

La modélisation algébrique

Rendre les élèves producteurs de modélisations algébriques au sein du programme du cycle 4

Didier AUROY²²

IRES d'Aix-Marseille

Laure GUÉRIN²³

IREM de Clermont-Ferrand

Yves MATHERON²⁴

IRES d'Aix-Marseille

Robert NOIRFALISE²⁵

IREM de Clermont-Ferrand

Résumé. Les outils fournis par la recherche en didactique permettent de concevoir des propositions d'enseignement pour lesquelles les classes étudient à partir d'une recherche de réponses à une question génératrice de l'algèbre élémentaire. Elles se démarquent de la sorte des activités des manuels qui, le plus souvent, prennent la forme de questions enchaînées guidant les élèves vers des réponses attendues et de faible portée, ou que souffle en le cachant le professeur. Les groupes didactiques de nos deux structures, IRES d'Aix-Marseille et IREM de Clermont-Ferrand, ont pris le parti épistémologique de considérer l'algèbre du Collège comme modélisation de programmes de calculs et calculs sur les modèles obtenus. Nous présentons des extraits de nos propositions pour lesquelles les élèves sont engagés dans une activité de production de modèles aboutissant à quelques-unes de notions d'algèbre de ce niveau : écritures littérales, équations, nombres relatifs.

Mots-clés. Modélisation algébrique, programmes de calculs, parcours d'étude et de recherche.

Abstract. The tools provided by didactic research make it possible to design teaching proposals in which classes study on the basis of a search for answers to a generative question in elementary algebra. In this way, they stand out from textbook activities, which more often than not take the form of linked questions guiding pupils towards expected answers of limited scope, or which the teacher blows away by hiding them. The didactic groups of our two structures, the IRES of Aix-Marseille and the IREM of Clermont-Ferrand, have taken the epistemological approach of considering college algebra as a model of calculation programs and calculations on the models obtained. We present extracts from our proposals, in which students are engaged in an activity of model production, leading to some of the algebraic notions of this level: literal writing, equations, relative numbers.

Keywords. Algebraic modeling, calculation programs, study and research course.

Resumen. Las herramientas proporcionadas por la investigación didáctica permiten diseñar propuestas de enseñanza en las que las clases estudian a partir de la búsqueda de respuestas a una pregunta generativa en álgebra elemental. De este modo, se diferencian de las actividades de los libros de texto, que la mayoría de las veces adoptan la forma de preguntas enlazadas que guían a los alumnos hacia respuestas esperadas de alcance limitado, o que el profesor se carga ocultándolas. Los grupos didácticos de nuestras dos estructuras, el IRES de Aix-Marsella y el IREM de Clermont-Ferrand, han adoptado el enfoque epistemológico de

²² didier.auroy@free.fr

²³ laurette.guerin@free.fr

²⁴ yves.matheron@free.fr

²⁵ robert.noirfalise@free.fr

considerar el álgebra universitaria como un modelo de programas de cálculo y de cálculos sobre los modelos obtenidos. Presentamos extractos de nuestras propuestas, en las que los alumnos participan en una actividad de producción de modelos, que conduce a algunas de las nociones algebraicas de este nivel: escritura literal, ecuaciones, números relativos.

Palabras clave. Modelización algebraica, programas de cálculo, recorrido de estudio e investigación.

Introduction

Le texte qui suit reprend et développe les grandes lignes du contenu de l'atelier animé lors de ce colloque par des représentants des groupes « Didactique » de l'IRES d'Aix-Marseille et de l'IREM de Clermont-Ferrand. Au-delà de ce qui les réunit depuis des décennies – colloques, universités et écoles d'été, programmes de recherche et développement, articles, thèses –, ces deux groupes produisent, en interaction étroite, des ingénieries de développement à partir des acquis de la recherche en didactique (Matheron & Noirfalise, 2011). En particulier, ces ingénieries utilisent les avancées régulièrement produites en théorie anthropologique du didactique (TAD), dans la continuation des résultats initiaux établis en théorie des situations didactiques (TSD). C'est dans ce sens que ces groupes ont décidé de réunir leurs deux propositions initiales en un atelier commun traitant de la formation à la modélisation algébrique au cycle 4. Lors du colloque, cet atelier s'est donc déroulé sur une durée double du temps réservé à un atelier simple.

Suivant la logique d'appui sur des avancées théoriques en didactique pour des ingénieries de développement qui, à leur tour, à partir de l'analyse de leur implantation dans un terrain de recherche, permettront d'interroger la théorie (Perrin-Glorian, 2011), notre contribution expose quelques-uns des éléments, tant mathématiques que didactiques, dont nous nous servons. Ils sont illustrés de trois exemples – les nombres relatifs, le début des écritures algébriques à l'aide de « patterns », les équations – et s'inscrivent dans un programme de développement de praxéologies²⁶ didactiques de modélisation (Schneider, 2011). Disposer au préalable de ces éléments mathématiques et didactiques apparaît indispensable pour des propositions d'enseignement qui dépassent les activités insatisfaisantes de manuels (*cf.* dans ces actes un exemple dans Auroy et Matheron²⁷).

1. Le Schéma SFU : Structure / Fonctionnement / Utilité

Ce schéma a été proposé au cours de l'année 2022-2023 par Yves Chevallard dans le séminaire international qu'il anime. Elaborer un parcours d'étude et de recherche sur un domaine comme l'algèbre nécessite de s'interroger, au préalable et au minimum, sur les organisations mathématiques que les élèves vont pouvoir rencontrer : le schéma SFU est utile à cela. Le schéma SFU propose trois questions pour diriger l'interrogation :

Structure : quels sont les objets et les propriétés des objets du domaine ?

²⁶ Rappelons qu'une praxéologie, sous sa version élémentaire, est constituée d'un type de tâches, d'une technique pour l'accomplir, d'une technologie qui permet de produire, justifier et rendre compréhensible la technique, et d'une théorie qui remplit vis à vis de la technologie les mêmes fonctions que la technologie vis à vis de la technique. L'usage du terme de *pratique* ne désigne quant à lui que le seul couple constitué d'un type de tâches et de sa technique associée. Or une pratique ne vit que rarement sans ce qui la justifie : « on fait ainsi parce que... ».

²⁷ Plus précisément l'article « Enseigner les fractions en 6^e à partir de modélisations au sein d'un travail sur les grandeurs »

Fonctionnement : comment peut-on manipuler les objets du domaine ?

Utilité : à quoi cela peut-il servir ? Quelles en sont les raisons d'être ?

1.1. Structure : les objets du domaine

Suivant les travaux pionniers sur le domaine de l'algèbre menés dès les prémises de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1989), nous considérons l'algèbre élémentaire comme la science des programmes de calculs, de leur modélisation et des diverses praxéologies qui en découlent (calculs, variations, représentations, etc.). Les expressions algébriques sont alors vues comme des modèles de tels programmes qu'elles re-présentent ; c'est-à-dire qu'elles présentent de nouveau, sous une forme qui permet de les travailler, de les questionner et d'apporter des réponses que leur forme antérieure ne permettait pas ou permettait mal.

Les élèves du cycle 4 sont, depuis l'école primaire, familiers des calculs avec des nombres. Il s'agit que ces pratiques de calcul deviennent objets d'étude et de recherche. Pour la profession, se pose alors la question : « **Comment introduire les élèves à l'étude réfléchie des programmes de calcul, à leur modélisation ?** »

Notons ici que le système à modéliser n'est pas extérieur aux personnes, dans ce cas aux élèves. Il s'agit de leur faire modéliser des pratiques, ou plus précisément des praxéologies institutionnelles sur des systèmes, à propos desquelles ces élèves ont été antérieurement engagés. Le calcul littéral apparaît alors comme résultant de modélisations de praxéologies rencontrées au sein d'un curriculum précédemment et personnellement vécu, et sur lesquelles il s'appuie.

En feuilletant certains manuels français anciens (publiés antérieurement à la réforme des mathématiques modernes, donc avant 1970), ou encore des manuels anglo-saxons, apparaissent des objets traditionnels du domaine algébrique au niveau du cursus correspondant à l'actuel cycle 4 : monômes, polynômes, calculs sur ces objets et, plus généralement, calculs sur les programmes de calculs, modélisations de situations évoquées aboutissant à des expressions algébriques données ou à construire.

1.2. Fonctionnement : Comment peut-on manipuler les objets du domaine ?

La réponse à cette question suppose que la personne qui manipule ait à sa disposition des outils pour le faire. Parmi ces outils, les expressions algébriques doivent, pour les élèves, tout d'abord apparaître de plus grande efficacité pour répondre à des questions, que le recours habituel au langage usuel, parlé ou écrit, ou encore que le recours à d'autres registres, graphiques ou gestuels par exemple ; l'utilisation de l'un de ces registres n'étant pas exclusive de celle des autres. Ces questions portent, par exemple, soit sur des objets initialement présentés sous forme discursive (cas de programmes de calcul proposés en langage courant parlé ou écrit), soit sous forme graphique (cas de suites de figures construites selon un principe de récurrence que l'on perçoit mais qui reste à expliciter). Il s'agit par exemple de calculer, de déterminer un nombre d'objets, etc., ce qui apparaît mal commode si l'on suit le type de registres sous lequel est posée la question.

Les élèves étant convaincus de l'efficacité du recours à des expressions algébriques pour répondre à des questions – en fait pour répondre à une question assez vaste déclinée en sous-questions, et que l'on appelle génératrice car elle génère des pans entiers de l'algèbre élémentaire –, ils sont à plusieurs reprises engagés dans des processus d'étude

et de recherche. De nouvelles questions surgissent au cours de ce travail. On les qualifie de cruciales car ne pas y répondre compromettrait la suite du processus de recherche et la construction d'une réponse. Il devient alors nécessaire de produire des techniques inédites, en s'appuyant le plus souvent pour cela sur une extension des techniques et technologies arithmétiques auxquelles un rapport a été antérieurement établi : définitions des somme, différence, produit, propriétés des opérations dans N , Z ou Q . La construction, et notamment la maîtrise de ces techniques, par exemple pour développer, factoriser, réduire, demandent du temps et des entraînements... Et cela, sans perdre de vue que la construction des techniques et leur usage sont dirigés par le but à atteindre, par ce qu'on veut en faire : résoudre une équation, démontrer l'équivalence de programmes de calculs, formuler une relation fonctionnelle entre deux grandeurs...

1.3. Les raisons d'être : A quoi cela peut-il servir ?

L'algèbre élémentaire et son calcul littéral répondent à de multiples usages qui perdurent au-delà du cycle 4 :

Etude des propriétés des opérations et extension des systèmes de nombres.

Résolution d'équations, d'inéquations, de systèmes d'équations et d'inéquations.

Etude fonctionnelle des co-variations de grandeurs à l'occasion de l'étude des variations de fonctions. Au cycle 4, l'introduction des fonctions linéaires et affines permet aussi de revisiter la proportionnalité.

En géométrie les élèves ont à utiliser des formules exprimées de façon littérale : périmètres, aires, volumes par exemple. Selon les époques, ils ont pu rencontrer, dans les dernières classes du Collège, la contribution due à Descartes d'algèbrisation de la géométrie. Les programmes de calcul de géométrie analytique de ce niveau permettent de démontrer quelques propriétés : parallélisme, intersection, propriétés de polygones particuliers à partir de calculs de distances, etc.

Sans qu'elle soit complètement oubliée, la question de la production de formules semble peu mise en lumière dans les programmes de ces dernières décennies. Lagrange (1808) écrivait, pour en vanter les mérites, et ce qu'on peut en lire comme étant la question génératrice de l'algèbre, en un temps où il convenait de distinguer l'algèbre de l'arithmétique (Lagrange est mort en 1813) :

*[...] son objet n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais **le système d'opérations** [souligné par nous] à faire sur les quantités données pour en déduire les valeurs des quantités qu'on cherche, d'après les conditions du problème. Le tableau de ces opérations représentées par les caractères algébriques est ce qu'on nomme en Algèbre **une formule** [idem]; et lorsqu'une quantité dépend d'autres quantités, de manière qu'elle peut être exprimée par une formule qui contient ces quantités, on dit alors qu'elle est **une fonction** [idem] de ces mêmes quantités.*

Pour donner une place plus importante et surtout plus manifeste à la production de formules comme l'une des raisons d'être majeure de l'algèbre, nous développons en annexe quelques arguments en faveur d'un usage de paramètres. Pour cela il est nécessaire de trouver des situations conduisant à l'obtention de formules. Nous évoquons deux pistes : l'algèbrisation de problèmes arithmétiques, et la recherche d'usage de formules dans des secteurs professionnels.

2. Nécessité d'une organisation mathématique de référence pour des activités et parcours d'étude et de recherche (PER) dans le système

2.1. Utilisation des éléments structure (S) et utilité (U) du schéma SFU pour un PER sur l'algèbre élémentaire

Depuis de nombreuses années, le groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, désormais IRES, construit des propositions d'enseignement pour l'algèbre élémentaire au cycle 4, les fait passer dans les classes, les observe et analyse. Elles portent la volonté d'enseigner ce domaine, de la classe de 5^e à celle de 3^e, à partir de la dévolution aux élèves, et *sous la direction du professeur*, de la recherche de questions auxquelles l'algèbre du cycle répond. De telles activités sont organisées dans une succession cohérente de questions génératrices ou cruciales. Elles constituent un parcours d'étude et de recherche qui répond à la question posée dans le paragraphe 1.1. de ce texte : « Comment introduire les élèves à l'étude réfléchie des programmes de calcul, à leur modélisation ? »

Pour se faire une idée plus précise d'un parcours pour l'algèbre qui obéit au schéma SFU, le lecteur intéressé pourra se reporter à Matheron (2018-2019). Nous donnons cependant ci-dessous quelques-unes des questions génératrices renvoyant à la structure S des objets du domaine et à leurs raisons d'être U. La construction du fonctionnement F de ces objets, dévolue aux élèves au sein d'un processus de modélisation une fois qu'ils ont éprouvé cette nécessité, est exposée plus loin dans le texte sur quelques exemples : entiers relatifs, écritures littérales, équations.

Une des premières questions, génératrice du domaine, est la suivante : « pourquoi et comment modéliser des programmes de calcul ? » Elle est reprise en plusieurs fois au cours du parcours et se décline à partir de situations différentes.

La réponse au « pourquoi » des diverses modélisations alimente de nombreux secteurs du domaine algébrique, notamment celui propre à l'étude des nombres relatifs et celui qui relève des écritures littérales (inconnues, variables, paramètres). La réponse au « comment » se trouve dans la dévolution aux élèves d'une situation porteuse *d'une part* d'adidacticité. Ce terme est défini en didactique comme le fait de dévoluer la responsabilité de la production de la réponse à des élèves interagissant avec un milieu dénué d'intentions ; le professeur n'intervenant pas sur le savoir. Au contraire, dans nos productions, le milieu dévolu aux élèves n'est plus exclusivement et continuellement interprété comme dénué d'intentions. Il est aussi constitué d'un certain nombre de médias qui, comme tout média, sont porteurs de l'intention d'informer. Les informations peuvent venir de personnes (élèves, professeurs, parents...), du cahier de cours, du manuel ou d'un ouvrage, de l'Internet, d'une figure ou d'un symbole mathématique, etc. Ce milieu, dont nous donnons un exemple dans la suite de ce texte, est désigné du nom de « milieu du schéma herbartien²⁸ » (Chevallard, 2011).

Ainsi, lorsque l'étude complète de la question est considérée hors de portée de la mobilisation des connaissances antérieures des élèves, mais *pourvu qu'elle ait été travaillée par ces derniers*, le professeur peut décider d'intervenir comme un média : soit en fournissant la réponse, soit en proposant l'étude de nouvelles questions cruciales, soit en indiquant ou fournissant des médias qu'il estime pouvoir conduire vers une réponse

²⁸ Sur Johann Friedrich Herbart (1776-1841), pédagogue et philosophe allemand, on pourra se reporter à : https://fr.wikipedia.org/wiki/Johann_Friedrich_Herbart

(documents, manuel, Internet...). La situation comporte alors une part d'adidacticité, mais n'est pas purement adidactique dans le sens où le professeur ne se contenterait que de maintenir l'interaction des élèves avec le milieu, comme cela a pu être décrit en TSD (Brousseau, 1998).

Citons d'autres questions génératrices de secteurs du domaine qui, à partir de leurs raisons d'être (l'utilité U), conduisent à l'étude des objets du domaine (la structure S). Par exemple, les questions « Comment calculer sur des programmes de calcul ? Les rendre plus simples ? » et « Comment savoir si deux programmes de calcul sont équivalents ? » engendrent la nécessité de construire des techniques pour développer, réduire et ordonner des expressions polynomiales. Celles qui consistent à savoir si « Des programmes de calcul n'étant pas équivalents, peut-on trouver des valeurs pour lesquelles ils donnent le même résultat ? Ou encore un résultat du premier supérieur (inférieur) à celui du second ? » engendrent la recherche de techniques canoniques pour la résolution d'équations du 1^{er} degré ou s'y ramenant, ainsi que la résolution d'inéquations. « Comment varient ensemble deux programmes de calcul ? » engendre le champ des fonctions et de leurs variations.

2.2. Nécessité d'une organisation mathématique de référence (OMR)

Depuis l'ouvrage *La transposition didactique* (Chevallard, 1985 & éd. 1991), et les travaux menés à sa suite, on sait que ce que l'on désigne du terme de savoir, parmi un ensemble quasi-infini de praxéologies, ne relève pas d'un absolu intemporel et trans-institutionnel mais, au contraire, est propre à l'institution dans laquelle on le trouve et l'observe. Concevoir des parcours d'étude et de recherche en algèbre, pour qu'ils vivent au sein des classes du système secondaire, engage dans un processus de transposition didactique.

Si un tel processus pour l'algèbre élémentaire repose, comme pour d'autres domaines, sur l'utilisation préalable du schéma SFU, il recourt aussi à d'autres outils didactiques afin de porter et faire aboutir l'intention de rendre les élèves auteurs des mathématiques du domaine. Car pour être viable, c'est-à-dire pour pouvoir vivre dans le système standard des classes de mathématiques, il doit aussi tenir compte des conditions et contraintes propres à l'institution scolaire vers laquelle il est tourné.

En effet, y vivent d'ores et déjà et doivent être enseignés certains types d'organisations mathématiques. On peut recenser au moins deux grandes catégories de conditions et contraintes dont il faut tenir compte. Celles qui proviennent de la transposition didactique « déjà-là », résultant du programme et des médias utilisés (manuels et ressources diverses). Elles influent sur la nature des objets nouveaux à enseigner, sur ceux à ne pas enseigner, sur les appuis éventuels constitués des objets anciens définis par la progression ; par exemple qu'ont étudié les élèves sur les nombres et leurs opérations, quels problèmes « concrets » ont-ils résolus ? Et celles propres à l'organisation de l'école : nombre d'heures pour l'enseignement des mathématiques, formes didactiques en usage et habitudes professionnelles, contrats didactiques tournés tant vers l'institution que vers son extérieur, etc. Ces deux types de conditions et contraintes renvoient aux curriculums institutionnellement offerts et personnellement vécus par les élèves (Chevallard, 2021, Matheron & Méjani, 2021).

Une fois réalisée l'enquête sur le domaine A de l'algèbre, en suivant pour cela les entrées S et U du schéma SFU, se pose a priori une nouvelle série de questions pour la conception d'un enseignement bâti sur l'étude et la recherche. Parmi celles-ci, quel degré

d'éloignement ou de proximité les éléments d'algèbre a^* , produits ultérieurement par la classe en réponse à une question dévolue, entretiendront-ils avec les éléments d'algèbre A identifiés à partir de S et U ?

Dans la chaîne modélisant la transposition didactique, il devient alors nécessaire de travailler objectivement une nouvelle étape. Celle-ci reste le plus souvent invisible, implicite et subjective dans bien des transpositions didactiques actuelles en direction de l'institution scolaire ; une partie en fut visible lors de l'élaboration du programme de la réforme des mathématiques modernes.

Nous donnons ci-dessous un schéma qui montre la nécessité d'introduire l'étape de la définition d'une Organisation Mathématique de Référence A^* (OMR) dans la chaîne de la transposition didactique, pour un Parcours d'Etude et de Recherche tel que nous le concevons a priori.

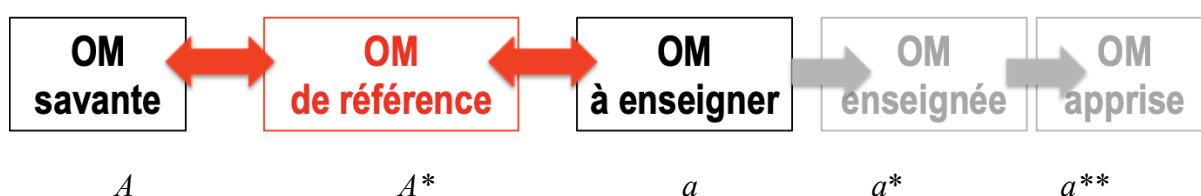


Figure 1 : L'OM de référence dans la chaîne de la transposition didactique

L'Organisation Mathématique de Référence A^* (OMR) joue un rôle de vigilance épistémologique relativement au domaine A , tout en y intégrant les conditions de possibilité et les contraintes limitatives énoncées ci-dessus. L'OM de référence prend ainsi place entre l'enquête sur les éléments de A et la définition de ce que seront les éléments d'algèbre a à enseigner. Les doubles flèches indiquent les interactions réciproques entre d'une part OM de référence et OM savante, dans ce cas constituée des éléments de A et, d'autre part, entre OM de référence et OM à enseigner, c'est-à-dire, pour cette dernière, constitutive a priori de l'organisation mathématique a du PER. Les flèches concernant a , a^* et a^{**} deviennent doubles lorsque l'observation et l'analyse de a^* et a^{**} permettent, dans un second temps, lors d'une analyse a posteriori non mentionnée dans ce texte, de retoucher A^* et a .

Dans le cas général, au-delà du seul domaine de l'algèbre, l'OM de référence est constituée d'un ensemble de réponses, parfois partielles, à des questions telles que celles-ci : « que conserver des questions ayant engendré les réponses constitutives des éléments de l'OM savante et que conserver de celle-ci ? » ; « comment transformer sans dénaturer ? » ; « de quelles contraintes tenir compte, qui relèvent à la fois de la partie du curriculum à enseigner et du curriculum antérieurement offert aux élèves ? » ; etc. Pour chaque étape de la transposition didactique schématisée ci-dessus, vivent alors des organisations mathématiques différentes qui, entre elles, entretiennent des degrés de proximité et d'éloignement relatifs. Un exemple permet de l'illustrer.

2.3. L'exemple de l'organisation mathématique de référence pour les nombres relatifs

On sait qu'une construction algébrique formelle de Z consiste à symétriser N (Combes, 1998). On utilise pour cela une relation d'équivalence sur $N \times N$; $\dot{\cup}$ est le groupe-quotient

ainsi obtenu. Cette construction est un élément d'une organisation mathématique « savante » pour les entiers relatifs. Relations et classes d'équivalence, notions de groupe et de groupe-quotient, compatibilité d'opérations, ne sont pas des objets d'une transposition didactique pour l'actuel programme du cycle 4. Une question d'enseignement fondamentale, car de nature épistémologique, est pourtant celle de la proximité ou de l'éloignement de ce que l'on enseignera sur les entiers relatifs par rapport à une construction savante de Z .

Bien des activités des manuels l'ont résolue en recourant à l'analogie avec les températures, ou avec d'autres supports cognitifs imaginés et plus ou moins rigoureux (des jetons de couleur). Nous avons montré ailleurs les différents obstacles de nature épistémologique et didactique qui résultent de tels choix. La raison tient d'une part à une réalité mathématique : la grandeur évoquée n'obéit pas à l'axiome d'additivité d'une mesure, les températures de deux objets disjoints ne s'ajoutant pas. D'autre part, la métaphore devient obstacle didactique tournant à l'absurde à propos du produit de relatifs qu'il faudrait associer à... une température au carré !

Concevoir une proposition d'enseignement pour les entiers relatifs n'échappe pas aux questions de vigilance épistémologique et d'obstacle didactique. Dans le cas des entiers relatifs considérés comme une partie de l'algèbre élémentaire en tant que modélisation de programmes de calcul, la question à se poser est la suivante : « comment engendrer les entiers relatifs à partir de tels programmes de calcul, tout en conservant une compatibilité avec le curriculum actuel ? »

L'OM de référence permettant d'apporter réponse à ces questions, tout en assurant un contrôle sur l'organisation mathématique à enseigner, peut se décrire de la manière suivante. Elle part du programme de calcul consistant, à un nombre donné, à en ajouter un autre puis à en soustraire un second. Il se modélise simplement à l'aide de polynômes du 1^{er} degré $P(x) = x + a - b$, où a et b sont des paramètres entiers qui deviendront variables didactiques dans le PER. Il en sera de même, dans un premier temps, pour la variable x des programmes de calcul dévolus aux élèves, afin que $P(x)$ soit toujours

positif (on prend soin que l'on ait toujours $x \geq |a - b|$ lorsque $a < b$), car la soustraction d'un nombre plus grand à un autre est, à ce stade, considérée impossible.

L'entier positif est alors l'entier qu'il faut ajouter à x dans le cas où $a > b$; l'entier négatif est celui qu'il faut lui soustraire dans le cas où $a < b$. Il se trouve qu'un même nombre relatif est obtenu en donnant des valeurs différentes aux paramètres a et b . C'est une classe d'une relation d'équivalence. Celle-ci apparaît de la manière suivante : deux polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont équivalents si et seulement si quel que soit x : $P_1(x) = P_2(x)$. Soit $x + a - b = x + c - d$, ou encore $a - b = c - d$ qui donne $a + d = b + c$. C'est une relation d'équivalence pour symétriser N .

Ainsi, l'organisation mathématique à enseigner engagera-t-elle tout d'abord les élèves dans des calculs tels que $2023 + 35 - 36$; $834 + 72 - 73$, associés aux programmes de calcul « à un nombre, ajouter un second puis soustraire un troisième », afin qu'ils réalisent l'économie procurée en calculant non plus de gauche à droite, mais en commençant par la différence des deuxième et troisième nombres. Dans ces deux exemples, les calculs reviennent à soustraire 1, noté -1. On obtient ainsi $+35 - 36 = +72 - 73 = -1$. On constatera qu'une infinité d'autres couples de nombres donnent -1. De même pour d'autres entiers relatifs que -1 qui sont traités comme des

scalaires et non pas comme des mesures de grandeurs²⁹. Pour télécharger le fichier complet du PER sur les relatifs proposé par l'IRES d'Aix-Marseille, utiliser le lien <https://sciences.univ-amu.fr/fr/departements/ires#section-16914> où se trouve l'entrée « Parcours d'Etude et de Recherche sur l'enseignement des nombres relatifs au collège ».

3. Un exemple de processus de modélisation dévolu aux élèves

3.1. Illustration de la dialectique système-modèle : construire les entiers relatifs en 5e

On part du point de vue de Lebesgue dans l'introduction à *La mesure des grandeurs* (1975). Il explique que les premières praxéologies de comptage, celles issues de constations faites sur des « peuplades primitives », reposent sur la comparaison des collections « à une même collection type, la collection des mots d'une phrase. Ces mots sont appelés des *nombres*. [...] Le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection. » Lebesgue conclut, en italique dans le texte : « *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences [...]* »

Un nombre apparaît ainsi comme un modèle, un « compte rendu complet » d'un ensemble de praxéologies « expérimentales » ; elles sont désignées comme étant de dénombrement par des institutions, puis par la société. L'efficacité des résultats expérimentaux, comme les règles des quatre opérations qui modélisent certaines praxéologies, permet de se dispenser de recourir de nouveau à l'expérience.

Le passage de l'ouvrage de Lebesgue évoqué ci-dessus laisse voir non pas une seule modélisation, mais le début d'un *processus continué* de modélisations de praxéologies sur des systèmes. Le système premier, si tant est qu'il le soit, celui des praxéologies de comparaison des collections à la collection des mots d'une phrase, engendre un premier modèle : celui constitué par les nombres naturels. A son tour, le modèle des nombres devient système à propos duquel il devient plus économique de travailler les modèles de ses praxéologies : par exemple celles consistant à trouver le nombre issu du rassemblement de deux collections disjointes dont on connaît les nombres associés. On obtient ainsi un deuxième modèle : celui de l'addition. A leur tour, de nouvelles praxéologies sur le système des nombres aboutissent à d'autres modèles : les quatre opérations. On peut concevoir que, considérées ultérieurement comme des praxéologies de systèmes pouvant être modélisées, par exemple à partir de ce que permettent de travailler les propriétés, communes ou pas, des opérations, ces praxéologies fournissent des modèles d'un « niveau supérieur ». Par exemple, en poursuivant l'exemple, elles fournissent le modèle « supérieur » des structures algébriques, pour lequel des opérations deviennent des lois de composition interne sur des ensembles pouvant ne pas être numériques, munis d'opérations externes dépendant d'autres ensembles.

Une des questions fondamentales pour certaines des ingénieries didactiques basées sur l'étude par la recherche est la suivante : comment faire vivre auprès des élèves, dans des dispositifs d'ingénieries, la dialectique système-modèle, *bâtie autour de praxéologies*, qui apparaît sur cet exemple comme étant propre au processus de construction des nombres ?

²⁹ Ce qui indique l'expression « Les nombres relatifs : des nombres "au-delà de la mesure" », titre d'un des chapitres du document d'accompagnement « Les nombres au collège » de mars 2016, téléchargeable sur Eduscol.

Le schéma ci-dessous fournit la trame d'une réponse. Il évoque, sur l'exemple de la construction des relatifs dévolue aux élèves, le processus dialectique système-modèle issu du travail de l'organisation mathématique de référence (OMR) pour cette partie du PER sur l'algèbre au cycle 4. L'OMR a été décrite dans le paragraphe 2.3. et nous n'y revenons pas. Le schéma représente ce processus au soubassement de l'organisation mathématique du début du PER.

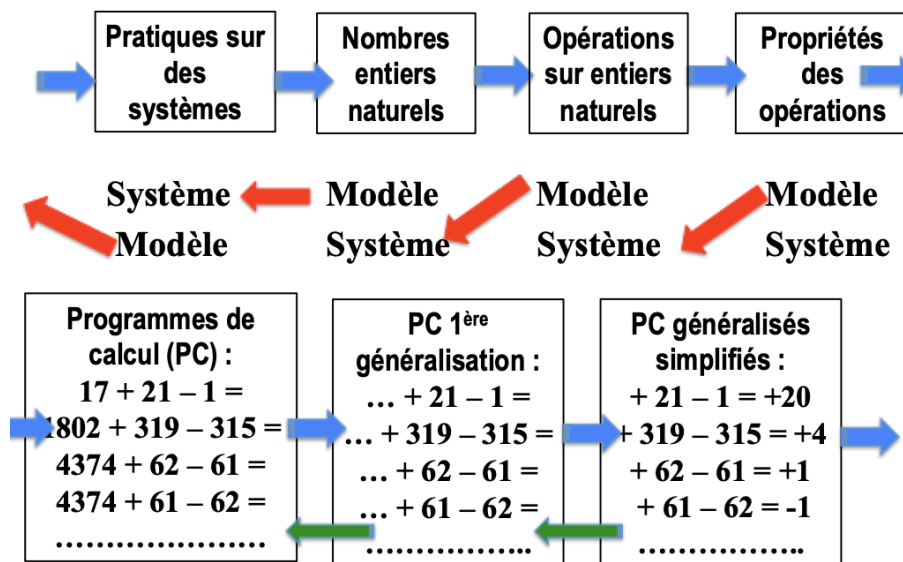


Figure 2 : Les entiers relatifs comme modèles à l'issue d'un processus dialectique système-modèle

Un schéma est toujours un modèle d'un système, et celui-ci n'échappe pas à cette caractéristique ! Il n'importe que quelques traits des systèmes de praxéologies qu'il modélise, beaucoup plus complexes dans la réalité qu'il évoque... Ainsi, la première ligne représente des grandes étapes du curriculum institutionnellement offert sur les nombres et leurs opérations, dans les classes du cursus qu'ont fréquentées les élèves avant l'entrée en 5^e. Les rapports aux opérations, à leurs propriétés ou à la division euclidienne par exemple, restent, à ce stade, en cours d'élaboration.

La seconde ligne montre le processus dialectique système-modèle tel qu'il a pu, ou aurait pu, exister pour l'enseignement des différentes étapes du curriculum évoquées par la première ligne. Les flèches rouges, dirigées de droite à gauche, indiquent qu'un modèle donné provient du système antécédent. Il en est de même des flèches vertes de la dernière ligne.

Le schéma indique qu'un modèle, issu d'un système de praxéologies, devient à son tour un système de praxéologies qui, à l'issue d'un processus de modélisation, appellera un nouveau modèle, et ainsi de suite. Ainsi, reprenant l'exemple qui structure cette partie du texte, à l'origine de l'enseignement des nombres existent des praxéologies de dénombrement. Elles s'appuient elles-mêmes sur des praxéologies plus anciennes, sociales, rencontrées à l'intérieur ou hors du système scolaire, comme le comptage avec les doigts par exemple, et qui portent sur différents types de systèmes. Il s'agit par exemple des systèmes de praxéologies que l'on trouve dans les dispositifs didactiques en usage à la charnière de l'école maternelle et du cours préparatoire : travaux sur les gommettes, les dessins évoquant des objets, les bûchettes, les dés, etc., sur lesquels ou à partir desquels les élèves sont invités à agir, à contrôler et justifier leur action. Suivant l'entrée proposée par Lebesgue, le nombre apparaît ainsi comme « compte rendu

complet » d'expériences, c'est-à-dire comme modèle des praxéologies accomplies sur les objets de ces systèmes. Le processus de modélisation de systèmes se poursuit, les modèles devenant à leur tour systèmes : les chiffres, les écritures de nombres, leurs décompositions additives en base 10, les opérations, etc., sont autant de résultats de modélisations de praxéologies sur les objets de ces systèmes.

La troisième ligne représente des éléments de l'organisation mathématique à enseigner à partir de l'intégration du processus système-modèle portant, au sein de l'organisation mathématique de référence, sur des polynômes du type $P(x) = x + a - b$. Le rapport antérieurement établi par les élèves aux calculs sur les entiers leur permet de s'engager dans les calculs proposés. Ils s'aperçoivent, dans un second temps, que le premier nombre sur lequel on ajoute puis soustrait importe peu. Les programmes de calcul revenant tous, en définitive, à ajouter ou soustraire un nombre au premier, quel qu'il soit, le résultat ne dépend que des deuxième et troisième nombres.

Ce résultat devient un élément technologique justifiant des techniques propres à ces calculs. Il en découle qu'on peut se dispenser d'écrire le premier nombre ; ce que modélise dans un premier temps l'écriture ostensive sous la forme des trois points de suspension. Puis, les points de suspension qui indiquaient un premier nombre dont on peut garder le souvenir – une possibilité de se souvenir qu'évoquent les flèches vertes –, disparaissent à leur tour pour des raisons d'économie. On aboutit ainsi à une nouvelle écriture, celle d'un nombre relatif comme modèle de l'ensemble des praxéologies de calcul aboutissant à ajouter ou soustraire un même nombre, par exemple +4 ou -1.

Dans notre proposition de PER, le processus qui vise à ce que les élèves considèrent les écritures du type +4 ou -1 comme celles de nombres, nécessite que les élèves agissent avec et sur elles comme on le fait avec des nombres : c'est-à-dire qu'on opère et qu'on compare. Autrement dit, en classe de 5^e, que les élèves construisent, sous la direction du professeur, une addition, une soustraction et un ordre sur les relatifs, compatibles avec l'addition, la soustraction et l'ordre sur les entiers et les décimaux positifs et qu'ils connaissent. Ce travail occupe environ une vingtaine de séances de 55 min, soit six à sept semaines, réparties sur l'année en plusieurs périodes. C'est le temps approximatif que consacrent les professeurs de ce niveau, et qui renouvellent chaque année avec succès cet enseignement : que ce soient les professeurs du groupe didactique ou ceux qui suivent notre proposition à l'issue des stages que nous animons.

3.2. La dialectique système-modèle

Evoquer modèle et modélisation suppose en préalable, et afin de ne pas parler dans le vide, que l'on en ait une définition. Nous la donnons à partir de la notion de système de praxéologies exemplifiée dans le paragraphe précédent. Dans le cas des mathématiques, un système de praxéologies est constitué d'un ensemble d'organisations mathématiques de divers types, comme on l'a vu dans l'exemple des nombres relatifs.

Un modèle est donc un système permettant d'obtenir, grâce à un changement de pratiques (ou plutôt de praxéologies) sur un changement d'objets, des informations sur le système de pratiques (praxéologies) antécédent qu'il modélise. Généralement, la modélisation s'accompagne d'un changement du système des objets (par exemple du système des symboles mathématiques) qui, en tant qu'outils, permettent de travailler le modèle et peuvent continuer d'évoquer certains éléments du système modélisé. Ainsi naît une dialectique système-modèle telle que celle qui a pu être décrite au niveau des organisations mathématiques sur l'exemple du paragraphe 3. 1.

Sur l'exemple précédent, une illustration de cette dialectique peut être donnée à partir du cas du symbole « - ». Dans un système initial comme $\dot{-}$, il indique une soustraction, et donc la praxéologie qui lui est relative : associée à un type de tâches, au minimum une technique, son contrôle et sa justification. Puis dans les modèles qui suivront, le symbole « - » indiquera non plus un opérateur mais le signe d'un **nombre** relatif et les praxéologies qui sont attachées aux divers types de tâches dans lesquelles on rencontre ces nouveaux nombres : par exemple, comparer et opérer avec ces nombres. Ainsi dans le calcul de $+8 - 5$, le signe « - » pourra être vu comme indiquant **une soustraction** dont le résultat se note 3, ou +3 si l'on sait identifier ces deux écritures. Mais dans un calcul comme $+8 - 15$, si on voit le signe « - » comme une soustraction que l'on sait impossible dans le système constitué des praxéologies sur $\dot{-}$, on pourra changer de point de vue, ou plus précisément de modèle, pour s'appuyer sur les praxéologies portant sur le modèle **des programmes de calcul** et donner le résultat. « A un nombre qu'on ne connaît pas, si on ajoute 8 puis on retranche 15, alors on lui retranche 7, que l'on note -7 », pourra dire un élève.

On voit, sur l'exemple du signe « - », que cette dialectique nécessite d'être prise en charge au niveau des organisations didactiques afin d'accompagner les élèves dans le passage récurrent du système au modèle. Autrement dit de les accompagner au sein d'un processus de modélisation dirigé par le professeur. On ne peut concevoir un tel accompagnement didactique a priori si, au préalable, une analyse mathématique de cette dialectique n'a pas été menée.

La définition proposée englobe la modélisation intra-mathématique si le système à modéliser relève de praxéologies mathématiques, et extra-mathématique selon la nature différente des praxéologies propres au système antécédent. La détermination du système antécédent provient, à l'origine, du découpage plus ou moins arbitraire du domaine de réalité praxéologique que l'on souhaite modéliser pour l'étudier : l'architecture d'une ville, les covariations de grandeurs, un système économique, etc.

Volontairement succincts dans ce texte, davantage de détails concernant le PER sur les nombres relatifs au collège peuvent être trouvés dans le fichier de l'IRES d'Aix-Marseille, téléchargeable à partir du lien indiqué au paragraphe 2.3.

4. Exemples issus d'un parcours d'étude et de recherche sur l'algèbre en classe de quatrième : modéliser à partir de problèmes de patterns

Le paragraphe suivant présente une partie du travail du groupe didactique de l'IREM de Clermont-Ferrand, en collaboration avec l'IRES d'Aix-Marseille, sur l'introduction en classe de 4^e des expressions algébriques comme modèles de programmes de calcul. Nous présentons une entrée fondée sur des problèmes de « patterns », à partir de la recherche de régularités dans des suites de motifs évolutifs. Le terme « pattern » est pris au sens du guide de « Résolution de problèmes mathématiques au collège » (MEN, 2021), tel qu'il le définit page 110 : « une suite d'objets appelés éléments reliés les uns aux autres par une règle spécifique. »

4.1. Description des deux tâches pour une même question génératrice

Deux tâches du même type, soit deux problèmes de patterns, sont proposées aux élèves en début de parcours. La première est composée d'une suite de petits carrés, dans lesquels trois carrés sont ajoutés à chaque rang. Dans la seconde, une maison

supplémentaire, accolée aux autres, est bâtie à chaque nouvelle étape de la construction. La question génératrice commune à ces deux tâches est la suivante : « Peut-on déterminer le nombre de petits carrés (ou d'allumettes) à n'importe quelle étape de la suite de motifs ? Si oui, comment ? »

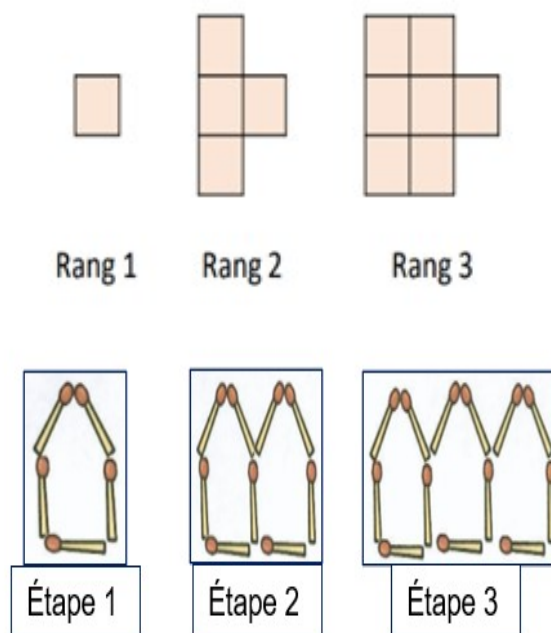


Figure 3 : Les supports, sous forme de patterns, pour deux tâches du même type

Notons que l'on n'engage pas seulement les élèves à chercher le résultat (le nombre de carrés ou d'allumettes), mais plutôt la technique de calcul qui y conduit. Il s'agit aussi de la décrire, c'est-à-dire de produire un premier discours technologique sur la technique, qui évoluera. En ce sens, il y a changement de contrat par rapport aux travaux numériques habituellement donnés. Il faut que les élèves produisent une ébauche de *système* de praxéologies qui permettent de compter les objets et décrire le système de comptage utilisé. Deux modélisations apparaîtront au cours d'un processus évolutif. Tout d'abord des programmes de calcul rédigés le plus souvent en français, qui modélisent la suite de motifs. Puis ces programmes de calcul sont à leur tour modélisés par des expressions algébriques.

Dans un premier temps, les élèves sont amenés à trouver individuellement le nombre de carrés (tâche 1) ou le nombre d'allumettes (tâche 2) pour un rang proche (rang 4 ou 5). Pour répondre à cette question, les élèves peuvent effectivement dessiner le motif à l'étape 4 à partir de ce qu'ils pensent être le prolongement des motifs et ainsi compter, une à une, les allumettes ou, un à un, les petits carrés. Dès le début de l'activité, il n'est pas rare qu'une deuxième technique apparaisse : celle qui consiste à ajouter trois carrés au nombre de carrés du rang 3 ou d'ajouter quatre allumettes au nombre d'allumettes de l'étape 3. Les erreurs sont écartées dans la classe en comptant les éléments. À ce stade, on peut aisément éliminer les dessins erronés, pour des élèves qui n'auraient pas compris la régularité implicitement suggérée. Cette entrée en matière permet de s'assurer que tous les élèves disposent, dans le milieu, des données suivantes :

pour les deux tâches, on compte, non pas le nombre de maisons, mais bien le nombre de petits carrés ou le nombre d'allumettes,

pour la tâche 2, on compte le nombre d'allumettes correspondant au numéro de l'étape, et à chaque étape on construit une maison supplémentaire.

La suite est réalisée sous la forme d'un travail de groupes où, dans un deuxième temps, on demande aux élèves de trouver le nombre de petits carrés ou d'allumettes d'un rang plus lointain (rang 432 ou 123), puis, dans un troisième temps, de déterminer le nombre d'éléments du motif à n'importe quelle étape. Il est alors impossible de compter un à un le nombre d'éléments, comme on a pu le faire à l'étape 4, le rang étant trop grand et le motif difficilement représentable. Lors des passations, on a pu observer que les élèves de 4^e s'engagent facilement et rapidement dans des techniques de comptage, souvent différentes d'un groupe à l'autre.

4.2. Réponses des élèves

Les groupes sollicitent en effet des rapports à des œuvres mathématiques différentes, antérieurement étudiées, et produisent des réponses à partir de ce que leur indiquent les ostensifs (Bosch & Chevillard, 1999) contenus dans la suite des motifs. Par exemple, certains dessinent en couleur des éléments dans le motif, montrant ainsi à chaque étape l'ajout de 3 carrés ou de 4 allumettes au motif précédemment dessiné.

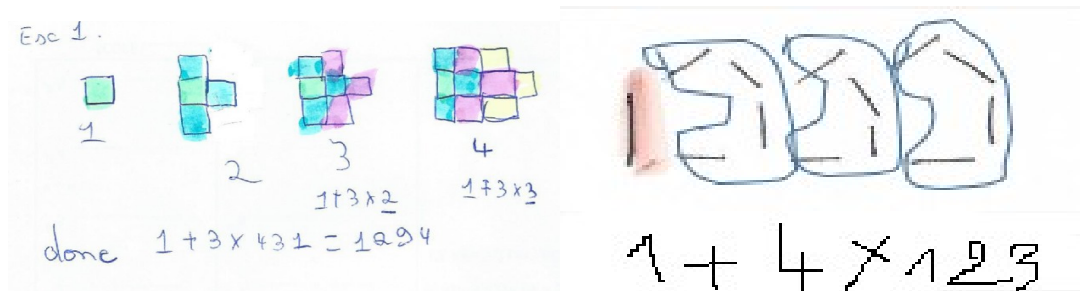


Figure 4 : Utilisation de divers ostensifs (couleur, regroupement) pour produire une technique

Pour la tâche 1, à gauche, les écritures des calculs indiquent ce qui est de l'ordre du « constant » et ce qui évolue : les nombres 2 et 3 sont soulignés, correspondant au rang de l'étape moins 1.

Pour cette technique de comptage, et depuis des parties de leur curriculum personnellement vécu, les élèves sollicitent des rapports anciennement établis envers la multiplication comme addition itérée. Cela leur permet de conclure qu'à chaque étape on a 4 allumettes de plus, et par suite, à l'étape 123, 123 fois 4 allumettes à ajouter. De manière tout à fait similaire, un autre groupe compte 5 allumettes pour la première maison, puis un ajout de 4 allumettes à chaque étape.

Dans une autre production, les élèves distinguent le nombre d'allumettes constituant « le toit », de celles horizontales (« sol ») et de celles verticales (nombre de « cloisons »).

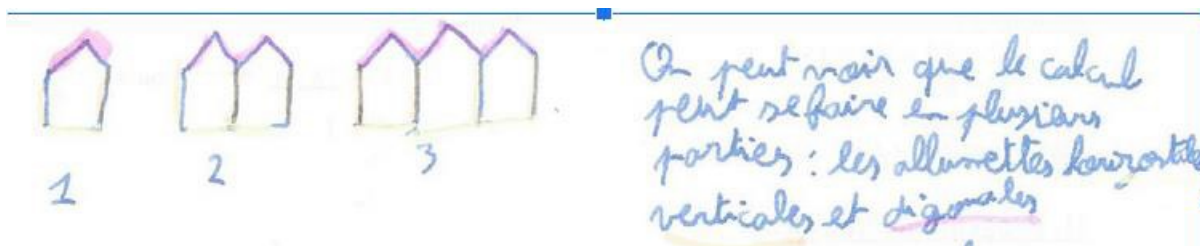


Figure 5 : Autre technique de comptage et commentaire écrit associé

D'autres groupes recourent à un tableau de valeurs pour conclure à l'écriture rhétorique d'un programme de calcul. Si le tableau peut parfois déclencher de manière quasi-automatique des techniques liées à la proportionnalité erronées dans ce cas, comme on a pu l'observer parfois, cela ne l'a pas été pour ce groupe. Deux opérations sont indiquées : « multiplier par 4, ajouter 1 ».

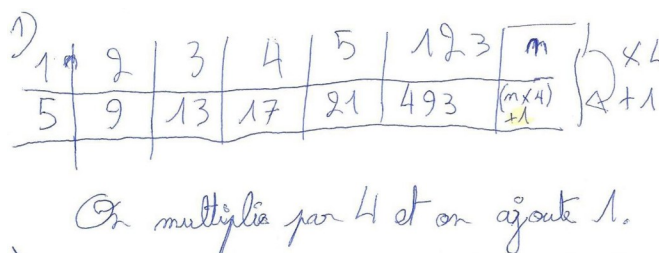


Figure 6 : Technique recourant à l'ostensif « tableau »

Des élèves peuvent aussi reformer des cloisons en déplaçant l'allumette formant le « sol » pour bâtir des maisonnettes de 4 allumettes, ce qui amène aussi à l'expression algébrique $4 \times n + 1$.



Figure 7 : Une autre technique aboutissant à une écriture littérale

Les réponses des groupes ainsi produites sont données sous différentes formes, sans nécessairement avoir recours à la lettre. Il peut s'agir : d'une suite d'instructions formulées en langage naturel, sous forme rhétorique ; d'un calcul générique ; d'un tableau ; d'une forme proche des expressions algébriques comme « nombre de maisons $\times 4 + 1$ ».

Quelle que soit la façon de compter, les programmes de calcul, tous différents mais tous équivalents, apparaissent comme des outils techniques pour résoudre le problème. Les questions du choix des expressions algébriques, et du choix de la lettre pour modéliser ces programmes de calcul, se posent alors de manière prégnante dans la classe. Lors d'une mise en commun suivie d'un bilan, le professeur organise la mise en forme, mène un travail sur les lettres à partir de l'usage qu'ont commencé à en faire certains groupes, et promeut l'utilisation d'expressions algébriques. En effet, pour les élèves qui l'ont éprouvée, elles réalisent une écriture plus synthétique d'un programme de calcul écrit auparavant de manière rhétorique. Elles constituent aussi un média qui fournit l'information cruciale : « comment calculer le nombre d'allumettes ou le nombre de

petits carrés, à n'importe quelle étape ». Elles synthétisent et indiquent, de manière condensée, le programme de calcul à exécuter. De surcroît, à travers l'économie qu'elles représentent pour des manipulations algébriques (développer, ordonner, réduire) que l'on fera par la suite, elles fourniront une nouvelle justification de l'avantage qu'il y a à utiliser des expressions algébriques plutôt que d'autres formes, rhétoriques par exemple. Elles apparaissent ainsi comme un aboutissement du processus de modélisation : la modélisation des suites de motifs par les programmes de calcul, puis la modélisation algébrique des programmes de calcul. Le modèle algébrique fournit une réponse économique pour les praxéologies de calcul du système antérieur.

4.3 Des conditions nécessaires

Toutefois il est nécessaire que certaines conditions relatives au contrat didactique soient remplies pour que les élèves s'engagent dans le processus de modélisation. Laisser les calculs aux différentes étapes sans les effectuer constitue une rupture franche avec les praxéologies attendues dans le domaine arithmétique. Les élèves doivent aussi faire le lien entre une opération et certaines grandeurs. Par exemple, le nombre d'allumettes constituant le « sol » est égal au numéro de l'étape, ou encore le nombre d'allumettes verticales est égal au numéro d'étape plus 1. Ils doivent aussi s'autoriser à déconstruire les motifs : déplacer des allumettes, rajouter ou enlever des petits carrés afin de mettre en évidence des ébauches de technique de comptage. Enfin, le temps de recherche laissé aux élèves doit être suffisant afin de ne pas « tuer dans l'œuf » le processus de modélisation.

L'observation des classes engagées dans ces tâches du même type montre qu'il est possible de dévoluer aux élèves un processus de modélisation, sans que ce soit l'apanage exclusif du professeur. La richesse des techniques induites chez les élèves par la perception des motifs aboutit à diverses expressions algébriques, certes équivalentes, mais écrites sous des formes différentes. Ce constat permet de poser la question de l'équivalence des expressions trouvées.

4.4 Poursuite du parcours ; équivalence des expressions algébriques

Les élèves poursuivent leur travail par la production d'autres expressions algébriques à partir d'autres problèmes de patterns analogues à ceux présentés. Ces problèmes ont été choisis au sein d'une progression raisonnée : d'abord des situations amenant à un polynôme du premier degré puis celles mobilisant un polynôme du second degré.

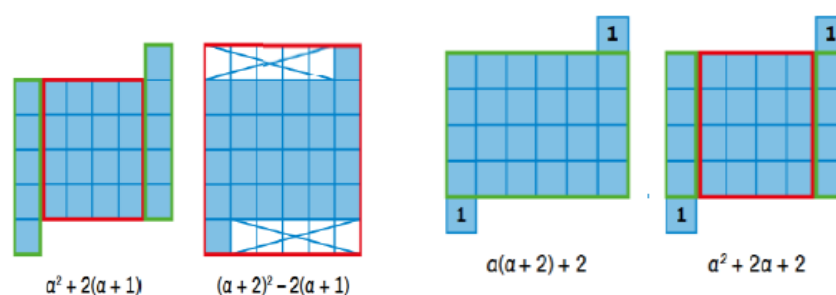


Figure 8 : Pattern pour une modélisation à l'aide de polynômes du second degré

Cette série de tâches du même type permet, d'une part, de mettre en évidence les premières règles d'écritures algébriques, par exemple la commutativité et les écritures simplifiées $4 \times n = n \times 4 = 4n$ et, d'autre part, de classer les

problèmes entre premier et second degrés à partir de leurs formes canoniques $ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des nombres avec $a \neq 0$.

Est-il si évident que la forme « $a(a + 2) + 2$ » soit du second degré ? On sait que l'équivalence avec la forme « $a^2 + 2a + 2$ » permet de répondre par l'affirmative. Une question cruciale peut alors être posée à la classe : « Si, dans chaque cas, on trouve des expressions algébriques différentes, peut-on affirmer qu'elles sont ou non équivalentes ? » La réponse est indéniablement positive disent au premier abord les élèves, puisqu'elles comptent la même collection d'éléments ! A ce stade, il devient nécessaire d'envisager une série de nouvelles questions : « Comment pourrait-on expliquer cette équivalence des expressions algébriques, sans faire appel à la suite de motifs et aux grandeurs ? » Il s'agit alors d'oublier les situations initiales sur les patterns et les praxéologies associées pour ne travailler que sur les équivalences des expressions algébriques ; autrement dit d'oublier les systèmes pour ne travailler que les modèles.

Les grandeurs sont alors volontairement mises en retrait afin que les expressions algébriques deviennent objet d'étude en soi. Des questions nouvelles sont amenées par le professeur : « En les définissant sur des ensembles de nombres plus vastes, comme les négatifs ou les réels, les expressions algébriques trouvées sont-elles toujours équivalentes ? » Question qui amène la suivante : « Les expressions algébriques définies sur d'autres nombres que des entiers, existent-elles dans la réalité ou s'agit-il d'une question purement formelle ? »

Une brève recherche des élèves hors classe, sur l'Internet, dans leurs cahiers de SVT ou de physique, permet de répondre par l'affirmative. Ils y trouvent divers exemples : des conversions d'unités de températures ($^{\circ}\text{C}$ en $^{\circ}\text{F}$), des calculs de l'IMC (Indice de Masse Corporelle), des formules du cours de physique ($U = RI$), etc.

Remarquons que chaque fois que le doute s'installe chez les élèves (par exemple, $4x+3$ est-il égal ou non, à $7x$?), le professeur peut les amener à se référer aux patterns pour redonner du sens aux expressions algébriques. Autrement dit, existe toujours la possibilité de revenir au système depuis le modèle.

La question demeure d'amener les élèves à montrer l'équivalence d'expressions algébriques. Les collégiens utilisent souvent des règles de transformation d'expressions algébriques sans savoir ce qui les justifie, pourquoi elles « fonctionnent ». Elles sont alors décrites comme des « recettes » à appliquer : comment développer, comment réduire... et les propriétés mathématiques qui les justifient sont au mieux montrées par le professeur, rarement établies par les élèves à partir de situations qui les nécessitent. Un rapide retour sur l'organisation mathématique de référence indique que l'organisation mathématique du PER est constituée de l'anneau des polynômes restreint aux polynômes des premier et second degrés. Aussi apparaît-il important pour ce PER en 4^e de rétablir et d'explicitier les technologies au fondement des transformations algébriques.

On revient alors à la situation des allumettes en changeant les termes du contrat didactique. La question devient la suivante : « On a trouvé différentes façons de calculer le nombre d'allumettes à l'étape 123. Pouvait-on prévoir que ces calculs donnent le même résultat sans calculer le résultat final ? » Parmi les expressions trouvées par la classe, ont été choisies par le professeur celles qui permettront de rencontrer par la suite les questions par lesquelles passent les calculs algébriques élémentaires : Comment développer ? Comment réduire ? Comment enlever des parenthèses autour d'une somme précédée d'un signe « moins » ? Et, par suite, toutes les tâches qui en découlent.

Dans chacun des cas, les élèves se doivent de justifier leurs transformations à l'aide d'une propriété rencontrée au début de l'année, lors de séances de calcul mental (calculer par exemple 14×8), et consignée sur une affiche. Pour plus de simplicité, les propriétés ont été numérotées. Par exemple la propriété *R6* représente la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition/soustraction et la règle *R1* la définition de la multiplication comme addition itérée. Les élèves sont amenés à écrire les propriétés algébriques correspondantes et à réaliser le même travail avec les expressions algébriques, comme le montrent les deux exemples suivants de productions d'élèves.

Réduction	Développement
$D = A$ $D = 2 \times 123 + 123 + 123 + 1$ On utilise la règle 1. $D = 2 \times 123 + 123 + 123 + 1 = 4 \times 123 + 1$ $D(m) = A(m)$ $D(m) = 2 \times m + m + m + 1$ On utilise la règle 1 $D(m) = 2 \times m + m + m + 1 = m + m + m + 1 = 4 \times m + 1$	$C =$ On utilise <i>R6</i> $C = 5 + 4 \times (123 - 1) = 5 + 4 \times 123 - 4 \times 1 =$ $C = A$ $C =$ On utilise <i>R6</i> $C = 5 + 4 \times (7 - 1) = 5 + 4 \times 2 - 4 \times 1 =$ $= 4 \times 2 + 1 = A$

Figure 9 : Justification des techniques de réduction et développement par recours aux technologies

4.5 Conclusion : la dialectique système-modèle

Ce parcours organise la mise à distance progressive du système des praxéologies initiales – sur la situation des allumettes et des carrés, sur des problèmes de patterns –, pour se pencher sur les informations recueillies à partir du modèle des expressions algébriques. Un retour sur le système est toujours possible pour vérifier certaines équivalences d'expressions algébriques : par exemple pour montrer que pour tout x , $2x + 1$ est différent de $2x + 1x$. Les propriétés des opérations sur les nombres servent d'appui pour construire « les règles » du calcul algébrique. On se réfère donc au système des calculs arithmétiques, tout en restant dans le modèle algébrique. Cependant, dans un calcul numérique on cherche en premier lieu l'opération prioritaire afin de l'effectuer. Dans un calcul algébrique on cherche la propriété, l'élément technologique, pour s'engager dans la technique : par exemple, est-on en présence d'une somme entre parenthèses multipliée par un facteur, afin de pouvoir utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ?

Lorsqu'on pose la question de l'équivalence de deux programmes de calcul dans le système, le modèle algébrique, avec ses écritures littérales et leurs transformations, permet de conclure : la réponse produite dans le modèle s'applique au système. Les réponses obtenues à partir du travail sur le modèle sont valables sur tous les systèmes qu'il représente et donnent des informations sur les systèmes précédents. On retrouve en ce point une chaîne de systèmes qui modélisent d'autres systèmes, comme ce fut le cas pour les nombres relatifs dans le paragraphe 3.2. de ce texte.

5. Un processus de modélisation dévolu aux élèves : l'exemple des équations

5.1. Milieu dénué d'intentions et milieu du schéma herbartien : exemple

Ce paragraphe et le suivant se situent en prolongement des analyses menées sur la genèse du milieu du schéma herbartien par Farida Méjani dans sa thèse (2018). Le matériau empirique était constitué du PER « Un parcours d'étude et de recherche pour l'enseignement des équations du 1^{er} degré en collège », téléchargeable à partir du lien <https://sciences.univ-amu.fr/fr/departements/ires#section-16914>. Il sert de nouveau de support pour ce paragraphe. On trouvera aussi des analyses utilisant le milieu du schéma herbartien dans la thèse de Laure Guérin (2020) sur le travail personnel des élèves ou dans Guérin (2021).

La question génératrice qui engendre l'organisation mathématique de référence pour ce PER est la suivante : « Si deux programmes de calcul ne sont pas équivalents, peut-on cependant trouver des valeurs pour lesquelles ils donnent le même résultat ? » Dans l'organisation mathématique à enseigner elle se décline selon trois tâches t_1 , t_2 , t_3 du même type T , bâties en modifiant un énoncé extrait du document *Du numérique au littéral* de la DGESCO.

La tâche t_1 est amenée par l'énoncé suivant : « Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice. Alice lui ajoute 4, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 13 au résultat. Ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ? » L'équation associée à cette question peut s'écrire : $(x + 4) \times 7 = 2x + 13$ dont la solution est -3. En jouant sur les variables didactiques, les tâches t_2 et t_3 , du même type, aboutissent pour t_2 à $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 + 8x$ pour laquelle

tout nombre est solution, et pour t_3 à $11x + 5 = 4x + 9$, dont la solution est $\frac{4}{7}$. Ce rationnel non décimal met en échec les techniques antérieures par tests d'entiers ou de décimaux. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux principes permettant la production par les élèves de deux modèles aboutissant à la résolution de ces tâches, en particulier à la résolution de t_3 qui conduit à la technique générale de résolution de $ax + b = cx + d$.

Les modèles obtenus par les élèves pour résoudre t_1 et t_2 sont identiques. On notera que t_2 se démarque de la question génératrice puisque les deux programmes de calcul sont équivalents ; ce qui est caché par l'expression des programmes de calcul, ce dont les élèves ne s'aperçoivent pas. Il s'agit qu'au-delà de la surprise provoquée, ils s'interrogent sur l'unicité de la solution trouvée pour t_1 et sur la fiabilité de la technique qu'ils utilisent pour t_1 et t_2 . Nous indiquons ci-dessous le modèle didactique théorique sur lequel s'appuie cette partie du PER afin d'assurer la dévolution de la modélisation de la réponse.

La TSD fournit depuis ses origines une modélisation des situations didactiques et adidactiques en termes d'actions sur un milieu et de rétroactions de ce milieu. La finesse du grain d'observation des situations et des milieux a permis d'établir une théorisation du processus didactique en termes de « structuration du milieu ». Pour simplifier l'exposé qui suit, nous ne recourons pas dans ce texte à l'utilisation de ce modèle, ni à celui des

moments didactiques proposé en TAD³⁰, bien que nous nous en servions pour concevoir nos propositions.

Un extrait de la définition large du milieu donnée en TSD pour les situations d'action, telle qu'elle figure dans le *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* de G. Brousseau (2003), énonce : « Dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit ». Ne considérer que l'action des élèves en situation, **sous la direction du professeur**, suffit pour décrire l'essentiel des moments didactiques de modélisation relatifs aux tâches t_1 et t_3 .

La notion de milieu du schéma herbartien (Chevallard, 2011) relève d'une définition élargie du milieu. Il n'est plus interprété comme dénué d'intentions didactiques, mais joue aussi un rôle de média qui informe. Cette définition s'inscrit dans le cadre des systèmes didactiques où les sujets occupent des positions d'élèves et de professeurs autour de l'étude d'une question. Lorsqu'on souhaite lancer une classe dans une telle recherche, comme c'est le cas d'un PER, il faut *a priori* étudier de quoi sera fait le milieu sur lequel et grâce auquel les élèves agiront.

Le paragraphe précédent, sur la modélisation algébrique à partir de patterns, fournit un exemple. Le milieu est fait de réponses R° dites estampillées car, portées par divers types de médias (l'Internet, les cahiers, les manuels) ou des personnes qui jouent ce rôle (des propositions venant d'élèves), elles sont reçues comme telles, souvent non questionnées ; d'œuvres O sollicitées, faites de réponses à des questions considérées aidantes pour la question étudiée (dessiner, compter, calculer) ; de données D recueillies à partir du travail de la question initiale (on ajoute 3 ou 4 au motif précédent) ; de sous-questions Q qui adviennent au fur et à mesure de l'étude de la question principale (pourquoi des techniques ou des réponses différentes ?) L'ensemble des R° , O , D et Q forme le milieu du schéma herbartien. Il se distingue de la notion de milieu donnée en TSD pour la situation didactique comme étant dénué d'intentions didactiques et l'élargit.

5.2. Dialectique milieu-média, mémoire, modélisation sur l'exemple des équations

Revenant au PER sur les équations, remarquons que l'énoncé du type de tâches T contient, en tant que milieu dénué d'intentions didactiques, à la fois la question à laquelle répondre et, en tant que média qui porte une intention, une affirmation R° non questionnée : la réponse existe car Alice et Bertrand trouvent le même résultat.

Le milieu du schéma herbartien permet de décrire l'évolution du processus de modélisation sur l'exemple des équations. Pour t_1 , une tentative immédiate de réponse des élèves passe par la convocation d'une œuvre O à propos de laquelle ils ont antérieurement établi un rapport, soit donc par la mobilisation de leur mémoire pratique (Matheron, 2001). Ils testent, à l'aide de différentes valeurs, les programmes de calcul d'Alice et Bertrand afin de trouver celle qui fournit le même résultat. L'observation montre que le choix des valeurs n'est pas organisé et ne concerne que des valeurs entières

³⁰ Le lecteur intéressé pourra, pour la structuration du milieu en TSD, se reporter à l'article « Le contrat didactique et le concept de milieu : Dévolution. » téléchargeable à l'adresse <https://guy-brousseau.com/category/2travaux-classes-par-annees/annees-1986-a-1990/>

Pour les moments didactiques, il pourra se reporter à l'article « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique » téléchargeable à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27.

positives ; ce qui conduit assez vite vers un constat d'échec puisque la réponse est -3. Le professeur propose, en tant que média et afin que le travail accompli ne soit pas perdu, de rassembler, malgré tout, les résultats obtenus. Ils deviennent des données D qui font maintenant partie du milieu ; celui-ci se modifie au cours de l'avancée du processus de recherche. Devant leur profusion désordonnée s'impose une nouvelle question Q : comment les présenter ? Une œuvre que les élèves ont antérieurement rencontrée fournit la réponse sous la forme d'un ostensif : un tableau. Son observation en tant que nouvel élément du milieu agit comme un média : les nombres rendus par les programmes de calcul d'Alice et Bertrand varient d'une manière intéressante. Ils croissent et « s'éloignent » les uns des autres au fur et à mesure que les nombres testés croissent. Ce n'est donc pas en utilisant des valeurs qui augmentent que l'on parviendra à la réponse, mais au contraire en testant sur des valeurs plus petites et décroissantes.

L'ordre sur Z , en tant qu'œuvre O dont on peut mobiliser le souvenir pratique, engage à recourir aux négatifs puisque la plus petite valeur positive testée et rejetée était 0. On continue donc à tester avec -1, -2 jusqu'à la réponse -3. Elle est validée car donnant le même résultat 7 pour chacun des programmes de calcul.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	...	-7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	...	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Figure 10 : Tableau des résultats obtenus à partir de tests de valeurs

Le travail mené en agissant sur et avec le milieu, et en interprétant les rétroactions obtenues, fournit la réponse sous forme de premier modèle technique pour t_1 et t_2 : un tableau de valeurs. Il constitue un modèle synthétique des praxéologies que l'on a mobilisées et qui s'appuient sur des œuvres antérieurement étudiées. Il en importe la mémoire, celle d'un savoir, et permet, à l'issue d'un petit travail technique de calculs, de lire la réponse recherchée. On rajoute à ce tableau une ligne montrant « l'écart » entre ce qui est lu par les calculatrices d'Alice et Bertrand : c'est un outil efficace indiquant, en tant que média, la voie vers la réponse.

Pour la résolution de t_2 et t_3 , le principe du tableau ordonné des valeurs devient une nouvelle œuvre O que l'on va solliciter. Si pour t_2 , la réponse fournie par O est immédiate et dérangeante – tout nombre est solution et « l'écart » est toujours nul –, O est fort utile pour t_3 . Les données recueillies D , et organisées dans un tableau, indiquent assez rapidement que la solution n'est pas entière car comprise entre 0 et 1. Ce qui conduit vers une nouvelle question Q « peut-on accroître la précision ? », pour laquelle la réponse R trouvée consiste à subdiviser en dixièmes l'intervalle $[0, 1]$. Les données recueillies ne fournissent pas la réponse mais amènent une nouvelle question « comment accroître la précision ? » qui trouve sa réponse dans la proposition du professeur consistant à recourir au tableur.

A son tour le tableur, en tant que nouvel objet d'un milieu dénué d'intentions, devient un média donnant deux informations. D'une part, si les données D recueillies se rapprochent autant que l'on veut de la valeur décimale attendue, ce dont atteste un « écart » qui se

rapproche autant qu'on le souhaite de 0, on ne parvient pas à trouver ce nombre. D'autre part, et devant cet échec, les formules que l'on a dû entrer dans le tableur nourrissent un certain degré de proximité avec des expressions algébriques en tant qu'œuvre O dont l'étude a débuté dans la classe de niveau précédent. Ces ostensifs évoquent le souvenir des praxéologies que l'on a précédemment travaillées. Elles conduisent à transformer les programmes de calcul en deux expressions algébriques : $11x + 5$ et $4x + 9$.

Une telle transformation suscite une question Q , cruciale, car elle s'inscrit naturellement dans la poursuite de la recherche. Elle est formulée par le professeur : « quand a-t-on l'égalité recherchée, c'est-à-dire l'égalité entre $11x + 5$ et $4x + 9$? » La réponse R est amenée par le travail antérieur sur les éléments d'organisations mathématiques consistant à rechercher le nombre rendant « l'écart » nul. Cette réponse R devient un élément technologique θ_1 précieux, et qui s'insérera dans l'organisation mathématique construite : « $11x + 5 = 4x + 9 \Leftrightarrow (11x + 5) - (4x + 9) = 0$ ». Les rapports antérieurement établis à l'œuvre O mobilisant les techniques de base du calcul algébrique ou, si ce n'est le cas, la nécessité de les étudier pour répondre à la nouvelle question surgissant du besoin de simplifier l'expression fournie par θ_1 , conduit à l'écriture $7x - 4 = 0$. Rechercher x par test de valeurs est rapidement abandonné puisque cette technique a précédemment échoué. Une nouvelle question cruciale Q est posée par le professeur, si ce n'est plus maladroitement par les élèves : « que signifie le fait que la différence entre $7x$ et 4 est nulle ? » Question à laquelle des élèves répondent assez rapidement. Il suffit en effet de convoquer de nouveau θ_1 pour savoir qu'alors les expressions $7x$ et 4 sont égales et écrire la réponse R : $7x = 4$. La définition θ_2 du quotient de deux entiers, partie d'une œuvre O dont l'étude a débuté deux années auparavant, en classe de 6^e, permet d'obtenir la réponse recherchée.

Le travail ainsi mené, *sous la direction du professeur* qui l'organise matériellement – ordonner les données, proposer le recours à la calculatrice et au tableur – et formule des questions qualifiées de cruciales, parce qu'elles s'imposent en raison à l'étape du processus de recherche dans lequel on est lancé, permet d'obtenir une modélisation de la résolution du problème porté par la tâche t_3 . Le travail ultérieur de l'organisation mathématique sur d'autres tâches du même type aboutit au modèle général de résolution d'une équation du 1^{er} degré à une inconnue consigné sous la forme d'une écriture ostensive indiquant à la fois la technique et la technologie : $(ax + b = cx + d) \Leftrightarrow [(ax + b) - (cx + d) = 0]$.

6. Brève conclusion

Brève, car travailler sur l'enseignement de, et la formation à, la modélisation, en algèbre comme sur d'autres domaines mathématiques, contribue à soulever à nouveau un voile sur le système éducatif et la manière dont les mathématiques y sont enseignées ; à partir de textes officiels et de manuels, donc dans les classes. La place accordée à ce texte manque pour développer l'analyse, renvoyée pour cela à d'autres travaux. On pourra, par exemple, se référer en annexe à l'absence des paramètres dans le curriculum, pourtant l'une des briques constitutives de l'algèbre (*cf.* Lagrange, 1808), dont l'enseignement fut rayé d'un trait de plume au tournant des années 1970-1980, et que la notion de programme de calcul permet de rétablir.

Les travaux que nous menons dans nos deux IREM montrent que l'algèbre peut être enseignée comme modèle du système formé par l'ensemble des praxéologies arithmétiques rencontrées par les élèves dans le curriculum antécédent : celui de l'école

primaire et des premières classes du collège. Des praxéologies arithmétiques sur des systèmes de nombres deviennent objets d'étude : il est nécessaire de les modéliser afin de répondre à des questions. Le travail du modèle se mène avec de nouveaux ostensifs, en tant qu'instruments soumis à de nouvelles techniques de manipulation, afin de répondre aux questions émergeant de l'étude du modèle algébrique : formulations, équivalence, résolution d'équations-inéquations, variations, etc.

Références bibliographiques

Bosch, M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19.1, 77-124.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage éditions.

Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. DAEST, Université Bordeaux 2.

Chevallard, Y. (1985, éd. 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche*. Publication n° 16 de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas et al. (Éds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81 – 108). La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (2021). La question curriculaire à la lumière de la TAD : défigement praxéologique et questionnement du monde. In H. Chaachoua et al. *Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (p. 93 – 111). La Pensée Sauvage éditions.

Combes, F. (1998). *Algèbre et géométrie. CAPES. Agrégation. Licence. Maîtrise*. Bréal éditions.

Guérin, L. (2020). *Le travail personnel des collégiens en mathématiques hors classe. Une étude didactique*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Guérin, L. (2021). Analyse des techniques d'étude personnelles hors classe en mathématiques au collège. Etude didactique de deux cas, *Education & didactique*, 15-3, 27-45.

Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. Chez Courtier : Paris.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

Matheron, Y. (2001). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21.3, 207-246.

Matheron, Y. (2018-2019). Eléments d'un parcours d'étude et de recherche pour enseigner l'algèbre au cycle 4, *Petit x*, 108, p. 67-86

Matheron, Y., Méjani, F. (2021). Curriculums institutionnellement offerts, curriculums personnellement vécus : deux exemples. In H. Chaachoua et al. *Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (p. 315 – 333). La Pensée Sauvage éditions.

Matheron, Y., Noirfalise, R. (2011). Du développement vers la recherche : quelques résultats, issus du projet (CD)AMPERES, relatifs à la mise en œuvre de PER dans le système d'enseignement secondaire. In M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (p. 57 - 76). Barcelone : CRM.

Méjani, F. (2018). *Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du premier degré*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Éds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 57 – 78). La Pensée Sauvage éditions.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? In C. Margolinas et al. (Éds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 175 – 205). La Pensée Sauvage éditions.

Annexe 1 Réintroduire des paramètres pour produire des formules

A propos de lettres que l'on peut trouver en usage dans le calcul littéral, on peut rencontrer les termes de variable, constante, inconnue, indéterminée ou encore paramètre. C'est l'usage, la fonction, qui détermine le statut de la lettre. Pour ce qui est du terme paramètre, nous trouvons par exemple, dans le Larousse : Définition de « paramètre » : « Élément en fonction duquel on explicite les caractéristiques essentielles d'un phénomène, d'une question : La pluie, l'obscurité, sont des paramètres dont il faut tenir compte » et « Nom donné à certains coefficients, à certaines quantités, autres que la variable ou l'inconnue, en fonction desquels on peut exprimer une proposition ou les solutions d'un problème ».

Pour argumenter en faveur de l'usage des paramètres, nous nous servons d'un texte d'un ouvrage paru au début du siècle précédent. L'auteur du manuel est Gigot et son : « Traité d'algèbre élémentaire ; utilité de l'algèbre – emploi des lettres et des signes ». Ci-dessous un extrait du manuel :

Problème : *Trouver trois nombres dont la somme est 164, tels que le second surpasse le premier de 14 et que le troisième est la somme des deux premiers.*

Solution 1 : *Le deuxième nombre est égal au premier augmenté de 14. Le troisième étant la somme des deux autres vaut le premier plus le premier augmenté de 14, c'est-à-dire deux fois le premier augmenté de 14. La somme de ces trois nombres se compose donc : 1° du premier nombre, 2° du premier augmenté de 14, 3° de deux fois le premier augmenté de 14. Ou de quatre fois le premier augmenté de 28. Si donc on retranche 28 de 164, le reste, 136, vaudra le quadruple du premier nombre ; le premier nombre est par conséquent $136/4$ ou 34. D'où il résulte que le deuxième nombre est 34 plus 14 soit 48, et le troisième la somme des nombres 34 et 48 soit 82.*

Solution plus simple par l'emploi des signes : *La méthode précédente est longue et pénible ; elle se simplifie singulièrement lorsqu'on emploie des signes pour indiquer les opérations à faire. En effet, si on convient de séparer par le signe + les quantités qu'on ajoute entre elles, par le signe égal celles qui sont égales et si l'on représente le premier nombre par x on a tout de suite :*

Premier nombre = x

Deuxième nombre = $x + 14$

Troisième nombre = $x + x + 14$

Et par suite : $x + x + 14 + x + x + 14 = 164$

$4x + 28 = 164$

En retranchant 28 des deux membres de l'égalité, on obtient :

$$4x=136$$

D'où

$$x = 34$$

Imperfection de la deuxième solution – Emploi de lettres dans l'énoncé du problème

La seconde méthode, déjà bien supérieure à la première, n'est cependant pas encore parfaite. Elle fournit un résultat isolé dont rien ne révèle l'origine ; les données ont disparu dans les réductions successives que l'on a faites pour découvrir l'inconnue et l'on est obligé de recommencer le même raisonnement pour résoudre tout autre problème analogue ne différant du premier que par les valeurs numériques données.

L'énoncé du problème prend alors la forme générale suivante :

Trouver trois nombres dont la somme soit S , tel que le deuxième dépasse le premier de a et tel que le troisième soit la somme des deux premiers.

Solution : - Si on représente le premier nombre par x on a :

$$\text{Premier nombre} = x$$

$$\text{Deuxième nombre} = x+a$$

$$\text{Troisième nombre} = x+x+a$$

$$\text{Et par suite} \quad x+x+a+x+x+a = S$$

$$\text{Ou} \quad 4x+2a=S$$

En retranchant $2a$ dans les deux membres de l'égalité

$$4x=S-2a$$

Et en divisant par 4

$$x=(S-2a)/4$$

D'où l'on voit que le premier nombre est égal au quart de l'excès de la somme sur le double de la différence des deux premiers nombres

Cet extrait nous permet de revenir sur des raisons d'être du calcul algébrique :

La mise en formule, en remplaçant les données numériques par des paramètres, évite donc de « recommencer le même raisonnement pour résoudre tout autre problème analogue », une économie de pensée donc à mettre au crédit de l'usage de paramètres !

L'auteur souligne aussi la dimension ostensive de la formule : celle-ci montre la contribution au résultat des données du problème, la somme S et l'excès du deuxième sur le premier a .

$$x = (S - 2a)/4$$

D'où l'on voit que le premier est égal au quart de l'excès de la somme sur le double de la différence des deux premiers nombres.

Mais, car il y a un mais ! L'économie de pensée n'est ici que de l'ordre de la fiction. Pour qu'elle soit réelle, encore faudrait-il que le type de tâches proposé se reproduise avec diverses données numériques ! Trouver trois nombres dont la somme soit S , tel que le deuxième dépasse le premier de a et tel que le troisième soit la somme des deux premiers est un type de tâches anecdotique.

On peut cependant contourner cette difficulté en modifiant l'énoncé du problème de la manière suivante : **peut-on, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux données, trouver la valeur inconnue recherchée ?** L'obtention d'une formule procure alors une réponse à cette question ! Une piste à explorer ?

On pourrait donc algébriser les vieux problèmes arithmétiques en demandant de montrer que quelles que soient les valeurs numériques données, il est toujours possible de trouver la solution !

Une autre piste serait d'explorer celle des formations professionnelles dans lesquelles on peut rencontrer un usage de formules. Par exemple, dans la formation des soins infirmiers et dans le secteur agricole, les professionnels ont fréquemment des problèmes de mélange à résoudre. Nous donnons un exemple issu du milieu infirmier emprunté au document ressource sur la résolution de problèmes mathématiques au collège paru en décembre 2021 (site Eduscol) :

Une infirmière mélange une solution de 6% d'acide borique avec une solution de 12% d'acide borique. Combien lui faut-il de chaque solution pour avoir 4,5 litres de mélange à 8% ?

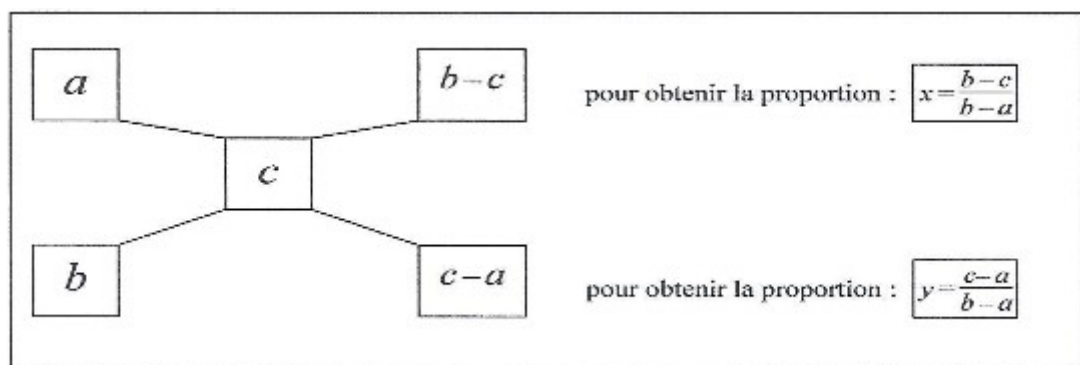
Nous donnons également un second exemple issu du monde agricole :

On souhaite obtenir un lait à 13g/L de matière grasse à partir de lait écrémé à 2g/L et de crème à 300g/L.

La formulation de ce type de problème se fait avec ce qui est appelé la croix des mélanges !

Notons x la proportion (en volume) de lait écrémé de concentration a , et y la proportion (en volume) de crème de concentration b , et c la concentration du lait que l'on souhaite obtenir.

On voit ici apparaître l'usage de paramètres, ce qui permet d'énoncer un résultat général :

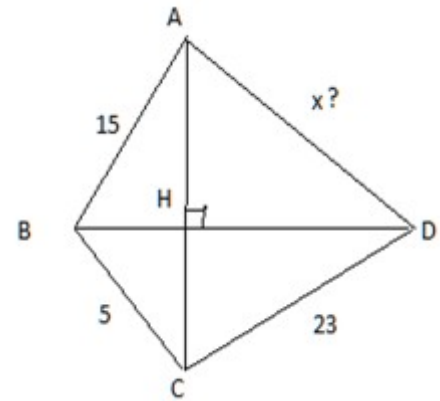


On peut aussi regarder l'usage que font nos collègues physiciens de formules avec des grandeurs quotients comme la vitesse en fonction de la distance et du temps pour ne citer que cet exemple.

Plus proche de notre discipline, la géométrie est aussi un gisement pour trouver des situations où l'on peut user de paramètres. Pensons à Pythagore, à Thalès.

Ci-dessous, un exemple rencontré au hasard d'une lecture d'un calendrier mathématique proposant chaque jour un petit problème : « Dans un quadrilatère ortho diagonal, les sommes des carrés des côtés opposés sont égales. »

Le fait de paramétrer le problème, ici avec la représentation classique des longueurs de côtés (AB, BC, CD et AD) permet d'avoir un résultat général, ce que ne fait pas apparaître une solution numérique !



$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$