

Modéliser avec des barres à l'école et au début du collège

Christine CHAMBRIS⁴⁴

IREM de Paris, INSPé de l'académie de Versailles (site Evry), LDAR, CY Cergy Paris Université,
F-95000, France

Résumé. Depuis 2018, les textes officiels ont introduit des représentations avec des lignes (ou des barres) pour la résolution de problèmes arithmétiques à l'école et au début du collège. L'atelier a pris appui sur une situation de formation pour le premier degré conçue pour répondre aux nouveaux besoins de formation. Le colloque a été l'occasion de revisiter la situation au regard des enjeux de la modélisation et de questionner ou de préciser ces enjeux dans la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires, enjeux dont la visibilité est renouvelée avec l'arrivée des « modèles en barres ». Certains choix institutionnels sur les « modèles en barres » ont été évoqués.

Mots-clés. Résolution de problèmes arithmétiques, modèles en barres, construction et valeur d'un attribut, construction d'un modèle, utilisation d'un modèle, notion mathématique de quantité.

Abstract. Since 2018, official texts have introduced representations with lines (or bars) for word problem solving in school and early middle school. The workshop was based on a training situation for primary school teachers designed to meet the new training needs. The conference provided an opportunity to revisit the situation in terms of the modelling issues at stake, and to question or clarify these issues in the solving of elementary word problems, issues whose visibility has been renewed with the introduction of "bar models". Some institutional choices concerning "bar models" were discussed.

Keywords. Word problem solving, bar models, construction and value of an attribute, construction of a model, use of a model, mathematical notion of the quantity.

Resumen. Desde 2018, los textos oficiales introducen representaciones con líneas (o barras) para resolver problemas aritméticos en la escuela primaria y al inicio de la escuela secundaria. El taller se basó en una situación de formación del profesorado de educación primaria diseñada para satisfacer las nuevas necesidades de formación. El coloquio fue una oportunidad para repensar la situación desde el punto de vista de lo que está en juego en la modelización y para cuestionar o clarificar esto en la resolución de problemas aritméticos elementales, sabiendo que la visibilidad de lo que está en juego en la modelización se ha renovado con la llegada de los "modelos de barras". Se discutieron algunas opciones institucionales en relación con los "modelos de barra".

Palabras clave. Resolución de problemas aritméticos, modelos de barras, construcción y valor de un atributo, construcción de un modelo, utilización de un modelo, noción matemática de cantidad.

La préparation, le travail réalisé au cours de l'atelier et la réflexion sur le thème de la modélisation qu'il a amorcée font l'objet d'un texte en cours d'écriture qui sera soumis à une revue du réseau des IREM dans quelque temps. Par ailleurs, l'activité de formation sur laquelle l'atelier a pris appui a fait l'objet d'une publication dans le bulletin de l'APMEP Au fil des maths (Chambris, 2023). Les trois pages qui suivent constituent un résumé long de l'atelier.

⁴⁴ christine.chambris [at] cyu.fr

L'atelier s'est déroulé en plusieurs étapes. Tout d'abord, une rapide présentation du contexte institutionnel a été faite ainsi que celle du contexte de l'atelier puisqu'il s'appuie sur une tâche de formation conçue précisément en réponse à ce contexte. De quoi s'agit-il ? Une injonction véhiculée par des textes institutionnels a fait irruption depuis 2018 dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques : *enseigner la résolution de problèmes avec les modèles en barres* à moins qu'il ne s'agisse d'*enseigner les modèles en barres*. En réponse à cette injonction, nous avons mis au point une tâche, que nous appellerons « Boucle d'or », pour la formation des formatrices et des enseignantes du primaire (Chambris, 2023). Des productions des enseignantes et formatrices qui ont participé aux formations (que nous désignerons ci-après par *les formées*) ont été récoltées au cours des nombreuses mises en œuvre de la tâche. L'atelier prend appui sur une sélection de ces productions qui permet aux participants (désignés par *les participants*) de revisiter des enjeux de la modélisation qui émergent au fil de l'atelier.

Quelques minutes ont été laissées aux participants pour qu'ils s'attellent à la tâche Boucle d'or. Elle est présentée comme suit.

Voici un extrait d'un conte :

En arrivant dans la salle à manger elle remarqua sur la table trois bols de soupe. Elle s'approcha du grand bol, celui du grand ours, goûta la soupe et la trouva bien trop chaude.

Elle s'approcha alors du moyen bol, celui du moyen ours, goûta la soupe et la trouva bien trop salée. Elle s'approcha enfin du petit bol, celui du petit ours, goûta la soupe et la trouva tellement à son goût qu'elle la mangea jusqu'à la dernière goutte. (Boucle et les trois ours, texte de Rose Celi, Gerda Muller, éd. Père Castor Flammarion)

Représenter par des lignes droites, les grandeurs du texte, ce qui peut être plus ou moins grand.

Dans un deuxième temps, des productions (figure 1) ont été examinées, au filtre d'une diversité de critères que j'évoque maintenant. Tout d'abord c'est la multiplicité des « grandeurs du texte » identifiées qui retient l'attention. Nous avons parlé d'« attributs « quantitatifs » variés ». Si certains attributs sont attendus, comme les tailles des bols, les tailles des ours ou encore les quantités de soupe, d'autres le sont un peu moins, comme le sel ou la température de la soupe et d'autres sont totalement surprenants comme « Intensité du plaisir de boucle d'or devant telle ou telle soupe » (I, figure 1.f). Des constructions relativement sophistiquées sont aussi proposées comme la comparaison de la taille de la table avec la place occupée par les bols posés sur la table.

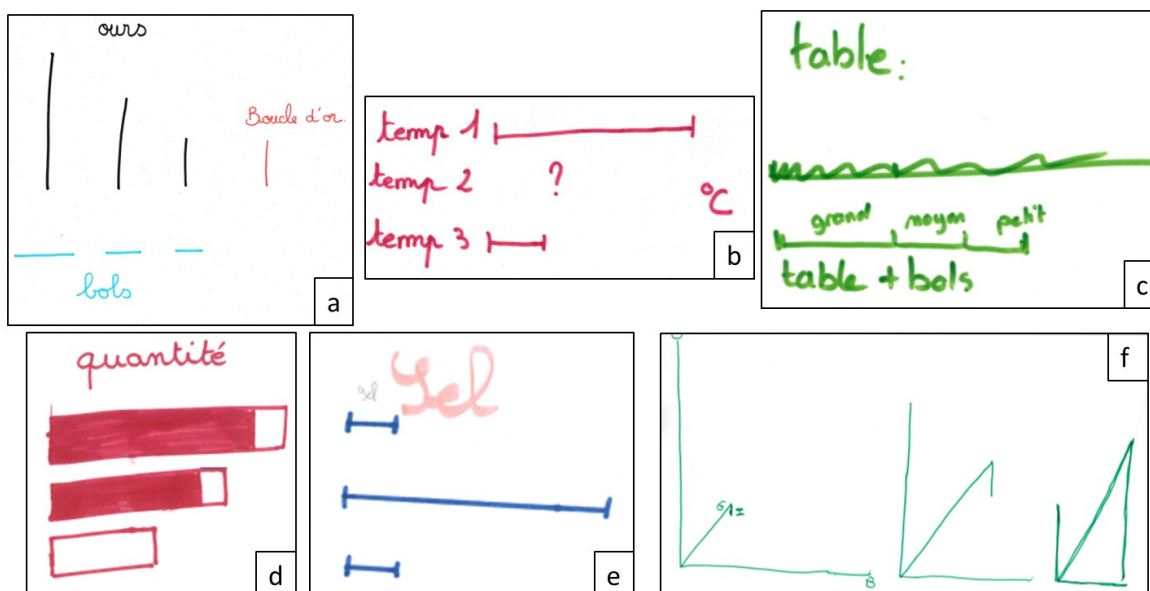


Figure 1 : une sélection de productions réalisées par les formées

La diversité des productions permet alors d'interroger, au filtre de la modélisation, le travail réalisé par les formées pour produire les lignes. Pour commencer nous nous focalisons sur la construction d'un attribut. Ce cas se présente avec l'examen des productions sur le thème de la « préférence » ou du « rejet » (type f) de la soupe, qui montre que l'attribut n'est pas un donné mais que c'est bien une construction intellectuelle qui permet d'aboutir à la production de lignes plus ou moins longues et d'une désignation (*le rejet, la préférence, etc.*) pour ce qui est représenté. Ensuite, nous discutons de la représentation des « bols ». En effet, selon les productions il est clair que le mot « bols » renvoie à une superficie (ou à un diamètre) pour un bol posé sur la table (c), quand dans d'autres cas c'est la hauteur du bol ou son volume qui doit être considéré. Ainsi, on voit que si le texte évoque les *grandeurs des bols* (petit, moyen, grand), la représentation des lignes engage, au moins certaines fois, les formées à spécifier un attribut de l'objet *réel* même si cela reste implicite sur les productions. Ces éléments suggèrent que l'identification ou la construction des attributs relève bien de l'activité de modélisation.

L'identification d'un attribut va souvent de pair avec l'identification de ce que nous avons appelé les « valeurs de l'attribut ». C'est particulièrement évident dans le cas de la « préférence » où la définition même de l'attribut engage à se poser la question et à choisir *ce qui est préféré* entre une soupe « trop chaude » et une soupe « trop salée ». On voit bien souvent que la détermination des valeurs des attributs est l'objet d'investigations au-delà des « valeurs » (e.g., petit, moyen, grand) données par le texte. Ainsi, certaines formées s'interrogent sur la taille de Boucle d'or et la mettent en relation avec celle des ours (a). Le « sel » et la « température » de la soupe du petit ours sont identifiés comme des normes par rapport auxquelles les autres valeurs sont situées (e) (ou non ! (b)). Pour un bol donné, les variations des quantités de soupe au fil du temps font l'objet d'un intérêt particulier où l'on voit souvent que seulement deux des trois quantités engagées (quantité initiale, variation, quantité finale) sont représentées contrairement à ce qui apparaît sur la figure 1.d. C'est en effet un raisonnement d'un type particulier qui permet de mettre en relation les trois quantités : la quantité initiale, la quantité bue et la quantité finale. Pour résumer, l'étude des productions met en évidence un travail nécessaire pour produire les « valeurs » des attributs, valeurs qui bien souvent traduisent

une relation d'ordre entre deux « référents » selon le point de vue imposé par l'attribut, plutôt qu'une « valeur ».

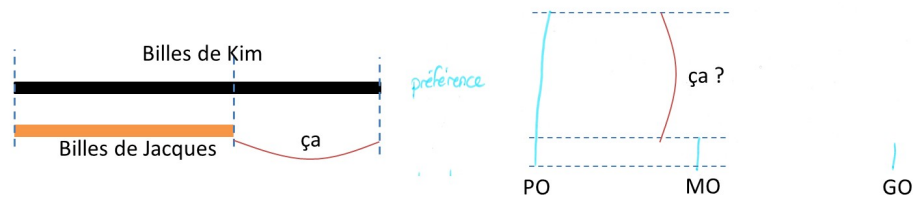


Figure 2 : L'écart

Un nouveau regard sur les productions permet, ensuite, de revenir sur les types de relations qui sont sollicitées dans les productions entre les valeurs d'un attribut pour un attribut donné et sur les moyens utilisés pour les représenter. Les relations qui apparaissent sont en premier lieu la relation d'ordre binaire (A est plus grand que B : les tailles des ours, etc.) avec des lignes parallèles. La transformation d'un état initial en un état final (par exemple pour les variations des quantités de soupe) traduit un autre type de relation. Il s'agit de représenter une relation ternaire dont nous avons dit qu'elle ne va pas de soi (la quantité initiale de soupe est diminuée d'une certaine quantité et il en reste – ou pas). La représentation est alors une ligne en deux parties à partir de laquelle trois « valeurs » peuvent être identifiées (figure 1.d, parties blanche, rouge et tout). Les « bols » accumulés (figure 1.c) composent une certaine superficie (comparée à la table) : la ligne des bols est en plusieurs parties. Il s'agit alors de représenter une relation de composition entre un tout et ses parties. Finalement, un quatrième type de relation est introduit, qui n'apparaît qu'à la marge dans Boucle d'or (figure 1.c). Il s'agit d'une relation ternaire, la comparaison de deux quantités et *l'écart* entre les deux quantités. L'examen de cette question permet de se rendre compte que la notion « d'écart » n'a pas, par exemple, de pertinence pour l'attribut « préférence » (figure 2).

Ces réflexions sur les relations nous amènent alors d'une part à expliciter des normes de représentation pour les modèles en barres dans le champ des problèmes additifs car nous retrouvons les trois premières catégories des structures additives (Vergnaud, 1986). Ces normes sont communes aux curricula qui ont développé un usage des modèles en barres (figure 3) (e.g., Kaur, 2019 à Singapour, Polotskaia, Gervais & Savard, 2019, dans une ingénierie qui s'inspire des travaux de Davydov dans le domaine de la pré-algèbre). D'autre part, la réflexion sur l'impossibilité d'inclure la préférence dans les normes de représentation amène à interroger plus avant ce qui est représenté avec les barres dans les curricula qui les utilisent. Les barres représentent ce qui peut être comparé, ce qui peut être ajouté. On retrouve les propriétés classiques des « quantités » : « ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution » (Bézout, 1764). Finalement les barres pourraient représenter **le modèle mathématique** de la quantité, notion nécessaire pour apprendre l'arithmétique à l'école, et donc l'enseigner.

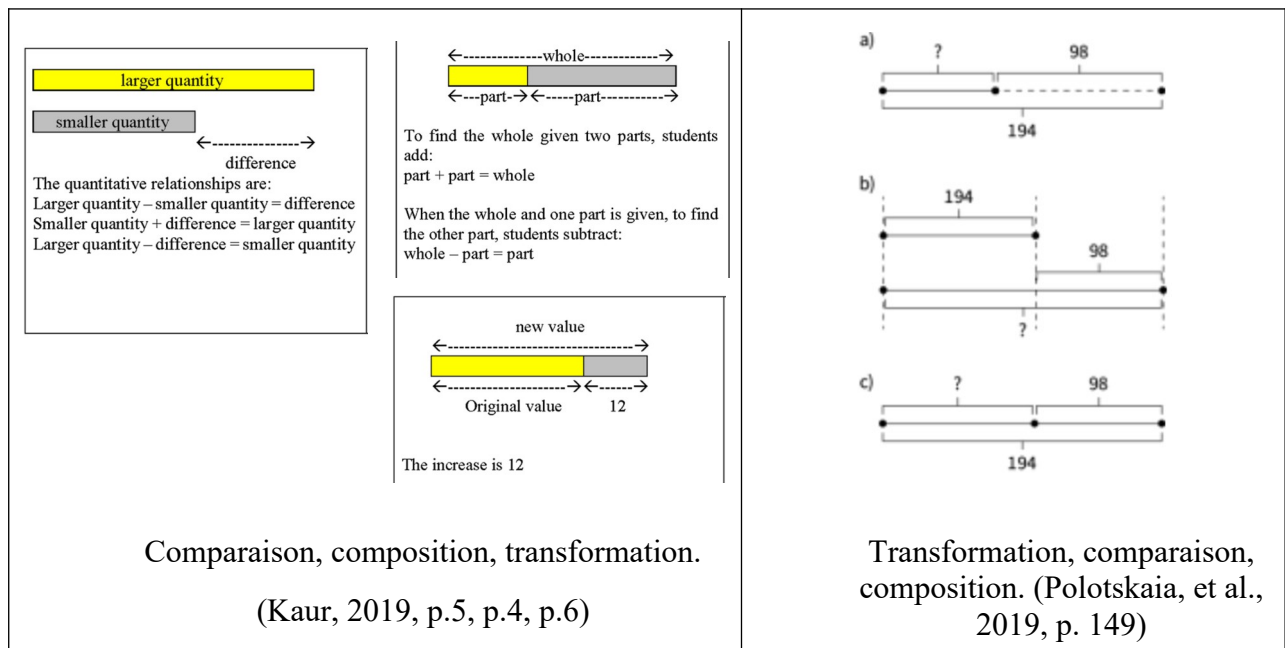
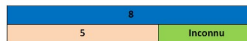


Figure 3 : Les normes des modèles en barres pour les problèmes additifs

Un épilogue nous conduit à revenir sur la situation en France. En effet, les normes introduites pour les barres (e.g., MEN, 2020) (figure 4) ne sont pas celles que nous avons évoquées à la figure 3. Elles ne représentent alors plus le modèle de la quantité. Ce fait permet d’ouvrir une triple réflexion : par l’introduction des barres la mise en évidence de la nécessité de considérer les quantités pour enseigner et apprendre l’arithmétique scolaire, l’invisibilité de la notion mathématique de quantité dans notre curriculum, l’invisibilisation de la notion même de quantité au moment où elle est rendue visible par les barres.

Modélisation pour ces quatre exercices



- Exemple 1 : J’ai 8 billes. Je perds 5 billes. Combien ai-je de billes ?
- Exemple 2 : J’ai 8 billes en tout, des billes rouges et des billes bleues. Cinq billes sont rouges. Combien de billes sont bleues ?
- Exemple 3 : J’ai 8 billes, mon ami en a 5 de moins. Combien de billes a-t-il ?
- Exemple 4 : J’ai gagné 8 billes puis j’ai perdu 5 billes. Combien ai-je gagné de billes ?

Figure 4 : « Les règles de construction du schéma en barres » (PNF – MEN, 2020, diapo 3)

Références

- Bézout, E. (1764 / 1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*. (9e éd.).
- Chambris, C. (2023). Boucle d'or et les modèles en barres. *Au fil des maths (APMEP)*, 550, 64-73.
- Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method. *ZDM*, 51(1), 151-168.
- Polotskaia, E., Gervais, C., & Savard, A. (2019). *Représenter pour mieux raisonner*. JFD éd.
- Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.
- MEN (2020) Moment 4. Règles construction du schéma en barres (partie 1). *M@gistère Plan national de formation des RMC – Plan mathématiques*. Ministère de l'éducation nationale.