

# Enseigner la modélisation pour enseigner les mathématiques : une dynamique problématique

Alain KUZNIAK<sup>13</sup>

Université Paris Cité

**Résumé.** Dans cet article, nous présentons un résumé de notre conférence. Celle-ci reprenait, pour partie, le cours donné à l'école de didactique des mathématiques de 2021. Ce cours fait l'objet d'une publication dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (Numéro à paraître) et nous renvoyons le lecteur intéressé à cette publication pour plus de détails.

**Mots-clés.** Modélisation, mathématisation, modèle, travail mathématique.

**Abstract.** This short paper is a summary of our talk at the IREM meeting in Poitiers. Its content is based on the lecture we gave at the French Didactic School in October 2021 and which is published in the scientific journal Recherches en Didactique des Mathématiques (to appear). We refer the interested reader to this publication for more details.

**Keywords.** Modelling, mathematization, model, mathematical work.

**Resumen.** En este artículo presentamos un resumen de nuestra charla en el congreso Irem en Poitiers. Su contenido se basa en la ponencia pronunciada en la Ecole de Didactique en octubre de 2021 y publicada en la revista Recherches en Didactique des Mathématiques (de próxima aparición). Para más detalles, invitamos al lector interesado a remitirse a esta publicación.

**Palabras clave.** Modelización, matematización, modelo, trabajo matemático.

## Introduction

Dans une première partie de la conférence, nous considérons les raisons de l'intérêt porté à la modélisation mathématique et l'approche des mathématiques enseignées qui en résulte. Une approche dominante de cet enseignement a été inspirée par les théories nord-européennes sur la modélisation en relation avec un enseignement par compétences. En insistant sur la place de la mathématisation et sur le rôle des modèles, nous questionnons la réalité du travail mathématique ainsi développé par les enseignants et les élèves.

Dans une seconde partie, nous reprenons la thématique de la mathématisation horizontale et du chaînage des modèles introduite dans le cadre de la Realistic Mathematics Education (RME). Puis, en nous appuyant sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM), nous montrons comment nous concevons l'articulation entre activité de modélisation et formation du travail mathématique.

## Modélisation, mathématisation et modèles

Les trois termes (modèle, modélisation, mathématisation) peuvent avoir des sens et des emplois différents en fonction des approches didactiques, pédagogiques ou théoriques qui les utilisent. Il est important de considérer cette diversité en étant attentif aux divers usages qui en sont faits et

---

<sup>13</sup>Alain.kuzniak@u-paris.fr

## A. Kuzniak

qui renvoient pour partie à des conceptions différentes de ce que sont les mathématiques et leur enseignement.

Il n'y a pas de consensus sur la définition de ce qu'est un modèle. En particulier, tout modèle n'est pas mathématique et un domaine scientifique peut se développer en s'appuyant sur d'autres types de modèles, notamment analogiques. La plupart des disciplines comme la biologie, l'économie, ont développé leur propre approche de la modélisation. Il est donc essentiel de replacer le rôle des mathématiques dans un contexte plus vaste où interviennent des formes de pensée différentes qui peuvent être scientifiques ou, parfois, idéologiques.

Cependant, il est notable que les mathématiques ont acquis une position particulière pour décrire, comprendre et anticiper certains phénomènes du monde réel. Initialement consacrées à la mécanique et à la physique, les applications des mathématiques sont aujourd'hui multiples et concernent tous les domaines scientifiques et même au-delà, comme l'économie ou les sciences humaines. Ce processus de mathématisation du réel est décrit par Israel (1996, p. 9) comme « l'invasion des mathématiques dans les processus de description et d'analyse du monde comme dans les techniques d'intervention active sur lui ».

Dans le cadre particulier de l'enseignement des mathématiques, comment comprendre les interactions entre modélisation et mathématiques ? Quelles places et quels rôles sont attribués à la mathématisation, aux mathématiques et au travail mathématique dans les différentes approches didactiques qui se préoccupent de la modélisation ?

### *Aux origines de l'intérêt pour l'enseignement de la modélisation*

Si l'on s'en tient à l'enseignement dans les pays occidentaux naviguant dans l'orbite anglo-saxonne, la question de la modélisation a commencé à être posée aux débuts des années soixante. La coïncidence avec la révolution des mathématiques modernes n'est pas fortuite puisque, dans les deux cas, c'est l'inadaptation de l'enseignement des mathématiques tant pures qu'appliquées qui est mise en avant. On attribue cette prise de conscience à l'avancée technologique et scientifique de l'Union Soviétique (U.R.S.S.) dans certains domaines à fort enjeu militaire.

Ces inquiétudes ont conduit certains pays occidentaux à mettre en place un enseignement spécifique de la modélisation dans le cadre de la formation des ingénieurs. Pour avancer vers une mise en œuvre didactique d'une discipline nouvelle, les différents chercheurs et enseignants concernés élaborent ce qu'ils appellent une *méthodologie pour la modélisation*. Celle-ci doit décrire le processus mis en œuvre lors d'une modélisation. Dès la fin des années 60, un consensus semble s'établir pour considérer trois phases bien distinctes pour décrire ce processus de modélisation dans sa globalité :

1. Description et formulation d'un modèle idéalisé en langage mathématique.
2. Solution du problème mathématique et déduction de résultats susceptibles de vérification expérimentale.
3. Comparaison des observations et de la théorie pour arriver à une évaluation de la validité du modèle.

Au cours des années 70, ces idées sont mises en pratique et débouchent sur des descriptions plus complexes qui tentent de s'approcher au mieux du processus de modélisation pour en faciliter l'enseignement. A l'origine des cycles de modélisation, qui fleuriront à partir des années 80, on trouve la méthodologie de Penrose :

1. Spécification du problème réel.
2. Développement d'un modèle.
3. Formulation du problème mathématique.
4. Résoudre le problème mathématique.
5. Interpréter la solution.
6. Comparer la solution avec le problème réel.
7. Recommencer ou écrire un rapport.

Deux points sont mis en avant dans cette méthodologie, le premier porte sur le fait qu'il faut faire un travail de défrichage du problème pour le spécifier à partir d'une réalité complexe et non mathématique (étapes 1, 2 et 3). Le deuxième (étape 7) montre que l'acte de modélisation n'est pas gratuit : il doit produire un résultat à l'issue d'une recherche et ce résultat doit pouvoir être communiqué à des non mathématiciens pour être ensuite utilisé par ces derniers.

### *Enseigner la modélisation dans l'enseignement secondaire : l'approche standard et dominante*

A partir des années 1980, l'enseignement de la modélisation ne concerne plus les seuls ingénieurs mais il sert de base à une rénovation de l'enseignement des mathématiques qui cherche à donner plus de sens aux notions mathématiques introduites dans les cours. Il s'agit de problématiser ces notions en recherchant des problèmes où elles interviennent pour apporter des solutions.

L'approche qui s'est progressivement imposée en Europe, et plus largement dans les pays à économie libérale, s'appuie sur la notion de compétence. La distinction entre le monde réel et celui des mathématiques est à la base de l'approche suivie pour la mise en place de la compétence de modélisation. La relation entre les deux est vue comme une application des mathématiques vers un autre monde (extra-mathematical world) qui peut être un autre sujet, une autre discipline, un domaine de pratique ou de vie sociale ou privée, etc. (Niss et al., 2007).

La modélisation réfère à un ensemble de processus qui peut être décrit par un cycle de modélisation qui pourra être parcouru plusieurs fois suivant les besoins. L'enseignement de la modélisation peut alors être défini grâce à un certain nombre d'ingrédients : le cycle de modélisation pour le décrire, des tâches de modélisation pour le mettre en place, la compétence de modélisation pour l'évaluer.

Le cycle de modélisation qui est privilégié dans cette approche comprend sept processus directement inspirés de la méthodologie de Penrose, évoquée plus haut.

1. Comprendre la tâche et construire la situation modèle.
2. Simplifier et structurer la situation modèle et construire le modèle réel.
3. Traduire (translating) le modèle réel en un modèle mathématique (mathematize).
4. Appliquer les techniques mathématiques pour produire des résultats mathématiques (working mathematically).
5. Interpréter les résultats mathématiques.
6. Valider ces résultats en relation avec la situation réelle.
7. Présenter et expliquer le processus de solution ainsi que les résultats.

## A. Kuzniak

L'enseignement de la modélisation dans les classes passe par le choix et le développement (design) de tâches particulières et authentiques qui doivent permettre aux professeurs d'enseigner la modélisation dans les classes. Dans de nombreux pays des actions de formation d'enseignants ont été développées pour comprendre ces tâches, leur enseignement et leur évaluation.

Cette approche de la modélisation a permis un développement important des ressources pour un enseignement de la modélisation, enseignement qui peu à peu s'est imposé dans les curricula. Si l'on se restreint à l'impact réel sur l'apprentissage des mathématiques, le constat n'est pas évident à tirer du fait d'un manque d'évaluation notable sur ce point précis. Qu'en est-il du rapport des élèves aux mathématiques ? A-t-il changé ? Que peut-on dire du développement des pures connaissances mathématiques au-delà de l'acquisition supposée d'une compétence générale sur la modélisation ?

### L'approche épistémologique, mais pas que...

Dans l'introduction à un numéro de la revue ZDM consacré à la modélisation dans l'enseignement, Kaiser et al. (2008) introduisent une classification des approches didactiques de la modélisation qui suggère l'existence d'autres types d'approches que l'approche dominante. Les auteurs retiennent essentiellement les approches « sociologique » et « épistémologique ».

L'approche dite *sociologique* est particulièrement active et vivante en Amérique Latine. Elle insiste sur la prise en compte des mathématiques spécifiques aux sociétés dans lesquelles évoluent les élèves. La seconde approche est dite *épistémologique* parce qu'elle privilégie les aspects liés au contenu mathématique et qu'elle insiste sur la mathématisation à travers l'organisation des savoirs à développer.

Parmi ces approches, nous avons choisi de présenter deux théories didactiques complémentaires : la Realistic Mathematics Education (RME) et la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM).

### L'approche constructiviste radicale de la Realistic Mathematics Education : importance des modèles émergents.

Initiée par le mathématicien Freudenthal à partir des années 70 aux Pays-Bas, la théorie RME est avant tout orientée vers une conception des situations de classe guidée par une approche constructiviste de l'enseignement.

Pour Freudenthal, les mathématiques sont d'abord une activité humaine qui consiste à résoudre et chercher des problèmes et plus généralement à organiser un domaine issu de la réalité ou d'un domaine mathématique. Ce processus d'organisation est désigné sous le nom de *mathématisation*. Une première *mathématisation horizontale* passe par une succession de modèles qui permettent un passage graduel du monde réel à la théorie. Elle s'adresse particulièrement aux élèves de l'école obligatoire. Par la suite, une seconde mathématisation dite *verticale* permet d'accéder à des notions mathématiques de plus en plus abstraites.

La RME accorde un rôle prépondérant à l'idée de modèles émergents. Ces modèles émergents sont vus comme des représentations de situations problèmes. Ils peuvent revêtir diverses formes : objets matériels, dessins, situations exemplaires, schémas, diagrammes et symboles. Ils sont étroitement associés à des représentations symboliques produites dans un premier temps par les élèves. Ces différents modèles sont organisés de manière linéaire et progressive sous la forme

d'un *chaînage de modèles*. Le plus souvent possible, ils peuvent être élaborés par les élèves et ne font pas nécessairement partie d'un corpus mathématique institutionnalisé.

### La théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM)

L'étude du travail mathématique est centrale dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et Vivier, 2011, Kuzniak et al., 2022). La théorie a pour ambition de décrire, comprendre et (trans)former le travail mathématique exercé dans un contexte scolaire.

À travers le prisme de la théorie des ETM, le développement par un individu, générique ou non, d'un travail mathématique adéquat est vu comme un processus progressif et graduel de mise en relation de deux plans, l'un de nature épistémologique en étroite relation avec le contenu mathématique, le second de nature cognitive en relation avec la pensée d'un individu en train de résoudre des problèmes ou de réaliser des tâches mathématiques. La mise en place progressive du travail mathématique évolue en fonction de trois différents types de développements génératifs spécifiques et entrelacés : les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives. Ces différentes genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) s'appuient sur les interactions entre signes et visualisation, artefacts et construction, référentiel théorique et preuve.

De manière spécifique, la perspective des ETM sur la modélisation (Lagrange, et al., 2022, Nechache, 2018) propose une réorganisation du cycle de modélisation autour de trois processus : la description mathématique de la réalité, la mathématisation et la validation externe (Fig. 1).

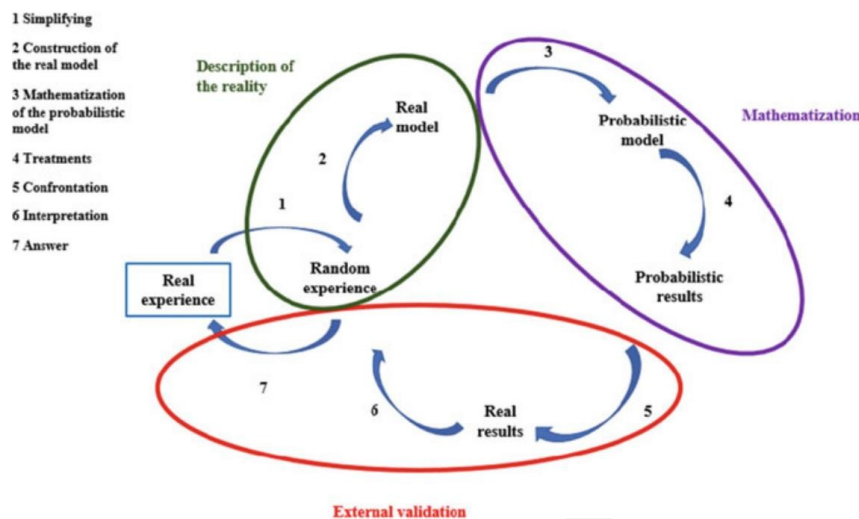


Fig. 1. Mathématisation et cycle de modélisation (adapté de Nechache, 2018)

La mathématisation occupe une place centrale (mais non unique) dans cette approche qui est orientée vers la construction mathématique des objets et la structuration des modèles à l'intérieur de théories mathématiques. Le travail mathématique consiste alors à produire, développer et raisonner dans ces modèles. La mathématisation se distingue ici de la modélisation. Cette dernière est orientée vers l'action et la résolution de problèmes qui se posent dans le monde du travail et dans la société.

Dans cette approche, un modèle mathématique est vu comme un fragment de théorie mathématique organisé au sein d'un ou plusieurs domaines mathématiques et qui peut s'appliquer à décrire, comprendre ou agir sur le monde, qu'il soit réel ou déjà modélisé au sein d'autres champs scientifiques.

## A. Kuzniak

En insistant sur l'idée de localité et de complémentarité des modèles, Lagrange (Lagrange et al. 2022) a développé une approche de la modélisation, en fin de lycée, qui s'appuie sur une connexion de modèles dont chacun apporte un point de vue différent sur la question posée. Ces modèles ne sont pas tous forcément mathématiques et permettent ainsi une réelle interdisciplinarité. Cette pluralité de points de vue associée à une pluralité de modèles permet de rendre compte de la richesse du problème et de la diversité des solutions possibles. Chacune apporte un éclairage nouveau et nécessaire à la compréhension de la réalité.

Chacun des modèles locaux est associé à un ETM particulier, et cet ETM doit être mis en relation avec d'autres modèles associés à des ETM différents. Ainsi, la théorie des ETM permet d'articuler différents points de vue et d'étudier les interactions à la fois cognitives et épistémologiques entre tous ces éléments.

Pour mettre en place cette approche dans les classes, Lagrange et al. (2022) utilisent une approche pédagogique développée à partir des années 70 aux États-Unis, the jigsaw classroom ou « classe puzzle ». Cette méthode pédagogique permet de faire travailler les élèves en groupes sur différents modèles puis, en recomposant les groupes, de comparer les expériences de chacun. Cette organisation permet de résoudre la contrainte du temps qui pèse souvent sur les situations de modélisation et d'aborder des problèmes complexes en relativement peu de temps.

### *Quelques questions en suspens...et pourtant cruciales*

Pour conclure, nous soulevons quelques points qui restent problématiques et méritent l'attention des chercheurs et enseignants intéressés par la modélisation dans un contexte scolaire.

- La démathématisation actuelle provoquée par les outils digitaux et la simulation.

Un point vient télescoper les recherches et, plus profondément, la nature même de la question du travail mathématique mis en œuvre par les élèves. Il est relié à ce qu'il est convenu d'appeler la démathématisation actuelle des activités nécessitant des savoirs mathématiques. Les outils mathématiques sont maintenant englobés dans des artefacts technologiques de plus en plus puissants dont l'Intelligence Artificielle représente une des formes les plus abouties. De ce fait, ils sont rendus invisibles et leur étude peut apparaître inutile aux élèves.

- Une modélisation sans modèle

Parallèlement à cet accroissement des outils digitaux, il faut aussi noter l'apparition d'une modélisation sans modèle mathématique favorisée par des outils de simulation de plus en plus puissants. Pour résoudre un problème, il suffit alors de décrire les procédures mises en jeu dans la situation sans nécessairement les comprendre pour produire des résultats. Il s'agit là de ce que Varenne (2009) appelle la modélisation algorithmique qui permet de résoudre les problèmes sans nécessairement les comprendre et pouvoir expliquer les solutions obtenues.

- Modélisation et travail mathématique

Selon nous, la mise en place d'un travail mathématique nécessite une mathématisation qui s'appuie sur un ensemble de situations problématisées et une réflexion tant épistémologique que cognitive sur les savoirs mis en jeu dans les tâches de modélisation. De cette façon, il est possible d'espérer donner du sens aux objets et outils mathématiques en ne se limitant pas à la seule modélisation algorithmique et à des simulations aveugles.

Références bibliographiques

- Israel, G. (1996). *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique*. Editions du Seuil.
- Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 82-85.
- Kuzniak, A. (à paraître). Enseignement de la modélisation mathématique et construction du travail mathématique : une dynamique problématique *Recherches en Didactique des Mathématiques*
- Kuzniak, A., Montoya, E., & Richard, P.R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.
- Kuzniak, A., & Vivier, L. (2011). L'enseignement de la modélisation. Mise en perspective critique. *Cahier du LDAR n°3, Irem de Paris*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02110170/document>
- Lagrange, J. B., Huincahue, J., & Psycharis, G. (2022). Modeling in Education: New Perspectives Opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya & P. Richard (Eds.). *Mathematical Work in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.
- Nechache, A. (2018). L'articulation des genèses de l'Espace de Travail Mathématique dans la résolution des tâches probabilistes faisant appel à la modélisation. *Menon, Journal of Mathematical Education* (4) 93-104.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum et al. (eds). *Modeling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3-32). Springer.
- Varenne, F. (2009). Epistémologie des modèles et des simulations : tour d'horizon et tendances. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00674144>