, et même conjointement, par des variations de situations expérimentales que par des dialogues entre l'enfant et l'expérimentateur, mettant l'accent sur les aspects critiques et révélateurs du problème posé.
>
> (Inhelder et al., op.cit., p.36).

Un peu plus loin, en parlant des premières notions de conservation des quantités les auteurs affirment "(...) il s'agit de jugements dont le critère de vérité est leur cohérence[1]. L'élaboration de ces notions résulte ainsi à la fois d'une relation entre le sujet et les observables du monde physique et d'une coordination qui, au niveau des enfants de 4 à 9 ans, est grandement aidée par la confrontation avec les jugements d'autrui, en l'occurrence ceux qui sont formulés par l'interlocuteur[2]". (Ibid.p.38).

Pourtant, du point de vue interactionniste, Inhelder Sinclair et Bovet considèrent la connaissance comme étant la résultante d'une relation d'interdépendance entre le sujet et l'objet. D'éventuels autres sujets connaissants peuvent, tout au plus, jouer un rôle d'aide, constituer un élément "en plus" pouvant faciliter la tâche du sujet.

En psychologie sociale, les études dans le domaine du développement cognitif, prennent en compte l'interactionnisme entre

1. *Contrairement, selon Inhelder et coll., aux notions de conservation de poids et de volume, où "le sujet a la possibilité de confronter ses prévisions avec la lecture des résultats expérimentaux, (...)" (op.cit. p.38).*

2. *Souligné par nous.*

sujet et objet en introduisant une troisième dimension humaine : il s'agit donc d'opérer un passage "d'une psychologie bipolaire (ego-objet) à une psychologie tripolaire (ego-aller-objet)". (Hoscovici et Ricateau 1972, p. 141 cités par Doise et Mugny 1981 p. 172).

Selon Doise et Mugny "la relation à l'objet ne peut être que médiatisée par la relation du sujet à d'autres individus" (1981, p.172) ; nous verrons également que la relation à autrui est médiatisée par l'objet et par les différentes mises en scènes de l'environnement physique que l'adulte (l'expérimentateur) organise pour entier en relation avec l'enfant et afin d'étudier comment le sujet s'approprie (ou ne s'approprie pas) l'objet.

La relation, l'interaction avec autrui prend, du coup, une autre dimension : il ne s'agit plus d'une perspective théorique qui considère le troisième pôle (aller) comme élément pouvant faciliter la rencontre sujet-objet : la théorie psychosociologique du développement cognitif attribue à l'interaction ego-aller le rôle moteur du développement.

L'épreuve de transvasement des liquides transformée en tâche de partage de sirop.

Dans un partage la nature même de la tâche est modifiée ; l'interaction sociale (entre adulte et enfant ou entre enfants) est suscitée par la situation elle-même et non seulement par la consigne.

La recherche que nous allons vous présenter sera considérée surtout du point de vue du fonctionnement, mieux, des formes de fonctionnement de la triade expérimentateur-sujet-objet dans le cadre d'une démarche qui articule une approche clinique et expérimentale.

Avant de reconstruire avec vous les mises en scènes qui ont servi de support à nos situations ego-aller-objet, il nous paraît nécessaire de resituer brièvement la méthode utilisée par rapport à la méthode "d'observation critique" décrite précédemment, et de mieux spécifier ce que nous entendons par "articulation" d'une approche clinique et expérimentale

Une double approche : clinique et expérimentale

> "(...) une méthode n'est pas bonne ou mauvaise en soi. Elle ne peut être jugée qu'en fonction des problèmes qu'elle est appelée à résoudre et qui, à leur tour, sont orientés par des perspectives épistémologiques plus ou moins explicites..."
>
> (Inhelder et al. op.cit., p.35)

La méthode clinique piagétienne consiste en une conversation-interrogatoire entre l'expérimentateur et l'enfant où l'adulte tente suivre le raisonnement de l'enfant. Ainsi, au cours de sa formation professionnelle le futur spychologue apprend à saisir "sur le vif" et à "faire des hypothèses sur les diverses significations cognitives des conduites observées" (Inhelder et al. op.cit p.36). Ces hypothèses interprétatives sont donc vérifiées au cours même de l'entretien. L'expérimentateur averti sait alors enchaîner les questions en fonction des réponses ; il sait emprunter le langage enfantin et proposer des contre-argumentation ad hoc.

Cette méthode, efficace pour rendre compte de l'élaboration de connaissances dans la relation sujet-objet, nécessite d'être repuisée pour "supporter" l'intégration du pôle "expérimentateur". Ceci signifie que les "hypothèses interprétatives" émises par l'expérimentateur doivent tenir compte non seulement d'inférences à partir de l'observation de l'enfant "manipulant" l'objet, mais aussi de la signification que l'enfant attribue à la position sociale de l'adulte et à ses questionnements.

La signification des actes du sujet sera alors cherchée à la fois dans l'interaction sujet-expérimentateur (interaction médiatisées par l'objet) et dans l'interaction sujet-objet (médiatisée par l'adulte expérimentateur).

La méthode clinique telle que nous sommes en train de la décrire devrait alors pouvoir rendre compte de la dialectique qui s'établit dans la situation tripolaire : ego-aller-objet. Nous nous apercevons alors que l'enfant commence à construire une première forme de connaissance relative à l'objet, dès la rencontre avec l'expérimentateur. De ce point de vue, toute la phase de prise de contact avec l'enfant où l'expérimentateur essaye de "mettre à l'aise le sujet" en lui posant toute sorte de questions "informelles" ("Comment tu t'appelles ?" "As-tu des frères et soeurs ?" Qu'est-ce que tu étais en train de faire en classe ?" ou "Qu'est-ce que tu aimes faire à l'école ?" etc...) se termine par un "très réconfortant" : "Bon, maintenant nous allons faire un jeu[1] ensemble".

Cette phase de l'entretien, cette "mise en condition" n'est-elle pas habituellement mise entre parenthèse, pour ne pas dire évacuée de l'analyse ?

Dès le début d'un entretien à propos d'une notion opératoire, le sujet va devoir se situer socialement et comprendre ce qui est attendu de lui.

Dans le cas de l'épreuve de conservation des quantités de liquides, par exemple, l'enfant devra ainsi comprendre qu'une solution doit être trouvée sans tenir compte des rapports sociaux en jeu.

En d'autres termes, pour atteindre le stade opératoire dans ses réponses à cette épreuve, le sujet devra comprendre :

- Que les partenaires en présence doivent être considérés comme étant formellement égaux.
- Que l'aboutissement de la conduite de transvasement est légitime dan le cadre de la consigne.
- Que ce sont ces propriétés formelles du sirop relatives à la quantité qui sont l'objet de l'entretien.
- Et que suite à ce transvasement les illusions perceptives doivent être perçues comme telles et rationalisées de façon à démontrer l'invariance des quantités en présence.

La méthode clinique devrait nous permettre de saisir les meta-contrats soujacents à toute communication dans les entretiens. A ce propos, le concept d'intersubjectivité et surtout l'architecture de l'intersujectivité décrite par R. ROMMETVEIT (1979) nous paraît précieuse pour saisir ce qui "se joue" à la fois du point de vue cognitif et social,

1. *Nous attirons votre attention sur l'idée de jeu véhiculée par ce genre de consigne : tentative, peut-être, de dédramatiser la situation, mais aussi création d'une représentation de la tâche comme étant "récréative" et pouvant être interprétée librement par l'enfant. Drôle de jeu en réalité : les règles sont strictes et l'expérimentateur n'est pas prêt à "jouer" autrement que prévu... même si l'enfant ne s'amuse pas spécialement a expliquer ce qu'il fait et le pourquoi de ses gestes !*

entre les partenaires d'une relation qui se développe momentanément autour et à propos d'une épreuve opératoire piagétienne. Nous développerons ultérieurement cette idée au cours de l'exposé du séminaire.

Il nous reste maintenant à préciser l'apport de la dimension expérimentale.
Dans la perspective tracée par la méthode d'entretien décrite, la prise en compte de différentes situations matérielles et relationnelles s'avère très utile : la différenciation dans le dispositif matériel et dans la présentation de la tâche implique -nous le verrons à propos de notre expérience- que les partenaires du partage se situent d'emblée dans des positions sociales et cognitives différentes et spécifiques.

Dans cette optique les méthodes clinique et expérimentale se complètent et s'enrichissent mutuellement.

Ceci est vrai, en ce qui nous concerne, étant donné la spécificité de l'objet d'étude. Avant de conclure cette partie introductive au séminaire, il nous semble nécessaire de rappeler encore un élément qui distingue notre approche expérimentale[1] des approches classiques en apprentissage : la terminologie d'usage appelle les différentes phases expérimentales : pré-test, situation d'apprentissage ou test et post-test.

Nous avons nous-mêmes utilisé ces termes, mais au fur et à mesure de l'avancement de nos travaux, nous avons opéré un glissement de plus en plus important dans l'interprétation des données. Ce "glissement" s'est produit dans le sens de la prise en compte de l'ensemble des moments de l'expérience comme constitutifs d'une micro-histoire expérimentale.

Nous préférons maintenant décrire le processus en termes de suite temporelle où le pré-test est considéré comme le temps 1, la situation dite d'apprentissage : temps 2, et le post-test : temps 3.

Le changement d'appellation n'est donc pas formel, il est, au contraire, lourd de conséquences quant aux implications théoriques

1. *La recherche que nous allons présenter et d'autres plus récentes, ont d'ailleurs grandement participé à la réflexion méthodologique que nous vous livrons ici.*

qu'il comporte.

La première conséquence étant le refus de considérer le moment dit d'apprentissage comme étant le moment fort par excellence, où tout ce qui peut être élaboré par l'enfant est appris dans cette phase de l'expérience.

Dans l'exposé nous mettrons ainsi l'accent sur le temps 1 de notre expérience : ne s'agit-il pas de la séance prévue habituellement pourt sélectionner les sujets, séance de diagnostic au cours de laquelle l'enfant n'est pas sensé apprendre ?

REFERENCES.

BOURDIEU P. : Questions de sociologie. Ed. de Minuit, 1981.

DOISE W. et MUGNY G. : Le développement social de l'intelligence Interéditions, Paris, 1981.

MOSCOVICIS et RICATEAU P. Conformité, minorité et influence sociale. In, S. Moscovici. Introduction à la psychologie sociale, Paris, Larousse, 1972, T1.

INHELDER B.SINCLAIR H. BOVET M. : Apprentissage et structures de la Connaissance. PUF 1974.

PIAGET J. : Problèmes de psychologie génétique. Médiations, Denoël/Gonthier, 1972.

PIAGET J. : L'épistémologie génétique. PUF. Que sais-je ? III édition 1979.

PIAGET J. et SZEMINSKA A. : La genèse du nombre chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, 1941, 3è édition 1967.

ROMMETVEIT R. : Struttura del messaggio, Armando, Ed. 1979. Titre original : On message structure : a framework for the study of language and communication. Wiley et Sons, Ltd. New-York, London 1974.

TONUCCI F. : Avec des yeux d'enfant, Delta Editions coll. "educa" 1982. Edition originale : Con gli occhi del bambino. Fabbri, Milano, 1981.

(1979) Hommage à Piaget

(TONUCCI, 1982)

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982. ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS. OLIVET.

D. COQUIN - VIENNOT

Séminaire : Samedi 10 juillet 1982.
14h30 - 16h30.

FICHE DE PRESENTATION

Problématique et recueil de données

Thème : Hiérarchie de complexité et ordre d'acquisition.

Contenu mathématique :

1) Calcul de la valeur numérique d'une expression algébrique (3è, 2nde)
2) Réunion de deux ensembles (6è, 5è)
3) Les nombres relatifs : Z (6è, 5è, 4è, 3è).

1. Origine de la recherche.

GAGNE (1976) : L'apprentissage d'une nouvelle habileté intellectuelle consiste essentiellement à mettre en place une combinaison d'habiletés plus simples déjà apprises... Si l'individu a acquis ces dernières habiletés, l'acquisition ou la nouvelle habileté consiste simplement à les ordonner en une séquence appropriée.

TOURNEUR (1980), *d'HAINAUT* (1975) : On a admis que A est nécessaire à l'apprentissage de B quand l'activité A est une partie de l'activité B. Cette hiérarchisation est strictement conceptuelle et logique et ne correspond pas nécessairement à l'ordre optimal des opérations à apprendre pour accéder à la notion de nombre.

Ordre logique ou non, ce principe de décomposition d'une "notion" en "notions subordonnées" et organisées hiérarchiquement est utilisé pour les apprentissages (de type programmé surtout et implicitement ailleurs).

Fonctionne-t-il ?
Fonctionne-t-il dans toutes les situations ?

2. Situation locale.

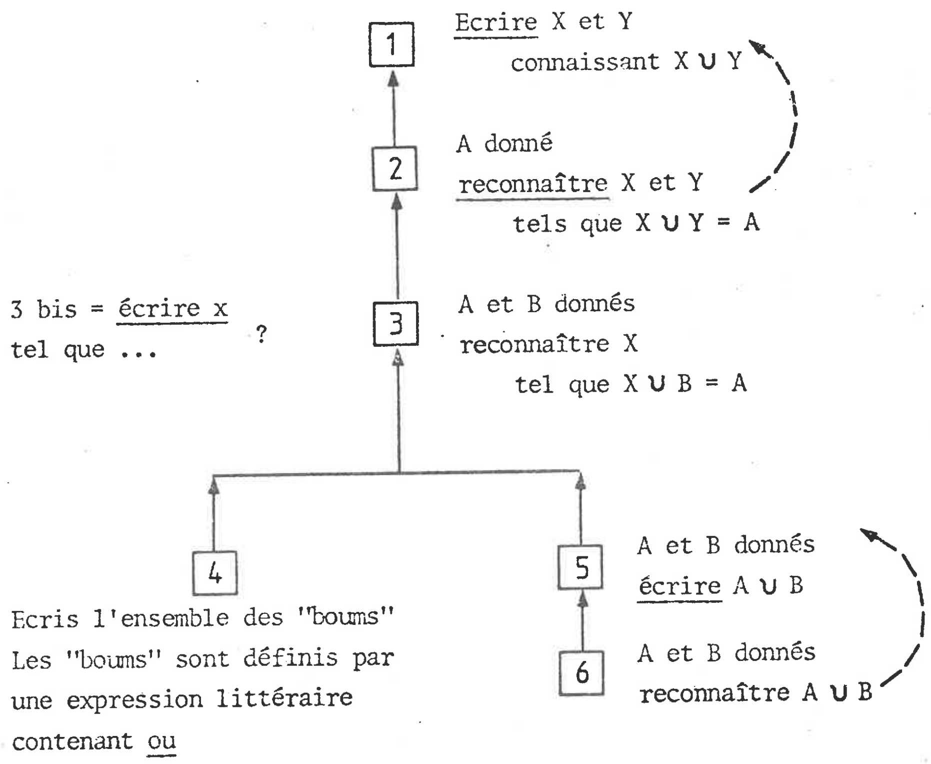
- De type algorithmique : cf. organigramme "calcul d'une expression algébrique"
- Moins algorithmique : cf. organigramme "réunion d'ensembles".

3. Situation générale.

"Acquisition de Z de la 6ème à la 3ème".
Ici, le problème ne se pose plus dans les mêmes termes. On ne parle plus d'ordre d'acquisiton, mais de niveaux d'acquisition et d'obstacles à franchir pour passer d'un niveau à l'autre.

5. Les résultats seront simplement évoqués ou repris dans la discussion si vous le désirez. Je présenterai plutôt les moyens et les choix du matériel pour cette recherche (cf. Balacheff).

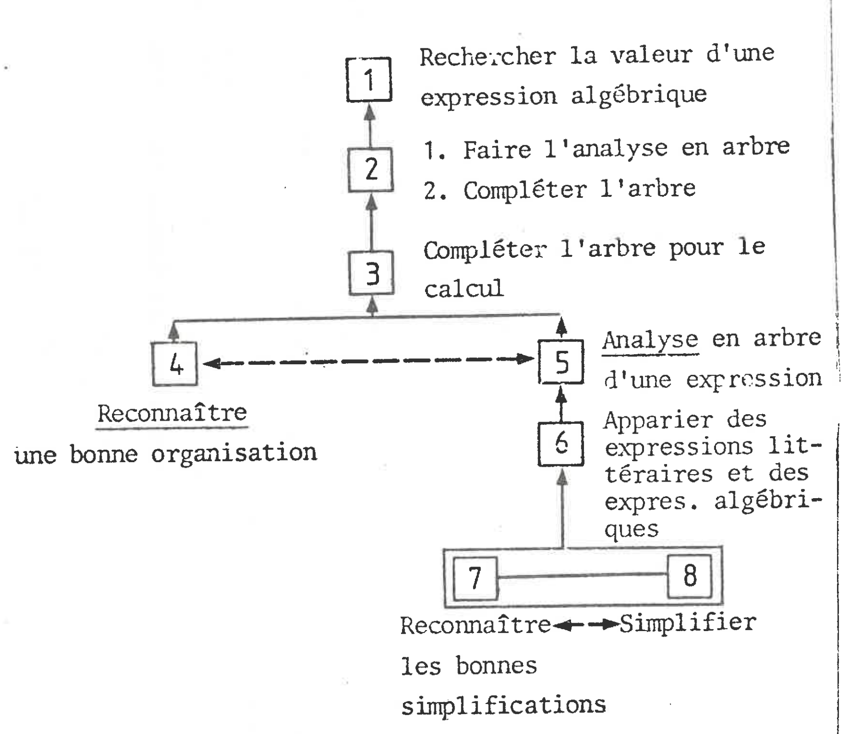
ORGANIGRAMME DES OBJECTIFS



Objectif final 1 : connaissant un ensemble A, rechercher deux ensembles X et Y tels que : X ∪ Y = 1

Réunion d'ensembles. Niveaux 5e-6e

ORGANIGRAMME DES OBJECTIFS



Objectif final 1 : rechercher la valeur numérique d'une expression contenant des paramètres pour des valeurs données de ces paramètres.

Calcul dans Z. Niveaux 5e-2e

D laquin Séminaire samedi 10 juillet

SOM 1 — 1. *Calcule : S = 2 - 2 + 0 - 1 - 3 + 5*

RANG — 2. *Classe dans l'ordre croissant (en utilisant le signe <) :*
- 7, 5, - 2, 6

ORD 1 — 3. *x et y sont deux entiers relatifs tels que x ⩾ y.*
Ecris la relation d'ordre entre x - 2 et y - 3

ORD 2 — 4. *x et y sont deux entiers relatifs tels que x ⩾ y*
Ecris la relation d'ordre entre (- 3)x et (-3)y.

SOM 2 — 5. *Calcule : S =*
S = - 12 + 14 - 15 + 13 - 11 + 11 - 13 + 12 - 15 + 12 - 11 + 16

EQUA — 6. *Résoudre l'équation : 2 x - 15 = x + 30*

VALA — 7. *Si x ⩾ + 2, comment peux-tu écrire |x - (+ 2)| sans utiliser les barres ?*

RELA — 8. *Si j'ajoute un entier relatif à un nombre a, est-ce que le résultat est toujours plus grand que a ?*
Oui ☐ *Explique :*
Non ☐
Je ne sais pas ☐

INGE — 9. *Pour être admis dans une école d'ingénieur, un étudiant passe six épreuves. Chaque épreuve est notée sur 120. Pour être reçu, il faut une moyenne générale d'au moins 60 sur 120.*
Voici les résultats de l'étudiant A : Algèbre : 63 ; Géométrie : 57 ; Physique : 60 ; Chimie : 55 ; Sciences Naturelles : 59 ; Français : 64.
Cet étudiant sera-t-il reçu ?
Réponse et justification de la réponse.

SPOR — 10. *Un sportif participe à une compétition. Pour gagner la médaille générale, il doit obtenir une certaine moyenne sur l'ensemble des épreuves :*
au lancer de poids, il gagne deux points ;
au saut en hauteur, il perd deux points ;
au saut en longueur, il ne gagne rien ;
au 100 mètres, il perd un point ;
au 1 000 mètres, il perd trois points ;
et au lancer de javelot, il gagne cinq points.
Ce sportif gagnera-t-il la médaille générale ?
Réponse et justification de la réponse.

TRAI — 11. *Exercice du train :*

DUBO — 12. *Un examen est composé de 6 épreuves. Chaque épreuve est notée sur 20. Pour être reçu, il faut une moyenne générale d'au moins 10 sur 20.*
Voici les résultats de l'élève Dubois :
Français : 12 ; Anglais : 8 ; Maths : 10 ; Physique 11 ; Histoire : 6 ; Sciences Naturelles : 12.
Cet élève sera-t-il reçu ?
Réponse et justification de la réponse.

SUCE — 13. *Pierre a un peu d'argent dans son porte monnaie. S'il achète une sucette, il lui restera 30 centimes. S'il veut en acheter deux, il lui manque 15 centimes. Combien coûte une sucette ?*
Réponse et justification de la réponse.

CERC

N. BALACHEFF

Laboratoire IMAG, Grenoble.

Séminaire : Vendredi 9 juillet 1982

14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Situations expérimentales d'interaction pour l'étude des comportements de preuve.

L'objet de nos travaux est l'étude du rôle des comportements de preuve dans la résolution de problème, et des rapports qu'établissent les élèves entre : expliquer, prouver, démontrer, lors de la production d'une solution.

Pour cela nous nous appuyons sur une approche expérimentale dont nous présenterons, au cours de ce séminaire, les caractéristiques et le cadre problématique.

Le cadre problématique.

L'examen de la preuve en mathématique met en évidence une pluralité d'aspects parmi lesquels nous relevons en particulier :

- Le caractère cognitif : les preuves sont constitutives de la construction des connaissances mathématiques et par là de leur signification.
- La dépendance de situations : on élabore des preuves pour réduire une incertitude, pour convaincre, pour se convaincre.
- L'objet social : les preuves, en particulier les démonstrations, sont dans la communauté mathématique des outils privilégiés de la communication et de validation.

La nature, et l'existence même des processus de production de preuve que nous voulons étudier dépendront de façon essentielle des caractéristiques cognitives, mais aussi situationnelles et sociales des dispositifs expérimentaux que nous utiliserons.

Pour mettre en évidence ces caractéristiques nous nous appuyons en particulier sur la théorie des situations didactiques et quelques apports des travaux sur la construction sociale de l'intelligence.

REFERENCES.

G. BROUSSEAU (1978) : Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire. Cahier n°18, IREM de Bordeaux.

G. BROUSSEAU (1982) : Les problèmes et l'enseignement des mathématiques : le point de vue de la didactique (à paraître).

DOISE W. et MUGNY G. (1981) : Le développement social de l'intelligence. Inter-Edition, Paris.

PERRET-CLERMONT A.N. (1979) : La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale. Peter Lang, Berne.

L'analyse des corpus expérimentaux obtenus renvoie d'une part aux théories citées plus haut et d'autre part à des travaux portant sur les rapports entre production de preuves et systèmes de connaissance. En particulier :

LAKATOS I. (1976) : Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery. Cambridge U.Press, Londres 1977.

Les dispositifs expérimentaux.

Les dispositifs expérimentaux utilisés sont du type "situation d'interaction et de communication" dans lesquels des élèves ont pour tâche commune la résolution d'un problème.

Nous présenterons et examinerons ces dispositifs en détail, en dégageant en particulier :

- la nature du contrat expérimental,
- les contraintes que nous avons identifiées
- quelques variables de la situation.

De tels moyens expérimentaux ont été utilisés pour d'autres travaux, en voici quelques références :

BRUN J. (1981) : La représentation symbolique d'opérations additives en situation d'interaction et de communication. Actes du colloque PME, Labo IMAG, Grenoble.

GUILLERAULT M. et LABORDE C. (1980) : Une activité de communication en géométrie. Séminaire de Didactique et Pédagogie des Mathématiques. Année 1980-81, n° 17, Labo. IMAG, Grenoble.

SCHUBAUER-LEONI M.L. et PERRET-CLERMONT A.N. (1980) : Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol.1 n°3. Ce séminaire étant consacré à la présentation de moyens pour une recherche et non à ses résultats (il s'agit de travaux en cours), nous proposons de lui donner la forme d'un court atelier dans lequel après un exposé introductif, d'environ 45 mn, nous convions les participants à discuter sur la base de séquences vidéo de l'adéquation et de l'efficacité des dispositifs utilisés.

M. RATSIMBA - RAJOHN Harrisson

Séminaire : Lundi 5 juillet 1982.
17h - 19h

FICHE DE PRESENTATION.

Construction de Corpus à propos de l'étude didactique de deux méthodes de mesures rationnelles.

Le cadre de cette étude didactique se place dans la problématique suivante : le fait de réduire l'apprentissage d'un algorithme à une acquisition de mécanisme évacue la signification de cet algorithme. Cette évacuation est ainsi génératrice de comportements inefficaces, inadéquats et producteurs d'erreurs, dont les élèves n'ont pas conscience, et que tout enseignant constate dans sa pratique quotidienne.

Afin de pouvoir faire un pas de côté par rapport à cette conception réductrice, puis par rapport à la réduction de l'enseignement à l'enseignement des algorithmes et des conditions de leurs utilisations, nous essayons de développer et d'éprouver l'idée suivante : un processus, où l'élève met d'abord en oeuvre une première méthode, qu'il rejette après par nécessité en la changeant par une autre, est un processus qui permet à l'élève d'avoir accès à la signification de la seconde méthode et d'approprier réellement des connaissances. Dans ce cas, la première méthode jouera le rôle d'une stratégie de base pour la seconde.

A cet effet, nous essayons de caractériser les types de rapports (en particulier les obstacles épistémologiques ou didactiques...) qui peuvent exister entre deux méthodes. Ceci, afin de pouvoir choisir la méthode qui jouera le rôle d'une stratégie de base pour l'autre au cours d'un rpocessus d'enseignement. Cette analyse s'est faite à l'aide des concepts de jeu, de variables de jeu, de stratégies, de variables de stratégies, de représentations de stratégies, de stratégies de base, de modèles d'actions et d'obstacles. L'utilisation de ces concepts a été aussi l'occasion de les préciser.

Pour la présente étude, les deux méthodes que nous avons étudiées sont des méthodes de mesures rationnelles : le fractionnement de l'unité et la commensuration.

Après avoir repéré théoriquement les deux méthodes, nous nous demandons d'abord s'il existe des élèves qui mettent en oeuvre naturellement l'une ou l'autre des deux méthodes. La non-existence de tels élèves élimine la possibilité pour la méthode mise en cause, d'être une stratégie de base efficace.

Secundo, les deux méthodes étant logiquement équivalentes, nous nous posons la question : existe-t-il quelques obstacles entre elles. Si oui, quels types d'obstacles. La connaissance des caractères de ces obstacles nous permettra d'obtenir quelques caractéristiques d'une stratégie de base et en même temps, de déterminer laquelle des deux méthodes pourra jouer le rôle de stratégie de base pour l'autre.

L'objet principal de cette intervention est de parler puis de discuter à propos de la constitution de notre corpus afin d'apporter des réponses à ces questions que nous nous sommes posées.

Ainsi, trois dispositifs ont été constitués :

- des observations d'une séquence d'activités didactiques dans des classes de C.M (élèves 10-11-12 ans). Dans cette séquence, à des élèves ayant appris la commensuration, on veut faire s'approprier le fractionnement de l'unité.
- un questionnaire passé à ces élèves de CM avant et après une séquence observée
- un questionnaire posé à 386 élèves du niveau de 4ème (13-14 ans).

Nous apporterons en particulier des réponses aux questions suivantes :

I) A propos des 3 dispositifs : Pourquoi ces 3 dispositifs ont été nécessaires (mais non suffisants) pour résoudre notre problème ?

II) A propos des observations :

a) quels ont été les objectifs de la séquence d'une part et de l'observation d'autre part ?

b) comment les variables de situation de la séquence d'activités didactiques ont été choisies ?

c) comment étaient observées les réactions des élèves face à ces variables choisies ?

d) quelles ont été les difficultés de l'observation et les précautions prises ?

III) A propos des questionnaires :

a) pourquoi tels types de questionnaires ont été retenus ?

b) pourquoi tel niveau a été choisi et les autres exclus ?

c) comment les items ont été construits ? Sur quelles variables de situation avons-nous travaillé ? Comment ces variables ont été repérées ?

d) quelles ont été les difficultés lors du dépouillement ?

e) pourquoi nous avons choisi tels ou tels types d'analyses statistiques ?

f) quelles ont été les évolutions du processus d'analyse statistique ?

IV) A propos des types de rapports existant entre les deux méthodes :

a) comment avons-nous repéré a priori les obstacles existant entre les deux méthodes ?

b) comment ont été observées leurs manifestations à travers les questionnaires posés aux élèves de 4ème ou de CM_2, et au cours de la séquence d'activité didactiques ?

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

BENZECRI J.P et F.
Analyse des correspondances, exposé élémentaire, pratique de l'analyse de données - DUNOD. 1980.

BESSOT A. et RICHARD F.
Commande des variables d'une situation didactique pour provoquer l'élargissement des procédures en vue d'étudier le rôle du schéma - Thèse collective 3ème cycle, IREM de BORDEAUX, 1979.

BOURBAKI N.
Eléments d'histoire des mathématiques, HERMANN, 1960

BROUSSEAU G.
Etude locale des processus d'acquisitions en situation scolaire, Cahier IREM de BORDEAUX, n° 18, 1978

BROUSSEAU G.
Obstacles épistémologiques et problèmes mathématiques.
Compte rendu de la XXVIIIème rencontre organisée par la CIEAEM : la problématique et l'enseignement des mathématiques, août 1976.

BROUSSEAU G.
Problèmes de didactique des décimaux.
Recherches en didactique des mathématiques II. 1.1981.

BROUSSEAU G.
Prolbèmes de l'enseignement des décimaux.
Recherches en didactique des mathématiques. I 1.1980.

DIGNEAU J.M.
Création d'un code à l'école maternelle, étude d'un saut informationnel, mémoire de DEA, IREM de BORDEAUX, Juin 1980.

GRAS R.
Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques
Thèse d'état - Université de RENNES I, 1979

LERMAN I.C
Etude formelle et statistique de notion de ressemblance,
Institut de recherche en informatique et en systèmes aléatoire (IRISA).
Publication interne n° 107 Décembre 1978

LERMAN I.C, TALLUR B.
Classification des élémentas constitués d'une juxtaposition de tableaux de contingences, IRISA, RENNES I, Publication interne n° 127, janvier 1980.

LERMAN I.C
Programme de classification hiérarchique I, (I) Méthode de la vraisemblance des liens,(II) Méthode de la variance expliquée. IRISA RENNES I, Publication interne n° 148, Juin 1981.

ROSTAM H.
Construction automatique et évaluation d'un graphe d'implication issue de données binaires dans le cadre de la didactique des mathématiques. IRISA, RENNES I, publication interne n° 150, Juin 1981.

RATSIMBA-RAJOHN H.
Etude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques, Thèse de 3ème cycle, IREM de BORDEAUX, Juin 1981.

LERMAN I.C, GRAS R. ROSTAM H.
Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires (1-2). Maths. Sci. Hum. (19 année n° 74 et 75, 1981)

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE
pour l'intervention de RATSIMBA-RAJOHN Harrisson
à l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques
ORLEANS 1982

IREM de BORDEAUX
Méthodes d'analyse quantitative en didactique des mathématiques
- Fascicule 3 : Gestion des données - Programmathèque
- Fascicule 4 : Taxinomies et correspondances
- Fascicule 5 : Test d'hypothèses.

BROUSSEAU G. :
L'observation des activités didactiques.
IREM de BORDEAUX, cahier n° 18, Janvier 1978

BROUSSEAU N et G. :
Le recueil, le traitement et l'interprétation des résultats de l'école Jules Michelet
IREM de BORDEAUX, cahier n° 18, Janvier 1978

RESNICK Laureen

Séminaire : Mercredi 7 juillet 1982
Jeudi 8 juillet 1982

Ce cours était centré sur le développement du concept de nombre chez l'enfant, de la maternelle jusqu'à 8 ou 9 ans. Il résumait les expériences, les résultats et les interprétations de plusieurs chercheurs, en Amérique et ailleurs, sur le comptage, la comparaison des quantités, la solution des problèmes donnés en langage courant, les procédures d'addition et de soustraction inventées par les enfants et la compréhension du système décimal. Ces recherches variées étaient utilisées lors de deux interventions pour atteindre deux buts complémentaires : offrir une théorie des connaissances relatives au nombre qui permettent à l'enfant des performances variées d'une part, et illustrer un point de vue général sur l'étude de la pensée et de l'apprentissage qui est maintenant partagé par la communauté des chercheurs en "cognitive science" d'autre part.

Avant de résumer les principaux thèmes qui étaient traités lors des interventions, il est utile de préciser le bien-fondé de recherches très détaillées sur l'émergence des connaissances mathématiques pour une science de la didactique. Tout d'abord, on est amené par des évidences qui nous sont suggérées par des recherches issues de domaines très variés (y compris la compréhension des textes écrits, la résolution des problèmes scientifiques, les performances techniques...) à admettre que la connaissance humaine est, pour l'essentiel, le résultat d'une construction active de la part du sujet plutôt que d'un enregistrement passif des évènements et des informations externes. Ceci étant admis, l'apprentissage doit être conçu comme un processus de construction mentale qui se déroule dans l'esprit de l'élève et le rôle de l'enseignant est donc de guider et de faciliter ce processus. Autrement dit, c'est l'élève, en fin de compte, qui doit construire ses connaissances mathématiques, et c'est à nous, enseignants, d'adapter nos explications, nos exercices, nos questions et nos réponses au travail intellectuel et au changement cognitif de l'élève.

Dans le meilleur des cas, l'enseignant disposerait à tout moment d'une "théorie" de l'état des connaissances de chaque élève et adapterait ses propres actions à cet état supposé. Même si dans la réalité de la classe on ne peut pas atteindre une adaptation si parfaite, on peut néanmoins essayer de l'approximer en utilisant une théorie bien fondée des connaissances et des processus d'apprentissage typiques chez les enfants d'un certain niveau. C'est en vue d'une telle "théorie de l'élève modal" que pourraient prendre place dans une science de la didactique les recherches décrites dans ce cours.

Plutôt que de résumer trop vite les nombreuses recherches citées à travers deux interventions assez longues, il convient d'esquisser les thèmes principaux qui se dégagent lors d'une étude de ces recherches. D'ailleurs, les détails sont tous disponibles dans des articles (dont quelques uns sont cités ci-dessous). Trois thèmes sont d'une importance centrale :

1) le rôle-clé de certaines structures de connaissance dans l'élaboration d'un concept de nombre ;
2) les liaisons étroites mais spécialisées entre connaissances procédurales et connaissances conceptuelles ;
3) le rôle éventuel de l'analogie dans la pensée mathématique et dans la didactique.

STRUCTURES-CLES DANS LE DEVELOPPEMENT DU CONCEPT DE NOMBRE

Signalons dès maintenant que deux structures de base semblent être impliquées à travers plusieurs étapes dans le développement du concept de nombre. Ce sont : 1) la droite abstraite (soit "mental number line") par laquelle chaque nombre est défini par sa position dans une suite ordonnée ;
2) le schéma partie/tout par lequel chaque nombre peut être défini comme une composition de deux (ou plusieurs) autres nombres.

Il est clair que ces deux aspects concernant le nombre correspondent assez étroitement aux deux aspects — série et classe — dégagés par Piaget. Néanmoins, les nouvelles théories nous permettent de retracer l'élaboration du concept de nombre au cours de l'acquisition progressive du système décimal par l'enfant. Nous montrons dans nos analyses, d'ailleurs basées sur des expériences révélant la pensée des enfants à différents niveaux de compréhension, que la compréhension du système décimal nécessite une double représentation :

1) une représentation des nombres au dessus de 10 en série de longueur infinie,
2) une représentation sous forme de composition des unités, dizaines, centaines, etc..

Cette compréhension des nombres comme compositions de parties qui sont des multiples de dix permet des échanges entre les sous-quantités (les parties) sans changer la quantité totale. Il s'agit donc d'un élargissement de la notion de "conservation" de nombre d'une part, et de l'acquisition des principes qui justifient et donnent du sens aux procédures de calcul basées sur le système décimal d'écriture d'autre part.

LIAISONS ENTRE CONNAISSANCES PROCEDURALES ET CONCEPTUELLES

Il est traditionnel dans les théories de la didactique, d'accorder une place privilégiée soit aux habiletés de calcul soit à la compréhension des principes mathématiques. Mise à part l'idée que l'habileté découlerait "naturellement" d'une compréhension des principes, on a accordé dans le passé relativement peu d'intérêt aux interactions entre les connaissances procédurales et conceptuelles. Par contre, des recherches assez récentes mettent en lumière des relations complexes entre ces deux formes de connaissance mathématique. On peut citer tout d'abord des recherches qui démontrent que beaucoup des difficultés de calcul sont accompagnées d'une incompréhension des principes qui justifient les procédures correctes. Par exemple, dans le cas de la soustraction avec retenue, les procédures erronées régulièrement inventées par les enfants ne respectent pas la contrainte de conservation de la quantité totale du nombre en permettant des échanges de quantités entre les colonnes. Cela conduit naturellement à l'idée qu'il est possible d'aider les enfants à corriger leurs procédures erronées en leur enseignant cette contrainte de conservation. Mais des expériences didactiques nous montrent que lacquisition de cette connaissance conceptuelle ne produit pas chez tous les enfants une procédure de calcul correcte. Quelques uns corrigent leurs erreurs de calcul, d'autres ne le font pas. Il est évident que l'acquisition d'une connaissance conceptuelle ne signifie pas qu'elle sera appliquée à la régulation d'une procédure déjà acquise ; mais nos expériences actuelles ne nous permettent pas de préciser ce qui serait nécessaire pour cette application. D'autre part, certains faits expérimentaux — pas encore suffisament reproduits mais néanmoins importants à citer — suggèrent que "l'analyse réfléchie" de ses propres procédures (même quelquefois erronées) peut entrainer une amélioration chez les enfants dans la compréhension des principes mathématiques qui justifient ces procédures. Par conséquent, il est possible — même si on ne peut pas l'affirmer pour le moment — que nous aurons dans le futur à accorder une place importante aux connaissances procédurales dans le développement de la compréhension de certains concepts mathématiques.

ROLE DE L'ANALOGIE DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Certains faits conduisent à accorder à l'analogie un rôle central dans l'apprentissage des concepts mathématiques. Certains didacticiens ont depuis longtemps accordé un rôle important aux "analogues concrets" dans l'apprentissage des concepts mathématiques. L'exemple le plus cité est celui des "blocs de Dienes" qui modélisent les valeurs des chiffres dans l'écriture décimale et les échanges de quantités dans l'addition et la soustraction avec retenue. Des expériences récentes confirment les intuitions de Dienes et d'autres sur l'importance de cette analogie dans l'apprentissage. Cependant ces expériences suggèrent un rôle plus complexe pour l'analogie qu'on ne l'avait supposé auparavant. Il ne semble pas, comme on l'avait supposé avant les premières expériences, qu'il s'agisse d'un simple "transfert" des concepts des blocs à l'écriture, mais plutôt que l'analogie entre les deux représentations de nombre mène à une compréhension enrichie des blocs et de l'écriture, donc à un enrichissement mutuel des deux représentations. En plus, cet enrichissement conceptuel semble se dérouler à travers un effort de construction des analogies procédurales — c'est-à-dire des procédures dans le domaine des blocs et dans le domaine de l'écriture qui contiennent les mêmes opérations réalisées dans le même ordre.

Ces constatations nous conduisent à conjecturer que le rôle de l'analogie dans l'apprentissage est de provoquer et de soutenir la construction d'une abstraction — c'est-à-dire d'un concept qui peut être illustré par au moins deux cas différents et spécifiques. Si on se limite à un seul cas, on se trouve "piégé" par ce cas, et on ne peut pas différencier les aspects centraux des autres. Quand le sujet dispose de deux cas analogues, il peut les analyser afin d'en tirer une abstraction qui comprendra les aspects centraux du concept. Nous proposons donc que :

1) la compréhension de la mathématique implique la construction des abstractions,

2) les analogies jouent un rôle important dans la construction de ces abstractions.

Les élèves qui apprennent facilement, peut-on imaginer, découvrent eux-mêmes des analogues convenables pour soutenir la formation des abstractions. Pour les autres, l'enseignement peut les aider dans ces constructions en leur offrant des analogues et en les incitant à raisonner dessus.

Articles qui donnent des détails sur les expériences et des résumés plus étendus :

- RESNICK L.B. : Syntax and semantics in learning to subtract . In : T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds) : Addition and subtraction, a developmental perspective, Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Ass. 1982

- RESNICK L.B. : A developmental theory of number understanding. In : H. Ginsburg (ed.) : The development of mathematical thinking. New York : Academic Press, 1983.

- RESNICK L.B. and NECHES R. : Factors affecting individual differences in learning ability. In : R.J. Sternberg (ed.) : Advances in the psychology of human intelligence. Vol. 2. Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates 1983.

- RESNICK L.B. and FORD W.W. : The psychology of mathematics for instruction. Chapter 4 "Analyses of performance on computational tasks" and chapter 8 "Information processing analyses of understanding". Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, 1981.
These chapters provide an introduction to cognitive science research in mathematics, including discussion of the various research methods used and the role of computer simulations as theoretical tools, and basic assumptions about the structure of human memory and the ways in which information is processed.

J. MOSER (Université du Wisconsin)

Cours : Lundi 12 juillet 1982.
Atelier : Lundi 12 juillet.
17h - 19h.

FICHE DE PRESENTATION

Résolution de problèmes additifs et soustractifs par des enfants de 6 à 8 ans.

Ce cours consiste en la présentation d'une étude longitudinale de trois ans effectuée par le "Mathematics Work Group" à l'Université du Wisconsin. Le but de nos travaux est l'étude des procédures d'enfants de l'école élémentaire lorsqu'ils résolvent des problèmes additifs et soustractifs. En considérant ces procédures, on peut obtenir certains aperçus des conceptions initiales d'enfants sur les opérations d'addition et de soustraction. De plus, une étude a permis d'examiner les effets d'un enseignement dispensé en classe dans ce domaine.

Dans ce cours, on considérera d'abord, une analyse détaillée des problèmes additifs et soustractifs du point de vue de leur structure sémantique. Cette analyse est basée sur les travaux de VERGNAUD, NESHER, GREENO et nous-mêmes. Ensuite, on présentera les aspects fondamentaux de cette étude qui comprend une description des sujets, des problèmes proposés et des méthodes utilisées. Enfin, on examinera en profondeur les résultats obtenus, en particulier les procédures utilisées par les enfants. Ce qui présente de l'intérêt, c'est l'emploi du comptage tant direct qu'à rebours.

Tout au long de ce cours, on discutera des implications de cette recherche pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

J. ROGALSKI

Cours : Lundi 5 juillet 1982
10h30-11h45
Jeudi 8 juillet 1982
9h -10h15
Atelier : Jeudi 8 juillet 1982
17h - 19h
Séminaire : Vendredi 16 juillet 1982
14h30-16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Les représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse, domaine de validité, caractères réducteurs et producteurs, conditions de production...

Le travail présenté sous ce titre à l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques se veut une initialisation générale à propos des recherches sur les représentations graphiques, et plus précisément sur les représentations de fonctions réelles. Il vise à couvrir un large champ de problèmes, à pointer des questionnements possibles sur le fonctionnement de cet objet d'enseignement, d'où un aspect taxonomique relativement général bien que non exhaustif.

Les ateliers concernent des recherches effectuées à des niveaux très différents, aussi bien quant à l'objet lui-même que quant aux élèves ou étudiants considérés. Ils illustrent certaines des questions abordées dans le cours: celui de G.Ricco et R. Gras traite d'un problème central pour la mathématisation, à savoir la représentation de données physiques sur la droite numérique; celui de J.Rogalski et A.Robert aborde les représentations graphiques produites par des étudiants de mathématiques et leurs rapports avec les concepts fonctionnels en jeu.

Le dernier atelier pourra être le lieu d'un débat plus général sur les perspectives d'utilisation des "pointages" faits dans le cours.

Le problème général des représentations

Le terme "représentation" est un terme polysémique, qui désigne à la fois les représentations ("mentales") du sujet dont on étudie le fonctionnement cognitif et les représentations symboliques c'est à dire des signifiants.

1.1. les représentations du sujet: ce sont des concepts hypothétiques, destinés à rendre compte d'un ensemble de conduites relevant entre autres du domaine cognitif; on utilise également le terme "modèle" dans une acception plus globale.

1.2. les représentations symboliques se manifestent sous des formes diverses dont font partie tous les langages, les écritures du type algébrique, les graphes, les représentations planes d'objets tridimensionnels, les pictogrammes etc..

1.3. le problème fondamental est celui des rapports entre signifiants et signifiés c'est à dire du sens, de la signification pour le sujet, d'une représentation symbolique qu'il produit ou sur laquelle il travaille (cf G. Vergnaud),

1.4. les phénomènes de synonymie et d'homonymie sont importants dans l'analyse des représentations: plusieurs signifiants peuvent représenter un même signifié (il existe ainsi des représentations différentes de relations ensemblistes dans des ensembles finis: les diagrammes sagittaux, les tableaux cartésiens, les formules..); un même signifiant peut se rapporter à des signifiés et des référents distincts (ainsi la représentation symbolique $y=f(x)$ se réfère le plus souvent à une fonction f, objet de travail, alors que la représentation isomorphe $\rho=f(\theta)$ réfère à une courbe paramétrée en ρ et θ).

Les représentations graphiques

2.1. Nous nous attacherons dans les remarques méthodologiques sur le domaine de validité, les caractères réducteurs et producteurs, à celles des représentations pour lesquelles ce sont des marques spatiales qui ont pour fonction de représenter des relations ou des propriétés. Nous n'aborderons pas les questions posées par d'autres modes de représentations comme celles de théorie des ensembles ($a\in A$, $E=A\times B$, $E=A/\mathcal{R}$, $E=A \oplus B$,..), comme les notations algébriques, l'utilisation des indices (x_1, x_2, x_3), des indices "muets" et

des "..." dans des expressions $(\Sigma(x_i)\ i\in[1 \dots n])$, les notations fonctionnelles, les mutifications de variables ($\lim_{n\to\infty} u_n=a$), les diagrammes commutatifs etc...

Parmi les représentations graphiques nous étudierons plus précisèment celles des fonctions réelles, en liaison avec l'étude du champ conceptuel de l'analyse dans R; toutefois la recherche des caractères réducteurs et producteurs d'une représentation graphique, les questions relatives au domaine de validité et au caractère opératoire des représentations, ne sont pas propres au référent "fonction": elles se posent tout autant aux représentations d'ensembles, de relations, etc..

2.2. La fonction comme mathématisation du réel ou comme objet (déjà) mathématisé? Dans le champ conceptuel des fonctions réelles nous distinguons deux domaines: celui de la mathématisation et celui des objets mathématiques.
Dans le domaine de la mathématisation le schéma de base est le suivant: une quantité physique X (mesurable) varie, une quantité Y (mesurable) varie également et la relation empirique entre les deux mesures X et Y est fonctionnelle. Un exemple est celui où X est le volume, Y est la masse: $Y=mX$ – m étant la masse volumique,pour un corps homogène.
Dans le domaine des référents mathématiques , une fonction réelle est, dans son acception moderne, une application de R dans R; la représentation graphique s'appuie sur l'identification entre "droite géométrique" et ensemble R des réels et sur la réalisation "par un trait" de la droite géométrique sur un support matériel.
Le graphe d'une fonction apparait alors comme une "courbe": la triple perspective possible de la courbe comme ensemble de points du plan, comme trajectoire (avec son "point courant" M dépendant du temps), ou comme classe de trajectoires, pose des problèmes complexes liés à la mathématisation. Un de ces problèmes qui peut constituer un obstacle considérable est celui de l'intervention du temps comme variable physique ou comme variable résultant d'une opération cognitive. (cf le travail de M. Artigues, et l'exposé de A. Robert).

2.3. La nature des nombres par lesquels sont représentées des grandeurs et les modalités de représentation de ces grandeurs sur la droite géométrique "réalisée" sont des questions très importantes pour étudier le domaine de la mathématisation.
La discrétisation des données, le travail sur des classes de valeurs, l'intervention de nombres écrits sous une forme complexe (kilos et grammes, heures et minutes: pour prendre deux exemples qui différents par les rapports ultérieurs avec les nombres décimaux), le caractère relatif ou non des nombres, la continuité du domaine numérique, sont des problèmes qui ont été abordés par Kerslake, Janvier, Vergnaud

et al.
L'atelier conduit par G. Ricco et R. Gras précisera l'étude des modes de représentation de mesures de grandeurs sur la droite géométrique "matérialisée". Les conduites des enfants s'organisent et évoluent avec leur niveau de développement cognitif et scolaire et une méthode d'analyse appropriée permet d'éclairer la complexité des rapports entre les opérations qui visent à une représentation par des points, situés par rapport à une origine et ordonnés, celles dans lesquelles ce sont des segments, emboitables, qui représentent des grandeurs. Les données de base sont celles de la recherche de Vergnaud et al. sur les échelles, concernant des élèves de 9 à 13 ans.

Les representations graphiques de fonctions: problèmes méthodologiques

Nous nous placons dans ce qui suit dans le domaine des objets déjà mathématisés, tout en rappelant que les questions méthodologiques ne se posent pas moins dans le domaine de la mathématisation.

3.1. L'illusion de la transparence, démontrée dans de nombreux cas par Y. Chevallard, fonctionne "depuis toujours" en ce qui concerne les représentations graphiques de fonctions. Tot dans l'enseignement les élèves apprennent à construire des graphes de fonctions, ou plutot des représentations graphiques c'est à dire des tracés effectifs, le plus souvent à partir d'une représentation symbolique y=f(x), dans le cas particulier où f est une fonction algébrique.
Pour l'essentiel, l'enseignement construit un algorithme qui permet de passer de la formule au graphique, par l'intermédiaire d'un troisième objet: le tableau de variation. Si les propriétés des fonctions sont explicitement utilisées pour le passage de la formule au tableau, le passage au graphique demeure largement sous cette illusion de la transparence. Le point central est que le graphique, objet matériel: tracé physique qui s'inscrit dans l'espace réel, limité, du support, et qui s'établit dans le temps réel du geste, est identifié au graphe, objet mathématique.
Or, le graphisme, par ses propriétés matérielles et éventuellement son mode de construction, a un double caractère qu'avec A. Robert nous avons appelé réducteur et producteur.

3.2.Les caractères réducteurs du tracé.

3.2.1. Le point matériel est étendu: l'infiniment petit est donc impossible à représenter, sauf à introduire des opérations spécifiques, codées, qui modifient la

représentation proprement dite. Dans le meme sens les distinctions entre "ouvert" et "fermé" nécessitent des signes particuliers, qui ont une valeur conventionnelle relative. Pour signaler l'opposition entre continu et discontinu, dès que les points de discontinuité ne sont plus isolés, on peut inscrire la représentation dans le temps, en considérant en fait un temps "infiniment lent".
On ne peut pas, non plus, signaler la distinction entre les tracés de fonctions différentiables et les autres sans introduire une opération particulière qui peut être un changement d'echelle, qui fait passer d'un point aux points "infiniment voisins". (cf D. Tall).

Un premier caractère réducteur des représentations graphiques est le fait qu'un tracé est minoré; les opérations complémentaires qui permettent de dépasser ce caractère minoré mettent en oeuvre l'infini, implicitement ou explicitement.

3.2.2. Le papier, comme le tableau, sont bornés: on ne peut donc représenter directement ce qui se passe pour x ou y "grands". De facon générale tout ce qui concerne les limites infinies va nécessiter des règles spécifiques. Si nous prenons le cas des asymptotes, c'est l'opposition "tracé-absence de tracé" qui marque l'existence et la non-existence. En fait, pour toutes ces questions de "points à l'infini", l'absence de signes va servir à signifier des propriétés: une règle implicite fonctionne alors qui est que tout ce qui se trouve "en dehors des limites de l'épure" se comporte comme ce qui est "aux bords". Cette règle n'est pas toujours opérante...

Un second caractère réducteur fondamental des représentations graphiques est qu'un tracé est majoré. L'opposition présence/absence possible de signes sert alors à marquer des propriétés.

De fait, un tracé représente un classe de fonctions: or, dans l'enseignement, une représentation graphique est très souvent destinée à représenter non pas une fonction, mais une classe de fonctions, on voit donc s'ouvrir les possibilités de ruptures de contrat didactique.

3.3 Les caractères producteurs du tracé sont certainement une des raisons de leur role didactique, ils n'en sont pas pour autant explicites.

3.3.1. Le tracé donne des propriétés globales de la fonction: son allure d'ensemble, où la fonction peut apparaitre comme une unité, un objet ès qualité, et non seulement comme un algorithme de calcul de valeurs particulières. Ce caractère producteur fondamental peut permettre de régler des déplacements heuristiques lors de la résolution de problèmes: nous verrons sur quelques exemples qu'il en est rarement ainsi dans la présentation scolaire dominante, ou dans les problèmes.

3.3.2. En raison des propriétés topologiques du plan le tracé "expose" des informations qu'il faut démontrer si l'on part des représentations symboliques: existence de points d'intersections de tracés, existence de points d'inflexions, de maximums ou de minimums...

Il faut remarquer que ces propriétés productrices s'appuyent sur des "théorèmes en actes" concernant les tracés; ces théorèmes supposent des propriétés de continuité, de connexité, de complétude etc.. Les caractères producteurs des représentations graphiques s'appuient sur des propriétés infinitésimales non explicitées et non représentées.

3.4. Les caractères précédemment signalés quant aux tracés sont invariants quel que soit le mode temporel qui a conduit à leur production: il y a un caractère producteur particulier qui relève des propriétés d'un tracé continu dans le temps et qui met en évidence l'interaction de la programmation du geste matériel avec les informations sur la fonction prises en compte par le sujet. Il s'agit des propriétes de régularité ou d'"angulosité" des courbes produites lors d'un tracé continu dans le temps. Il peut alors y avoir des contradictions entre les propriétés conceptuelles en jeu et les contraintes graphiques.

L'analyse du tracé produit par un sujet doit donc prendre en compte, outre les caractères réducteurs et producteurs des représentations graphiques, les effets possibles des contraintes graphiques.

3.5.Le domaine de validité des représentations graphiques, leur caractère opératoire, dépendent des rapports entre les problèmes posés et ces caractères producteurs et réducteurs.
Les problèmes d'échelle, ou plus exactement de fixation des valeurs 1 sur chacun des deux axes (ce qui ne présuppose aucune unité physique en jeu), s'ajoutent à ceux que nous avons vus pour la restriction du domaine de validité, en ne jouant pas ici sur les propriétés conceptuelles de continuité, limites, etc mais sur les seules propriétés d'ordre: l'utilisation de représentations graphiques pour comparer des fonctions, pour repérer des propriétés de croissance, d'intersection avec d'autres graphes, etc ne sera productive que s'il y a compatibilité entre les ordres de grandeurs des valeurs "utiles" de la variable et de la fonction.
L'étude des manuels indique que cette question est exceptionnellement prise en compte: si le point 1 est relativement souvent indiqué sur les graphes en ce qui concerne l'axe des x (celui de la vairable), il en est bien

plus rarement de même en ce qui concerne l'axe des y, celui des valeurs de la fonction. Le fait de travailler ainsi sur des classes de fonctions efface le problème des conditions d'utilisation des graphes, du domaine de validité de certaines opérations, et du caractère opératoire, efficace pour résoudre des problèmes que peuvent présenter les représentations graphiques.
En fait une analyse rapide des manuels, et de leur histoire, en ce qui concerne les représentations graphiques montre que les phénomènes précédents sont pour l'essentiel une conséquence du statut des représentations comme objet d'enseignement.

Les conditions de productions des représentations .

Dans le domaine de l'étude des fonctions, les graphes font partie des taches que l'on enseigne à résoudre et font également partie des productions demandées aux élèves, et aux étudiants, dans le cadre des mathématiques. Les productions graphiques sont également utilisées, éventuellement hors du strict contexte scolaire, pour apprécier les représentations que des sujets se font concernant les variables et les fonctions..

Si l'analyse des interactions entre les propriétés des représentations et l'organisation conceptuelle pour le sujet est necessaire elle ne saurait suffire: la production d'un tracé s'insère dans une situation plus large qui en détermine certains caractères, tout comme son enseignement s'inscrit dans un contrat didactique précis, qui en fait un objet d'enseignement ayant sa propre dynamique de fonctionnement.

4.1. La place d'un tracé dans une situation-problème peut être variable, à la fois dans son statut par rapport à d'autres questions et par rapport à des critères d'"économie" dans l'activité de l'élève. Brièvement on peut distinguer deux grandes catégories de situations.
La tache est le tracé et elle apparait soit en question unique, soit en dernière question: dans les deux cas le tracé ne servira pas à résoudre un problème; il va alors essentiellement être déterminé par le contrat didactique, modulé par des questions d'economie (le temps que l'élève réserve à cette tache par rapport aux autres, par exemple).
Si elle apparait en question intermédiaire son usage peut être explicitement annoncé, ou rien n'être dit quant au statut du tracé: moins les exigences sont explicitées plus important va être le role du contrat didactique..

Le tracé peut être un outil dans la résolution d'un problème, pour lequel le tracé peut être exigé ("on résoudra graphiquement l'équation.."), ou suscité ("on pourra utiliser la courbe représentative de la fonction.."), ou seulement utile, pouvant jouer un role heuristique mais sans que rien ne dise au sujet qu'il en est bien ainsi. La question sera alors ouverte de faire le départ entre ce que montre le tracé et ce qu'il démontre.

Nous donnerons en atelier l'exemple d'un tracé demandé au cours d'un partiel de licence de math, tracé objectivement utile à la résolution d'un problème, mais dont les conditions de production ne pouvaient guère faire apparaitre l'utilité à l'étudiant.

4.2. Les représentations graphiques et le contrat didactique.
Le contrat didactique au cours duquel intervient la production d'un graphe de fonction peut faire une place très variée aux représentations graphiques. Celles-ci peuvent apparaitre comme des objets valides utilisés dans des situations qui témoignent de leur efficacité par rapport à un problème posé; elles peuvent apparaitre comme des objets licites, auxquels on peut faire appel pour éclairer voire argumenter une procédure de résolution ou être au contraire des objets marginalisés. La place donnée dans un cours oral, dans les manuels, dans les problèmes posés et dans l'évaluation des réponses fournies permet en partie d'apprécier le statut valide ou licite des graphes.
(Il n'y a pas d'indépendance entre ces deux caractères puisque pour être licite un tracé doit être valide.)
Par ailleurs, le caractère licite de l'utilisation de graphes peut ne pas s'accompagner d'un role effectivement productif par rapport aux notions effectivement en débat dans le contrat didactique en cours: l'essentiel des éléments demandés par un tracé de graphe peut ainsi concerner les acquis antérieurs et non les notions nouvelles. La dialectique entre l'ancien et le nouveau sera illustrée dans les exemples de deux partiels d'examen de mathématiques. Bien entendu lors de l'enseignement initial des représentations graphiques, lorsqu'elles sont explicitement objet d'enseignement la question doit être abordée différemment.

Les rerésentations, objets d'enseignement

Les représentations de type graphiques, qu'il s'agisse des représentations de fonctions ou d'autres comme les schémas, arbres, diagrammes, participent à l'heure actuelle des objets d'enseignement, et celà très tot dans le cursus scolaire. Cette présence importante et en apparence "naturelle" ne doit pas cacher deux faits importants: il n'en a pas toujours été ainsi dans l'enseignement, et la reforme des années soixante marque un tournant à cet égard, et les rapports de ces objets d'enseignement à des objets mathématiques ne sont pas transparents.
Si l'on excepte le domaine du calcul graphique, qui a joué un role dans le domaine du calcul technique pendant une longue période (cf d'Ocagne), les représentations graphiques

de fonctions ne sont pas des objets de connaissance; si des mathématiciens les utilisent dans la production de leur travail elles sont des aides et non des produits de ce travail; en revanche elles apparaissent, relativement tot sur le plan historique comme des objets didactiques, pour présenter, éclairer, généraliser des opérations sur les fonctions.

5.1. Les représentations graphiques apparaissent dès Oresme, à partir de ce qui sera ensuite appelé (par exemple par Tannery) des fonctions empiriques c'est à dire résultant de la recherche de relations fonctionnelles entre grandeurs physiques.
Le rapport établi plus tard, essentiellement par Descartes, entre les courbes géométriques et mécaniques et les représentations algébriques donne un statut nouveau aux représentations cartésiennes.
A partir du 19° siècle les deux abords de la notion de fonction, à partir du domaine "empirique" et à partir du passage de l'algèbre aux courbes, vont être présents dans la constitution des objets nouveaux d'enseignement que sont avec les fonctions (objets mathématiques attestés) les représentations graphiques de fonctions.
Ces questions sont limitées à l'enseignement fourni dans les grandes écoles pratiquement jusqu'à la fin du siècle; elles concernent les classes terminales au début du 20°siècle. A ces niveaux c'est le champ conceptuel des fonctions (réelles) qui est directement abordé, et l'origine physique des concepts est souvent explicitée. La représentation graphique peut alors servir à presenter une notion de fonction qui ne se réduise pas à une formule algébrique de calcul.

5.2. La transformation de l'objet d'enseignement par le déplacement de sa présentation dans le cursus scolaire est ensuite importante. Ce n'est plus le champ des fonctions qui est en jeu lorsque les représentations graphiques sont enseignées par exemple en 3° mais seulement quelques unes d'entre elles: les fonctions linéaires, les fonctions affines, éventuellement les fonctions du second degré. On ne présente, et représente, que ce qui est déjà dans le champ de l'enseignement des objets algébriques ou géométriques (les espaces vectoriels dans les manuels actuels de seconde ou de troisième, par exemple). C'est un objet d'enseignement qui n'apporte pas du nouveau, mais permet de traiter autrement du déjà-présent.
Il faut remarquer que dans l'institution initiale des représentations graphiques comme objet d'enseignement certains objets mathématiques restaient exclus du champ d'application, bien qu'enseignés par ailleurs, et celà en rapport certainenement avec l'histoire de leur propre constitution. Ainsi les logarithmes, enseignés depuis longtemps, mais dans le champ conceptuel de l'arithmétique et plus précisément des relations entre proportions, ne sont pas

traités comme des fonctions, dont on se préoccuperait des représentations au même titre que pour les fonctions circulaires par exemple, et celà jusqu'après ..1950.

5.3. La présentation de manuels destinés aux élèves de l'enseignement secondaire montre, qu'au-delà de ces évolutions importantes de l'objet d'enseignement, un certain nombre d'invariants ont fonctionné. En particulier on peut voir dans l'enseignement des représentations que ce qui est souvent implicitement en jeu ne concerne pas la fonction proprement dite mais concerne de façon dominante la variable; on cherche ainsi à déterminer et à représenter les valeurs de la variable pour lesquelles se produisent un certain nombre d'événements: extrémum, inflexion, discontinuité..
La représentation graphique de la fonction est alors essentiellement "manipulée" comme une courbe au-dessus de l'axe des x. Les comparaisons entre fonctions, les comparaisons entre différentes valeurs de la fonction, les questions liées à l'existence de fonctions réciproques, etc.. rentrent alors assez mal dans le cadre du contrat didactique. Nous en verrons l'exemple avec le partiel de licence déjà cité.

CONCLUSION

Les remarques méthodologiques brièvement faites ici montrent l'existence de relations complexes entre objets mathématiques, objets d'enseignement, problèmes entrant dans le cadre du contrat didactique, sous l'apparente transparence des représentations graphiques.
Non seulement les caractères réducteurs et producteurs des graphes font qu'il n'y a pas de lien univoque entre ces signifiants que sont les représentations graphiques et les signifiés (pour le sujet), mais le statut de l'objet d'enseignement et les conditions de production joue un role déterminant.
Une analyse de tracés produits par un enfant ou un élève, conduite dans le but de rechercher l'organisation des notions de cet enfant concernant le champ des fonctions, doit donc comporter une interrogation approfondie sur l'ensemble des choix réellement ouverts au sujet dans la situation de production utilisée, au risque sinon d'attribuer au sujet ce qui a été déterminé par la situation(dans son ensemble).

Bibliographie

La bibliographie générale concerne des textes pertinents pour la question des représentations dans l'enseignement des mathématiques; elle ne comporte pas les travaux sur les fonctions n'abordant pas explicitement comme thème lesdites représentations. Une bibliographie de recherches récentes de didactique des mathématiques sur les fonctions sera ultérieurement fournie.

ARTIGUE M.,SALTIEL E., VIENNOT L.: Fonctions. Représentations graphiques. U.E.R. de physique Paris VII- I.R.E.M. Paris Sud.1979.

ARTIGUE M.: Tests sur les représentations graphiques. non publié. 1980.

BESSOT A., RICHARD F.: Une étude sur le fonctionnement du schéma arbre par la commande d'une variable de la situation.Recherches en Didactique des Mathématiques,1980,I3,p.387.

BEHR J.M.,LESH R.,POST T.R.:Construct analysis, manipulative aids, representational systems and learning rational number concepts. Actes du 5° colloque de P.M.E.,Grenoble 1981,p.203.

BRESSON F.:Réflexions sur les systèmes de représentation. Sémiologie graphique,1975.73-74,p.7.

BRUN J.:La représentation symbolique d'opérations additives en situation d'interaction et de communication. Actes du 5° colloque de P.M.E.,Grenoble 1981,p.284.

CARON-PARGUE J.:Quelques aspects de la manipulation. Manipulation matérielle et manipulation symbolique. Recherches en didactique des mathématiques,1981,2.1,p.5.

HERCOVICS N., KIERAN C.:Constructing meaning for concept of equation. The mathematical teacher, 1980,73(8),p.572.

JANVIER C.:The interpretation of complex cartesian graphs. Ph.D. University of Nottingham. 1978.

JANVIER C.:Difficulties related to the concept of variable presented graphically. Actes du 5° colloque de P.M.E. Grenoble 1981,p.189.

KERSLAKE D.:The concept of graphs in secondary school pupils aged 12-14 years. Ph.D. Chelsea College, London, 1977.

KIERAN C.:Children's operational thinking within the context of braketing and the order of operations. Proceedings of the third international conference P.M.E. Warwick, 1979.

KIERAN C.:The interpretation of the equal sign=symbol for an equivalence relation vs an operator symbol. Procedings of the 4° international conference P.M.E. Berkeley, 1980, p.163.

LESH R.,LANDAU M., HAMILTON E.:Rational number ideas and the role of representational systems. Proceedings of the 4° international conference P.M.E. Berkeley, 1980, p.50.

MANDARA G.A.S.:An exploratory study od children's understanding and use of diagrams in mathematical situations. M.Sc.Dissertation,Univerity of Keele,1980.

MIGNE J.:Pédagogie et représentation. Education permanente. 1970, n°8, p.65-88.

PIERREHUMBERT de St.AUBIN B.:La question des représentations et de leur utilisation lors de la résolution de problèmes. Thèse de doctorat, Université de Genève, 1979.

PLUNKETT S.T.O.:Diagramms. Mathematical education for teaching.1979,3.4.

RABARDEL P.: Contribution à l'étude de la lecture du dessin technique. Thèse de 3°cycle. 1980. (INRP-CEPCL).

TALL D., VINNER S.: Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics. 1981, 2, p.151-169.

TALL D.: Looking at graphs through infinitesimal microscopes windows and telescopes. Mathematical Gazette. 1980, 64, p.22-49.

VERGNAUD G.,ERRECALDE P.,et al.:Some steps in the understanding and the use of scales ans axis by 10-13 yeaars old students. Proceedings of the 4° international conference P.M.E., Berkeley, 1980, p.285.

VERMERSCH P., WEIL-FASSINA A.: Image opérative ou représentation fonctionnelle? in L'image opérative, actes d'un séminaire et recueil d'articles de D.Ochanine. 1981, Université de Paris I, Centre d'Education Permanente, département d'ergonomie et d'écologie humaine.

VEZIN J.-F.: L'apprentissage des schémas, leur role dans l'assimilation des connaissances. Année Psychologique, 1972, 72, n°1, p.179-198.

WAGNER S.: Conservation of equation and function under transformations of variable. Journal for research in mathematical education. Teachers College Press, 1975, p.145-172.

WATSON F.R.: The role of diagramms in mathematical education. Actes du 5° colloque P.M.E., Grenoble, 1981.

WATSON F.R.: A zoo of diagramms. Unpublished M.S., 1981.

WEILL-FASSINA A.: Représentation de données spatiales symbolisées: la lecture des intermédiaires graphiques en situation de travail et d'apprentissage professionnel. 1980, ronéotypé, à paraitre dans Psychologie francaise.

WEILL-FASSINA A.: Présentation spatiale des données de travail et traitement des informations: point de vue et hypothèses. Psychologie Francaise, 1979, 24, n°3-4, p.205-227.

Janine ROGALSKI
chargée de recherche
Centre d'Etude des Processus Cognitifs et du Langage
CNRS-EHESS
Maison des Sciences de l'Homme
54 Bd Raspail, 75270 PARIS cedex

R. GRAS
G. RICCO

Atelier (Cours de J. ROGALSKI)
Lundi le 5 juillet 1982
17h - 19h

FICHE DE PRESENTATION

Droite graduée et opérations de pensée[1].

Nous nous proposons dans notre intervention de développer deux points :

1) d'une part, examiner la problématique et le dispositif d'observation que nous avons conçu pour éclaircir les problèmes cognitifs posés par l'utilisation d'une représentation symbolique particulière : la droite graduée ou échelle (G. RICCO)

2) d'autre part, utiliser des méthodes d'analyses des données pour interpréter les résultats obtenus (R. GRAS).

Dans l'apprentissage des mathématiques on utilise fréquemment de nombreux systèmes symboliques dont on sait qu'ils ont des propriétés syntaxiques différentes. Ajoutons que ces systèmes permettent la représentation et le traitement de propriétés distinctes des concepts et relations représentés. La droite graduée orientée est l'un de ces systèmes.

Dans notre plan d'expérience, nous avons considéré deux variables :

- temporel / non-temporel
- origine arbitraire / origine naturelle.

La recherche comportait un pré-test, une séquence didactique et un post-test.

Chaque enfant était confronté à deux tâches (sur quatre possibles) au pré-test et aux deux mêmes tâches au post-test.

Il s'agissait des épreuves administrées collectivement dans deux classes de C.M.2, deux de 6$^{\text{ème}}$ et deux de 5$^{\text{ème}}$.

(1) Cette recherche menée à Maisons-Alfort a été financée par l'I.N.R.P.. L'équipe était composée par : G. VERGNAUD, P. ERRECALDE, G. RICCO, J.P. LAMBERT, J. BENHAD, P. BARNLEY, A. DUSSOUET, H. HOUDY et les maîtres de C.M.2, 6$^{\text{ème}}$ et 5$^{\text{ème}}$. L'analyse des données, financée par la R.C.P. Didamat, a été réalisée avec l'aide de R. GRAS.

Chaque enfant recevait :

1) une feuille imprimée où étaient consignées les données du problème. Il disposait, pour sept personnages désignés par leur prénom, soit de leur poids à la naissance, soit de leur âge, soit de leur performance au lancer de javelot, soit de leur date de naissance.

2) une bande de papier (60 cm × 7 cm) avec un trait tracé au milieu dans le sens de la longueur.

On demandait aux enfants de faire une graduation sur la ligne droite et de placer ensuite les données.

Voici les données utilisées pour les quatre tâches du pré-test et du post-test :

Origine proche	Alain	800 grammes	Anne	8 mois
	Barbara	1 kg et 700 grammes	Bernard	1 an et 7 mois
	Claude	1 kg et 900 grammes	Catherine	1 an et 11 mois
	Denis	3 kg et 100 grammes	Daniel	3 ans et 1 mois
	Eric	3 kg et 450 grammes	Evelyne	3 ans et 4 mois et demi
	Fabienne	3 kg et 700 grammes	Franck	3 ans et 7 mois
	Guy	3 kg et 400 grammes	Gabriel	4 ans et 4 mois
Origine éloignée	Aurélien	67 mètres et 75 centimètres	Alice	15 juillet 1967
	Bruno	67 mètres et 90 centimètres	Béatrice	30 novembre 1967
	Carlos	68 mètres et 10 centimètres	Caroline	2 janvier 1968
	David	68 mètres et 95 centimètres	Dominique	20 décembre 1968
	Etienne	70 mètres et 10 centimètres	Emilie	3 janvier 1970
	Fabrice	70 mètres et 55 centimètres	Fanny	13 mai 1970
	Gérard	70 mètres et 60 centimètres	Gaston	31 mai 1970

Ces quatre tâches sont indépendantes entre elles et présentées séparément.

Notre effort a porté principalement sur l'analyse des protocoles recueillis au pré-test et au post-test. C'est à partir de cette analyse que nous avons pu décrire les opérations de pensée nécessaires au placement de données sur une droite. Nous avons organisé notre analyse en allant des conceptions les plus primitives vers les conceptions les plus élaborées et les plus cohérentes.

Au cours de la séance qui nous a été impartie à l'école d'été, nous nous proposons d'entreprendre l'examen des différents protocoles. De plus, nous tenterons d'en dégager les facteurs et une dynamique des grandes formes à l'aide de trois approches méthodologiques d'analyse de données : factorielle, classificatoire et implicative. Nous comptons également présenter la séquence didactique.

D. LUNKENBEIN

Cours : Jeudi 15 juillet 1982
9h - 10h 15
Atelier : Jeudi 15 juillet 1982
17h - 19h

FICHE DE PRESENTATION.

Géométrie dans l'enseignement au primaire.

1. INTRODUCTION
   Rôle de la géométrie dans l'enseignement au primaire.

2. CONSIDERATIONS GENERALES
   Apprentissage et continu d'enseignement.
   2.1. Genèse et développement d'idées spatiales.
      2.1.1. J. PIAGET : genèse et caractère de la connaissance spatiale.
      2.1.2. P.M. Van HIELE : niveaux de pensée, structure et langage.
      2.1.3. Groupements et structures.
   2.2. Géométrie d'un point de vue génétique
      2.2.1. Quelques dimensions de l'enseignement élémentaire de la géométrie.
      2.2.2. Trois grands thèmes dans l'enseignement élémentaire de la géométrie.

3. TRAVAUX D'APPLICATION (des considérations générales).
   3.1. Recherches concernant la genèse et le développement d'idées spatiales : structurations intérieures d'objets géométriques.
   3.2. Situations d'apprentissage : Le monde de TRIBI.

A. BESSOT
M. EBERHART

Séminaire : Lundi 5 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

A propos d'un premier apprentissage sur la mesure des longueurs : Une analyse des situations.

Nous avons construit une séquence d'apprentissage sur la mesure des longueurs en classe de CE1 : cette séquence s'est déroulée de mai à juillet 81 et a comporté 10 leçons d'au moins 1 heure.

Cet apprentissage a deux objectifs principaux :

1) aboutir au fonctionnement d'une échelle régulière attestant que les graduations représentent pour l'élève le report d'une même unité ;

2) provoquer l'élaboration par la classe d'un répertoire commun pour formuler des mesures non entières.

Le premier objectif est fondé par l'observation et l'analyse des savoir-faire des élèves, associés à l'usage d'un instrument de mesure institutionnalisé, tel le double décimètre : les graduations du double décimètre n'ont pas, pour ces élèves, de signification liée au choix d'une unité et à sa réitération.

Par le deuxième objectif, nous avons choisi de privilégier une certaine conception de la mesure qui prend en compte la notion d'approximation.

Dans ce séminaire nous tenterons :

— de caractériser les situations de mesure choisies par rapport à des situations de mesure possibles : nous utiliserons pour cela une étude de manuels scolaires édités de 1840 (entrée en vigueur du système métrique comme seul système de mesures légal) à nos jours ;

— de définir les variables des situations choisies et les procédures possibles de mesurage dans ces situations ;

— d'analyser les comportements des élèves (procédures et formulations) et le rôle de l'enseignant (en particulier dans les phases de validation).

C. BERDONNEAU

Séminaire : Vendredi 16 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Manuels de géométrie au vingtième siècle.

S'intéresser à la manière dont les élèves acquièrent des connaissances mathématiques ne peut se faire uniquement sur des situations de laboratoire, bien que de telles expériences soient indispensables.

La transmission des connaissances dans l'institution scolaire se fait encore en très grande partie sous l'influence des manuels, qui restent un des outils les plus répandus pour l'apprentissage. Bien qu'il soit impossible de cerner l'influence réelle des manuels sur l'enseignement, on ne peut ignorer que, surtout dans le système français, ils se veulent une espèce d'idéal, de modèle à reproduire. De toute manière, il est extrêmement difficile d'étudier ce qui se passe réellement dans une classe (très rares sont les séquences qui ont été filmées, et cela ne s'est fait que dans une période récente; une reconstitution à partir de notes de cours prises par les élèves ne rendra qu'une vue très partielle, et à quel prix!). Au contraire, les manuels constituent un sujet d'étude relativement facile à appréhender, et il est possible d'embrasser la production d'une période substantielle: le principal obstacle auquel on se heurte est la localisation des documents pour une étude exhaustive (la Bibliothèque Nationale, alimentée par le Dépot Légal, s'avère une passoire à gros trous!), étant admis qu'on dispose des moyens pour faire face au volume des documents existants.

A partir d'un exemple limité à la géométrie démontrée dans l'enseignement post-élémentaire non-professionnel en France au vingtième siècle, on montrera comment une étude des manuels amène à mettre en évidence des problèmes de fond pour l'enseignement de la géométrie.

Quelques manuels de géométrie de l'enseignement secondaire actuellement en usage aux Etats-Unis pourront fournir l'occasion d'une application "sur pièces".

A. ROUCHIER

Séminaire : Jeudi 15 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

LOGO et la géométrie de Tortue.

Au cours de l'exposé préliminaire on essaiera de présenter le langage LOGO et la géométrie de tortue ainsi que quelques aspects de son utilisation en situation scolaire (élèves de 10-11 ans, 11-12 ans principalement).

La discussion aura pour objet de dégager certains caractères du système constitué par le langage LOGO et la géométrie de tortue aussi bien sur le plan conceptuel :
- problèmes en géométrie de tortue
- programmes et définitions de figures
- théorèmes

que sur le plan didactique :
- situations de résolution de problèmes
- rôle de la formulation et de l'action
- dialectique local-global.

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982. ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS. OLIVET.

Jacques TONNELLE

Séminaire : Mardi 6 juillet 1982
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Evidence et démonstration en géométrie.

La classe de quatrième est actuellement le lieu où s'opère le passage d'une géométrie de l'évidence perceptive et du constat empirique (plus ou moins motivés ou argumentés), telle qu'on la pratique dans les classes de sixième et de cinquième, à la géométrie "démontrée". C'est à ce moment-là que l'opposition entre l'évidence et la démonstration est le plus violemment attestée: plus tard, en fait dès même la classe de troisième, cette opposition s'amenuise, d'une part parce que le recours à l'évidence perceptive diminue (il s'agit moins par exemple de montrer que deux droites se coupent - ce que l'on pourrait encore "voir" - que de déterminer les coordonnées du point d'intersection), d'autre part parce que la démonstration se coule alors dans l'outillage plus technique du calcul analytique. C'est donc en ce passage relativement bref de la classe de quatrième que surgit un conflit qui pourra se révéler décisif pour former - ou pour confirmer - l'attitude de l'élève vis-à-vis non seulement de la géométrie mais aussi des mathématiques en général. Conflit dont on doit tenter d'élucider les termes au niveau spécifique du contrat didactique: pourquoi, protestent nombre d'élèves, pourquoi veut-on que nous démontrions des choses évidentes? ...

La recherche présentée se rapporte à une séquence de séances de travail hors classe avec des élèves de quatrième signalés en échec (1) par leurs professeurs. Le thème de la séquence, tel que ces élèves l'avaient demandé et formulé, était "la géométrie". Nous présenterons d'abord l'ensemble des analyses épistémologiques et didactiques préalablement élaborées (quel est le rôle de la démonstration en géométrie élémentaire? comment se noue d'une manière invalidante, à ce propos, le contrat didactique dans lequel ces élèves semblent être pris? comment peut-on envisager de le "dénouer"?); puis la problématique d'intervention que nous en avons fait découler ("prescrire le symptôme"); enfin la situation de problématisation par laquelle nous avons voulu opérationnaliser notre stratégie d'intervention.

L'analyse des séances de travail avec les élèves (la plupart des séances ont été magnétoscopées) permet un début de mise à l'épreuve des hypothèses sur lesquelles nous avons travaillé; elle semble confirmer la conception qui a présidé à notre intervention, touchant à l'origine des difficultés des élèves; elle ne permet pas toutefois d'espérer un changement systématique d'attitude, au moins dans le cadre d'une action relativement brève (de cinq à dix séances). C'est sur ces bases que la recherche présentée, développée à propos de ce qui se veut d'abord une pratique éducative (la forme administrative de notre intervention auprès des élèves est celle d'un P.A.E.) et qui doit nous permettre d'approfondir cette pratique tant au niveau théorique que technique, sera poursuivie en 1982-83.

(1) Pour éclairer la perspective dans laquelle nous abordons le problème de "l'échec scolaire", voir le texte mis en annexe à cette notice de présentation.

ANNEXE

Le texte ci-joint a été rédigé par l'équipe de recherche en didactique des mathématiques de l'IREM d'Aix-Marseille, pour servir de base à un débat sur le thème de l'échec au collège tenu lors de la journée de fin d'année de l'IREM, le 17 juin 1982.

J.T.

ECHEC DU COLLEGE, ECHEC AU COLLEGE

1. Depuis la mise en place du "collège unique" par la réforme Haby (loi du 11 juillet 1975), le collège est progressivement apparu comme le révélateur et le symptôme le plus évident, au sein du système éducatif dans son entier, des problèmes de la société française. L'hétérogénéité, que l'on pouvait d'emblée pronostiquer et dont les plus irréalistes partisans de certains aspects de la réforme ont dû finir par reconnaître le caractère invalidant vis-à-vis de tout projet d'enseignement, ne fait à cet égard que répondre, en termes proprement scolaires, aux multiples différenciations d'une société de classes. Plus que l'école primaire, où divers mécanismes (dont le phénomène massivement observable des redoublements) tendent à masquer cette hétérogénéité dans le même temps qu'ils l'accroissent, c'est le collège qui a dû supporter le choc de la démocratisation de l'accès à l'éducation dans une société non démocratique championne des inégalités. Doit-on dès lors s'étonner si la situation ainsi créée a pu être diagnostiquée comme un échec du collège et si, au fil des années, pareil diagnostic s'est vu, jour après jour, confirmé, jusqu'à la mise en oeuvre, à peine amorcée, d'un ensemble de moyens d'analyse et d'action adéquat au problème historique que nous devons aujourd'hui affronter?

2. Cette situation objective, enracinée dans l'évolution sociale, a été reçue par nombre d'agents et de responsables du système éducatif comme une mise en accusation du collège. Le symptôme est-il cause de la maladie, le miroir doit-il être brisé parce que son témoignage nous désespère? Sans doute ces métaphores ne suffisent-elles pas à seulement poser le problème. Elles indiquent tout de même que la dualité, parfois douloureusement vécue par certains d'entre nous, entre système éducatif et société ne saurait se ramener à la simple opposition du bien et du mal, de l'authentique (ie "vécu") et de l'artificiel, du plein et du vide (l'ennui scolaire...). Elles marquent aussi une nécessaire interrogation par rapport à toute espérance étroitement pédagogiste. Elles dénoncent enfin une tentation de pureté, le désir impensé de rétablir l'institution éducative dans une conscience heureuse, dans une sérénité où les

rôles seraient inversés, où un bon collège enfin restauré pourrait renvoyer la société à ses incertitudes et à ses manques.

3. Il apparaît hors de doute toutefois qu'il est devenu aujourd'hui nécessaire de changer le collège, en tant que lieu d'éducation totale, en tant que milieu de vie, pour y promouvoir un genre de vie ressenti - pour dire nettement les choses - comme compétitif avec les autres milieux d'activité et d'intérêt (intellectuel, culturel et émotionnel tout à la fois) qui sollicitent l'enfant et le jeune adolescent. Les aménagements déjà apportés ici et là, qu'ils soient sauvages ou s'inscrivent dans les cadres timidement offerts aux actions nécessaires (10 %, P.ACT.E. et P.A.E. par exemple), montrent des voies possibles en même temps que les embûches auxquelles on s'expose lorsqu'on tente d'y frayer les chemins d'une rénovation. La commission Legrand, en capitalisant l'expérience difficilement acquise sur le terrain, en confrontant les points de vue des praticiens, en approfondissant la réflexion, en systématisant en un corps de doctrine dénué de dogmatisme, en proposant une institutionnalisation qui nous délivre, à terme d'un bénévolat héroïque mais psychologiquement dévastateur (parce qu'il accentue les clivages et accroît les tensions au sein de la communauté enseignante), désigne sans doute, à cet égard, de larges et solides perspectives.

4. Pourtant deux remarques doivent être avancées, que le chercheur, dépassant le plan strict de son activité de recherche sur le système éducatif pour prendre sa part au débat démocratique, ne doit pas se lasser de répéter. La première est que la vision prévalente du système d'enseignement - celle que partagent ses agents comme les responsables et les décideurs politiques - est une vision nettement préscientifique et pour cela, archaïque. Nous n'imaginons pas que la bonne volonté et l'argent suffisent pour envoyer une fusée sur la lune; nous savons qu'il y faut aussi - et surtout - une science et une technologie du système sur lequel nous prétendons agir. Or, tout à rebours, quand on en vient aux problèmes d'éducation (en contraste avec les problèmes de l'espace, mais aussi de la santé, du développement industriel, etc.), ces exigences qui ailleurs s'imposent à nous avec la dernière évidence, ici sont totalement oubliées.

Il semble même que la nécessité d'une science et d'une technologie spécifiques du système éducatif soit d'autant mieux niée que le système en question est plus complexe! Dans le champ éducatif, toute action se développe, en conséquence, les objectifs ayant été fixés, et faute d'une logistique scientifique et technique adéquate, par l'appel au zèle de chacun et à la bonne volonté de tous, sous la contrainte éventuelle (quoiqu'incertaine en ses effets) de l'obligation administrative. Si le principe de plaisir triomphe un instant du principe de réalité, parce que nul savoir positif et polémique ne vient borner le champ de nos utopies réformatrices, on ne sait que trop, d'expérience, que la réalité l'emporte tyranniquement sur nos entreprises les mieux déterminées.

5. La seconde remarque que l'on se doit de toujours rappeler est que si l'aménagement du milieu scolaire - visant à en faire, pour l'élève, un cadre de vie acceptable, voire attractif - est bien une nécessité de notre temps, il n'est en aucune façon suffisant. La situation objective d'hétérogénéité fait ici resurgir, avec empressement, le discours pathétique sur le vécu des élèves, sur leurs besoins propres, qu'il faudrait satisfaire, sur la richesse et la diversité de leur expérience du monde qu'il s'agirait de reconnaître en leur éminente dignité et leur incontournable valeur comme point de départ obligé de toute action éducative. Or ce discours, aussi généreux soit-il, enveloppe la virtualité d'une stratégie dont quelques exemples historiques (en particulier celui de la New Education américaine des années 1910-1960) nous ont montré, par delà certains effets secondaires brièvement euphorisants, les effets nettement déstructurants sur l'entreprise essentielle que nous nommions autrefois l'instruction publique. En cédant à la tentation de chercher à résoudre le problème d'hétérogénéité par l'évanouissement des contenus "académiques", celle-ci nous fait tomber dans le piège dont tout aggiornamento doit se garder: la tentation de la banalisation de l'institution que l'on prétend ouvrir au "monde". L'idéologie impavide du Life adjustment, de "l'ouverture de l'école sur la vie", surgit d'abord comme une réponse mécaniquement déterminée, et peu réfléchie, non à la vie (le singulier est ici singulièrement inconvenant),mais à la société, c'est-à-dire aux conditions sociales de

fonctionnement de l'institution.

6. Dans le débat actuel, il semble toutefois que, à cet égard, soit écarté le danger d'une vision et d'une visée unilatérales dans le changement à promouvoir. Les auteurs d'un rapport élaboré dans le cadre des travaux de la commission Legrand écrivent ainsi: "l'instruction au collège n'aura d'efficacité que si le collège est aussi un lieu, d'éducation. Et l'éducation au collège n'a de sens que si elle comprend aussi une part d'instruction. Il y a complémentarité entre ces deux notions". Déclaration à laquelle on ne peut que souscrire, pour la dialectique qu'elle ébauche, tout en notant la nuance légèrement restrictive dont elle marque l'un des termes rapprochés: "une part d'instruction"... Signe que les vieux démons sont toujours prêts à renaître! Cela dit, il faut alors souligner que les modifications générales apportées au cadre éducatif laissent à peu près intouché le problème "complémentaire", et fondamental tout autant, des apprentissages fondamentaux (dont, à la fin du XXe siècle, on peut estimer qu'ils ne se laissent pas entièrement réduire à la lecture, à l'écriture et au calcul - même si l'on n'ignore pas que des difficultés notables subsistent encore à ce niveau). La question doit être abordée dans une perspective large, non misérabiliste, qui prenne en compte aussi bien les échecs précoces (ceux qui alimentent les classes de C.P.P.N. par exemple) que les échecs plus diffus qui pèsent sur la capacité de production de notre système d'enseignement en personnels qualifiés jusqu'aux niveaux les plus élevés (et dont la raréfaction des terminales scientifiques, effet sans doute d'une certaine indifférence et d'un malthusianisme inopportun, demeure un indice inquiétant).

7. Rassemblant en ce point les deux ordres de notations que nous avons cru devoir développer jusqu'ici, il nous faut alors souligner que, si l'on peut, à bien des égards et au gré de la conjoncture, parler d'un échec de l'école, et notamment du collège, il n'en reste pas moins que cet échec se nourrit de l'échec à l'école, singulièrement de l'échec au collège. Même s'il existe bien, en effet, des déterminations sociales qui font qu'on échoue plus ou moins à l'école, il existe aussi des mécanismes intrinsèques de l'échec, qui font qu'on échoue de telle ou telle manière, ces "manières d'échouer", actualisées selon des fréquences différentes en fonction des caractéristiques

socio-culturelles des élèves, n'en ayant pas moins des caractéristiques propres, indépendantes de la pathologie sociale à l'origine de leur apparition dans le champ scolaire. De la même façon qu'au XIXe siècle, on avait plus de chances d'être tuberculeux en étant prolétaire qu'en étant bourgeois, sans qu'il y eût pour autant un bacille prolétaire et un bacille bourgeois! C'est ici qu'il faut rappeler à l'exigence d'une étude scientifique de la pathologie scolaire, en n'oubliant jamais que les plus généreux élans ne sauraient dispenser d'une science positive de l'objet que nous voulons changer, et qu'il ne servirait à rien d'invoquer l'urgence à agir (malheureux argument dont on a usé et abusé depuis un siècle au moins) pour repousser l'urgence d'une étude patiente, systématique et continuée.

8. Car la première urgence est de recherche fondamentale sur l'enseignement! Qu'on mesure, à cette simple expression de "l'échec scolaire", la distance qui sépare aujourd'hui notre société d'une vision rationnelle du problème que par cela nous voulons désigner: car l'échec scolaire n'existe pas! Pas davantage du moins que la maladie. Il n'existe que des maladies; de même n'existe-t-il que des échecs scolaires. Non pas bien sûr des échecs individuels, des cas singuliers. Mais des types d'échecs. Je ne sais aucun chercheur autre que naïf, illuminé ou charlatan, qui prétende rechercher une réponse à l'échec scolaire: demanderait-on à un médecin de guérir la maladie, à un chercheur de trouver la panacée? Le premier travail de toute entreprise contre l'échec scolaire est ainsi un travail de découpage du champ de l'échec, de constitution d'une nosographie de l'échec scolaire, de construction de quelques grands types d'échecs nettement délimités, qui permettent aux chercheurs de se mettre au travail et de voir leur travail reconnu par ceux qui, ayant en charge l'organisation de l'action éducative, sauront ainsi échapper à l'archaïsme du regard que notre société jette encore aujourd'hui sur une part d'elle-même si essentielle à son heureux développement.

9. Il n'est pas dans notre propos d'esquisser ici une typologie des échecs scolaires. Certains types d'échecs, bénins en eux-mêmes, même si leur coût social apparaît élevé, relèvent de la simple prévention et de l'intervention légère - qu'il reste largement à

organiser. Il en est ainsi par exemple de tous les cas d'échecs que l'on peut rapporter au contrat didactique en ses clauses générales (que dois-je faire pour apprendre: écouter? Faire mes devoirs et apprendre mes leçons? Ou bien y aurait-il autre chose à faire, et quoi?), selon une pathologie a priori légère et liée souvent à l'incapacité du cadre familial à procurer une préparation adéquate du jeune enfant à l'entrée dans l'ordre scolaire. D'autres types d'échec, en revanche, requièrent des recherches approfondies et plus "pointues". Il en est ainsi, entre autre, des échecs électifs en mathématiques, sur lesquels les didacticiens des mathématiques se sont penchés depuis plusieurs années. La recherche, qui nécessite alors des outils théoriques et expérimentaux importants, s'opère ici, généralement, sur le terrain d'une action éducative ayant valeur en soi.

En général, l'abord du problème de l'échec scolaire, vu comme pathologie de l'interaction entre l'individu et le système éducatif, passe à la fois par l'action globale de prévention, de dépistage et de "thérapeutique" légère, et par des recherches fondamentales sur les principaux terrains de l'échec à l'école.

Equipe de recherche en didactique des mathématiques de l'IREM d'Aix-Marseille (juin 1982)

A. ROBERT
F. BOSCHET

Séminaires : Lundi 5 juillet 1982
14h30 - 16h30
Mercredi 7 juillet 1982
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

1. Mise en place et résultats d'une recherche sur l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur (A.ROBERT)
2. Convergence des suites numériques : objet d'enseignement, objet de connaissance. (F. BOSCHET, A. ROBERT)

Premier séminaire[1]

On y aborde des considérations de problématique, en les illustrant par la recherche particulière réalisée sur l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques.

Dans l'acquisition des connaissances correspondant au champ conceptuel "début de l'analyse sur R", on relève en effet des erreurs qui se reproduisent dans toutes les classes et qui persistent malgré les corrections. Comment expliquer ce qui se passe sur le plan cognitif ? Comment peut-on, au bout du compte, apporter des informations efficaces sur ce qui se passe pendant leur enseignement aux enseignants concernés ?

Il existe une première approche (inspirée des théories constructivistes) qui consiste à travailler sur les productions des étudiants sur ces notions pour essayer de caractériser les erreurs (considérées comme des procédures erronées) puis d'en chercher les causes en se fondant sur une connaissance approfondie des notions et de la manière dont elles sont enseignées et sur les représentations des étudiants. Autrement dit, il s'agit d'étudier les effets de l'enseignement tel qu'il a été dispensé sur l'acquisition des connaissances, sans qu'il y ait action (préalable) sur certaines variables.

Une autre approche consisterait au contraire à étudier les effets de séquences d'enseignement (proposées par le chercheur) sur l'acquisition. Cette deuxième approche nous semble ne pas pouvoir intervenir sans hypothèses préalables sur les erreurs et leurs rapports avec l'enseignement.

Dans la première approche, des choix importants sont à faire : décisions sur la quantité d'informations à recueillir sur les productions étudiées, sur leurs auteurs, sur l'enseignement qu'ils ont reçu et choix des productions elles-mêmes. Il s'agit en particulier de savoir dans quelle mesure on met en rapport individuellement (ou seulement globalement) les productions des étudiants et leur "vécu" d'enseigné. Il y a là des contradictions entre la quantité de productions qu'on veut recueillir (et leur diversité) et la quantité d'informations qu'on peut associer à chaque production. A notre avis, les choix se font suivant le degré de connaissance des chercheurs sur les notions concernées. Moins on en sait, plus on doit débroussailler quantitativement les problèmes dont, à priori, on ne sait pas grand chose dans l'enseignement supérieur, quitte à réaliser ensuite (mais sur moins d'étudiants, bien choisis) des observations plus précises et plus qualitatives. Il s'agit aussi de décider quelles productions on étudie (écrites, orales, sur quels problèmes, prise en compte des représentations...). Les mêmes arguments amènent soit à recueillir des informations détaillées ne pouvant concerner beaucoup d'étudiants (type entretiens) soit à relever une masse plus importante d'informations moins complètes (type copies). Il faut souligner ici que, vu la complexité du champ conceptuel concerné, les productions a priori pour une même question peuvent être très variées et donc, ne serait-ce que pour être sûr de situer correctement la répartition obtenue par rapport au champ des possibles, on peut être amené à avoir besoin d'un nombre de réponses.

Pour illustrer les conséquences de ces choix sur un exemple précis, j'exposerai les résultats de mon travail sur l'acquisition des suites numériques dans le supérieur, en insistant sur la nature et les limites de ces résultats, en liaison avec les choix de problématique (et de méthodologie). J'ai choisi la première approche, et j'ai étudié des copies d'étudiants en réponse à un questionnaire distribué de la première à la quatrième année universitaire (1253 copies ont été étudiées). Deux des questions étaient destinées à recueillir les représentations sur la convergence des suites exprimées par les étudiants s'imaginant en train

d'expliquer la notion à des élèves plus jeunes. De plus, nous avons étudié globalement avec F.BOSCHET (cf. 2) l'objet d'enseignement "suites numériques" (ainsi que l'objet de savoir coreespondant), sans nous donner cependant les moyens de mettre en relation individuelle chaque étudiant avec l'enseignement qu'il a reçu.

J'ai ainsi réussi à dégager le déroulement de l'acquisition de la notion (avec la différence entre les filières "classes préparatoires" et DEUG et l'évolution des productions jusqu'en maîtrise) ; j'ai pu esquisser des types de comportement basés sur les modèles exprimés par les étudiants sur la convergence des suites (avec les représentations monotones associées très majoritairement à des procédures erronées, les représentations "statiques"-traduisant la définition en (,N)- associées très majoritairement à des procédures correctes et les représentations "dynamiques" (cinématiques) non discriminantes) ; j'ai enfin dégagé différents types d'erreurs (oubli du caractère variable de n, recours à des procédures de type algorithmique ou algébrique, etc...), plus ou moins caractéristiques de la notion de convergence des suites, des fonctions ou du champ conceptuel concerné. Par contre, les limites de cette approche ne m'ont pas permis de repérer , par exemple, dans quelle mesure, lorsqu'une tâche s'avère réussie, c'est à cause de l'enseignement (fréquence des tâches proposées, rôle spécifique de chaque enseignant) ; je n'ai pas non plus pu caractériser (dégager des régularités sur) les étudiants non typiques, exceptionnels, faute d'observation des étudiants en activité et faute d'études précises sur l'enseignement qu'ils ont reçu.

Deuxième séminaire[2].

Convergence des suites numériques : objet d'enseignement, objet de connaissance.

Dans le second séminaire, nous nous concentrons au contraire sur le thème précis que nous avons choisi : la convergence des suites numériques. Voici le résumé de l'intervention de Françoise BOSCHET sur les suites numériques comme objet d'enseignement.

J'ai étudié comment sont enseignées les suites au niveau du premier cycle de l'enseignement supérieur sur un corpus comprenant des manuels de cours, des manuels d'exercices corrigés, des polycopiés de DEUG, des notes d'étudiants de DEUG, des notes de cours de professeur de Math. Sup. et l'enregistrement d'un cours oral.

J'ai essentiellement étudié le contenu des cours et des exercices, le lexique de la convergence et les représentations.

Au niveau de l'éventail des connaissances exposées sur les suites numériques, beaucoup de cours sont semblables. Cependant on peut les différencier selon plusieurs critères et j'ai choisi d'en étudier trois en détail :

- la finalité de l'introduction des notions de suites ou de convergence de suites, les généralisations de la théorie évoquées ou exposées, le lien éventuel entre les notions de limites de suites numériques et celles de fonctions.

En ce qui concerne les exercices, j'ai établi une typologie que j'ai mise en rapport d'une part avec les procédures et les connaissances que ces exercices mobilisent et d'autre part avec la formulation apparamment ouverte ou fermée des textes.

Dans l'étude du lexique véhiculant le concept de convergence des suites numériques, j'ai pu mettre à jour trois registres : un registre "noble", écrit, dominé par les mots dérivés du verbe "converger", vocabulaire qui tend à singulariser la notion de limite de suites de celle de limite de fonctions, un registre plus fonctionnel dans les exercices dominés par les expressions contenant le mot "limite" ou le symbole "lim", un registre plus familier à l'oral où apparaissent le verbe "tendre vers" en situation de convergence et le symbole "$\rightarrow$" au tableau.

Quant aux représentations de la convergence, dans les cours sur les suites, elles se caractérisent souvent par leur absence surtout dans les manuels récents. Cependant dans certains documents, le modèle statique est exprimé et on peut aussi trouver quelques traces du modèle dynamique. Par ailleurs, les exemples donnés sont souvent peu variés, il y a très peu de représentations graphiques et en tout cas pas de représentations fonctionnelles (couples (n,f(n) dans le plan).

Il me semble donc qu'à tous les niveaux (contenu, lexique, représentations) les notions de limites de suites numériques et celles de limites de fonctions numériques sont différenciées, ce qui me semble être une marque importante de "transposition didactique".

D'autres aspects de cette transposition didactique apparaissent dans la comparaison de l'exposition des suites en tant qu'objet d'enseignement ou objet de connaissance (généralisation actuelle à la notion de valeur limite d'une application d'un espace muni d'une base de filtre dans un espace topologique ou uniforme). Nous dégageons les caractères de la transposition didactique que nous sont apparus ("gonflement" des cours par rapport à un exposé minimal, "création d'objets d'enseignement (suites récurrentes), homogénéïté des exposés sur des sujets plus ou moins généralisables) et nous conclurons sur l'intervention éventuelle de tous ces facteurs dans l'acquisition des connaissances sur la convergence des suites numériques.

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982. ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS. OLIVET.

B. CORNU

Séminaire : Jeudi 8 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

A propos d'une séquence didactique en classe de première
Etude des principaux obstacles dans l'apprentissage de la notion de limite.

Ce travail est une partie d'une recherche concernant l'acquisition de la notion de limite. Il a été précédé par deux approches : tout d'abord une étude des conceptions spontanées liées à la notion de limite, étude menée à partir d'un test sur le sens des expressions "tend vers" et "a pour limite"; puis une approche historique et épistémologique, à partir des principaux obstacles rencontrés lors de l'histoire de l'élaboration du concept de limite .

Nous avons établi une "séquence didactique", destinée à des élèves de première avant qu'ils aient reçu un enseignement concernant la limite. Nous avons cherché à proposer des activités dans lesquelles la notion de limite est un outil nécessaire pour résoudre des problèmes, de façon à développer une vision qualitative de la notion, avant d'en donner une définition "rigoureuse" .

Notre intérêt s'est porté sur plusieurs questions : Les élèves savent-ils voir qu'une situation comporte la notion de limite ? Quel vocabulaire emploient-ils pour décrire une telle

situation ? Quels obstacles essentiels rencontrent-ils dans leur apprentissage de la notion ?

Dans un premier temps, trois activités comportant une situation de limite ont été proposées aux élèves; ces activités provenaient de domaines mathématiques différents. Puis, lors d'une autre séance, nous avons pris pour thème principal la recherche de la limite en x=0 de $\frac{\sin x}{x}$. Les productions écrites des élèves, et les enregistrments effectués, ont permis de relever les principaux obstacles rencontrés par les élèves au cours de leur apprentissage . La plupart de ces obstacles sont inhérents à la notion même de limite. Selon la façon dont on fait fonctionner la notion, on met en oeuvre tel ou tel de ses aspects, ce qui nécessite d'avoir surmonté tel ou tel obstacle épistémologique .

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982 - ÉCOLE DES ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS - OLIVET

C. LABORDE

Cours : Mercredi 7 juillet 9h - 10h15
Atelier : Mercredi 7 juillet 17h - 19h

FICHE DE PRESENTATION.

Questions langagières dans l'enseignement mathématique.

La transmission du savoir à l'école se fait en grande partie grâce à diverses communications (communication maître-élèves, communication entre élèves) qui mettent en jeu de multiples activités langagières : saisie d'informations écrites ou orales, activités de verbalisation à différents usages (explicitation de demandes, explication d'actions, validation de démarches, restitution de connaissances).

Certains ont pu réduire les problèmes de l'appropriation des connaissances mathématiques à ceux de l'acquisition d'un langage. D'autres ont pu inversement ignorer totalement les problèmes langagiers :
"car très souvent, par exemple, le scientifique fait comme si la matérialité de son discours (les mots, les types de phrase) importait peu, comme si la perméabilité du rapport "langue-pensée" pour le sujet épistémique pur allait de soi" (F.François, 1980).

Entre ces deux extrêmes, je pense qu'il est plus intéressant de reconnaitre l'existence des problèmes langagiers qui se posent à l'élève, non de façon isolée mais en liaison avec ceux de l'acquisition des connaissances en milieu scolaire. Ceci signifie entre autres, qu'il ne s'agit pas d'analyser uniquement des énoncés produits par l'élève, l'enseignant ou le manuel, sans les relier à leurs conditions de production, l'environnement dans lequel ils ont été créés, les pratiques auxquelles ils renvoient.

Toute opération langagière intègre de nombreux paramètres qui peuvent être organisés autour de quatre notions principales (J.P. Bronckart, 1977) :
- La "réalité objective", c'est-à-dire d'une part les objets qui définissent le contenu du discours, et d'autre part les paramètres de référence que sont les interlocuteurs et la situation spatio-temporelle ;

- Le sujet parlant (ou écoutant) qui construit progressivement sa connaissance du monde, qu'il injectera dans le langage ;
- Le modèle langagier en vigueur dans le milieu ;
- Les énoncés que le sujet doit traiter (comprendre, produire, mémoriser..)

Description générale des problèmes linguistiques dans l'enseignement mathématique.

Une description globale des problèmes linguistiques dans l'enseignement sera faite à l'aide de ce cadre théorique. Elle s'articulera autour des points suivants :

- Si l'enseignement mathématique privilégie une certaine forme de discours (dont les caractéristiques principales seront données), il n'en existe pas pour autant un type unique indépendant des conditions de production, comme en atteste le décalage entre les énoncés oraux de l'enseignant et ses textes écrits. On assiste donc à la mise en avant d'un type de discours qui n'est pas toujours réalisé dans la diversité des situations de formulation en classe et qui pourtant, à certains égards, fonctionne comme une norme au niveau de l'expression écrite des élèves, dès le début du premier cycle de l'enseignement secondaire .
- Or, à cet âge (11,12,13 ans), l'acquisition du langage n'est pas terminée et surtout l'enfant éprouve des difficultés à savoir changer de registre en fonction des nécessités, à s'adapter aux interlocuteurs les plus divers.
- A partir de la classe de 6ème, on demande à l'élève de produire en mathématiques un discours écrit différent de celui de l'oral, ne faisant pas référence à la situation extérieure, et très structuré à propos d'objets engagés dans un réseau complexe de relations hiérarchisées. Les représentations que l'élève élabore des objets mathématiques sont différentes, parfois même éloignées, des conceptions qui ont présidé à la mise en place des contenus d'enseignement. Ces représentations orientent les choix linguistiques des élèves dans la désignation des objets et des relations qui les lient. Ainsi, le discours mathématique modèle pauvre en verbes, fait de substantifs et de groupes nominaux emboîtés, n'est-il pas le plus adéquat aux conceptions dynamiques des élèves.
- Pourtant l'apprentissage de l'expression mathématique n'est pas facilité en général dans l'enseignement. Si les instructions officielles stipulent que l'apprentissage des mathématiques va de pair avec celui de l'expression, dont les qualités exigées sont nécessaires du fait de la précision et de la rigueur des idées qu'il s'agit d'exposer, les élèves sont rarement placés dans des situations, où la qualité de leurs formulations

conditionne la réussite de leur activité.

Ouverture vers une dimension sociale de l'expression.

La prise en considération de la dimension sociale de l'expression en mathématiques peut justement être à l'origine de construction de telles situations susceptibles d'amener les élèves à prendre conscience des implicites ou de l'ambiguïté de leurs formulations et à chercher à y remédier. Deux sortes d'éléments confirment cette vue des choses.

- L'histoire de l'expression en mathématiques, véritablement résultat d'une construction sociale.
- Les expériences de psychologie sociale qui mettent en évidence que "Le progrès cognitif ne résulte pas d'une simple imitation ou acquisition d'un héritage social mais d'une construction collective" (G.Mugnez, W. Doise. A.N Perret-Clermont, 1976).

Dans plusieurs situations expérimentales, les contraintes ont été choisies de façon à permettre la reconnaissance par les élèves des exigences de la communication. Leur déroulement met en évidence combien l'apport de la composante sociale a été fructueux dans l'élaboration des formulations. Je citerai en particulier celles menées autour de G. Brousseau à Bordeaux, celles que J. Perès présente à cette école d'été, celles de J. Brun, A.N. Peret-Clermont et M.L. Schubauer Leoni, celle de M. Guillerault et moi-même.

L'atelier relatif au cours pourra être l'occasion d'analyser à partir d'exemples

- des stratégies discursives d'élèves
- et l'évolution de ces stratégies, lorsqu'on a eu trace de leur élaboration.

REFERENCES

J.P. BRONCKART, 1977 : "Théories du langage, une introduction critique". Pierre Mardaga, Editeurs.

F. FRANÇOIS, 1980 : "Linguistique et analyse de textes" in linguistique, P.U.F.

G. MUGNEZ, W. DOISE, A.N. PERRET-CLERMONT, 1976. "Conflit de centration et progrès cognitif" In Bulletin de Psychologie. N° 29(321, 4-7).

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982. ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS. OLIVET.

J. PERES

Cours : Vendredi 16 juillet 1982
9h - 10h15

Atelier : Vendredi 16 juillet 1982
17h - 19h.

FICHE DE PRESENTATION.

Utilisation de la théorie de situations didactiques en vue de l'identification des objets et des phénomènes pertinents au cours d'une activité de construction d'un code de désignation à l'école maternelle.

Nous présenterons une recherche en didactique que nous avons menée durant plusieurs années à l'école pour l'observation dont dispose l'IREM de BORDEAUX.

Nous nous étions donné pour objectif l'analyse d'une situation didactique et en particulier l'identification des variables significatives et l'évaluation de leur effet sur un processus d'apprentissage scolaire (il s'agissait d'activités dans une grande et moyenne section de maternelle visant à faire progressivement construire puis utiliser par les enfants, un code strict de désignations d'objets sous forme de symboles iconiques).

Ce travail s'inscrivant dans les perspectives dégagées par les travaux théoriques de G. BROUSSEAU, nous avons repris la problématique et la méthodologie que celui-ci a élaborées et qui ont donné lieu à un certain nombre de recherches analogues à celle-ci.

La démarche que nous avons suivie consiste d'abord à construire un processus d'apprentissage où la connaissance visée n'est pas directement (ou indirectement) enseignée par le maître, mais doit apparaître progressivement chez l'enfant à partir de multiples remaniements structurels ; ceux-ci étant le résultat des confrontations avec un certain type d'obstacles rencontrés au cours de l'activité. Ce sont donc les multiples interactions au sein de la situation qui doivent seules provoquer les modifications chez l'élève et favoriser ainsi l'apparition des concepts souhaités. Cette conception de la construction des connaissances que nous voulions conforme à l'épistémologie piagétienne[1] suppose alors une approche très particulière des situations

.../...

(1) Ceci pose un problème annexe que nous aborderons : dans quelle mesure peut-on utiliser pour l'analyse des apprentissages dirigés, les concepts (en particulier celui de l'équilibration) élaborés par Piaget dans l'unique perspective du développement psychogénétique ?

didactiques devant être réalisées ; si la connaissance visée par l'apprentissage doit apparaître dans l'exacte mesure où elle devient un instrument nécessaire pour s'adapter à une situation devenue problématique, (les stratégies utilisées spontanément se révélant inefficaces) tout l'effort d'analyse du didacticien doit porter sur cette situation. La question primordiale est d'abord de savoir en effet en quoi celle-ci est réellement problématique pour l'enfant. Une connaissance inadéquate (du point de vue de l'enseignant) l'est-elle vraiment pour l'élève ? et si celle-ci permet de réussir (ne serait-ce que par hasard), et si elle n'est pas significativement mise à l'épreuve de la réalité (absence de feedback), et si elle peut encore être utilisée au prix de quelques modifications locales, pourquoi l'enfant l'abandonnerait-il ?

Mais élaborer des obstacles ne suffit pas. Dans notre perspective d'un apprentissage adaptatif, le comportement de l'enfant dépend bien entendu du sens qu'il va donner à son activité, et le sens est déterminé par le type d'utilisation de la connaissance. Autrement dit, de quelle nature est le problème rencontré ? faut-il trouver une solution pour soi-même ? (il s'agit alors de réussir), transmettre ses solutions à d'autres (il s'agit de comprendre pour expliciter), prouver la vérité de ce que l'on avance (il faut alors trouver les moyens de rendre raison de ses affirmations). Dans ces divers cas, il serait déraisonnable de penser que la démarche constructive de l'enfant sera la même. G. BROUSSEAU a montré comment chacun de ces trois types de problème instituait un rapport différent à l'objet de la connaissance. En approfondissant l'analyse de leur spécificité, il a élaboré un modèle d'apprentissage qui présenterait les caractères d'une pensée mathématique vraie.

C'est ce modèle que nous avons utilisé pour construire non une situation, mais un processus didactique au cours duquel les différentes interactions dont nous venons de parler interviennent à tour de rôle dans un rapport dialectique. Si l'on veut, ainsi, que les enfants s'engagent dans la construction d'un code commun (c'est à dire donner une forme légiférée des conventions de désignations) parce qu'ils en éprouvent la nécessité, il faut qu'ils aient rencontré des difficultés irrésolvables autrement ; c'est à dire qu'ils buttent sur des contradictions au sein du code implicite employé par le groupe. Mais pour que ce code contradictoire apparaisse, il faut que les enfants puissent d'abord expliciter leurs différents modèles au cours de situations de communication. De même cette explicitation suppose l'existence de situations préalables ou les désignations peuvent être peu à peu construites et modifiées à partir de stratégies visant uniquement à représenter un objet.

Le problème fondamental est alors celui du passage de l'une à l'autre de ces situations. A quel moment l'une doit-elle céder la place à l'autre ? Par exemple, tout ce qui va dans le sens d'une facilitation dans la situation de communication va à l'encontre de la nécessité du code commun, mais inversement, si les résultats sont insuffisants au cours de l'explicitation, ceci aura des conséquences négatives sur la construction du code. Nous sommes ainsi renvoyés à des choix didactiques complexes.

Après l'élaboration des situations didactiques, la deuxième étape a consisté à observer la réalisation de l'apprentissage et ceci en fonction des objectifs généraux de la recherche : quels sont les caractères de la situation (les variables didactiques) qui peuvent expliquer l'apparition des comportements observés (souhaités ou non) chez les élèves ?

Nous voulions évaluer les effets de certaines variables de la situation, mais sans a priori. Nous faisions, bien entendu, des hypothèses sur l'importance d'un certain nombre d'entre elles (en particulier la nature des objets à désigner) mais l'essentiel du travail consiste surtout à les identifier après coup. Ce qui à nos yeux peut présenter le plus d'intérêt dans les résultats, c'est la mise au jour des phénomènes didactiques dont nous ne soupçonnions pas l'existence quand nous élaborions l'activité.

Le problème est alors d'ordre méthodologique. Il faudrait tout observer, tout recueillir, mais la réalité pédagogique est foisonnante et d'une incroyable complexité, le milieu est multiforme, les incidents innombrables, inattendus, les interactions entre enfants à la fois fugaces et multiples... ce qui guidait notre tentative était la décision d'enregistrer tout ce qui était en rapport avec l'activité qu'il s'agisse d'un propos tenu par un enfant à un autre dans un coin de la classe, d'une tentative solitaire pour faire une désignation, d'une position de spectateur pris par un élève lors du jeu, d'une intervention de la maîtresse au cours de l'activité, etc. Nous avons aussi enregistré les discussions que nous avions et au cours desquelles certaines décisions didactiques étaient prises à partir des constatations que nous avions faites. Nous avons ainsi recueilli un corpus volumineux comprenant une chronique des situations où sont notés les propos de la maîtresse, la nature de ces interventions, le type d'information reçu par l'élève, les interactions entre les élèves, la disposition du matériel, les objets utilisés par chaque enfant, l'organisation de l'espace et du temps didactique etc. A partir de certaines données, nous avons analysé les comportements des élèves. Il s'agissait de ne pas se borner aux réalisations finales. Dans la mesure du possible, nous avons étudié l'évolution des différentes stratégies utilisées, mais aussi la nature des propos échangés.(soit au cours du jeu lui-même soit d'une façon informelle). Les verbalisations spontanées étant précieuses dans la mesure où les jugements, voire les raisonnements, sont la traduction directe des constructions cognitives (que l'on ne peut souvent qu'inférer au seul vu des réalisations).

La dernière étape consiste alors à utiliser toutes ces données afin d'analyser le processus. En clair, il s'agit de comprendre ce qui dans la situation observée (chronique des séances) explique les résultats que nous avons obtenus (comportement des élèves). Le problème est alors de déterminer en quoi ce que nous attendions diffère de ce que nous avons réellement observé. Il s'agit d'analyser les distortions, les dysfonctionnements (ou les confirmations). Quelles en sont les raisons ? Quelles sont les variables de la situation qui peuvent les expliquer ? Nous sommes alors renvoyés à ce que nous évoquions plus haut : le sens qu'a pris réellement l'activité pour l'élève et la nature exacte de ses interactions avec l'objet de la connaissance. Nous avons ainsi pu trouver une confirmation de l'importance décisive du matériel que l'enfant avait à désigner ; du choix que nous faisions des objets, dépendait l'essentiel de l'activité cognitive de l'enfant : les problèmes pouvant donner lieu à des démarches soit logiques (donc conformes à ce que nous attendions) soit purement sémiologiques.

Dans l'ensemble des variables mises ainsi au jour, beaucoup que nous ne soupçonnions pas et que nous aurions jugées bien triviales ont joué (à notre insu) un rôle parfois considérable. Il en est ainsi des possibilités de communication, du temps écoulé entre les séances, du nombre d'objets manipulés, etc. Ont joué également un grand rôle l'interprétation que faisait l'enfant de telle ou telle situation (et qui n'était pas celle que nous avions prévue) et les variables d'ordre psychogénétique, (ces dernières nous permettant de mettre en relief la nature des opérations sous-tendant l'activité).

Enfin, deux points nous paraissent particulièrement intéressants :

. d'abord la mise en relief de l'étonnante distorsion existant parfois entre ce que nous pensions être la situation pour l'élève et ce qu'il vivait réellement (en particulier l'expérience dont il pouvait disposer se révélait à l'analyse extraordinairement réduite par rapport à ce que nous pensions).

. ensuite, une nouvelle mise à l'épreuve de la réalité, des modèles théoriques élaborés par G. BROUSSEAU concernant les effets que l'on peut attendre des types particuliers d'interation ("dialectiques" de l'action, de la formulation, de la validation). Les phénomènes obtenus (stratégies des élèves, solutions adoptées, évolution des modèles) se sont révélées dans notre expérience conformes à ce que la théorie énonçait.

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982. ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS. OLIVET.

G. GLAESER

Cours : Mardi 13 juillet 1982.
10h30

FICHE DE PRESENTATION

L'EPISTEMOLOGIE DES NOMBRES RELATIFS.

Présentation rapide du contenu d'un article publié au volume 2.3 de l'excellente revue : "Recherche en Didactique des Mathématiques" (à laquelle vous êtes vivement invité à vous abonner, si ce n'est déjà fait).

Quatre années de recherche ont abouti à la mise en évidence d'un fait historique étonnant :

"Il a fallu attendre plus de 1500 ans pour que la "règle des signes" soit considérée comme une banalité par les mathématiciens. Une étude détaillée de textes puisés aux meilleurs auteurs, de Diophante à nos jours, (notamment Stevin, Descartes, Mac Laurin, Euler, Cramer, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy, Hankel) permet de localiser les sources de difficultés qui s'opposaient à la compréhension des nombres négatifs."

Plutôt que de répéter, une fois de plus, le texte in extenso de l'article, je préfère raconter, dans cette Ecole d'Eté, le cheminement des idées qui m'ont conduit à la conclusion, et les précautions que j'ai prises pour rassembler un corpus constitué "proprement" de citations d'auteurs.

F. CONNE.

Séminaire : Mercredi 7 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Description des activités mathématiques dans une classe de première, deuxième primaire (CP, CE français). Transposition didactique.

J'avais pour but de savoir ce qu'on faisait en mathématiques dans une classe de l'enseignement élémentaire et j'avais choisi les classes de première et deuxième primaire (CP, CE français). N'ayant pas la possibilité d'enseigner à ce niveau, je me suis proposé une recherche sur l'enseignement des "mathématiques" tel qu'il pouvait se donner dans une classe bien précise. J'ai pu en suivre une pendant 2 années consécutives, à raison d'une à deux demi journées par semaine. Très succintement, je m'étais astreint aux règles suivantes :

a) de ne m'occuper que de ce qui touchait à l'enseignement des mathématiques, et de garder toujours ce point de vue ;
b) de ne pas chercher à proposer un programme, ni des activités qui sortent du cadre de celles prévues par le manuel officiel. (La question étant justement de savoir ce qu'on pouvait en faire).
c) d'établir un contrat aussi clair que possible avec l'enseignante. (comme il n'était pas question de mener une "observation passive", j'ai pris parti de contrôler au mieux mon intervention).

Je me trouvais alors engagé sur 3 terrains distincts que je désignerai par : le manuel, la vie en classe, les discussions avec élèves d'une part et enseignante de l'autre. J'ai mené mon enquête sur ces 3 fronts à la fois, récoltant tout ce qui pouvait l'être. Enquête est le mot juste, et c'est d'ailleurs ainsi que les élèves m'ont perçu puisque très rapidement, ils m'ont surnommé :"le détective". Pour ce que j'appelle "discussions", elles étaient toujours centrées autour d'une tâche bien précise proposée à l'interlocuteur, ou encore qu'il avait rempli auparavant (par exemple : une feuille d'exercice et je discutais avec l'élève

de sa réponse). Cela concerne les élèves bien sûr, mais aussi l'enseignante. Pour cette dernière, j'entends par tâche tout ce qui a trait à son rôle d'enseignante (des mathématiques), notamment l'appréciation et le commentaire de ce qui s'était effectivement passé en classe.

Examinons maintenant de plus près ces 3 plans.

<u>Manuel</u> :

Deux questions principales ont dirigé mon analyse.
1) définir le plus précisément possible le projet qui y est inscrit.
2) ce projet nous est accessible sous la forme d'une réalisation en activités et exercices divers, avec recours à certains matériels, et symbolismes. Je me suis demandé quels principes directeurs y présidaient.

<u>Vie en classe</u> :

Deux angles d'attaque de ces données.
1) Evidemment, les examiner en fonction du manuel et de l'analyse ci-dessus. Dans quelle mesure cette réalisation a-t-elle été effective. On peut alors chercher à discerner ce qui était "réalisable" et ce qui ne l'était pas, compte tenu de données psychologiques concernant les élèves, des qualités professionnelles de l'enseignante. On peut aller plus loin en examinant quelles distorsions sont introduites par rapport au projet et si elles sont conséquentes ou pas. Je qualifierai ce point de vue, d'essentiellement négatif, dans la mesure où, même si c'est le programme plus que les élèves ou l'enseignement qui est mis en cause ici, il présuppose que c'est au programme de maîtriser la construction de la connaissance chez les élèves et ce par l'entremise de l'enseignant qui les dirige. Il n'en reste pas moins que cette analyse reste nécessaire.
2) Le second point de vue, vous l'avez sans doute deviné, part en sens inverse et tente de rendre compte de la maîtrise que les différents protagonistes ont (ensemble) du programme. (J'entends programme comme cursus d'activités et exercices proposés par le manuel). Et, dans un élan d'optimisme résigné, je qualifierai ce point de vue de positif dans la mesure où il essaie d'examiner ce que ces gens font de ce qui leur est proposé, ce qu'il en advient du projet officiel. Certes il y aurait sans doute pour eux mieux à faire. (Mais n'y aura-t-il pas toujours mieux à faire ?) Mais là n'est justement pas mon problème. De ce point de vue, d'autre part, on n'échappe pas à reposer la question de l'enseignant à qui on ne peut plus se contenter d'attribuer un rôle

de simple animateur/canalisateur. Le voilà bien plus engagé puisque c'est son propre savoir qui se voit interpellé dans son travail avec les élèves (ses élèves !). C'est en quelque sorte la question de l'appropriation, les modes d'appropriations, leur limites, ainsi que les médiateurs à l'appropriation, qui sont en cause ici.

Mais cette "interpellation" de l'enseignant que je viens d'évoquer ici, frappe aussi l'observateur dans la mesure où il assiste en personne aux activités scolaires. Sans doute, pas de la même façon que l'enseignant, mais quand même déjà au niveau de la simple compréhension/confrontation aux productions des élèves. Voilà bien ce qui distingue les éléments tirés du MANUEL de ceux de la VIE EN CLASSE.

Discussions.

Sur ce troisième plan, le chercheur se trouve encore plus engagé puisque cette fois la confrontation avec ses partenaires est directe.

De la même façon que précédemment, l'analyse a pris deux orientations, mais de façon plus imbriquée .

1) De façon tout à fait évidente, il s'agissait d'obtenir des renseignements sur ce que le maître et les élèves retenaient du programme. Premièrement de ce qu'on leur fait faire puis quelles conceptions ils se faisaient de ces savoirs, enfin comment ils y investissaient leur connaissance (assimilation).
2) Mais d'autre part, et dans ce que j'ai pu réaliser de façon indissociable, j'ai toujours essayé de tirer parti de ces activités scolaires pour les dévier sur des problèmes que j'estimais significatifs par rapport à la connaissance visée. La question étant toujours, mais ici posée à moi personnellement : de "faire avec ce qu'on a". Imbrication des points de vue dans la mesure où je ne trouvais pas d'autre manière de répondre à la première question que d'aborder la seconde. Si je voulais savoir ce qu'il en était pour l'élève, je devais en quelque sorte déscolariser mes questions.

Parti ainsi dans un tel projet, je devais fatalement déboucher sur la transposition didactique. Concept qui s'est tout d'abord imposé à moi via la nécessité d'intégrer dans ma description tous ces points de vue et pour éclairer à la fois tous ces ateliers où on désigne, apprête, fait voir et suscite le savoir. Une fois de plus, le dicton : "Les violettes

fleurissent toutes en même temps" se vérifia, quand mon idée rencontra celle de Chevallard qui donnait un cours sur la transposition didactique à la première école d'été de didactique des mathématiques (Chamrousse 1980). Alors que son cours était somme toute assez théorique et global, il m'a paru nécessaire de faire un travail sur exemple et de mener jusqu'au bout ma description.

Cela a donné une description problématisée et que j'ai organisée autour de l'illustration du processus de transposition didactique. Il ne s'agit donc pas d'une chronologie. D'autre part, le canevas ci-dessus ne se trouve pas tel quel dans ma description, dans la mesure où celle-ci intègre, à la fois, toutes les données et tous les points de vues. Dit plus simplement, j'en suis encore à essayer de faire parler les données recueillies. Le texte ci-dessus aidera, je l'espère, l'auditeur à s'y retrouver.

REFERENCES.

Yves Chevallard : Cours sur la transposition didactique donné à la 1ère école de didactique des mathématiques, Chamrousse 1980.

Jean BRUN : Texte de présentation de son séminaire pour la 2ème école de didactique des mathématiques, Orléans 1982. (Etant donné que mes préoccupations sont très proches de celles de Jean Brun, et qu'il y exprime de façon certainement plus claire certains points évoqués ci-dessus).

Citations d'*Yves Chevallard.*

"Qu'est-ce que la transposition didactique ?

a) Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoir comme contenus à enseigner.
b) Les contenus de savoir désignés (explicitement : dans les programmes ; implicitement : par la tradition évolutive de l'interprétation des programmes) comme étant "à enseigner", en général préexistent au mouvement qui les marque comme tels. Quelquefois cependant, ce sont des créations ad hoc suscitées par les "besoins de l'enseignement".

c) Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique.

d) Le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir peut être appelé plus justement transposition didactique stricto sensu. Mais l'étude scientifique de la "transposition didactique" (qui en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques est une dimension fondamentale de la didactique des mathématiques) suppose la prise en compte de la transposition didactique lato-sensu, représentée par le schéma :

$\longrightarrow$ objet de savoir $\longrightarrow$ objet à enseigner $\longrightarrow$ objet d'enseignement

dans lequel le premier chaînon marque le passage de l'implicité à l'explicité, de la pratique à la théorie, du préconstruit au construit.

J. BRUN

Séminaire : Vendredi 9 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Pratique de l'analyse de situations d'enseignement et formation des maîtres.

Ce séminaire sera consacré à rendre compte d'un travail effectué, à l'école élémentaire, avec des formateurs d'enseignants, sur la description, l'observation et l'analyse de situations d'enseignement, aux fins de formation des maîtres.

CONTEXTE

Notre groupe de travail est composé de formateurs d'enseignants. Une partie d'entre eux sont chargés de la formation initiale des institutrices et instituteurs genevois, et l'autre partie de leur formation continue. Le groupe lui-même a été formé à la pratique de la "technique des situations" par Gérard CHARRIERE, mathématicien qui l'a conçue. Dans ce contexte notre travail est consacré à l'étude systématique de quelques situations d'enseignement, en prenant appui sur les cadres théoriques de la didactique des mathématiques et de la psychologie du fonctionnement cognitif. Le but est de mettre en évidence des éléments propres à favoriser la gestion de ces situations par les enseignants.

OBJET

Les éléments développés dans la présentation s'organiseront autour du problème général de l'analyse de la tâche proposée aux élèves. Ce problème peut être formulé ainsi : la conception et la pratique que les maîtres ont de l'analyse de la tâche sont un des facteurs importants qui déterminent l'évolution des états de connaissance pendant le déroulement même de cette tâche. La pratique la plus courante consiste à attribuer à une tâche la fonction d'un support qui se verrait "appliquer" une notion (selon la distinction habituelle forme-contenu). Dans ce cas, les conduites des élèves sont observées comme de purs produits de la tâche et analysées comme témoins d'une plus ou moins bonne compréhension de la notion en jeu. On en infère alors une connaissance, attribuée à l'élève. Donc, d'un côté, la tâche, de l'autre, l'élève.

Notre approche vise à réduire cette dichotomie qui risque de masquer les états de connaissance effectivement actualisés dans le rapport tâche/élèves, en cours de résolution de problème. Nos observations ont pour objet de décrire les orientations que prend l'activité des élèves, dans le but de préciser, et éventuellement réviser, l'analyse préalable de la tâche. Nous essayons donc de mettre en place quelques conditions nécessaires à une analyse de la tâche en situation d'enseignement.

Pour cela nous prenons appui sur les théories récentes des situations didactiques (Brousseau 1981) et du fonctionnement cognitif (Inhelder et coll. 1980 ; Saada-Robert 1979) :

- A la suite de Brousseau d'abord, nous posons comme principe que des transformations de connaissances, dans un temps bref, peuvent être décrites lorsque celles-ci sont mises à l'épreuve de situations qui posent des problèmes d'adaptation. La description de ces transformations a pour but d'identifier les significations attribuées par les élèves à la situation. L'étude de cette microgenèse devrait nous permettre de préciser l'analyse que les élèves eux-mêmes font de la tâche et de saisir les modifications qui interviennent lors du déroulement de la tâche. Celle-ci n'est pas en effet un donné auquel on aurait accès d'emblée puis sur lequel on travaille en fonction de ses connaissances, plus ou moins adaptées. La tâche se construit aussi au fur et à mesure que les élèves utilisent leurs connaissances. Nous pensons que dans cette activité de construction des significations s'élabore leur conceptualisation.

-La théorie du fonctionnement cognitif, comme l'indique Saada-Robert (1979) se distingue du courant cognitiviste qui isole l'action de son contexte et considère les procédures comme simples "produits finals" des connaissances. Pour elle, au contraire, l'accent est mis sur le "rôle constructif de l'action dans le processus d'activation des connaissances". L'étude de ce rôle suppose l'analyse des "conduites globales" des sujets pour qui la situation dans laquelle s'inscrit l'action est dotée d'une signification qui en oriente le déroulement. Rappelons la définition de Piaget, citée par Halbwachs (1981) : "La signification d'une assertion, d'un objet, d'une relation, ou de tout ce que vous voudrez c'est d'abord ce qu'on peut faire avec." Voilà bien notre problème : une tâche en classe, c'est d'abord quelque chose à faire, et ce qu'on peut faire avec n'est pas seulement un produit de notre connaissance ; c'est principalement élaborer une représentation du "comment faire" à partir des indices du contexte.

En résumé, notre démarche se fonde sur l'idée directrice suivante : prendre en compte, dans l'analyse de la tâche, la construction des significations attribuées par les élèves à cette tâche lors de son déroulement. En d'autres termes, notre analyse concerne ces moments où les élèves se posent la question : "comment dois-je m'y prendre, qu'est-ce-que je dois faire avec ce problème ?", et où les maîtres s'interrogent sur l'attitude à avoir face à cette question. Les actions alors mises en oeuvre sont au centre de nos observations, ainsi que la place du maître dans la conduite de la situation.

METHODE

-Le critère de choix des situations d'enseignement est la possibilité qu'elles offrent aux élèves d'entreprendre explicitement un travail de construction des significations. Il faut que ces situations permettent une évolution de cette construction. La situation consiste à utiliser une règle d'action simple, à imaginer les possibilités qu'offre cette règle d'action et à orienter ainsi son activité. La formulation écrite est sollicitée systématiquement.

- La tâche du maître est d'entrer dans le jeu des élèves et de saisir sur quelle base ils orientent leur activité. A partir de là il renvoie les élèves à leur analyse de la tâche en faisant en sorte qu'ils la poursuivent dans leur propre direction. Lorsqu'une idée directrice donnée arrive à son terme ou s'épuise, le maître relance la situation par une question ou un développement de ce que l'élève en fait.

-L'organisation des élèves entre eux est libre : travail en groupe ou individuel ; mais le travail en groupe est encouragé. Une des raisons en est qu'il offre une certaine garantie pour l'observateur et le maître de se centrer moins sur le sujet individuel que sur l'orientation des activités.

- L'ensemble des observations sont réunies en un protocole du déroulement des leçons et des productions écrites des élèves.

- L'analyse de ce matériel est découpée ainsi :
  + description de la tâche effectivement présentée aux élèves. Le modèle utilisé pour cette description est emprunté à Leplat et Pailhous (1977)
  + analyse diachronique des protocoles et des productions
    a) Repérage des problèmes que se sont posés les élèves à partir de leurs démarches (procédures d'actions, de symbolisations et questions au maître) et des étapes du processus de formation des représentations.
    b) Analyse des interventions du maître et de leur place dans l'orientation de l'activité des élèves.

Ce travail d'analyse (en particulier la prise en compte de l'aspect diachronique, du déroulement d'une leçon) nous apparait comme l'une des composantes nécessaires de la formation des maîtres, pour modifier la conception dominante de l'analyse des tâches scolaires. Ce point sera développé dans le séminaire en liaison avec la présentation du travail évoqué dans ce texte.

REFERENCES

BROUSSEAU G. Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol.2 No3 p.37-127 1981

CHARRIERE G. Exposé sur la technique des situations . FPSE, 1980

HALBWACHS F. Apprentissage des structures et apprentissage des significations. Revue Française de Pédagogie No57, p.15-21, 1981

INHELDER B. et coll. Procédures et significations dans la résolution d'un problème concret. Bulletin de Psychologie . Tome33.No345, p.645-648, 1980

SAADA-ROBERT M. Procédures d'actions et significations fonctionnelles chez des enfants de 2 à 5 ans. Archives de psychologie. No 182, p.177-235, 1979

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982, ÉCOLE D'ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS, OLIVET.

C.BLANCHARD - LAVILLE

Séminaire : Lundi 5 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Des manifestations du "transfert" et du "contre transfert" en situation d'enseignement des mathématiques.

(Suite à l'animation d'un groupe Balint d'enseignants de mathématiques).

Dans les années cinquante, Michaël BALINT, psychanalyste hongrois exilé à Londres, et sa femme Enid BALINT ont constitué des groupes de formation, à l'intention de médecins omnipraticiens se donnant pour but d'explorer les implications psychologiques inhérentes à la relation médecin-malade. Ce style de travail a été par la suite utilisé pour la formation psychologique de travailleurs sociaux (infirmières, assistantes sociales, conseillers conjugaux...), et de façon moins répandue, pour la formation d'enseignants.

Les participants à un groupe dit groupe Balint sont volontaires ; de plus, ils doivent se sentir engagés envers les autres membres du groupe à une présence assidue et active. L'effectif est, en général, limité à huit ou dix participants. Il s'agit pour l'animateur de créer une atmosphère suffisamment libre et amicale pour qu'elle permette à chacun d'apporter ses problèmes, ses interrogations au sujet de sa pratique de professeur de mathématiques, "dans l'espoir de les éclairer par l'expérience des autres" (1).

Pour éviter toute élaboration préalable du matériel présenté, il est demandé aux participants de ne pas préparer de rapports écrits à l'avance, mais au contraire d'essayer, dans la mesure du possible, de parler librement -d'une manière qui rappelle l'association libre- de leur expérience pédagogique et de relater au groupe les incidents critiques survenus dans leur classe au cours des jours qui précèdent la séance, ou encore les difficultés éprouvées au cours de tel ou tel épisode pédagogique, en n'évitant pas, autant que faire se peut, de rapporter ce qui est d'ordre émotionnel, plaisir ou malaise éprouvé, en liaison avec le quotidien de l'enseignant.

L'objectif est que, progressivement, les participants prennent conscience de la façon dont ils font usage de leur personnalité, de leurs convictions scientifiques, de leurs modèles de comportements au cours de l'acte pédagogique. Répétons que l'atmosphère du groupe doit être assez chaleureuse pour que, malgré la constatation des contrastes entre les expériences des uns et des autres -qui ressort assez rapidement et nettement de ce style de travail- les participants puissent accepter de reconnaître que leurs comportements en situation pédagogique diffèrent de ceux qu'ils voudraient avoir ou croyaient avoir toujours eu.

Dans ce séminaire, la pratique à laquelle il sera fait référence présente l'originalité de se rapporter à l'animation d'un groupe Balint exclusivement composé d'enseignants de mathématiques. A partir d'exemples puisés dans le discours des enseignants qui ont participé à ce groupe au cours de l'année 1981/82, et à partir de ma propre expérience d'enseignante, je tenterai de repérer quels phénomènes sont à grouper sous le vocable de "transfert" sur l'enseignant" ou de "contre-transfert" de la part de l'enseignant.

J'essaierai de montrer, à partir des manifestations qui permettent de les identifier, que dans toute situation d'enseignement -fut-elle d'enseignement de mathématiques- il est impossible qu'il n'y ait pas de mouvements transférentiels et contre-transférentiels ; de même que, dans toute situation d'interaction humaine, il est impossible de ne pas communiquer (2).

Cet axiome de base étant admis, les questions se posent alors de savoir si ces phénomènes ainsi identifiés peuvent être mis entre parenthèses, que ce soit, d'une part au niveau de la réalisation didactique proprement dite, ou d'autre part au niveau de la recherche fondamentale en didactique ; ou, si, au contraire, il est souhaitable d'envisager une formation des enseignants qui permette de les sensibiliser à l'existence de tels phénomènes et parallèlement, de réfléchir à l'articulation possible de ce type de problématique avec la problématique actuellement en vigueur dans le champ de la recherche en didactique des mathématiques.

1. *Cf. pour plus de détails : Michaël BALINT, Le médecin, son malade et la maladie. Petite bibliothèque Payot n° 86. Appendice I concernant la formation.*
2. *Cf. P. WATZLAWICK, J. HELMICK BEAVIN, Don D.JACKSON. Une logique de la communication, 1971, Seuil. P.46-47.*

P. BOERO
M.P. ROGANTIN

Séminaire : Jeudi 15 juillet
17h - 19h.

FICHE DE PRESENTATION.

Apprentissage du nombre et des opérations dans la vie et chez les anciennes populations, suggestions didactiques.

Les itinéraires didactiques que nous avons proposés sur l'apprentissage du nombre et des opérations sont tirés des réflexions suivantes :

1. Apprentissage de la langue et des mathématiques : l'apprentissage scolaire (à l'âge de 6 ans) de la lecture et de l'écriture vient après 3 ou 4 ans d'expérience linguistique de plus en plus complète (comprendre et s'exprimer, maîtrisant implicitement grammaire et syntaxe). L'apprentissage scolaire du nombre et des opérations s'appuie sur un patrimoine très pauvre (prends trois livres..., combien de verres sur la table ? ..., un, deux, trois, quatre... vas-y...)

   Il faut donc construire des situation d'apprentissage qui enrichissent préalablement l'expérience arithmétique des enfants (avant de traduire en symboles les concepts arithmétiques...).

2. Gravures et dessins de la préhistoire : ce qui nous étonne c'est que nous y trouvons de nombreux témoignages du genre :

   !!!! !!!! !!!! !!

   pour exprimer des opérations "évoluées" comme la division avec reste, bien avant l'invention des chiffres.
   Il ne faut donc pas avoir peur de construire les concepts arithmétiques avant leur traduction en symboles (pour les opérations plus que pour les nombres qui aujourd'hui "existent" déjà dans le milieu de l'enfant).

3. Arithmétique dans la vie extra-scolaire et au cours de l'histoire quand il n'existait pas encore un système scolaire généralisé en s'appuyant sur des "réalités" arithmétiquement structurées, les enfants peuvent (et hier pouvaient) apprendre :
   . les nombres comme "ordonnateurs" d'une suite (calendrier)
   . les nombres comme "compteurs" d'un ensemble d'obje ts et/ou comme "mesures" d'une valeur, d'une quantité (échanges économiques, mesurages...),
   . les opérations comme moyens pour résoudre des problèmes, en particulier choix de l'opération nécessaire (problèmes d'achat : j'ai une pièce de deux "mille" lires, et je veux acheter une glace qui coûte huit "cent" lires. Mon argent est-il suffisant ? Combien de reste me rendra le marchand ?)
   . la hiérarchie des valeurs des chiffres dans l'écriture positionnelle des nombres (hiérarchie des pièces de 10, 100, 1000 lires)

Il faut donc choisir des "situations didactiques" (échanges économiques, histoire "quantitative" de la classe...) qui prolongent l'école dans l'expérience extra-scolaire et l'expérience extra-scolaire dans l'école et construisent des concepts "sains" parce que contrôlés par les usages sociales plus "véritables".

L'expérience menée en 1980/81 et 1981/82 et l'observation naïve en plus de 15 classes (environ 300 élèves) paraissent prouver que les compétences que l'on peut construire à l'âge de 6 ans par cette voie sont plus hautes répandues et persistantes que par d'autres voies.

La structure du travail est la suivante :

CALENDRIER	ECONOMIE
... lire les nombres des jours ... écrire les nombres de jours ... se mouvoir en avant et en arrière sur la droite des nombres de jours ... grouper les jours d'absence ... rejoindre la fin du mois (combien de jours...).	- connaissance des pièces (symboles raffigurés dessus, classification, ordonnement...) - qu'est-ce qu'on peut acheter par les différentes pièces ? - achats avec types de pièces différentes - opérations d'achats (à un niveau naïf) - ordonnement de valeur - abaque "des monnaies" - écriture positionnelle des nombres - le chemin des marchandises et de l'argent.

G. SCHUBRING

Séminaire : Jeudi 15 juillet 1982.
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

L'histoire de l'Enseignement des Mathématiques.

Il n'existe point d'études systématiques sur les débuts et le développement de l'enseignement des mathématiques et moins encore de la didactique des mathématiques - contrairement à l'histoire des mathématiques.

D'abord, on présentera un aperçu sommaire sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques depuis le temps de Sumer et de l'ancienne Egypte jusqu'à nos jours. Cet aperçu contiendra quelques indications systématiques: L'enseignement des mathématiques proprement dit commence avec l'institutionalisation - quelle que soit la forme - d'une éducation scolaire et dépend en cela de l'organisation sociale particulière et de leurs valeurs sociales dominantes. Ensuite, le développement de l'enseigement des mathématiques ne peut être compris que si on l'analyse par rapport aux deux objectifs de tout système d'éducation: la formation générale et la formation professionelle. Ces deux objectifs, qui étaient quelquefois contradictoires et quelquefois complémentaires et dont le rapport n'est pas encore suffisamment établi aujourdhui, ont mené à de très diverses formes d'institutionalisation dans le système scolaire. L'enseignement des Mathématiques s'est toujours trouvé au carrefour de la formation générale et de la formation professionelle. Cette situation a conduit à des justifications diverses et même contradictoires de l'enseignement des mathématiques suivant les conjonctures idéologiques et les intérêts sociaux. Ces oppositions, inconciliables, se sont exprimées dans les dichotomies, bien connues, de l'aptitude à raisonner logiquement et de l'objectif d'utilité, etc.

Le moment du véritable développement de l'enseignement des mathématiques, c'est l'instutionalisation d'un système d'instruction publique et obligatoire donnant une formation générale, précédant la formation professionnelle; cela veut dire que le pas décisif est lié à l'institutionalisation d'une éducation publique de masse. Ce développement apparait à des moments différents suivant les nations, mais les premièr s modèles ont été établis en France et en Prusse au début du 19ème siècle.

Je discuterai de deux exemples qui rendront sensibles à la fois les variations dans le rôle joué par les mathématiques au "carrefour historique" entre formation générale et formation professionnelle et la signification des nouveaux rapports sociaux:

1. La France d'après la Révolution de 1789 jusqu'à la Restauration. Les Mathématiques étaient introduites dans le Plan Condorcet et dans les Ecoles Centrales pour la première fois comme sujet principal et "dominant" les langues anciennes. Cette fonction prépondérante a été abolie par Napoléon et remplacée par la domination des langues anciennes dans les Lycées. Cette politique a été poursuivie dans les Collèges Royaux de la Restauration.

2. La Prusse de la première moitié du 19ème siècle d'après les reformes de W. von Humboldt. Dans la réforme des Gymnasien d'après 181o, les mathèmatiques ont acquis la reconnaissance d'un sujet d'enseignement parmi les quatre sujets principaux, au même titre que les langues anciennes, avec six heures de cours par semaine dans chaque classe. Cette situation d'équilibre entre "culture" et "sciences" ne s'est pas maintenue et a été remplacée vers la moitié du siècle par l'institutionalisation de deux types parallèles d'écoles secondaires: l'une dominée par les langues, l'autre par les sciences.

Ensuite on discutera les liens entre les composantes, qui se sont historiquement développées comme éléments du système d'enseignement des mathématiques: l'institutionalisation de l'éducation scolaire, les conceptions de formation générale et leurs fonctions sociales, la formation des maîtres/professeurs, le rôle des manuels, les contenus et les méthodologies des programmes, le rapport avec le développement des mathématiques.

Le rapport entre le développement des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques est particulièrement intéressant, parce qu'il démontre que l'enseignement n'est pas seulement une réaction passive - comme une stalagmite - à une développement prétendu con-

tinuel - comme une stalactite - des mathématiques. Tout au contraire, il y a un influence très active de l'enseignement exercée sur le développement de la discipline, à la fois du point de vue des contenus et du point de vue des orientations méthodologiques. Un exemple de cette liaison étroite, c'est le problème des éléments: l'enseignement ne peut pas répondre à son but de donner un savoir sous une forme globale et synthétique, si le système présent des connaissances scientifiques n'est pas structuré par les mathématiciens eux-mêmes à partir de ses éléments. Ce sont les nécessités de l'enseignement qui donnent des impulsions pour la découverte des lacunes dans les connaissances et pour les restructurations systématique et méthodologique.

Enfin nous donnerons quelques indications sur l'histoire de la didactique des mathématiques; la base objective de son développement impliquait le véritable développement de l'enseigement des mathématiques, l'institutionalisation d'une éducation de masse et la fin d'un rapport binaire entre maître et élève. Mais la naissance comme discipline scientifique est plus récente et dépend du rapport entre théorie et pratique dans le système national d'éducation, et des conceptions dominantes de la professionnalisation du métier de maître/professeur.

REFERENCES

Comme je l'avais dit au début, il n'existe point d'études générales. La plupart des études - et surtout celles sur des questions particulières - sont écrites en allemand ou anglais. Au lieu de donner des références, je lance un appel pour la recherche des titres français :A partir de 19o8, la Commission Internationale pour l'Enseignement en Mathématiques (CIEM=IMUK=ICMI) a organisé une immense publication sur l'état actuel de l'enseignement des mathématiques. En France on a publié dans ce cadre cinq volumes sur

L'Enseignement des Mathématiques en France.

Mais je n'ai pas réussi à trouver ces volumes:

Rapport de la Sous-commission Française. 5 volumes, Librairie Hachette, Paris 1911.
Tome I, Enseignement Primaire, publié sous la direction de M. Bioche, 85 p.
Tome II, Enseignement secondaire, publié sous la direction de M.

Bioche, 159 p.
Tome III, Enseignement supérieur, publié sous la direction de M. Albert de Saint-Germain, 123 p.
Tome IV, Enseignement technique, publié sous la direction de M.P. Rollet, 212 p.
Tome V, Enseignement des jeunes filles, publié sous la direction de Mlle Amieux, 95 p.

Je souhaite alors aux participants de chercher dans la bibliothèque de leur ville ou institution, s'il y a là des volumes de cette publication et de les rapporter éventuellement à Orléans.

Alain MERCIER

Séminaire : Samedi 10 juillet 1982
14h30 - 16h30

FICHE DE PRESENTATION.

Le temps dans les systèmes didactiques.

A la rentrée scolaire, chaque année, se constituent les systèmes didactiques (ils se déferont à la fin de l'année scolaire). Composés d'un enseignant, d'enseignés, réunis autour d'un savoir (à enseigner/apprendre), outils technologiquement sophistiqués d'un projet social d'enseignement, ils apparaissent comme un moyen stable, et optimal eu égard à de nombreuses contraintes, de la "transmission des connaissances".

Yves Chevallard a montré (CHEVALLARD 1980) la nécessité de la mise en texte du savoir, afin que puisse se nouer le contrat didactique entre le maître et les élèves, face à un savoir. Nous allons reprendre son travail pour étudier comment fonctionnent les systèmes didactiques, et plus particulièrement comment les trois termes d'un système didactique produisent un temps particulier, le temps didactique.

1. Le texte du savoir résultat de la transposition didactique est discret, constitué d'une suite ordonnée d'objets d'enseignement. Ces objets ont un rôle transactionnel entre l'enseignant et les enseignés ("topogénèse"); entre passé et avenir ("chronogénèse"), ils vont marquer la progression du temps, ils vont être la mesure du temps didactique en même temps qu'ils vont le créer:

- objets nouveaux, ils permettent la progression de la classe - mais l'apprentissage finit par abolir leurnouveauté;

objets anciens, ils sont obsolètes et l'on ne peut plus que les rappeler à la mémoire: ils ne font plus progresser et ne peuvent plus faire l'objet d'un enseignement.

La transaction à leur endroit marque deux spécifications complémentaires:

- objets nouveaux, ils doivent être reconnus par les élèves pour être acceptés, leur nouveauté doit comporter un certain air de déjà vu;
- objets anciens, ils peuvent garder une nouveauté redoutable et être la source d'erreurs toujours recommencées: connus, ils ne sont pas pour autant appris ou apprivoisés.

Une trop grande nouveauté peut casser la progression, l'ancienneté ne garantit pas l'apprentissage, mais le temps didactique marqué par le défilé des objets d'enseignement va son train: progressif, cumulatif, irréversible. Il ne permet pas plus le retour en arrière que l'anticipation. Nous verrons comment (1), dans l'éternel présent de la classe, ce modèle de temporalité est inscrit dans le détail des actions du professeur et des élèves, et comment la différence de position des acteurs face au savoir le manifeste: il y a division des places, division des tâches, et le mouvement temporel s'articule à ces positions différentielles.

2. Cependant, le rapport au temps didactique "officiel" dont enseignants et enseignés sont des "militants" actifs est différent pour le professeur et pour les élèves. Le professeur a la maîtrise du temps: il nourrit sa progression en introduisant des objets d'enseignement toujours nouveaux, il est le maître des rappels et des ré-visions, il a en tête le passé mais surtout sa place est marquée de ce qu'il connaît l'avenir puisque l'avenir, c'est ce qu'il va dire. Les élèves sont assujettis au temps didactique: s'ils demandent son avancée, ils doivent se garantir du risque d'être dépassés car ils ne savent pas ce qui se passera. Ils exigent pour cela que ce qui se passe au temps t soit le tout de ce qui se passera, il ne faut pas que "maintenant" puisse dépendre de "plus tard". Il faut que chaque objet présenté soit reconnu et compris totalement au moment

même de sa présentation: plus tard, il ne pourra qu'être rappelé.

3. Ainsi défilent les connaissances (2), et plus le professeur prend du temps plus il a l'impression d'en manquer, tandis que plus l'élève a du temps pour une activité autonome plus il lui semble que le temps s'arrête... Les temps de l'enseignant et des enseignés, de l'enseignement et de l'apprentissage ne sont pas équivalents au temps didactique "officiel", qui définit la légalité temporelle du système didactique Professeur-Savoir-Elèves: nous dirons que le temps didactique est une fiction, mais une fiction nécessaire au procès d'enseignement; nous dirons que le savoir mis en texte, discrétisé en objets d'enseignements qui défilent sous l'effort conjoint du professeur et des élèves, est succession de connaissances (d'objets à reconnaître).

4. Le système d'enseignement, qui a permis la constitution des systèmes didactiques, entérine bien ce phénomène: il ajuste en permanence - comme le fait le professeur dans sa classe - le savoir contrôlé aux connaissances enregistrées, cela peut se voir très clairement lors des examens.

C'est qu'il ne peut mesurer que les connaissances enregistrées, faute d'avoir les moyens d'assurer la transformation, par le sujet didactique, de ces connaissances en savoir: le sens ne se constitue qu'à la fin, pour qui possède la fin du projet, et l'enseigné est assujetti au temps didactique qui l'exclut de l'avenir comme du passé. Un élève ne peut donc construire son savoir, donner du sens à ses connaissances, qu'à partir d'un projet personnel articulé sur l'enseignement qu'il suit: il lui faut enter son temps personnel sur le temps didactique. (Il faudrait ici ouvrir un domaine de recherche dont l'étude est essentielle, mais est aujourd'hui encore scotomisée pour un ensemble de raisons: le "travail à la maison", dans les systèmes didactiques observés, semble être un phénomène central dans le problème posé).

L'absence de prise du système d'enseignement sur le processus de construction personnelle du savoir est source d'une insatisfaction de plus en plus grande, et fait couler beaucoup d'encre dans la "noosphère": depuis toujours, les penseurs de l'enseignement se plaignent de ce que les objectifs de transmission du savoir ne sont jamais atteints parce que les élèves ne sont pas actifs à l'école! La méconnaissance de l'assujettissement du sujet didactique au temps didactique a toujours voué à l'échec les tentatives et les innovations en ce sens: très vite, le professeur redevient "directif", ce que les élèves demandent toujours! On peut seulement espérer pouvoir poser adéquatement - si notre théorie est ici suffisamment affinée - des problèmes d'ingéniérie didactique: poser le problème des conditions de situation qui réintègreraient l'activité de l'élève (c'est-à-dire le temps propre de son activité) dans la production du temps des systèmes didactiques.

Notes
(1) Voir TONNELLE 1979.
(2) Sur la distinction "connaissances"/"savoir", voir CHEVALLARD 1981.

Références

CHEVALLARD Y. (1980), La transposition didactique (à paraître).
CHEVALLARD Y. (1981), Pour la didactique (à paraître).
TONNELLE J. (1979), Le monde clos de la factorisation au premier cycle, IREM d'Aix-Marseille.

J.L. CLOSSET
LDPES
Université Paris VII.

Cours : Mardi 6 juillet 9h - 10h15
Atelier : Mardi 6 juillet 17h - 19h

FICHE DE PRESENTATION

Recherche en Didactique des Sciences Physiques.
Le raisonnement naturel en Electrocinétique.

Faculté des Sciences Agronomiques de l'Etat
Service de Physique Gembloux (Belgique).

Un concept définit pour le physicien un ensemble de propriétés. Les relations de ce concept avec d'autres sont établies, dans le cadre d'une théorie, indépendamment du cas d'application envisagé. La physique développe ainsi des modèles autocohérents qui fournissent une représentation du réel. L'enseignement de la physique vise à faire acquérir par l'élève et l'étudiant ce mode de description de la nature. Mais le sujet n'est pas vierge; il a déjà été confronté aux phénomènes naturels et le besoin d'explication qu'ils ont suscité lui a fait développer des systèmes explicatifs qui constituent un savoir commun souvent désigné dans la littérature par le terme de "représentation". Ce savoir commun est lié à des observations juxtaposées. Il est peu structuré et ne constitue pas un système entièrement cohérent. Il l'est cependant par morceau, par îlot. En l'absence d'un cadre théorique préexistant, ce savoir est essentiellement explicatif et non prédictif : il est opératoire au premier degré.

Ce qui tient lieu de concept chez l'étudiant ne correspond pas au concept du physicien. Dans l'un et l'autre cas il s'agit d'un ensemble de propriétés définies sur un certain domaine. Mais le "concept" de l'étudiant peut impliquer des propriétés appartenant à plusieurs concepts différents du physicien. Le domaine de validité de ces propriétés peut être plus restreint et avoir des limites à la fois flues et non explicitement définies par le sujet lui-même. Pour parler de cette unité d'étude du savoir commun nous emploirons le terme de "notion". L'étudiant met ces notions en relation et construit des raisonnements qui possèdent le plus souvent une certaine structure et une relative stabilité mais qui sont fréquemment en contradiction avec ceux du physicien.

Le bon descripteur du savoir commun n'est donc pas nécessairement le concept du physicien, pas même la "notion" de l'étudiant. En effet tout comme un concept ne se définit qu'à partir des relations qu'il a avec d'autres, la notion ne s'éclaire qu'au travers de son articulation avec d'autres dans les raisonnements de l'étudiant. Ceux-ci constituent l'objet de notre étude. De ce point de vue le terme de "représentation" souvent utilisé ne nous paraît pas clair et nous lui préférons celui de "raisonnement naturel et spontané".

Beaucoup d'erreurs rencontrées dans les copies ou au laboratoire de travaux pratiques, apparaissent très différemment à celui qui connaît le raisonnement spontané de ses élèves dans le champ conceptuel concerné. Les études de ces raisonnements ouvrent la porte à un autre regard sur les "erreurs" des élèves et des étudiants et elles permettent de suggérer une pratique différente prenant en compte l'existence de cette physique naturelle : nous y reviendrons.

Le Laboratoire de Didactique de la Physique dans l'Enseignement Supérieur (L.D.P.E.S.) de l'Université de Paris VII auquel nous appartenons a fait, pour les raisons que nous venons de citer, le choix d'insister sur ces raisonnements. Les travaux d'Edith SALTIEL et de Laurence VIENNOT qui concernent la mécanique (1, 2, 3), mettent en évidence l'existence de raisonnement stables, présents dès le plus jeune âge, qui constituent une physique parallèle à la physique enseignée. C'est donc dans un sens "extra-scolaire" que les termes de "naturel et "spontané" ont alors été employés. Cela paraît particulièrement justifié puisque c'est probablement du vécu de chacun et du besoin d'explication qu'il suscite que provient cette mécanique spontanée. Celle-ci possède un relativement grand degré de cohérence interne ce qui explique sa stabilité et son manque d'interférence avec l'enseignement des matières correspondantes.

L'électricité garde pour l'élève un aspect mystérieux lié à l'absence d'une expérimentation directe. Contrairement à ce qui se passe en mécanique, le système explicatif pourrait se construire à l'occasion de l'enseignement et lui être plus sensible. C'est ce que nous montrons dans notre travail : d'où son intérêt particulier. Il suggère qu'un enseignement différent puisse, plus facilement que dans d'autres domaines, mettre en place un système explicatif différent, moins incompatible avec celui de la physique.

L'expérience d'un enseignement d'électrocinétique nous a confronté aux difficultés rencontrées par les étudiants et nous a conduit à nous interroger sur leur origine, d'abord à l'aide d'interviews pratiquées avec un petit nombre d'étudiants, puis de questionnaires de plus en plus précis présentés à des groupes d'environ 50 élèves ou étudiants tant dans l'enseignement secondaire que dans l'enseignement supérieur.

Les résultats acquis montrent que le raisonnement intuitif est essentiellement local "en suivant le circuit" (ce qui se passe en aval n'influence pas l'amont) : nous l'avons baptisé "séquentiel". Ce mode de raisonnement prend surtout naissance à l'occasion de l'introduction de la notion de courant, grandeur qui est privilégiée, par les élèves et par leurs professeurs, par rapport à celle de différence de potentiel. Ceci se traduit de façon spectaculaire aussi bien dans la manière d'interpréter la topologie des circuits que par le non respect des lois élémentaires, telles que les lois de conservation de la charge ou de l'énergie. Les conséquences de ce raisonnement prennent des formes simples au début de l'enseignement, telle l'usure du courant le long du circuit, pour se retrouver sous des formes plus subtiles en fin de cursus universitaire et même chez des physiciens de métier.

On constate ainsi, dans le cas particulier de l'électrocinétique, que les difficultés engendrées à un niveau du cursus d'enseignement peuvent disparaître lorsqu'une pratique suffisante a installé des mécanismes de raisonnement automatiques mais se retrouver lorsqu'on modifie quelque peu la situation ou lorsqu'on passe à un autre niveau. Le raisonnement naturel se transpose donc de préférence au raisonnement appris.

Une explication serait, selon nous, que l'introduction de la notion de courant n'est que l'occasion de la manifestation du raisonnement séquentiel et que celui-ci tire son origine de schémes de pensées profondément ancrés en nous, liés à une culture et un vécu où le temps est très présent et où le raisonnement local est privilégié par rapport au raisonnement global. A propos d'une étude sur les formes d'énoncé de problèmes, Serge FAUCONNET a d'ailleurs montré que ce raisonnement pouvait également jouer un rôle important en hydrodynamique et en mécanique. Il est probable qu'il peut se retrouver dans d'autres domaines de la physique et dans d'autres branches scientifiques.

Confronté au problème du raisonnement séquentiel, il est légitime de s'interroger sur les remèdes à apporter. Il n'y a évidemment pas de solution miracle et nous n'avons nullement l'intention d'être dogmatique dans le domaine. Nous pensons d'abord qu'il est essentiel d'informer les enseignants du raisonnement naturel de leurs élèves mais qu'il est aussi important d'informer les élèves de leur propre raisonnement. S'il n'est pas raisonnable de penser détruire le raisonnement naturel une fois celui-ci installé, il est par contre possible d'apprendre aux élèves et aux étudiants à s'en défier : pour cela il faut qu'ils en prennent conscience. Il reste alors à proposer un raisonnement correct. Les questions que nous avons mises au point à des fins de recherche peuvent être utilisées dans ce cadre : nous l'avons expérimenté avec nos étudiants et les résultats constatés nous ont parus positifs. Il nous semble aussi important d'éviter dans l'enseignement tout ce qui renforce inutilement la tendance naturelle au raisonnement que nous avons dénoncé plus haut. Il en est, par exemple, ainsi de l'analogie hydraulique telle qu'elle est généralement pratiquée.

Nous pensons enfin qu'une introduction différente de l'électricité pourrait éviter de déclencher ce type de raisonnement et mettre en place un schéma explicatif plus compatible avec celui du physicien. En particulier, nous croyons qu'il conviendrait d'insister sur le caractère global des phénomènes électriques dans les circuits et que des présentations en termes d'énergie parallèlement à l'introduction de la notion de courant et de différence de potentiel favoriserait cela.

Références

1. E. SALTIEL, J-L. MALGRANGE : Les raisonnements naturels en cinématique élémentaire. B.U.P. n° 616, p. 1325-1355 (1979)

2. L. VIENNOT : Intuition et formalisme en dynamique élémentaire. B.U.P. n° 587, p. 49-84 (1976)

3. L. VIENNOT : Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire Hermann (1979)

4. S. FAUCONNET: Etude de résolution de problème. Quelques problèmes de même structure en physique. Thèse Université Paris VII (1981).

Liste des participants à la

SECONDE ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

5 - 17 JUILLET 1982. ÉCOLE DES ÉDUCATEURS SPÉCIALISÉS. OLIVET

ARTIGUE Michèle	Université Paris VII 2, place Jussieu, 75005 PARIS.
BALACHEFF Nicolas	IMAG. USMG - BP 53 X - 38041 GRENOBLE Cedex.
BANNOUT Hicham	Université libanaise Faculté de pédagogie I,près de l'UNESCO BEYROUTH. Liban.
BARON Paul	Collège Victor Hugo 76,78, avenue Président Wilson 94230 CACHAN.
BAUTIER Thierry*	
BELLARD Nicole	Collège Celleneuve rue du Petit Pas, 34000 MONTPELLIER.
BERTHELOT Christiane	Lycée L. Barthou, 64000 PAU.
BERTHELOT René	Ecole Normale 44, bld. Sarrailh, 64000 PAU.
BLANCHARD-LAVILLE Claudine	Université Paris X. UER Sciences de l'Education 200, avenue de la République 92001 NANTERRE Cedex.
BERDONNEAU Catherine*	
BESSOT Annie	IREM. Tour de Maths. Domaine universit BP 41, 38401 ST MARTIN D'HERES
BOERO PAOLO	Istituto Matematico Universita Via L.B. Alberti, 4-16132, GENOVA, Ita
BOUDAREL Jean	Lycée G. Monod, 71, avenue de Ceinture, 95880 ENGHIEN LES BAINS
BRISSET Yvette	Lycée A.Briand, 20, avenue Commandant Dumont, 05000 GAP.

BROUSSEAU Guy	IREM. Université de Bordeaux I Avenue de la Libération, 33405 TALENCE.
BRUN Jean	FPSE. Université de Genève 24, rue du Général Dufour 1211 GENEVE 4. Suisse.
BRUSTON Michel	CNAM - C2 F, 2, rue Conté, 75003 PARIS.
BUTLEN Denis	ENG de Versailles 3, bld. de Lesseps, 78000 VERSAILLES.
CANNIZZARO Lucilla	Istituto Matematico "G.Caltelnuovo" Universita di Roma, Pzale Aldo Moro 5 00185 ROMA. Italie.
CAUSSE Annie	Lycée de filles, 1, bld. des Pyrénées 31800 ST. GAUDENS.
CAUTY André*	
CHARRIER Jean-Marc	Lycée St. Charles, bld.Clémenceau 49000 ANGERS.
CHENE Annie	Collège Alcuin, 37320 CORMERY.
CHEVALLARD Yves	IREM. UER de Marseille Luminy 70, route Léon Lachamp, 13288 MARSEILLE Cedex 2.
CHIAVERINA Dominique	Collège Marguerite de Navarre, 1, cours Bosquet, 64000 PAU.
CLOSSET Jean-Louis	Service de Physique Faculté des Sciences Agronomiques de l'Etat, 8, avenue de la Faculté, B 5800 GEMBLOUX. Belgique.
COMITI Claude	IMAG. USMG - BP 53 X - 38041 GRENOBLE Cedex.
CONNE François	FPSE. Université de Genève 24, rue du Général Dufour 1211 GENEVE 4. Suisse.

COQUIN Danièle	Université de Poitiers Laboratoire de Psychologie 95, avenue du Recteur Pineau 86000 POITIERS.
CORNU Bernard	Université Grenoble I Institut de Maths.Pures, BP 116, 38401 ST.MARTIN D'HERES.
DELSEDIME Piero	Istituto Matematico dell'Universita Via Carlo Alberto, TORINO. Italie. TO
DENYS Bernadette	Lycée Victor Hugo, 27, rue de Sévigné, 75003 PARIS.
DESPLAND Jean-Claude	IREM. Université d'Orléans rue de Chartres, 45046 ORLEANS Cedex.
DOAN Quynh	Institut Pédagogique n° 1, HANOI. Vietna
DOUADY Régine	IREM. Université Paris VII, 2, place Jussieu, 75005 PARIS.
DORRA *	
DUROUX Alain	Lycée Technique, avenue de l'Université 33400 TALENCE.
EBERHARD Madeleine	IMAG. USMG - BP 53 X - 38041 GRENOBLE Cedex
ERRECALDE Paule	INRP 91, rue Gabriel Péri, 92120 MONTROUGE
FERRAND Gérard	IREM. Université d'Orléans rue de Chartres, 45046 ORLEANS Cedex
FERRANDEZ REINISCH Anne-Marie	Laboratoire de Psychologie Expérimentale 98, bld. E. Herriot, 06036 NICE Cedex.
FISCHER Jean-Paul	Ecole Normale, 16, rue de la Victoire 57158 MONTIGNY LES METZ
GALLO Elisa	Istituto di Geometria, Universita di Torino, via principe Amedeo 10123 TORINO, Italie.

GALVEZ PEREZ Grecia	Apartado Postal 19-197 MEXICO 19 DF, Mexique.
GAULIN Claude	Département de Didactique, FSE Université Laval, QUEBEC PQ Canada G1K 7P4.
GLAESER Georges	IREM. Université Louis Pasteur, 10, rue du Général Zimmer 67084 STRASBOURG.
GOETGHELUCK Jeannine	Lycée Turgot, 69, rue Turbigo, 75003 PARIS.
GRAS Régis	Département de Mathématique et Informatique, Campus de Beaulieu 35041 RENNES Cedex.
GRISVARD Catherine*	
GROSSI PILLAR Esther	GEEMRA, rua Luis Manvel 230, Ap 8, 90000 PORTO ALEGRE, Brésil.
GUILLERAULT Michel	Tour de Mathématique, Domaine Univers. BP 41, 38401 ST.MARTIN D'HERES.
GUILLERAULT Mireille	Ecole Normale, 30, rue M.Berthelot, 38100 GRENOBLE.
GUILLERMARD Rirette	Ecole Normale de Garçons 43, avenue St. Liegeard, 06100 NICE.
HAN LIEN HAI	Service de l'enseignement de Hanoï HANOI, Vietnam.
HECHT Isabelle	Collège Marché Marais, 77012 MELUN.
JANIAUD Marie-Noëlle	Collège A.Chaussy, avenue Carnot, 77170 BRIE COMTE ROBERT.
JOSHUA Babette	IREM. UER de Marseille Luminy, 70, route Léon Lachamp 13288 MARSEILLE Cedex 9.
JOSHUA Samuel	IREM. UER de Marseille Luminy, Case 901, 70, route Léon Lachamp, 13288 MARSEILLE Cedex 9.

JOUSSON Gisèle	Ecole Maternelle Michelet 33400 TALENCE.
KONE Fulgence	IREM. Université de Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 TALEN
KUBLER Jeannine*	
LABORDE Colette	IMAG. USMG - BP 53 X - 38041 GRENOBLE Cedex
LANDRE Claude	Collège M.Jacob, rue M. Millet 45140 ST.JEAN DE LA RUELLE
LHOMME Robert	AGADIR, Maroc.
LE CHEVALIER Jean-Luc	Lycée J.B. Corot, 3, rue St.Vaast 59508 DOUAI.
LECLER Françine	Collège Roger Bellair 14220 THURY HARCOURT.
LE GOFF Claire	Collège Paul Bert, 8, rue Mongenot 94160 ST. MANDE
LE HAI Chau	Ministère de l'Education, HANOI, Vietna
LE KHAC Bao	Maison d'Edition de l'Education, HANOI, Vietnam.
LUNKENBEIN Dieter	Université de SHERBROOKE. Canada.
MARTHE Patrick	Collège Joliot Curie, Cité St.Marc 45000 ORLEANS.
MAURY Sylvette	IREM. USTL. Place E.Bataillon 34060 MONTPELLIER Cedex.
MEJIAS UBETO Béatrice Maria	IMAG USMG - BP 53 X - 38041 GRENOBLE Cedex.
MERCIER Alain	IREM. UER Marseille Luminy, 70, route Léon Lachamp, 13288 MARSEILLE Cedex 9.
METREGISTE René	Collège Chateau de l'Hers, Avenue Lasbordes, 31500 TOULOUSE.

MILHAUD Nadine	Ecole Normale des Filles 181, avenue de Muret, 31300 TOULOUSE.
MORIN Christiane	Lycée Technique d'Etat, Avenue J.Mermoz 34000 MONTPELLIER.
MOSER James	Wisconsin Center for Education Research 1025 West Johnson St. MADISON. Wisconsin 53706, Etats Unis.
NGO HUU DUNG	Institut de Recherches Pédagogiques, HANOI Vietnam.
NORMAND Catherine	Lycée de Sèvres, 1, rue Léon Journault 92370 SEVRES.
PERES Jacques	IREM. Université de Bordeaux I, 351, cours de la libération, 33405 TALENCE
PERRET-CLERMONT Anne-Nelly	Séminaire de Psychologie. Université de Neuchatel, avenue Maladière 8, 2000 NEUCHATEL.Suisse.
PERRIN Marie-Jeanne	IREM. Université Paris VII, 2, place Jussieu, 75005 PARIS.
POCHART Marie-Rose	CREM. BP 1514, KISANGANI. Zaïre.
PORCEL Nicole	Ecole Normale, 23, rue des Ecoles 39015 LONS LE SAULNIER.
RATSIMBA RAJOHN Harrison	IREM. Université de Bordeaux I 351, cours de la Libération, 33405 TALENCE
RESNICK Laureen	University of Pittsburgh LRDC 3939 O'Hara Street, PITTSBURGH PA.15260, Etats Unis.
RICCO Graciela	Laboratoire de Psychologie M.S.H., 54, bld. Raspail, 75270 PARIS Cedex 06.
RICHARD Françoise	Université de Provence, UER Maths. Place Victor Hugo, 13331 MARSEILLE Cedex 3
ROBERT Aline	Université Paris VI. UER 48. Laboratoire LMF, 4, place Jussieu, 75005 PARIS.

ROGALSKI Jeannine	Laboratoire de Psychologie M.S.H., 54, bld.Raspail 75270 PARIS Cedex 06.
ROGANTIN Maria-Piera	Istituto Matematico, Universita di Geno Via LB Alberti 4, 16132 GENOVA. Italie.
ROUCHIER André	IREM. Université d'Orléans rue du Chartres, 45046 ORLEANS Cedex.
SAADA EL MADI	FPSE. Université de Genève, 24, rue du Général Dufour 1211 GENEVE 4. Suisse.
SAIZ MARTIN Irma Hélèna	José M. Velasco 101, San José Insurgentes, ZP 19 MEXICO DF. Mexique.
SAMURCAY Renan	Laboratoire de Psychologie Cognitive M.S.H., 54, bld. Raspail, 75270 PARIS Cedex 06.
SCHNEIDER Maggy	F.U.N. Départ.de maths, 8, rempart de la vierge, 5000 NAMUR. Belgique.
SCHUBAUER LEONI Anna Maria	FPSE. Université de Genève 24, rue du Général Dufour 1211 GENEVE 4. Suisse.
SCHUBRING Gert.	Universität Bielefeld, IZHD, Postfach 8640, 4800 BIELEFELD 1, Allemagne, RFA.
SLIM Mariam	Faculté de Pédagogie, UNESCO, BEYROUTH. Liban.
SLUYS Adrien	Ecole de Pédagogie, Université de Niamey BP 10963, NIAMEY. Niger.
THORIGNY Philippe	SNES. 1, rue de Courty, 75341 PARIS Cedex
TONELLE Jacques	Collège Lou Garlaban, Le Charrel 13400 AUBAGNE.
VERBAERE Odile	Collège Louise Michel, 115, rue de l'Arbrisseau, 59000 LILLE.

VERGNAUD Gérard	Laboratoire de Psychologie M.S.H., 54, bld. Raspail, 75270 PARIS Cedex 06.
VIENNOT Laurence	IREM. Université Paris VII, 2, place Jussieu, 75005 PARIS.
VIGLIENZONE Paola	Istituto Matematico, Universita de Genova, Via LB Alberti 4. 16132 GENOVA. Italie.

----

* *Les collègues dont le nom est accompagné d'un astérisque n'ont pas transmis d'adresse de lieu de travail.*