ENSEIGNER LES FRACTIONS EN 6^{E} À PARTIR DE MODÉLISATIONS AU SEIN D'UN TRAVAIL SUR LES GRANDEURS

Didier AUROY[14]
IRES d'Aix-Marseille

Yves MATHERON[15]
IRES d'Aix-Marseille

Résumé. Les outils fournis par la didactique théorique permettent de concevoir des propositions d'enseignement où la notion de fraction apparaît comme aboutissement de la recherche d'une question qui l'engendre. La proposition de notre groupe est construite à partir de ce qui fonde historiquement et épistémologiquement ce qu'on désigne du terme de fraction : la notion de grandeur. Les élèves travaillent sur des grandeurs de même espèce, commensurables, dont ils recherchent une partie aliquote. Ils établissent un rapport aux fractions de la grandeur attachée à un objet, et non pas un rapport aux « fractions d'objet » – tartes, tablettes de chocolat –, sans fondement épistémologique mais néanmoins souvent enseignées. Ils sont alors engagés dans une dialectique entre systèmes – grandeurs attachées aux bandes de papier, aux surfaces – et modèles qui s'en dégagent : les mesures fractionnaires et le début d'écritures littérales.

Mots-clés. Dialectique système-modèle, ostensif, fractions, grandeurs.

Abstract. The tools provided by theoretical didactics make it possible to design teaching proposals in which the notion of fraction appears as the outcome of the search for a question that gives rise to it. Our group's proposal is based on the historical and epistemological foundation of the term fraction: the notion of magnitude. The students work on commensurable quantities of the same kind, of which they are looking for an aliquot part. They establish a relationship with fractions of the magnitude attached to an object, and not with "object fractions" - pies, chocolate bars - which have no epistemological basis but are nonetheless often taught. They are then engaged in a dialectic between systems - magnitudes attached to strips of paper, surfaces - and the models that emerge from them: fractional measurements and the beginnings of literal writing.

Keywords. System-model dialectic, ostensive, fractions, magnitudes.

Resumen. Las herramientas que proporciona la didáctica teórica permiten diseñar propuestas de enseñanza en las que la noción de fracción aparece como el resultado de la investigación sobre una cuestión que le da origen. La propuesta de nuestro grupo se basa en el fundamento histórico y epistemológico del término fracción: la noción de magnitud. Los alumnos trabajan sobre cantidades conmensurables del mismo tipo, de las que buscan una parte alícuota. Establecen una relación con fracciones de la magnitud adjunta a un objeto, y no una relación con "fracciones objeto" - tartas, tabletas de chocolate - que no tienen base epistemológica pero que, sin embargo, se enseñan a menudo. Entablan entonces una dialéctica entre los sistemas -cantidades adheridas a tiras de papel, superficies- y los modelos que surgen de ellos: las medidas fraccionarias y el comienzo de la escritura literal.

Palabras clave. Dialéctica sistema-modelo, ostensif, fracciones, magnitudes.

[14]didier.auroy@free.fr

[15]yves.matheron@free.fr

Introduction

Depuis une vingtaine d'années, le groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, devenu IRES, conçoit, développe et observe, dans les classes ordinaires de collèges et lycées, la passation d'Activités et de Parcours d'Etude et de Recherche (AER et PER) dans lesquels sont travaillés des processus de modélisation internes aux mathématiques.

L'expression « Activités d'Etude et de Recherche » a parfois diffusé dans la profession enseignante pour désigner des activités issues de manuels. Ces « activités » ne peuvent pourtant engager les élèves dans un processus d'étude par une recherche qui leur est dévolue.

Cet article, où l'on trouvera les grandes lignes ***du début*** d'un PER sur les fractions en 6e en lien avec la modélisation, permettra aussi au lecteur de se faire une idée de ce que nous entendons par étude et recherche, sous la direction du professeur, dans le cadre d'un processus de modélisation.

1. Quelques considérations sur l'enseignement ordinaire des fractions en 6e : oublis et confusions mathématiques, ostension déguisée, monumentalisme

1.1. Faiblesses mathématiques et didactiques à propos de fractions : un exemple prototypique

Le texte de l'activité ci-dessous, tirée d'un manuel de 6e édité en 2016 chez Bordas, contient ce que nous essayons d'éviter pour la conception d'un PER sur les fractions : des erreurs mathématiques fréquemment enseignées, et un style d'enseignement majoritaire où les élèves répondent à des questions sans en rencontrer les raisons.

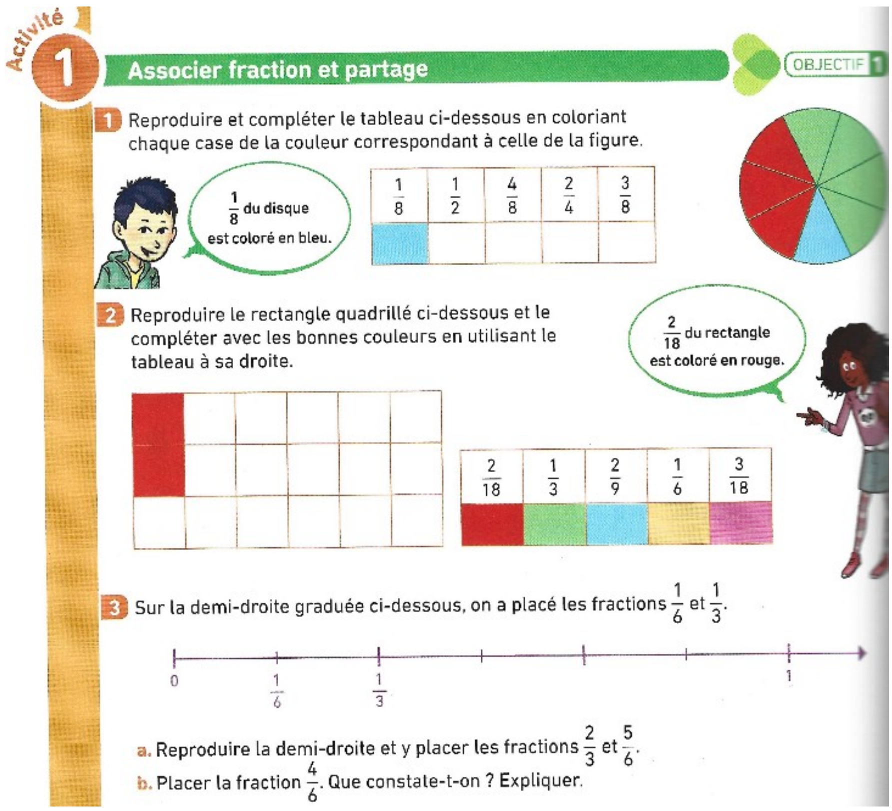

Figure 1 : Activité d'un manuel de 6e

Les auteurs de l'activité n'échappent pas en effet à la confusion, assez fréquente, entre ***un objet*** que l'on « partage » d'une certaine manière (ici un disque, un rectangle, une demi-droite), ***la grandeur*** choisie attachée à cet objet (l'angle, l'aire, la longueur), et ***la mesure*** de cette grandeur ; dans ce cas un rationnel écrit sous forme fractionnaire[16]. ***La grandeur-unité*** choisie n'est pas désignée ; on présuppose sa reconnaissance partagée entre professeur et élèves à partir d'observations de dessins.

Or, parler de « fraction d'objet », que ce soit un disque ou un rectangle, n'a pas de sens ; de même pour une tarte ou tout autre objet… mathématique ou pas. On pourra, pour se convaincre, se reporter à la page 5 du document Eduscol *Grandeurs et mesures au collège*, du même nom que son lien de téléchargement. Y est illustrée ce qui, dans la vie courante, est vu comme une « fraction d'objet » ; dans ce cas des « moitiés de triangle » ou des « quarts de carré ». Les périmètres de ces pseudo-moitiés et pseudo-quarts d'objets ont des longueurs différentes, alors que leurs aires sont égales… Qu'entend-on alors par « fraction d'objet » lorsqu'on ne précise pas la grandeur attachée à l'objet, puisque la fraction n'est pas la même selon la grandeur choisie ?

On sait que les élèves ont en principe établi au Cours Moyen, deux années auparavant, un certain rapport à la notion de fraction[17]. Il fixe les attentes relatives aux réponses aux trois questions de l'activité. De nouveau, dans la question 3, une confusion apparaît, cette fois dans le vocabulaire relâché des auteurs : on ne peut demander de « placer ***une fraction*** » sur une demi-droite graduée, mais plutôt… ***un point***.

Cette confusion est révélatrice d'une difficulté récurrente à distinguer ***le système*** (les points d'une demi-droite) et un de ses ***modèles*** parmi d'autres (l'abscisse) ; d'où l'écrasement de l'un sur l'autre. N'apparaît pas le fait que, dans ce cas, les fractions modélisent certains points d'une demi-droite graduée à partir d'une grandeur, leur distance à l'origine, lorsque celle-ci peut être mesurée par un rationnel. Sur l'exemple de ce manuel parmi beaucoup d'autres, l'absence de distinction système-modèle laisse augurer des difficultés conceptuelles à venir chez les élèves : à propos des fractions et sur le processus de modélisation, la modélisation étant dans ce cas intra-mathématique. D'autres remarques pourraient être faites que nous ne développerons pas.

Au-delà du flottement épistémologique dans ce type d'activités, les élèves ne sont pas engagés dans un processus de recherche. Celui-ci supposerait au minimum qu'on les invite à élaborer une réponse à une question. La seule question trouvée, associée à l'équivalence des fractions en tant que propriété nouvelle au regard du programme[18], se situe dans la partie relative à la demi-droite. Elle n'est amenée par aucune raison issue d'un processus d'étude mathématique des élèves qui viendrait buter sur cette question,

---

[16] On peut trouver en mathématiques deux types de définitions pour le terme *fraction*. L'une s'appuie sur les grandeurs (Chenevier, 1932) ; nous l'avons choisie pour ce PER en raison de conditions et contraintes sur la transposition didactique. L'autre, plus générale, réfère au ***corps des fractions d'un anneau intègre*** (Verley, 1997), et (Ramis, Deschamps, Odoux, 1993). En particulier, le corps des fractions de l'anneau ¿, +, ×) est celui des ***nombres*** rationnels ¿, +, ×). A partir d'une modélisation intra-mathématique, les « nombres fractions » sont vus dans ce PER, non en opposition entre ces définitions, mais comme ***modèles*** de « fractions grandeurs ».

[17] Voir Annexe 23 du programme, *Repères annuels de progression pour le cycle 3*, rubrique « Nombres et calculs ».

[18] Nouvelle car le programme de CM2, Annexe 10, n'évoque pas le terme de *fractions équivalentes*. Il mentionne p. 2, « il *[l'élève]* connaît des égalités entre des fractions usuelles $\left(\text{exemple : } \frac{5}{10}=\frac{1}{2};\frac{10}{100}=\frac{1}{10};\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\right)$».
Sont absentes les techniques relatives aux fractions équivalentes, et certaines des raisons qui les produisent et justifient.

mais par la volonté des auteurs d'insérer explicitement des fractions équivalentes dans l'activité. Elle entraîne une première réponse, soufflée aux élèves à qui l'on demande un constat non motivé.

1.2. L'étude soumise à l'ostension et au paradigme de la visite des œuvres

Sous les contraintes prévalant dans le système scolaire, notamment sous une pédagogie stipulant qu'une séance de cours doit obéir à une certaine interactivité entre professeur et élèves, la théorie des situations didactiques a montré depuis plusieurs décennies (Brousseau, 1982) sur quels effets de contrat – Topaze et Jourdain notamment – s'appuyait le professeur pour que son action didactique perdure. De même, dans leur thèse, Berthelot et Salin (1992) ont établi sous quelle forme dominante sont actuellement enseignées les mathématiques : l'ostension déguisée. Au lieu de faire produire par les élèves des mathématiques comme réponses à des questions dont ils s'emparent, on continue de les leur montrer, d'où le terme « d'ostension ». Mais en leur faisant croire qu'ils les ont produites à partir de leur « activité », d'où l'adjectif « déguisée » qui masque le fait que l'on montre. L'activité précédente, au-delà des failles mathématiques relevées, en constitue un bon exemple.

Sous le régime didactique de l'ostension, qu'elle soit assumée, comme dans le cas d'un cours *ex cathedra*, ou déguisée, comme dans le cas d'un enseignement interactif, certains élèves parviennent à étudier quelques éléments de mathématiques. Mais le savoir n'est pas alors vécu collectivement par la classe comme réponse à une question nécessitée par le processus mathématique de recherche dans lequel elle serait engagée. Dans l'exemple précédent, les fractions équivalentes sont montrées comme une particularité des fractions, peut-être justifiée dans le meilleur des cas, mais sans que les élèves aient eu la possibilité de savoir ce qui est au fondement de l'existence de cette propriété, ni son utilité. Comme l'indique le programme de CM2 rappelé dans la note de bas de page 5, « l'élève connaît »… mais sait-il pourquoi ? Certains d'entre eux se poseront peut-être, de manière privée, des questions relatives aux fractions équivalentes ; les mêmes trouveront ou apporteront des réponses. Les différences interpersonnelles et socioculturelles jouent alors à plein et l'Ecole, qui pourtant promeut l'égalité des chances, les accentue (Guérin, 2021).

L'exemple de l'activité analysée ne relève pas d'une pathologie propre à ce manuel. Tout au contraire, la majorité des activités des manuels, du CP à la classe Terminale, sont construites selon un tel schéma d'où découle, en classe, la même forme didactique générique. Elles s'inscrivent ainsi au sein du paradigme didactique dominant : celui de la visite des œuvres (Chevallard, 2012).

On enseigne des mathématiques sans qu'une nécessaire vigilance épistémologique ait été exercée lors de leur transposition didactique. Sans non plus que les questions auxquelles elles répondent aient pu être rencontrées, vécues et travaillées par la classe, parce que la poursuite du processus de recherche, sous la direction du professeur, nécessite de répondre à de nouvelles questions qui surgissent et s'imposent. Les élèves répondent alors, comme dans l'activité du manuel de 6^{e}, à des questions banales, enchaînées ou déconnectées les unes des autres, dans un défilement d'objets mathématiques. Métaphoriquement, cette forme didactique a été associée à la visite de monuments (tel théorème portant un nom célèbre) ou d'objets moins prestigieux, comme on en rencontre en déambulant dans une ville, un musée ou un magasin, sans la possibilité de s'interroger sur leur utilité et les raisons pour lesquelles ils ont été fabriqués.

A l'opposé du paradigme de visite des œuvres, ou encore de monumentalisme, se trouve le paradigme de questionnement du monde (Chevallard, 2007). Un enseignement sous forme de PER tend à s'éloigner de la visite des œuvres pour se rapprocher d'un questionnement d'une partie du monde, mathématique dans ce cas, sous les contraintes inhérentes à l'organisation actuelle de l'enseignement scolaire ; notamment celle qui désigne, dans un programme donné, les mathématiques qui doivent être enseignées (Matheron & Méjani, 2022).

2. Notre choix pour un PER sur les fractions en 6e : faire travailler modèles et modélisation à partir des grandeurs et de leur mesure

2.1. La notion d'organisation mathématique de référence (OMR)

Depuis les origines de la théorisation didactique, on sait que pour pouvoir être enseigné à partir d'un programme, le savoir mathématique doit subir une série de transformations au sein de diverses institutions. C'est le processus de transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, étudié dès la fin des années 1970 (Chevallard, 1985 & 1991).

A titre d'exemples portant sur les deux extrémités de la chaîne de transposition didactique, existent plusieurs constructions didactiques possibles pour l'ensemble des fractions, ou encore pour l'ensemble des rationnels positifs Q_+. Sur la distinction entre fraction et rationnel, et son dépassement dans un processus didactique qui s'appuie sur la modélisation, on se reportera à la note de bas de page n°3. On peut par exemple, dans le domaine des grandeurs, faire rechercher l'épaisseur d'une feuille de papier par les élèves à partir de la mesure de la hauteur d'une pile de telles feuilles dont on connaît le nombre (Brousseau & Brousseau, 1987). On peut, plus proche d'une construction « savante » dans le domaine des nombres, faire travailler une relation d'équivalence R sur $Z \times Z^*$, que l'on pourra restreindre à $N \times N^*$ pour des positifs, définie par : a_1, a_2, b_1, b_2 étant des entiers, avec b_1 et b_2 non nuls : $(a_1, b_1)\ R(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (Reinhardt & Soeder, 1974 & 1997). Dans un cas, les fractions sont amenées à partir de relations entre deux grandeurs, dans l'autre à partir de la construction d'une structure de corps.

S'engager dans la construction d'un PER, par exemple portant sur les fractions, présuppose l'établissement préalable d'une organisation mathématique de référence (OMR) résultant de choix (Matheron & Méjani, 2022). Rappelons qu'une organisation, ou praxéologie, mathématique minimale complète est constituée d'un quadruplet (T, τ, θ, Θ). T désigne un type de tâches, τ une technique pour l'accomplir, θ la technologie permettant de produire τ, de la justifier et la comprendre ; la théorie Θ joue pour θ les mêmes fonctions que θ pour τ. Une organisation mathématique est généralement constituée d'un amalgame de plusieurs organisations élémentaires du type (T, τ, θ, Θ) pour devenir une organisation plus large, associée à un thème ou un secteur des mathématiques (à un ou plusieurs chapitres par exemple).

Au sein du processus de transposition didactique, l'OMR assume plusieurs fonctions. Elle permet *a priori* de déterminer l'organisation mathématique à faire étudier à partir de choix croisant contraintes institutionnelles mathématiques et didactiques et conditions de possibilité. Elle autorise un contrôle *a priori* sur la validité épistémologique de l'organisation mathématique que l'on souhaite enseigner et sur celle, effective, qui le sera. Au plan didactique, s'y référer permet l'exercice d'une vigilance sur les questions dévolues ; elles doivent apparaître comme des nécessités mathématiques se posant à partir du point où en est arrivée l'étude. Le processus d'étude et de recherche doit lui-même être engendré par une question plus large à laquelle l'organisation mathématique associée au thème ou au secteur constitue une réponse. On s'éloigne ainsi des réponses obtenues depuis l'interprétation des attentes du professeur, ou soumises à effets de contrat de sa part.

Dans l'introduction à *La mesure des grandeurs*, Lebesgue (1975) explicite ce qu'est un nombre entier et ce qu'est compter. On compare des collections « à une même collection type, la collection des mots d'une phrase. Ces mots sont appelés des *nombres*. […] Le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection. » Lebesgue conclut, en italique dans le texte : « *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet*. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences […] » Dans ce sens, un nombre entier apparaît comme un modèle de l'ensemble des pratiques expérimentales désignées comme étant de dénombrement par des institutions, la société ; il permet de s'en dispenser.

2. 2. La notion de modèle

Trop souvent dans le domaine de l'enseignement, la notion de *modèle* apparaît comme un allant de soi non interrogé. Il en va de même de l'expression *compétence modéliser* que l'on trouve dans les programmes, du cycle 2 au cycle terminal. Nous n'utilisons pas le terme de compétence : son caractère scientifique n'est pas assuré (Johsua, 2002). Les effets négatifs d'un enseignement des « compétences » ont pu être analysés à partir de l'exemple belge (*cf.* Schneider (2006) et Crahay (2006)).

La généralisation du point de vue de Lebesgue à d'autres objets que les nombres entiers permet de proposer ci-dessous un élargissement de la définition d'un modèle qui a pu être initialement donnée en théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997 ; Barquero, 2022). Il faut pour cela définir tout d'abord les termes primitifs de ***système*** et de ***domaine de réalité***, pour en venir au terme de ***modèle***, lui-même considéré comme un système.

Les années d'après-guerre ont vu, avec le développement de l'informatique, une importante littérature se consacrer à la cybernétique et à la systémique[19]. Pour faire court, une définition minimale d'un ***système*** telle que celle donnée par le dictionnaire *Le Robert* suffit : « 1. Ensemble abstrait dont les éléments sont coordonnés par une loi, une théorie. Le système astronomique de Copernic. 2. Ensemble de pratiques organisées en fonction d'un but. Le système de défense d'un accusé. »

Sans entrer dans des débats de nature épistémologique, on pose généralement dans les sciences et comme axiome qu'il existe une réalité, physique ou sociale, indépendante de l'observateur, qui se manifeste à lui à partir de divers phénomènes. Dans la réalité supposée existante, constituée de systèmes eux-mêmes en interaction, il est possible d'opérer un découpage, souvent non arbitraire mais à partir d'un but que l'on poursuit. C'est ce qu'on appelle un ***domaine de réalité*** dans lequel se trouveront un ou des systèmes.

Il est possible de poser une question sur ce domaine de réalité, par exemple pour l'étudier ; ce peut être le but. On obtient alors, dans certains cas, ***un modèle*** de ce domaine de réalité. En travaillant le modèle, il est alors possible d'obtenir des

[19] On pourra, parmi une multitude d'ouvrages depuis celui de L. von Bertalanffy (1951, éd. 2012) à ceux d'E. Morin (1977) sur la complexité, se reporter au livre de J.-L. Lemoigne (1977, éd. 1990) sur *La théorie du système général,* justement sous-titrée… *Théorie de la modélisation* !

informations sur le ou les systèmes contenus dans ce domaine de réalité ; y compris dans un domaine de réalité mathématique.

Un modèle est donc un système permettant d'obtenir, grâce à un changement de pratiques sur un changement d'objets – par exemple, à trois doigts dressés d'une main tandis que deux autres sont baissés, on peut substituer les entailles III sur un support quelconque ou l'écriture 3 sur une feuille de papier –, des informations sur le système de pratiques antécédent qu'il modélise. Généralement, la modélisation s'accompagne d'un changement du système des objets ostensifs (par exemple des symboles mathématiques) qui, en tant qu'outils, permettent de travailler le modèle et peuvent continuer d'évoquer certains éléments du système modélisé. Ainsi naît une dialectique système-modèle : le modèle donne des informations nouvelles sur le système qui, en retour, permet de modifier, d'améliorer, de contrôler ce que produit le modèle.

Dans l'exemple donné par Lebesgue, le système des pratiques, ou plutôt des *praxéologies* car elles s'appuient sur ce qui les produit et les justifie, est constitué des « opérations expérimentales de dénombrement ». Il se modélise à l'aide du « nombre-mot » en tant qu'ostensif langagier (Bosch & Chevallard, 1999), vu comme cristallisation de ces opérations expérimentales, comme « compte rendu complet ». A son tour, le modèle peut être vu comme système dans lequel le travail portant sur les opérations avec des entiers, engageant alors des ostensifs scripturaux, autorisera une nouvelle modélisation ; par exemple aboutissant à de nouveaux modèles comme de nouveaux nombres, ou des structures algébriques. La construction des mathématiques apparaissant alors comme processus dialectique entre système et modèle, la question didactique portant sur la modélisation concerne la possibilité de faire vivre par les élèves une telle dialectique.

On s'intéresse, dans ce texte sur les fractions, à des questions dévolues en partie aux élèves et posées au domaine de réalité constitué du système des praxéologies dans lesquelles on les engage. Elles sont relatives à des objets – des bandes de papier, des réglettes en plastique, des surfaces, etc. – auxquels on affecte des grandeurs mesurables. On demande aux élèves d'agir sur ces objets et de se poser des questions. Ce qui mobilise leurs rapports antérieurement établis à ces objets ; rapports qui sont eux-mêmes des systèmes de praxéologies. On voit par là-même que la modélisation, c'est-à-dire la construction d'un modèle, est un processus qui n'est pas aussi simple que ce qu'on pourrait lire dans les programmes, ou le supposer.

2.3. Une organisation mathématique de référence

Construire une proposition d'enseignement nécessite au préalable de se pencher sur la construction d'une organisation mathématique de référence (*cf.* § 2.1). Elle est conditionnée par plusieurs choix, dont ceux résultant de conditions et contraintes propres aux mathématiques et à leurs transpositions didactiques dans des programmes. On a vu que deux grands choix, justifiés par des notions mathématiques, ont pu être faits concernant les fractions : l'appui sur les grandeurs ou sur les structures algébriques.

Dans l'histoire scolaire en France par exemple, le programme du second degré de la réforme des mathématiques modernes était essentiellement basé, en ce qui concerne les fractions, sur une transposition des structures algébriques : des ensembles de ***nombres*** munis d'opérations internes. C'était le cas dès l'école élémentaire où le programme de 1970 pour les classes de CM1 et CM2, niveau où l'on enseignait les fractions, préconisait le recours aux opérateurs. Un exemple faisant intervenir les opérateurs $\times 7$ et $\div 4$ appliqués successivement à des colonnes de nombres (et non pas à ***des mesures de***

grandeurs), illustrait la définition de la fraction $\frac{7}{4}$. Puis en 4^{e}, dans le programme de 1971 : « On admettra que pour tout réel a différent de 0, il existe une nombre réel a^{-1} et un seul tel que $aa^{-1}=1$. Pour tout couple de nombres réels (a, b) avec $a \neq 0$, il existe un nombre réel unique x, appelé quotient de b par a, et noté ba^{-1} ou $\frac{b}{a}$, tel que $a\,x=b$ ».

Le programme de 3^{e} de 1972, après avoir défini ce qu'est un rationnel, indiquait laconiquement « Corps des nombres rationnels ». Celui de 1969 pour la classe de 2de C et T, mentionnait aussi : « Les nombres rationnels forment un corps commutatif $\mathbb{Q}$. (Toute étude générale de la structure de corps est exclue du programme) ».

L'organisation mathématique utilisant pour fondements les structures algébriques n'a actuellement plus cours : c'est en principe le choix recourant aux grandeurs qui est fait pour les fractions. Pour le CM1, les actuels repères annuels de progression indiquent : « Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples $\left(\text{comme } \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$ dans le cadre du partage des grandeurs. » Ce choix fait écho au point de vue de Lebesgue (op. cit.) pour lequel de la mesure de grandeurs naît le nombre : « Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques […] ; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet de l'Analyse. » Les nombres rationnels positifs dans le cas de ce programme, sont arrimés à la mesure de grandeurs.

Le choix fait par le programme influe sur la construction de l'organisation mathématique de référence. Pour nous, celle-ci doit contenir des éléments d'une organisation mathématique autour de l'algèbre des grandeurs ; les grandeurs de même espèce relevant d'une première modélisation, en mettant l'accent sur les grandeurs mesurables (vérifiant l'axiome d'additivité). À propos de ces dernières, figureront dans l'OMR des éléments d'une organisation mathématique autour de l'élément technologique « commensuration » : rapport rationnel de deux grandeurs, partie aliquote et mesure à l'aide de nombres rationnels une fois choisie une grandeur-unité commune. L'objectif du programme étant, par la suite, le travail sur les fractions autrefois appelées « abstraites » – comparaison, opérations, autrement dit les calculs dans $\mathbb{Q}^{+}$ sans référence aux grandeurs et sans évoquer la structure de corps de $\mathbb{Q}^{-}$, les écritures fractionnaires $\left(\frac{a}{b}\right)$ devront apparaître comme modèles de mesures de grandeurs d'autres types d'espèces, autrement dit d'autres systèmes, puis comme nombres sur lesquels on opère. De là l'obtention d'éléments de l'organisation mathématique produite par le travail sur le modèle. Au sein d'une dialectique entre modèle et système, les techniques de calcul sont justifiées par retour dans les systèmes antécédents portant sur les grandeurs attachées aux objets. Bien que nous recourrions aux grandeurs, notre proposition est distincte de la situation de la mesure de l'épaisseur des feuilles de papier (Brousseau & Brousseau, 1987), et de celle d'ERMEL CM1 (2001) sur les bandes de papier (antérieurement utilisée par Brousseau & Brousseau, 1987, p. 45 & p. 51), assez connues des didacticiens. Par conséquent, les organisations mathématique et didactique de notre proposition diffèrent des autres.

3. Les grandes lignes d'un PER sur les fractions

Les séances décrites ci-dessous constituent des exemples de ce qui est reproduit plusieurs fois au cours du PER, avec des grandeurs différentes (longueurs, aires). Cela afin que les élèves éprouvent l'apparition des mêmes phénomènes : les ostensifs du type $\frac{a}{b}$ créés pour les mesures d'une des grandeurs sont utilisables pour d'autres et jouent alors le rôle de ***modèles*** généraux. La répétition de réponses identiques provoque, chez les élèves, un besoin d'économie et de généralisation ; ce qu'autorisent les ostensifs institutionnellement et mathématiquement attendus.

3. 1. Manipulations sur un domaine de réalité, fractions de grandeur et grandeurs-unité

Le PER sur les fractions que nous avons conçu nécessite que les élèves aient auparavant établi un rapport idoine à ce que sont des grandeurs attachées à des objets ; l'expérience des professeurs montre que c'est rarement le cas à l'entrée en 6e. Dans ce sens, divers objets, essentiellement des livres, des bandes de papier et des réglettes en plastique, sont mis à disposition des élèves : c'est le domaine de réalité défini par le professeur. Ils recherchent tout d'abord des grandeurs que l'on puisse attacher à ces objets : longueur, aire, couleur, prix, consistance, etc. Puis, deux grandeurs étant choisies, par exemple le poids et l'aire pour les livres et leurs couvertures, on demande de les ordonner, de la plus petite à la plus grande. Cela afin de ne plus considérer les « objets en soi », mais les grandeurs : l'ordre obtenu en changeant de grandeurs sur les mêmes objets diffère en effet.

Dans la continuité de ce qui a été observé sur l'ordre, le PER fait vivre le fait que l'on opère sur des grandeurs et non sur des objets. Un prérequis nécessaire, généralement présent dans le Curriculum Personnellement Vécu par des élèves, réside en l'un des axiomes de base sur les grandeurs (Rouche, 1994), résumé aux éléments praxéologiques :

T_1 : Recouvrir un objet de longueur L par des objets de longueur plus petite l.

τ_1 : Mettre bout à bout des objets de longueur l, en partant d'une extrémité d'un objet de longueur L et en essayant de parvenir avec précision sur l'autre extrémité de cet objet sans dépasser L.

Le travail dans le domaine de réalité, DR, consiste tout d'abord à rassembler des bandes de papier de longueurs diverses, notées et décrites comme étant, respectivement, de « longueurs L_i » et de « longueurs l_j », avec $L_i > l_j$.

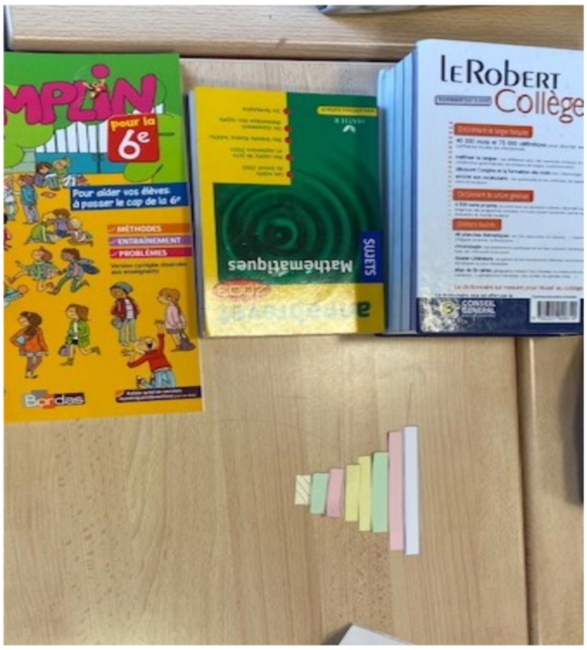

Figure 2 : Livres et bandes de papier mis à disposition des élèves dans une classe

Le premier système S_1 dévolu aux élèves est donc composé d'une partie du domaine de réalité, les bandes de papier, et d'une ***question génératrice*** Q_1, destinée à lancer les élèves dans la recherche, sous la direction du professeur P : Q_1 : « Combien de bandes ***entières*** de longueur l peut-on placer sur la bande de longueur L en les mettant bout à bout afin de la recouvrir complètement sans la dépasser ? »

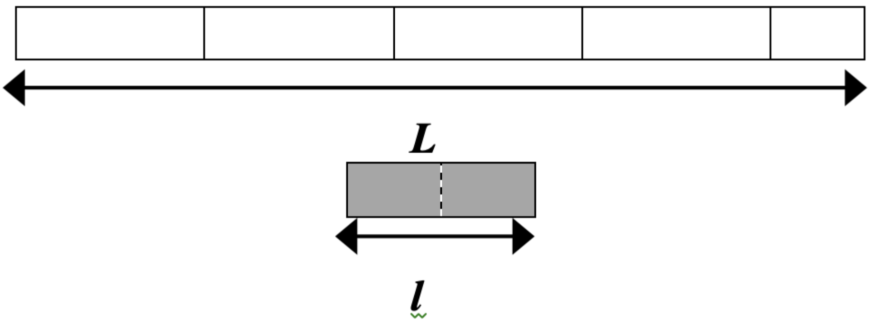

Figure 3 : Schéma des deux bandes de papier de longueurs L et l

Les longueurs L et l ont été choisies pour qu'on ne puisse pas répondre exactement à Q_1. Lors des passations, les réponses R_1 des élèves font état de cet échec. Par exemple : « on peut en mettre quatre, mais il reste un morceau non recouvert », « on peut en mettre quatre mais ça ne suffit pas, et cinq ce serait trop », ou encore « on peut en mettre 4,5 », etc.

Le système S_1 s'est désormais enrichi du résultat des travaux sur le domaine de réalité, orientés par Q_1. La classe dispose alors d'un nouveau système $S_2 = \{DR, T_1, \tau_1, Q_1, R_1\}$ où R_1 est jugée peu satisfaisante. C'est le moment opportun pour une modification du travail sur le système S_2 à partir d'une nouvelle question Q_2, entrevue par des élèves à partir de la longueur manquante pour un recouvrement exact :

Q_2 : « Peut-on construire, à partir de la bande de longueur l, une bande de papier de longueur plus petite que l, permettant le recouvrement de la bande de longueur L ? »

Sur le nombre d'élèves d'une classe ordinaire, compris entre 25 et 29 élèves, il en est toujours au moins un qui parvient à la conclusion qu'en pliant la bande de longueur l en deux parts égales, l'une de ces parts, qu'on désignera de longueur u, permet, par répétition, de réaliser le recouvrement espéré de la bande de longueur L. On obtient ainsi une réponse R_2 et un nouveau système $S_3 = [\{\mathrm{DR}, T_1, \tau_1, Q_1, R_1\}, Q_2, R_2]$ ou, plus simplement $S_3 = \{S_2, Q_2, R_2\}$.

Ce succès mérite qu'on s'y attarde. À l'issue d'une discussion entre élèves, ou entre élèves et *P*, sont verbalisés et notés des éléments d'organisation mathématique obtenus à partir des actions sur S_2. Il apparaît ainsi aux élèves qu'il y a deux longueurs u dans l. *P* fait consigner ce résultat.

Puis il oriente les élèves vers une écriture plus « mathématique » et plus économique : « Comment écrire la phrase précédente sous forme plus mathématique ? » Apparaît alors l'écriture ostensive $l = 2u$, ou $l = 2 \times u$ réduite ensuite en $l = 2u$. « Quelle autre égalité peut-on obtenir où u est écrit à partir de l ? » demande *P*. Il amène ainsi les élèves vers l'usage d'un « ***nouvel* » *ostensif***, $\frac{1}{2}$, en principe rencontré au CM. L'observation des passations en classe permet d'affirmer que des élèves n'hésitent pas à dire, plus ou moins convenablement, que la « longueur u est égale à la moitié de la longueur l ». *P* peut alors faire écrire : $u=\frac{1}{2}l$.

Le recouvrement de la bande de longueur L par une bande de longueur $u=\frac{1}{2}l$ permet d'obtenir de nouvelles écritures que l'on institutionnalise : $\mathrm{L}=9u$ et $u=\frac{1}{9}\mathrm{L}$. Ainsi que $\mathrm{L}=9\times\frac{1}{2}l$, par l'appel à une pseudo-distributivité s'appliquant à la fois à des scalaires et à des grandeurs, à partir d'une extension du lien entre addition répétée et multiplication, établi en primaire. On décide que $9\times\frac{1}{2}l$ se note $\frac{9}{2}l$ en explicitant, par retour au système, la signification de cet ***ostensif*** : à quelles actions sur le système correspondent numérateur et dénominateur. L'ostensif $\frac{9}{2}l$ est ***un modèle des praxéologies mises en œuvre sur le système*** ; de même $l=2\times\frac{1}{9}l$ se note, comme modèle, $l=\frac{2}{9}\mathrm{L}$. Le travail conduisant à $u=\frac{1}{2}l$ fait apparaître ***la longueur-unité***.

Les séances suivantes sont conçues selon le même scénario dans une dialectique entre système et modèle, à partir du travail mené sur le système. Elles amènent les élèves vers des changements praxéologiques sur S_3 puis sur un nouveau système du type S_4, et ainsi de suite à mesure que des questions apparaissent, qu'elles viennent des élèves ou de *P*. En cela, l'organisation didactique prend la forme d'un parcours d'étude de questions qui émergent de l'étape où l'on est parvenu, et dont on recherche les réponses. Comme toujours, les questions dévolues aux élèves amènent la possibilité d'un certain jeu dans lequel s'investissent des élèves. Ainsi cette élève qui, au-delà de la longueur-unité trouvée par la classe, découvre que $u=\frac{3}{4}l$ convient aussi et justifie les pliages qu'elle effectue (*cf.* Figure 4). La classe peut ainsi apprendre qu'existent plus d'une longueur-unité.

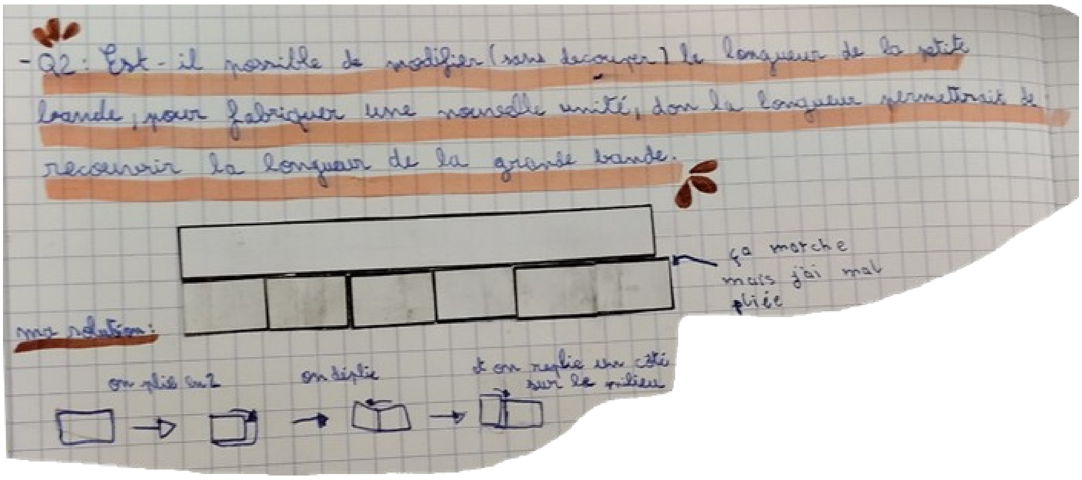

Figure 4 : Une élève trouve une autre unité de longueur et explique par quels pliages

3. 2. Manipulations sur un domaine de réalité aboutissant à la commensuration

On repart du système S_2 auquel on pose une nouvelle question, ***génératrice*** d'un travail aboutissant à la commensuration : « Pour obtenir une relation entre l et L, il a fallu utiliser une longueur-unité. Pourrait-on se passer de la longueur-unité pour trouver une relation entre l et L, donc sans partager la bande de longueur l en deux parties de même longueur ? »

L'idée qui émerge chez les élèves pour résoudre la question posée consiste à prendre, non pas une mais plusieurs bandes de longueur L. Et pour cela à commencer avec deux bandes de longueur L. En effet, des élèves se doutent, même s'ils ne l'expriment pas ainsi, que pour résoudre cette question, il va falloir obtenir un nombre entier de bandes de longueur l dans un multiple de la bande de longueur L (en en mettant un certain nombre bout à bout puisqu'ajouter des longueurs consiste, dans ce cas, à mettre bout à bout et rectilignement des bandes).

Les photos ci-dessous montrent les réponses obtenues avec des bandes de papier et des réglettes en plastique fabriquées à l'aide d'imprimantes 3D :

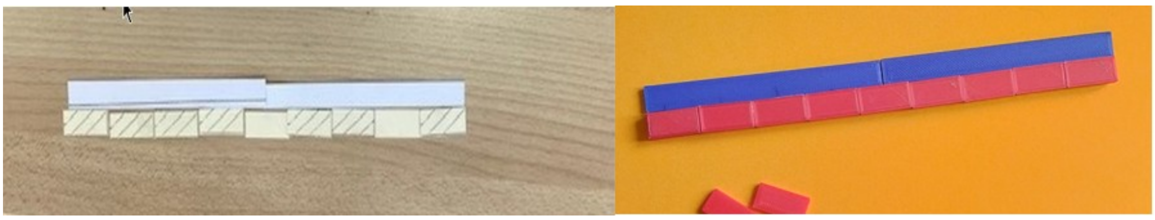

Figure 5 : Réalisation matérielle en classe de 6e de l'égalité $9l = 2L$.

Le professeur fait remarquer que l'on vient de trouver trois égalités portant sur l et L. Les nombres[20] $2, 9, \frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$ ne font que traduire ce que l'on a fait avec des bandes de papier ou

[20] Ces écritures numériques sont des éléments des ***modèles*** des ***praxéologies*** portant sur des ***systèmes*** ; des « comptes rendus complets ». L'usage de ce vocabulaire peut paraître à certains professeurs inutilement compliqué pour enseigner, voire rébarbatif. Les éléments d'une théorie paraissant difficile se constituent pourtant en outils professionnels permettant de produire, justifier et contrôler efficacement ce que l'on conçoit. On peut s'en passer, comme pour l'activité du manuel qui inaugurait ce texte… à ses risques et périls, et surtout à ceux des élèves.

des réglettes, comment on les a disposées, sans pour autant changer les longueurs l et L de ces objets.

Les élèves sont alors engagés dans un moment d'exploration du type de tâches qu'ils viennent d'aborder. Pour cela, ils sont conduits à établir des égalités du type $b\mathrm{L}=al$ à partir des mêmes questions :

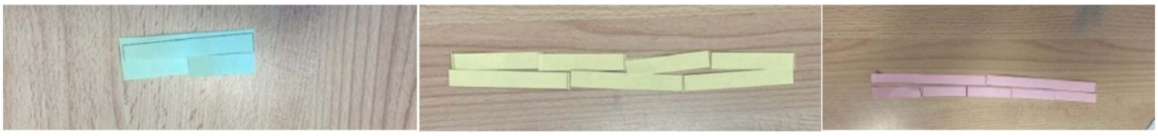

Figure 6 : Réalisation matérielle en classe de 6e des égalités L = 2l, 3L = 4l, 2L = 5l

Une institutionnalisation intervient qui permet de capitaliser le travail effectué sur les divers systèmes constitués de bandes ou de réglettes de longueurs différentes, en rapprochant les diverses égalités obtenues :

Ecrire $9l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.
Ecrire $3L = 4l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{3}{4}L$ et $L = \frac{4}{3}l$.
Ecrire $5L = 10l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{5}{10}L$ et $L = \frac{10}{5}l$.
Remarque : dans ce dernier cas, il a suffi de constater que $L = 2l$; écrire $5l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{5}L$ et $L = \frac{5}{2}l$.

Figure 7 : Institutionnalisation des résultats

Ainsi commence à être établie la technique de passage du produit au quotient : $9l = 2L$ équivaut à $l=\frac{2}{9}\mathrm{L}$. On sait les difficultés dénoncées par les professeurs, relatives à la maîtrise par les élèves du passage de $bq=a$ à $q=\frac{a}{b}$. Elles commencent à être prises en charge dès cette étape.

3. 3. Le nombre fractionnaire, « fraction abstraite », comme modèle de mesures

La question consiste désormais à rechercher si ce qui vient d'être établi sur des longueurs est vrai avec d'autres grandeurs ; par exemple avec les aires. On utilise soit des feuilles sur lesquelles sont dessinés des rectangles, soit des pièces rectangulaires en plastique.

La ***question génératrice*** est la suivante : « Peut-on dire de combien de fois l'aire B du rectangle ci-dessous est plus grande que l'aire A de l'autre rectangle ? »[21]

[21] Pour une première rencontre avec des aires, le fait que ces deux rectangles aient même largeur obéit à un choix volontaire : faire déterminer facilement par les élèves une aire-unité (*cf.* figure 8). Des exercices dans lesquels les rectangles ont des dimensions toutes deux différentes sont proposés par la suite.

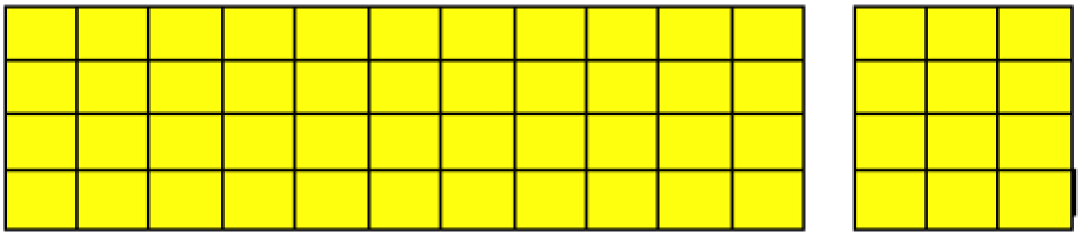

Figure 8 : Exemple de feuille distribuée aux élèves

La ***question cruciale*** qui suit, venue des élèves ou du professeur, consiste à se demander si l'on peut trouver une aire-unité afin d'écrire des relations entre A et B. Ci-dessous, une photo de ce que l'on trouve dans un cahier d'élève :

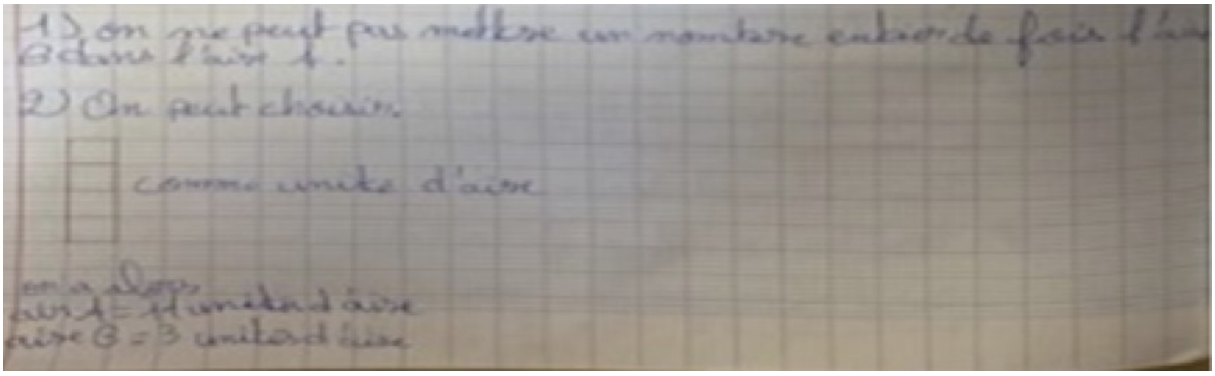

*Figure 9 : Choix d'une unité d'aire puis mesures d'aires en classe de 6^e^*

On établit, comme avec les longueurs : si $u = \frac{1}{11} \mathrm{B}$, alors $\mathrm{A} = \frac{3}{11} \mathrm{B}$ et si $u = \frac{1}{3} \mathrm{A}$, alors $\mathrm{B} = \frac{11}{3} \mathrm{A}$.

De même on recherche si, comme dans le cas des longueurs, il existe une relation du type $a \times A = b \times B$ à partir de la ***question cruciale*** : « Combien faudrait-il de rectangles d'aire A et combien faudrait-il de rectangles d'aire B pour obtenir deux rectangles d'aires égales ? ». Le travail sur les aires est répété sur divers spécimens obtenus en faisant varier les dimensions des rectangles. La synthèse du travail mené est consignée à l'occasion d'une nouvelle institutionnalisation :

Que les grandeurs g et G représentent des longueurs ou des aires, on a toujours trouvé que :
- écrire $9g = 2G$ équivaut à écrire $g = \frac{2}{9} G$ et $G = \frac{9}{2} g$
- écrire $11g = 3G$ équivaut à écrire $g = \frac{3}{11} G$ et $G = \frac{11}{3} g$

Figure 10 : Nouvelle institutionnalisation

Commence à émerger l'idée que la technique permettant de passer de l'écriture associée à la commensuration à l'écriture fractionnaire est indépendante de la grandeur choisie, au-delà des cas des deux seules grandeurs étudiées. De manière économique, on ne pourrait guère faire porter l'effort que sur le passage des écritures de produits à celles de fractions, sans s'occuper des grandeurs pourvu qu'elles soient de même espèce.

Le travail se poursuit avec l'addition (et la soustraction) à partir de la question génératrice suivante : « à quoi est égale la longueur d'un segment constitué de deux segments mis bout à bout dont on connaît les longueurs ? Comment faire ? » Lorsqu'on écrit, par exemple, $\frac{2}{9}\mathrm{L}+\frac{5}{9}\mathrm{L}=\frac{2+5}{9}\mathrm{L}=\frac{7}{9}\mathrm{L}$, l'idée progresse qui veut que l'essentiel de la technique se porte sur des nombres. Elle se renforce définitivement à partir du travail mené dans de nombreux exercices.

Un pas supplémentaire est franchi vers le point de vue qui identifie les fractions à des nombres, ce qu'on appelait autrefois les « fractions abstraites » à l'opposé des « fractions concrètes » associées aux grandeurs, lorsqu'émerge la question suivante : « on a vu que les fractions de grandeurs peuvent être ajoutées et soustraites. Peut-on calculer sur des fractions sans les associer à des grandeurs, autrement dit peut-on calculer seulement sur les mesures en ne tenant pas compte des grandeurs ? » La fraction devient alors ***un modèle de mesures de grandeurs***, quelle que soit la grandeur dont elle s'émancipe.

3. 4. Retour sur la dialectique système-modèle dans un processus de modélisation :

À l'occasion des opérations sur les fractions, la double signification des ostensifs, tels par exemple $u=\frac{1}{2}l$, dans un cas plus général $\frac{1}{b}l$, joue un rôle très important, développé ci-dessous.

Le travail sur les systèmes S_i, évoqué en 3.1., repose par exemple sur des manipulations de longueurs de bandes de papier. Les changements praxéologiques induits par des questions Q_i sur un système S_i permettent de créer un système S_{i+1} soutenu par de nouvelles questions. Cette imbrication autorise, à tout moment, à garder en mémoire les questions, techniques et technologies propres aux systèmes précédents, à se référer autant de fois que nécessaire à l'usage des longueurs des bandes de papier ; autrement dit à jouer sur la dialectique $\mathrm{S}_{i+1} - \mathrm{S}_i$.

Les ostensifs utilisés ou créés par les élèves, à partir des actions qu'ils ont effectuées, représentent alors autant de modèles porteurs de la mémoire des actions faites sur chacun des systèmes examinés et des réponses obtenues (Matheron, 2001) ; soit donc une dialectique modèle-système portée par les rapports construits aux systèmes S_{i+1} et S_i. L'écriture ostensive $u=\frac{1}{2}l$ dans le cas de cette partie du PER, porte en effet le souvenir d'une technique permettant de répondre à une question : dans le système S_i, les élèves ont dû plier la bande de longueur l en deux parties d'égales longueurs, notées u. Ce souvenir est évoqué de manière explicite un certain nombre de fois à partir d'exercices lors de moments didactiques de consolidation technique et d'extension de la portée de l'organisation mathématique (*cf.* Figure 6), mais il a une tendance pratique à s'évanouir dans le système S_{i+1}. Dans celui-ci en effet, $u=\frac{1}{2}l$ ne porte plus que le souvenir pratique de ce qui se fait, non avec une bande de papier, mais avec une longueur-unité. On retrouve ainsi la double valence propre à un ostensif : sémiotique et instrumentale. Dans, S_{i+1} à la sémioticité de $u=\frac{1}{2}l$ qui renvoyait dans S_i au pliage de la bande de longueur l, se substitue une nouvelle sémioticité, celle associée à la longueur-unité, tandis que son instrumentalité change : du report un nombre de fois d'une bande de papier dans S_i vers une mesure obtenue grâce à une longueur-unité dans S_{i+1}. Le processus de modélisation, à travers une dialectique système-modèle, induit une dialectique du souvenir et de l'oubli pour l'institution et ses sujets.

Par ailleurs, il faut souligner avec insistance la double valence sémiotique de l'ostensif . $u=\frac{1}{2}l$. D'une part, par analogie avec $l=2u$, il permet d'indiquer et de faire comprendre que la fraction $\frac{1}{2}$ représente la ***mesure*** de u si on choisit l ***comme unité,*** tout comme 2 est la mesure de l si on choisit u comme unité. D'autre part, l'ostensif indique aussi que u représente ***une fois le demi de l***. Autrement dit, l'écriture ostensive $u=\frac{1}{2}l$ signifie que la mesure est « un » si l'unité est « le demi de l » ; ce qui pourrait s'écrire : $u=1\times\frac{1}{2}l$.

Cette deuxième signification correspond mieux que la première au travail réalisé sur la bande de longueur l par les élèves. Il se trouve que cette nouvelle signification est apparue à la suite d'un changement du couple (tâche, technique) dans le système S_2. Dans des systèmes ultérieurs, ce changement permet de justifier tout à la fois les comparaisons de fractions de longueurs et les techniques utilisées afin d'effectuer des sommes ou différences de fractions de grandeurs. Ainsi, la mise au même dénominateur sera vue comme une conversion d'unité, et non plus comme un artifice dépourvu de signification, comme c'est trop souvent le cas dans les manuels scolaires.

Par exemple, la deuxième signification du modèle $u=\frac{1}{2}l$, soit plus généralement $u=\frac{1}{b}l$, devient fonctionnelle car elle permet de produire, comprendre et justifier, par remémoration ou évocation de l'écriture ostensive $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l$, la technique de calcul de la somme : $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l=\frac{a+c}{b}l$. En effet, dans ce sens, l'écriture $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l$ signifie que tout d'abord, dans $\frac{a}{b}l$, « on prend ***a fois*** l'unité $\frac{1}{b}l$ », puis qu'ensuite « on prend ***c fois*** l'unité $\frac{1}{b}l$ » ; comme « on » le faisait à l'école primaire pour le calcul du cardinal de deux collections. Autrement dit : $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l=a\times\frac{1}{b}l+c\times\frac{1}{b}l$. En s'appuyant sur cette technique antérieure, prémisse à l'institutionnalisation ultérieure d'une distributivité, il apparaît qu'il ne peut en être autrement pour $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l$ que d'être égale à « ***a + c fois*** l'unité $\frac{1}{b}l$ » qui s'écrit $(a+c)\times\frac{c}{b}l$ ou encore $\frac{a+c}{b}l$.

L'exemple précédent montre que le modèle $u=\frac{1}{2}l$, obtenu à partir de S_2 et généralisé à $u=\frac{1}{b}l$, permet la création de savoirs nouveaux dans un système ultérieur. Il n'est pas que la réponse à une question Q_i, mais devient modèle qui permet à son tour l'obtention d'un autre modèle, sous la forme d'un nouvel ostensif : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$. Celui-ci devient réponse à une question cruciale adressée à un système ultérieur où l'on travaille sur des bandes de papier de longueurs différentes, mises bout à bout.

3. 5. Brève conclusion

Ce PER constitue une nouvelle proposition de mise en œuvre didactiquement contrôlée, en Collège, de la dialectique système-modèle à laquelle obéit la construction d'organisations mathématiques ; dans ce cas autour des fractions. Il est passé depuis 2021 dans plusieurs classes de membres du groupe didactique de l'IRES d'Aix-Marseille. Lorsque sa robustesse aura été attestée dans divers types d'établissements, par des professeurs non didacticiens auxquels il est enseigné en stage, le texte de ce PER sera disponible sur le site de l'IRES d'Aix-Marseille.

Références bibliographiques

Barquero, B. (2022). Questionner la modélisation mathématique à l'école primaire : les parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes du 48e colloque COPIRELEM*. Toulouse 2022, 17-36.

Berthelot, R., et Salin, M-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux I.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, *19.1*, 77-124.

Brousseau, G. (1982). Les « effets » du « contrat didactique ». Document récupéré le 22 juin 2023 sur https://guy-brousseau.com/2315/les-%c2%ab-effets-%c2%bb-du-%c2%ab-contrat-didactique-%c2%bb-1982/.

Brousseau, N. et Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Université de Bordeaux I.

Chenevier, P. (1932). *Précis d'arithmétique*. Hachette

Chevallard, Y. (1985, éd. 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l'APMEP n° 471*, 439-461. Document récupéré le 22 juin 2023 sur : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=110

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. Document récupéré le 22 juin 2023 sur : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=205

Chevallard, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, Espagne : Horsori.

Crahay, M. (2006). Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation, *Revue française de pédagogie*, n° 154, 97-110

ERMEL CM1 (2001). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*. Hatier.

Guérin, L. (2021). Analyse des techniques d'étude personnelles hors classe en mathématiques au collège. Etude didactique de deux cas, *Education & didactique, 15-3,* 27-45.

Johsua, S. (2002). La popularité pédagogique de la notion de compétence peut-elle se comprendre comme une réponse inadaptée à une difficulté didactique majeure ? In Dolz J. & Ollagnier E. (éds.), *L'énigme de la compétence en éducation*, De Boeck, 115-128.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

Lemoigne, J-L. (1990). *La théorie du système général. Théorie de la modélisation*. PUF.

Matheron Y. (2001). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21.3,* 207-246.

Matheron, Y. et Méjani, F. (2022). Mudando o paradigma para o ensino da matemática: uma experiência em um sistema. In Saddo Ag Almoulou, Renato Borges Guerra, Luiz Marcio Santos Farias, Afonso Henriques e José Messildo Viana Nunes (Organizadores): *Percursos de Estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didáticao - Fundamentos teórico-metodológicos para a formação*. Editora CRV, vol. 1, 2022, 59-95.

Morin, E. (1977). *La méthode, tome 1. La nature de la nature*. Seuil.

Ramis, E., Deschamps, C., Odoux, J. (1993). *Mathématiques spéciales, Tome 1. Algèbre*. Masson.

Reinhardt, F. et Soeder, H. (1974, éd. 1997). *Atlas des mathématiques.* La Pochothèque. Librairie Générale Française.

Rouche, N. (1994). Qu'est qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères IREM*, *15*, 25-35.

Schneider-Gillot, M. (2006). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes, *Revue française de pédagogie*, n° 154, 85-96.

Verley, J.-L. (1997). Corps des fractions d'un anneau intègre. In *Dictionnaire des mathématiques. Algèbre, analyse, géométrie*. Albin Michel. 27-29.

Von Bertalanffy, L. (2012). *Théorie générale des systèmes*. Dunod.