

# Modéliser avec des fonctions au collège. La bande de papier.

Catherine DESNAVRES<sup>31</sup>

IREM D'AQUITAINE

Marie GERVAIS<sup>32</sup>

IREM D'AQUITAINE

**Résumé.** Cet atelier présente le déroulement en classe d'une situation d'introduction du concept de fonction au collège, autour d'un problème intitulé « La bande qui se déroule ». Il s'agit d'une situation où la modélisation, très simple, est à la charge des élèves. Le problème choisi facilite l'entrée dans le mode de pensée fonctionnel de part l'aspect dynamique et visuel de la situation. De nombreux registres de représentation sont sollicités pour résoudre le problème, donnant ainsi du sens au concept de fonction. Trois fonctions sont rencontrées dans cette situation : une fonction affine, une fonction linéaire et une fonction ni affine, ni linéaire.

**Mots-clés.** modéliser, collège, cycle 4, fonction, affine, linéaire.

**Abstract.** This workshop presents the unfolding in class of a situation to introduce the concept of function in middle school, based on a problem entitled "The unrolling tape". It is a situation in which the modeling, which is very simple, is left to the students. The chosen problem facilitates entry into the functional mode of thinking due to the dynamic and visual aspect of the situation. Numerous registers of representation are called upon to solve the problem, giving meaning to the concept of function. Three functions are encountered in this situation: an affine function, a linear function and a function that is neither affine nor linear.

**Keywords.** model, middle school, function, affine, linear.

**Resumen.** Este taller presenta una situación de aula que introduce el concepto de función en la escuela media, a partir de un problema titulado "La cinta que se desenrolla". Se trata de una situación en la que la modelización, muy sencilla, se deja en manos de los alumnos. El aspecto dinámico y visual de la situación facilita la asimilación del pensamiento funcional. Para resolver el problema se utiliza una amplia gama de representaciones que dan sentido al concepto de función. En esta situación se encuentran tres funciones: una función afin, una función lineal y una función que no es ni afin ni lineal.

**Palabras clave.** modelo, escuela media, 3 ESO, función, afin, lineal.

## Introduction

Les programmes français du collège mentionnent que les élèves doivent apprendre à modéliser des situations avec des fonctions en classe de 3<sup>ème</sup> (fin du cycle 4, 14-15 ans).

Les repères de progression (selon les programmes, ce que l'élève doit savoir faire en fin de troisième)<sup>33</sup> précisent :

- Il [L'élève] modélise un phénomène continu par une fonction.
- Il modélise une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire.
- Il résout des problèmes modélisés par des fonctions en utilisant un ou plusieurs modes de représentation.

Mais l'apprentissage ne commence pas là : le concept de fonction est à construire durant tout le cycle 4 (12-15 ans). On trouve déjà en 5<sup>ème</sup> (12-13 ans) et en 4<sup>ème</sup> (13-14 ans) dans

---

<sup>31</sup> catherine.desnavres@gmail.com

<sup>32</sup> mgervais@ac-bordeaux.fr

<sup>33</sup> Attendus de fin d'année de 3<sup>ème</sup> p 17 <https://eduscol.education.fr/document/37490/download>

les attendus de fin d'année une partie intitulée « *Comprendre et utiliser la notion de fonction* ». <sup>34</sup> Il y est indiqué :

- pour la 5<sup>ème</sup> : *Il [L'élève] traduit la relation de dépendance entre deux grandeurs par un tableau de valeur, il produit une formule représentant la dépendance de deux grandeurs.*

- pour la 4<sup>ème</sup> : *Il [L'élève] produit une formule littérale représentant la dépendance de deux grandeurs. Il représente la dépendance de deux grandeurs par un graphique. Il utilise un graphique représentant la dépendance de deux grandeurs pour lire et interpréter différentes valeurs sur l'axe des abscisses ou l'axe des ordonnées.*

Les enseignants doivent donc mener de front la construction du concept de fonction, à travers différents registres de représentation (tableau de valeurs, graphique, formule algébrique...) mais aussi le registre formel via les notations et le vocabulaire associé (image, antécédent...) sans oublier la formation aux usages du numérique (tableurs, calculatrices...).

Le dernier exemple d'exercice donné dans les repères de progression de 3<sup>ème</sup> suggère que des situations où la tâche de modélisation est dévolue à l'élève doivent être proposées.

Un exemple est donné : « *On enlève quatre carrés identiques aux quatre coins d'un rectangle de 20 cm de longueur et 13 cm de largeur. Détermine la longueur du côté de ces carrés qui correspond à une aire restante de 208,16 cm<sup>2</sup>, par la méthode de ton choix.* »

Un rapide regard dans les manuels de troisième nous permet d'identifier différents types de situations pour introduire la notion de fonction :

- Des activités qui présentent une fonction comme une machine qui transforme un nombre de départ en un autre nombre. Ces activités reprenant la définition ensembliste, donnent certes aux élèves une image de ce qu'est une fonction, mais ne renseignent en aucune façon sur l'utilité de cette notion pour résoudre des problèmes d'optimisation, de dépendance entre deux grandeurs, ...

- D'autres activités qui se composent de plusieurs courts exercices dans lesquels un ou deux registres de représentation d'une fonction sont mobilisés et où les notations et le vocabulaire sont introduits, sans que la résolution d'un problème soit demandée. Ces activités relèvent pour nous, davantage de l'entraînement que de l'introduction de la notion. Il peut être difficile pour les élèves d'y percevoir l'utilité du concept de fonction.

- Des activités dans lesquelles des fonctions sont utilisées pour résoudre des problèmes certes intéressants, mais difficiles (le volume de la boîte, l'aire de baignade, ...) <sup>35</sup>. Dans ce cas, la modélisation de la situation est rarement laissée à la charge des élèves. On peut supposer que les auteurs la considèrent comme trop difficile pour des élèves débutants. Ces activités sont souvent constituées d'une liste de questions enchaînées dont les élèves ont du mal à comprendre les enjeux. L'utilisation de fonctions peut apparaître comme artificielle à leurs yeux. Ils ne voient pas l'utilité d'introduire un nouveau concept, faute de s'être posé eux-mêmes les questions pertinentes.

Comme l'affirment Job et Schneider (*Quel enseignement pour préparer les apprenants à la modélisation mathématique ?* À paraître dans les actes de ce colloque 2024), *modélisation et « résolution de problèmes » sont des activités fortement connectées. L'activité de modélisation vise à produire des modèles instrumentaux dans la résolution de problèmes.* Selon ce point de vue, nous proposons la découverte de la notion de

---

<sup>34</sup> <https://eduscol.education.fr/document/37493/download> pour la 4<sup>ème</sup>  
<https://eduscol.education.fr/document/37496/download> pour la 5<sup>ème</sup>

<sup>35</sup> Ce seront d'excellentes situations à proposer à des élèves qui ont déjà fréquenté des fonctions. Ils pourront alors en prendre en charge la modélisation.

fonction au travers de problèmes nécessitant l'usage de fonctions, pour lesquels la modélisation, très simple, pourra être dévolue aux élèves. Ainsi, la résolution du problème est gérée collectivement par la classe, sous la direction du professeur, à partir de questions que les élèves se posent eux-mêmes.

D'après R. Duval (1993) ce sont les liens entre les différents registres dans la résolution d'un même problème qui vont permettre l'acquisition du sens. En accord avec ces recherches, de nombreux registres de représentation interviennent au service de la résolution du problème. Le formalisme introduit par le professeur n'est pas porteur de sens en lui-même mais il intervient pour faciliter l'expression des calculs et des réponses trouvés par les élèves lors de la résolution du problème. Les notations et le vocabulaire relatifs au domaine des fonctions sont ainsi introduits dans une situation où ils prennent sens, comme formalisation du modèle utilisé pour résoudre le problème posé.

Dans ce texte, nous retranscrivons le déroulé de notre atelier en commençant par présenter les références sur lesquelles s'appuie notre travail puis en décrivant le déroulé d'une situation intitulée « La bande de papier » issue de la brochure « *Les fonctions du collège jusqu'en seconde* » Groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine 2012, et en parallèle nous reviendrons sur quelques points soulevés lors des échanges avec les participants.

## 1. Éclairage didactique

L'approche ensembliste de la notion de fonction est une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles, modélisée par un graphe. Cependant, l'analyse épistémologique conduit à poser que c'est l'idée de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable. Chez Leibniz (1646-1716), le mot "fonction" désigne une relation entre grandeurs dont les variations sont liées par une loi. Le fondement de la notion de fonction est l'étude des "lois de variations" de certains phénomènes et la recherche d'une modélisation de ces lois (Comin, 2005).

De plus, puisque dans les programmes du collège, seules les fonctions numériques de variables réelles sont abordées, nous nous limiterons à ces dernières. Nous choisissons de ne pas aborder la définition ensembliste qui bien qu'étant, selon nous, la définition la plus aboutie de la notion, ne permet pas aux élèves de comprendre l'idée de variation d'une grandeur en fonction d'une autre.

Dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle, entrer dans le mode de pensée fonctionnel implique de penser en termes de variations, ce qui a comme conséquence de donner aux lettres le statut de variables et d'intégrer de nouveaux registres de représentation (DUVAL 1993) pour rendre compte de ces variations :

- verbal : définition de la fonction en langage naturel,
- algébrique : expression littérale de la fonction,
- graphique : courbe représentative de la fonction,
- tableau : ensemble discret de valeurs,
- programmation : processus automatisé pour le calcul des images.

### **1.1. Fonction outil, fonction objet**

Dans ses travaux, Douady(1986) met en avant la dialectique outil-objet qui contribue à donner du sens aux concepts mathématiques.

Deux facteurs contribuent au sens d'un concept :

- l'ensemble des questions où il est engagé (outil)
- l'ensemble des relations avec les autres concepts engagés dans ces mêmes questions (objet).

C'est la dialectique entre ces deux statuts, engendrée par des jeux de cadres au cours de la résolution de problèmes qui va permettre l'acquisition du concept.

Tout d'abord, la notion intervient dans les problèmes comme outil implicite, qui petit à petit devient explicite et permet de construire au fur et à mesure le statut d'objet de la notion qui à son tour redevient ancien outil dans un autre problème.

Une fonction peut être un outil pour résoudre des problèmes ou un objet d'étude pour elle-même. Étudier les fonctions comme outils c'est les utiliser pour modéliser des situations fonctionnelles et répondre à des questions d'optimisation, de comparaison (tarif le plus avantageux), etc.

Étudier les fonctions comme objets c'est en étudier les propriétés mathématiques, par exemple en faisant des catégories (les fonctions croissantes, les fonctions linéaires, les fonctions continues, etc.).

## 1.2. Fonction processus, fonction structure

Sfard (1991) présente une autre dialectique dans la construction du concept de fonction. Une fonction peut être envisagée comme un processus ou comme une structure.

Dans un premier temps, l'élève peut rencontrer la conception d'une fonction comme un processus qui permet de trouver l'image quand on a la valeur de la variable (fonction outil implicite), ce processus s'exprimant dans plusieurs registres. Les activités de passage entre les différents registres devront être maîtrisées.

C'est un des objectifs du programme de fin de cycle 4 :

*Il [L'élève]résout des problèmes modélisés par des fonctions en utilisant un ou plusieurs modes de représentation.*

Dans un deuxième temps, ce processus pourra être identifié, généralisé et désigné par un nom.

Enfin, dans un troisième temps, l'objet fonction pourra se dégager du simple processus. Il sera alors intégré à une catégorie dont on peut étudier les propriétés (ex : fonction croissante) et dont on peut avoir des représentants (ex : fonction linéaire). La fonction est alors identifiée comme une structure que l'on reconnaît par sa représentation dans un des registres concernés.

Par exemple, une fonction linéaire est caractérisée par une formule algébrique de la forme

$$f : x \mapsto f(x) = ax.$$

Les fonctions engagées comme outil dans la résolution de problèmes acquièrent peu à peu un statut d'objet « procédural » à travers leurs différents registres de représentations avant de se constituer en objet « structural ». Certains registres peuvent favoriser l'aspect procédural, tableaux de valeurs, programmation, d'autres l'aspect structural, graphique, tableau de variation (qui n'est pas étudié au collège). La formule algébrique, selon la façon dont elle est vue par les élèves relève de l'un ou de l'autre de ces aspects. Comme traduction d'un programme de calcul, c'est l'aspect procédural qui est privilégié, comme formule algébrique, elle représente un statut structural.(Pihoué, 1997)

## 1.3. Rôle du professeur

Le rôle du professeur est crucial dans la gestion de la situation. Pour envisager ce rôle dans la mise en œuvre de la situation, nous nous appuyons sur les recherches de Guy Brousseau en mettant en avant différentes phases. Le professeur doit dévoluer la question qui permet de démarrer l'étude aux élèves, en suscitant leur curiosité mais il leur laisse la charge des modalités. C'est à lui d'aménager dans la situation les moments d'adidacticité, c'est-à-dire les moments où l'élève résout le problème sous sa seule responsabilité. Il relance l'activité des élèves en reformulant les réponses trouvées et les nouvelles

questions qui émergent au fur et à mesure de l'avancée du travail. C'est par ces échanges entre professeur et élèves, à différents moments cruciaux de l'étude du problème, que vont s'effectuer les changements de cadres de travail, à l'initiative des élèves. Il institutionnalise les notions découvertes durant l'activité au moment où elles sont utiles, à la fin de chaque étape, dans l'ordre où elles apparaissent dans la recherche du problème. C'est ainsi que, au fur et à mesure de l'avancée de la situation, l'objet fonction, en jeu dans le problème, implicite pour les élèves, va devenir explicite.

Maîtriser n'est pas synonyme d'imposer : pour cela, il faut faire confiance en la capacité des élèves à s'investir dans la résolution d'un problème. C'est la condition pour qu'ils se posent eux-mêmes les bonnes questions.

L'objectif de cet atelier est de montrer qu'il est possible de dévoluer la modélisation d'un problème à des élèves même débutants, pour introduire la notion de fonction et que cela favorise leur apprentissage car ils se posent eux-mêmes les questions pertinentes qui permettent l'émergence de l'outil dans différents registres de représentation. Le choix du problème à modéliser mais surtout la manière de gérer les interactions entre le professeur et les élèves sont importants. Le professeur doit avoir confiance, préserver des moments d'adidacticité, pour laisser les élèves prendre l'initiative. Le formalisme introduit par le professeur prend du sens relativement aux tâches effectuées par les élèves.

## 2. Le problème

### 2.1. Les objectifs de travail au collège

D'après les programmes, les objectifs à atteindre en fin du cycle 4 du collège sont :

- Faire prendre conscience des différents registres utilisés pour résoudre un même problème.
- Donner du sens à l'objet « fonction » au travers des différents registres.
- Mettre en place des passerelles pour passer d'un registre à l'autre.

L'objectif de la situation présentée dans cet atelier est de commencer à construire le statut d'objet de la notion de fonction par la résolution d'un problème où interviennent des fonctions comme outil. La situation permet de solliciter différents cadres de travail et registres de représentation, et de commencer à entrevoir les liens entre eux. La gestion de la situation par le professeur consiste à laisser les élèves proposer les cadres de travail.

La situation choisie est posée dans le cadre géométrique, les élèves se placent d'abord dans le cadre numérique pour effectuer des calculs de périmètres et d'aires. Puis ils suggèrent une représentation sous forme de tableau pour rassembler leurs résultats. Pour compléter le tableau, l'usage d'une formule apparaît utile et enfin le cadre graphique permet de conclure.

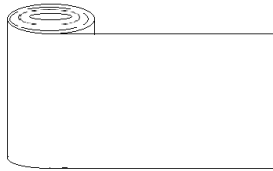
Le professeur relance la recherche, reformule les réponses obtenues, institutionnalise à chaque étape les nouvelles connaissances (notations, vocabulaire) afin de commencer à donner un statut d'objet à la notion de fonction.

### 2.2. Consigne pour les élèves

Le professeur a préparé une bande de papier de 3 cm de large, enroulée, qu'il déroule lentement devant les élèves, comme indiqué sur la figure ci-dessous, le cylindre de papier face à lui.

Il pose aux élèves la question : « Que voyez-vous lorsque je déroule la bande ? »

Puis dans un deuxième temps, il demande : « Qu'est ce qui reste fixe ? Qu'est ce qui varie ? »



*Figure 1 : La bande de papier*

### 2.3. Choix du problème

Nous plaçant dans le cadre de la Théorie des Situations (Brousseau, 1998), nous avons choisi une situation où la notion de fonction va apparaître nécessaire pour rendre compte du grand nombre de rectangles possibles et de leurs variations, ainsi la variable considérée est continue.

Les grandeurs en jeu sont très faciles à identifier et les relations entre elles connues depuis longtemps par les élèves, au moins pour l'aire et le périmètre. La modélisation est très simple et peut donc être prise en charge par les élèves. Un contexte plus complexe peut créer des obstacles, susciter des interrogations sur les contraintes dues au problème réel, qui masqueraient le rôle des fonctions dans la résolution du problème mathématique.

Le principal objectif de la situation est la découverte du modèle fonctionnel et de ses registres de représentation. Ce modèle prend du sens par son efficacité à résoudre le problème posé.

La facilité de passage du problème réel au problème mathématique est au service de cet objectif. Elle permet une référence au problème réel, comme validation lors de la résolution du problème mathématique ou pour relancer les recherches.

### 2.4. Consigne pour les participants à l'atelier

Suite à la découverte de la situation par les participants, nous leur avons soumis les questions suivantes :

En quoi cette situation peut-elle amener à :

- rentrer dans la modélisation du problème par les fonctions ?
- mobiliser les différents registres de représentation des fonctions ?

### Imaginez ce qui peut se passer avec les élèves.

Nous attendions des participants qu'ils proposent un déroulement de la situation en classe et surtout qu'ils imaginent quel serait le rôle du professeur. Nous faisons l'hypothèse qu'ils auraient tendance à vouloir guider l'étude en imposant les cadres de travail.

### 2.5. Premières réactions des participants

Les premières réactions des participants à l'atelier consistent à proposer aux élèves des valeurs à tester : quels sont l'aire et le périmètre pour telles valeurs ? L'aire ou le périmètre valent tant, quelle est la longueur de la bande ?

Ils pensent à proposer aux élèves de construire un tableau de valeurs ou d'utiliser la calculatrice pour tracer un graphique.

Nous verrons dans le déroulement de la situation tel que nous l'avons choisi, que ces interventions du professeur ne seront pas nécessaires.

Nous demandons aux participants de réfléchir à des questions que peuvent se poser les élèves et on se met d'accord sur la question qui va générer l'étude mathématique du problème : « comment varient les grandeurs en jeu ? ».

Nous verrons que cette question va aussi émerger avec les élèves, après identification des grandeurs en jeu en réponse aux questions du professeur : « que voyez-vous lorsque je déroule la bande ? » et « Qu'est ce qui reste fixe ? Qu'est ce qui varie ? »

### 3. Le déroulement dans la classe

Cette situation est régulièrement utilisée par les membres du groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine. Elle a été proposée de nombreuses fois et le déroulement que nous allons décrire est celui qui a été observé dans toutes les classes des différents établissements où elle a été testée.

C'est ainsi que procède notre groupe de travail. Avant de décrire une situation dans une brochure, nous la testons dans nos classes, puis nous la modifions, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à ce qu'elle présente une certaine stabilité dans son déroulement. C'est ce qui nous permet d'en faire une analyse approfondie et d'en proposer une gestion précise quasi « clé en main » aux participants de l'atelier.

#### 3.1. Que voyez-vous au fur et à mesure que l'on déroule ?

Les élèves voient le cylindre de papier et un rectangle dont la longueur varie ou « plein de rectangles ».

Le professeur indique qu'on ne s'occupera pas du cylindre. Bien que cette question paraisse intéressante pour les adultes, nous avons fait le choix de ne pas nous en préoccuper avec les élèves. Les difficultés de modélisation ne correspondent pas à l'objectif fixé.

Une discussion s'engage rarement sur les rectangles :

- Est-ce que ce sont bien des rectangles ? largeur régulière de la bande, découpe de la bande bien perpendiculaire.
- Comment mesurer la longueur des rectangles ? On se met d'accord pour partir du « milieu » du cylindre.

Mais en général, la reconnaissance perceptive suffit. Si ces questions n'émergent pas des élèves, inutile de s'y attarder, ce n'est pas l'objectif principal de la situation. Mais cela permet aux élèves de s'appropriier le modèle.

#### 3.2. Qu'est ce qui est fixe ? Qu'est ce qui varie ?

Les élèves disent : la longueur, le périmètre, l'aire et la diagonale varient.

Le professeur indique que l'objectif est d'étudier les variations de ces grandeurs. Comment varient-elles ?

Les élèves disent que toutes ces grandeurs augmentent au fur et à mesure que la bande se déroule, en fonction de la longueur déroulée.

Le professeur relance en posant la question : comment ces grandeurs augmentent-elles ?

#### 3.3. Choix de la variable

La discussion se poursuit sur le statut des différentes grandeurs les unes par rapport aux autres.

Pour étudier les variations de ces grandeurs, les élèves proposent de les calculer en choisissant des longueurs de bande. La longueur prend alors le statut particulier de variable indépendante.<sup>36</sup>

Le professeur peut commencer à introduire du vocabulaire sur les fonctions. La longueur, qui est la grandeur que l'on fait varier volontairement, s'appelle la variable. Les variations des autres grandeurs dépendent des valeurs choisies pour la variable.

Si ce n'est pas la première situation sur les fonctions, des élèves proposent par eux-mêmes d'utiliser des fonctions ; il faut alors préciser le choix de la variable. Le professeur demande ensuite ce qu'ils peuvent faire pour étudier les variations de ces

<sup>36</sup> Une **variable indépendante** est la variable qui est modifiée ou contrôlée dans le cadre d'une expérience scientifique afin de tester les effets sur la **variable dépendante**. (Data Science)

grandeurs grâce à ces fonctions : ils parlent dans ce cas de calculs d'images, de tableaux et de graphiques.

### 3.4. Premiers calculs

Les élèves calculent l'aire, le périmètre, dans plusieurs cas, deux ou trois maximum chacun, souvent des longueurs entières et souvent les mêmes. Ils font les calculs séparément, mais même après une mise en commun des résultats, ils constatent que cela ne suffit pas pour conclure sur les variations. Le professeur incite les élèves à choisir d'autres longueurs.

### 3.5. Vers le tableau de valeurs

Comment utiliser tous ces résultats de façon à pouvoir les comparer facilement ?

Des élèves proposent de les ranger dans un tableau. Une discussion s'engage sur la forme à adopter pour le tableau. Les élèves proposent de mettre la longueur sur la première ligne du tableau.

On peut faire un tableau où on regroupe toutes les grandeurs, ou plusieurs tableaux, un pour chaque grandeur. Dans ce cas il faut répéter la première ligne. Le professeur incite à faire des tableaux séparés.

Le professeur note un tableau commun à la classe. Pour chaque grandeur, il prend les valeurs proposées par les élèves, dans l'ordre où ils les donnent.

Les élèves constatent qu'ils ne peuvent toujours pas décrire les variations à partir de ce travail, certains proposent de classer les valeurs des tableaux dans l'ordre croissant des valeurs de la variable.

Pour l'instant, les tableaux obtenus ne sont pas des tableaux de valeurs de fonctions, mais seulement un moyen de ranger les valeurs obtenues lors des calculs. L'usage des tableaux comme registre de représentation d'une fonction va apparaître petit à petit au cours de l'étude.

### 3.6. Vers la formule

Le professeur fait remarquer que l'on a utilisé plusieurs fois le même calcul pour remplir les cases d'un même tableau. Il demande aux élèves de donner la formule qu'ils ont utilisée.

Pour le périmètre, les élèves disent :  $(\text{longueur} + \text{largeur}) \times 2$ . Certains font remarquer que la largeur est toujours 3 cm, et proposent de noter la longueur  $L$

La formule est donc :  $(L+3) \times 2 = 2L+6$ . Le professeur peut introduire la notation  $x$  pour la variable. La formule devient :  $(x+3) \times 2 = 2x+6$

Pour l'aire, la formule longueur  $\times$  largeur devient  $3x$ .

### 3.7. Utilisation de l'outil numérique

Le professeur peut suggérer l'utilisation d'un tableur ou montrer le fonctionnement de la calculatrice, pour construire une table de valeurs.

La syntaxe de la formule est à adapter au fonctionnement de l'outil.

### 3.8. Première institutionnalisation

Le professeur peut alors engager une institutionnalisation locale du vocabulaire et des notations.<sup>37</sup>

Dans notre problème, le périmètre varie en fonction de la longueur.

Dans le tableau, la variable, sur la première ligne, est notée  $x$ . Pour chaque valeur donnée à  $x$ ,

---

<sup>37</sup> On parle d'institutionnalisation locale car elle se fait dans le contexte particulier de la situation proposée.

la valeur correspondante de la grandeur, sur la deuxième ligne, est appelée l'image de  $x$ . Nous avons choisi de la noter  $p(x)$  pour le périmètre ou  $a(x)$  pour l'aire.

On introduit aussi les notations :  $p(x) = 2x + 6$  et  $p : x \mapsto 2x + 6$

Le professeur introduit les mots « image » et « antécédent » et les notations.

Ainsi, si la longueur est 5 cm, le périmètre est 16 cm.

On note  $p(5) = 16$  ou  $p : 5 \mapsto 16$ .

Et on dit « l'image de 5 est 16 » ou « 5 a pour image 16 ».

Le mot « antécédent » peut également être introduit : quand 5 a pour image 16, on dit que l'antécédent de 16 est 5 ou que 16 a pour antécédent 5.<sup>38</sup>

Des difficultés d'expression en français rendent l'utilisation de ces phrases difficiles pour certains élèves et ainsi renforcent la confusion entre image et antécédent. De nombreux exercices d'application sont utiles, on en trouve facilement dans tous les manuels.

### 3.9. Étude des tableaux obtenus

Des élèves constatent que le tableau qui donne les valeurs des aires est un tableau de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité est 3.

Mais pour le périmètre, il n'y a pas proportionnalité. Ce qui n'est pas évident pour certains élèves.

### 3.10. Vers le graphique

#### Que dire de la variation du périmètre ? Comment l'étudier plus précisément ?

Des élèves proposent de faire un graphique.

Le professeur peut demander de tracer deux graphiques séparés (un pour l'aire et un pour le périmètre) car pour la variable, les valeurs sont les mêmes, mais les grandeurs étudiées, ne sont pas de même nature (longueur ou aire).

#### Comment faire le graphique ?

Le professeur peut laisser les élèves faire leurs graphiques sans donner d'indication.

Nous présentons en italique les questions que se posent les élèves lors de la construction de leur graphique.

*Comment choisir les axes ?*

Certains élèves mettent la longueur sur l'axe horizontal, d'autres sur l'axe vertical. Des échelles différentes sont choisies sur les axes.

Pour étudier la variation d'une grandeur, il est préférable de la mettre en ordonnée, ainsi, si la grandeur augmente, le graphique va vers le haut et vice-versa. On décide donc par convention de mettre la longueur en abscisse.

*Où commence le graphique ?*

---

<sup>38</sup> A ce stade de la situation, on n'a pas prouvé que les fonctions rencontrées sont des bijections, donc, rigoureusement, on devrait dire « un antécédent » cependant, à ce moment là, les élèves n'ont pas encore rencontré le fait qu'une même image peut avoir plusieurs antécédents. Nous proposons donc de faire une entorse à la rigueur du langage, jusqu'à ce que ce cas se présente, dans une autre situation, où les fonctions rencontrées ne seront pas des bijections. Cela permettra, au moment où les élèves se poseront la question, d'attirer leur attention sur ce point.

On obtient des points d'abscisses entières qui semblent alignés pour aire et périmètre, certains ont joint les points, d'autres non.

Certains élèves ont voulu prendre une abscisse 0 pour le périmètre et ont mis pour ce point une ordonnée 0 ou une ordonnée 3.

Ce qui donne le type de graphique de la figure 2 :

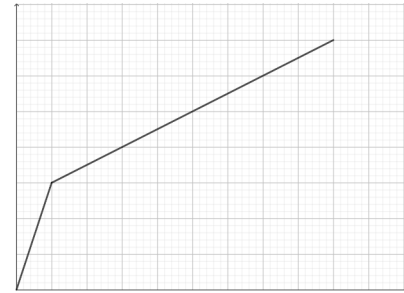


Figure 2 : Graphique obtenu par certains élèves.

*Peut-on joindre les points ou non ?*

Certains élèves disent que les points sont alignés et d'autres n'en sont pas sûrs.

Pour l'aire, on retrouve un résultat connu, le graphique qui représente une situation de proportionnalité est une droite qui passe par l'origine du repère. Les points sont donc alignés.

*Pour le périmètre, le graphique est-il une droite ?*

Le point qui a pour abscisse 0 correspond bien à la valeur 6, d'après la formule, et non 0 ou 3.

Le professeur peut expliquer également en montrant avec la bande de papier, que lorsque la longueur se rapproche de zéro, le périmètre se rapproche de 6 cm.

$$p(0,1) = 6,2 ; p(0,01) = 6,02\dots$$

On obtient les graphiques suivants :

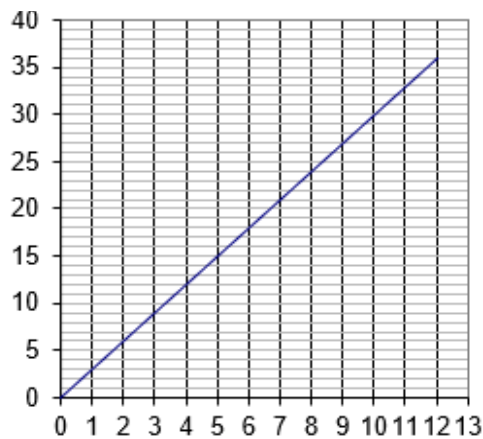


Figure 3 : L'aire.

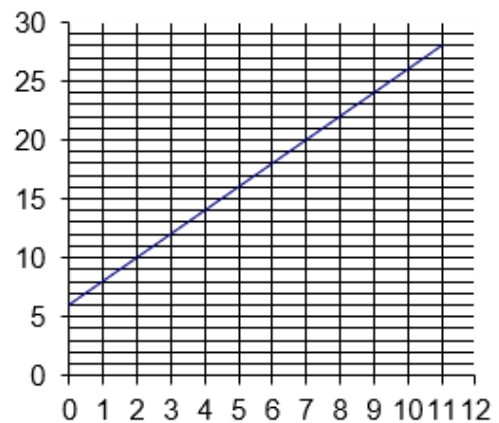


Figure 4 : Le périmètre.

*Tous les graphiques sont-ils équivalents ?*

Tous les élèves n'ont pas choisi les mêmes valeurs, certains se demandent s'ils ont le même graphique. Le choix de l'échelle change l'allure de la droite.

En revanche, tous les points obtenus, quelle que soit la longueur choisie, appartiennent à la même droite.

Le professeur incite les élèves à choisir des valeurs décimales. Une discussion s'engage sur les valeurs possibles, de zéro jusqu'à la longueur maximale de la bande (ensemble de définition de la fonction).

Si un point n'est pas sur la droite, c'est que le calcul est faux ou que le point est mal placé. La relation entre les deux grandeurs détermine la droite : ce qui étonne beaucoup les élèves ! Une animation GEOGEBRA montrant un grand nombre de points se plaçant sur la courbe au fur et à mesure que la longueur des rectangles change, peut aider les élèves à se convaincre de ce lien entre la forme de la courbe continue et la fonction étudiée.

### 3.11. Justification de l'alignement des points

Le professeur peut aider les élèves à formuler une démonstration, par exemple :

Dans les triangles ABC et AGE rectangles en C et en E, on a :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\tan \widehat{EAG} = \frac{EG}{AE} = \frac{20}{10} = 2$$

Ce qui induit que les angles aigus  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{EAG}$  ont la même mesure.

Par conséquent, les points A, B et G sont alignés car E, C et A sont alignés.

### 3.12 Le lien entre les différents registres

*Pour l'aire :*

Certains élèves remarquent le rôle particulier du nombre 3 ; le professeur les aide à faire le lien entre les différents registres.

La formule :  $a(x) = 3x$

Le coefficient de proportionnalité est 3.

Dans le tableau, pour un écart de 1 cm sur la longueur, l'aire augmente de 3 cm<sup>2</sup>.

Sur le graphique, si l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 3.

*Pour le périmètre :*

La formule :  $p(x) = 2x + 6$

Dans le tableau, pour un écart de 1 cm sur la longueur, le périmètre augmente de 2 cm.

Sur le graphique, si l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 2.

L'ordonnée correspondant à une longueur de 0 est 6.

La droite coupe l'axe des ordonnées au point (0 ; 6).

### 3.13 Institutionnalisation

Le professeur conclut en donnant le mot « fonction ».

On vient d'étudier deux fonctions  $a$  et  $p$  qui permettent de décrire les variations des mesures du périmètre et de l'aire des rectangles formés par le déroulement de la bande de papier en fonction de la mesure de la longueur de papier déroulée :

$$a : x \mapsto 3x \qquad p : x \mapsto 2x + 6$$

À chaque valeur  $x$  de la variable correspond une image  $f(x)$ . Cela définit une fonction  $f$ .

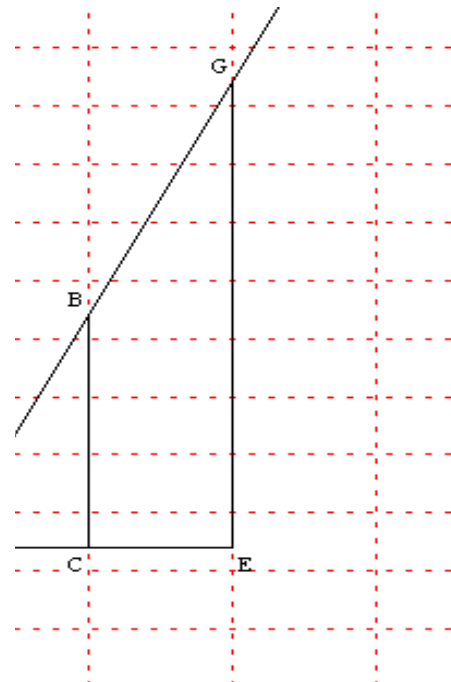


Figure 5 : Alignement des points.

Pour étudier une fonction  $f$ , on peut effectuer des calculs à partir d'une formule pour remplir un tableau de valeurs. En utilisant les valeurs de ce tableau, on peut tracer une représentation graphique de la fonction.

### 3.14 Étude éventuelle de la diagonale

Si on étudie la diagonale, d'après le théorème de Pythagore, la formule est  $d(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ .

On obtient le graphique suivant (figure 6).

On peut démontrer que, pour la diagonale, les points ne sont pas alignés en faisant un raisonnement par l'absurde.

Si les points étaient alignés, on pourrait utiliser le théorème de Thalès avec les points d'abscisses 0, 1 et 2, on aurait :  $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{13}-3}$

ce qui est faux.

Ou alors on comparerait les tangentes, on obtiendrait :

$$\sqrt{10}-3 = \sqrt{13}-\sqrt{10}$$

ce qui est faux.

De simples valeurs calculées à la calculatrice permettent aux élèves de s'en persuader.

$$\sqrt{10}-3 \approx 0,1622\dots$$

et

$$\sqrt{13}-\sqrt{10} \approx 0,4432\dots$$

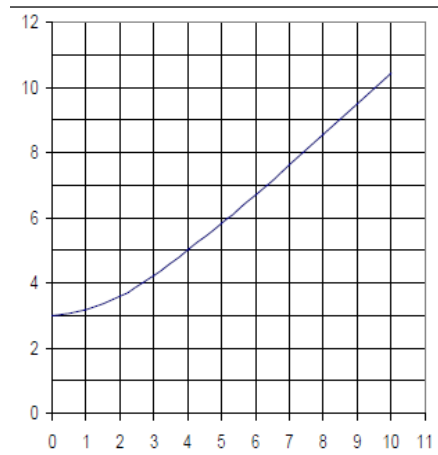


Figure 6 : La longueur de la diagonale

### 3.15 Proportionnalité des accroissements

On revient à notre bande de papier roulée. Après avoir tiré une première fois dessus, le professeur tire à nouveau de 1 cm cette fois.

Que constate-t-on ? Et si l'on tire encore de 1 cm ? Et encore...



Figure 7 : L'expérimentation sur la bande de papier.

Pour le périmètre, certains élèves remarquent assez vite sur le tableau de valeurs, qu'il y a un accroissement qui est le même si on augmente la longueur de la même quantité : « Si on augmente de 1, ça augmente toujours de 2 ».

	+ 1		+ 1		+ 2		+ 10		+ k	
$x$	0	1	2	3	4	6	7	17	$x$	$x+k$
$p(x)$	6	8	10	12	14	18	20	40	$2x+6$	$2x+6+2k$
	+ 2		+ 2		+ 4		+ 20		+ 2k	

Après réflexion et expérience sur la bande de papier, les élèves arrivent à expliquer l'augmentation de  $3 \text{ cm}^2$  pour l'aire et de  $2 \text{ cm}$  pour le périmètre à chaque fois que l'on tire de  $1 \text{ cm}$ . Lorsque l'on tire de  $2 \text{ cm}$ , ils proposent une augmentation de  $6 \text{ cm}^2$  pour l'aire et de  $4 \text{ cm}$  pour le périmètre.

L'enseignant peut poursuivre et demander ce qu'il se passe si l'on tire de  $k \text{ cm}$ ...

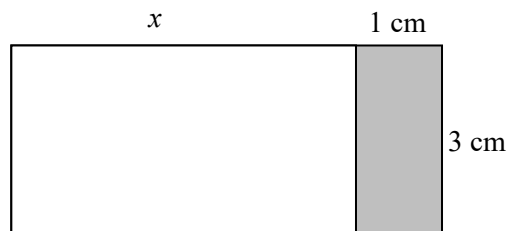


Figure 8 : Retour à la bande de papier.

Il fait le lien avec le graphique et montre les petits triangles rectangles.

Le professeur peut aussi aider les élèves à justifier ces résultats en reprenant la formule.

$$p(x) = 2x + 6, \text{ calculons } p(x + 1).$$

$$\begin{aligned} p(x + 1) &= 2(x + 1) + 6 \\ &= 2x + 2 + 6 \\ &= (2x + 6) + 2 \\ &= p(x) + 2 \end{aligned}$$

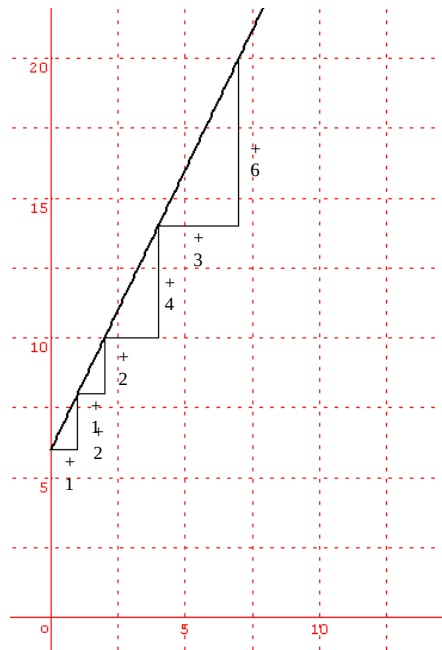


Figure 9 : Les petits triangles.

On évoque à nouveau la diagonale où les points ne sont pas alignés.

Les élèves constatent, en utilisant les valeurs approchées, que, pour un même accroissement de  $x$ , la diagonale ne croît pas régulièrement. Elle augmente d'abord lentement puis de plus en plus vite.

### 3.16 Dernière étape de l'institutionnalisation

Le professeur introduit le vocabulaire :

- Pour l'aire, la fonction est dite fonction linéaire.
- Pour le périmètre, la fonction est affine.
- Pour la diagonale, la fonction n'est ni affine ni linéaire.

Ces trois nouveaux mots sont mis en relation avec des caractéristiques qui ont émergé des différents registres de représentation, qui seront précisés.

### 4. Les questions des participants à l'atelier.

Les participants à l'atelier se sont interrogés sur des points clés de la situation, comme l'interprétation du périmètre d'un rectangle de longueur zéro et la discussion que le professeur doit engager avec les élèves pour les convaincre.

Le fait que les élèves ne se posent que tardivement la question de l'ensemble de définition des fonctions étudiées a intrigué.

Le choix que nous avons fait, d'abandonner la rigueur mathématique pour laisser vivre une définition non aboutie, comme la notion d'antécédent, tant que la question n'est pas venue des élèves, a suscité des commentaires.

Enfin, les participants ont remarqué l'importance de la gestion de la classe par le professeur dans ce type de situation : c'est ce qui a permis l'émergence des questions des élèves. Nous avons ainsi réfléchi sur la difficulté à communiquer sur le rôle du professeur dans ce type de situation. La diffusion de ce type de pratique reste donc difficile, dans une brochure et sera plus aisée dans un atelier ou une formation.

### Conclusion

A travers cet atelier, nous avons voulu montrer qu'il était possible et même nécessaire dès le collège de laisser la tâche de modélisation d'un problème à des élèves, même débutants.

Pour introduire le concept de fonction, nous avons fait le choix de commencer par une situation où la modélisation est très simple et de ce fait, permet une prise en charge par les élèves de l'ensemble des étapes de l'étude. Notre proposition de gestion de classe laisse l'initiative aux élèves, car les actions à effectuer pour résoudre le problème sont toutes à leur portée dans des registres différents.

L'aspect visuel dynamique du problème posé facilite le passage à une pensée fonctionnelle. Lorsque le professeur déroule la bande de papier, il devient naturel pour les élèves de penser en termes de variations.

Le concept de fonction prend du sens, car de nombreux registres sont d'emblée sollicités pour étudier les fonctions en jeu dans le problème.

Ce n'est pas forcément par cette situation qu'on commence l'introduction des fonctions car elle ne présente que des bijections, ce qui limite la vision de ce qu'est un antécédent. Mais nous avons quand même choisi de présenter celle-ci car elle ouvre vers les fonctions linéaires et affines et la proportionnalité des accroissements.

On peut aussi commencer l'introduction des fonctions par exemple, par le problème plus classique de la ficelle avec laquelle on forme des rectangles de même périmètre. La question posée est l'optimisation de l'aire des différents rectangles formés avec la ficelle.

La démarche auprès des élèves est sensiblement la même que celle que nous avons présentée dans cet atelier.

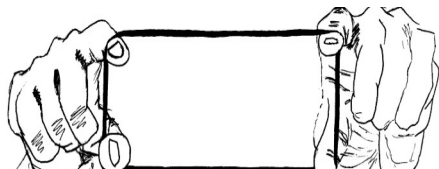


Figure 10 : Le rectangle de ficelle.

Le lecteur trouvera d'autres situations telle que « le carré dans le rectangle » dans la brochure de l'IREM d'Aquitaine intitulée « Les fonctions du collège jusqu'en seconde. ». Un carré de côté variable est inscrit dans un rectangle fixe et on cherche quand le carré a une aire qui vaut la moitié de celle du rectangle.

En général nous commençons plutôt par ces deux dernières situations et nous réservons « La bande de papier » pour l'introduction des fonctions affines et linéaires.

De toute façon, une seule situation ne suffit pas, c'est par la fréquentation de plusieurs tâches du même type que, petit à petit, le concept de fonction se construit.

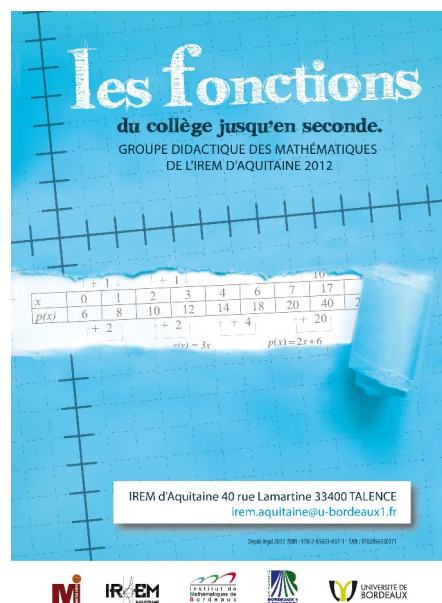


Figure 11 : La brochure

### Références bibliographiques

Berté, A. (1993). *Mathématique Dynamique*. Nathan Pédagogie.

Berté, A. (1996). *Mathématique du collège au lycée*. Nathan.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter-institutionnel. *Petit x*, 67, 33-61.  
[https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/67x3\\_1560963277937-pdf](https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/67x3_1560963277937-pdf)

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Groupe Didactique - IREM d'Aquitaine (2012). *Les fonctions du collège jusqu'en seconde*. Brochure 220 pages.

Pihoué. D. (1997). *L'entrée dans le mode de pensée fonctionnel en classe de seconde*. Cahier de DIDIREM n° 31. IREM de Paris.

Sfard. A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : reflections on processes and objects a different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Eduscol *Programmes de mathématiques du cycle 4 et attendus de fin d'année*. [Bulletin officiel n°31 du 30 juillet 2020](#)

Ministère de l'Education Nationale. Bureau de la valorisation des innovations pédagogiques. Groupement National d'équipes de recherche en didactique des mathématiques. *Algèbre et fonctions*. Direction de l'Enseignement Scolaire (DESCO) Paris, 2000. Brochure 58 pages.