

# Quel enseignement pour préparer les apprenants à la modélisation mathématique ?<sup>8</sup>

Pierre JOB<sup>9</sup>

ICHEC Brussels Management School

Maggy SCHNEIDER<sup>10</sup>

Université de Liège

**Résumé.** Nous exposons un modèle didactique de la modélisation mathématique qui prend appui, à la fois sur la théorie anthropologique du didactique (TAD) avec la notion de praxéologie et la théorie des situations didactiques (TSD) avec la notion de situation fondamentale, pour capturer une caractéristique essentielle des mathématiques, l'économie de pensée, soit l'idée que la modélisation mathématique vise à produire des modèles instrumentaux dans la résolution de problèmes. Dans le cadre de ce modèle didactique de la modélisation mathématique, nous présentons les grandes lignes d'un parcours centré sur la modélisation fonctionnelle, où les fonctions apparaissent, non pas comme expression d'une théorie déductive déjà constituée, mais comme l'expression de l'économie de pensée au travail, résultant en la constitution de classes de fonctions paramétrées qui constituent autant de modèles efficaces pour classer et résoudre des familles de problèmes.

**Mots-clés.** Modélisation intra/extra-mathématique, pensée fonctionnelle, économie de pensée, praxéologie, niveau de rationalité.

**Abstract.** We present a didactic model of mathematical modelling that draws on both the anthropological theory of didactics (TAD) with the notion of praxeology and the theory of didactic situations (TSD) with the notion of fundamental situation, to capture an essential characteristic of mathematics, the economy of thought, i.e. the idea that mathematical modelling aims to produce instrumental models in problem solving. Within the framework of this didactic model of mathematical modelling, we present the broad outlines of a path centred on functional modelling, where functions appear, not as the expression of an already constituted deductive theory, but as the expression of the economy of thought at work, resulting in the constitution of classes of parametric functions that constitute so many efficient models for classifying and solving families of problems.

**Keywords.** Intra/extra-mathematical modelling, functional thinking, economy of thought, praxeology, level of rationality.

**Resumen.** Presentamos un modelo didáctico de la modelización matemática que se apoya tanto en la teoría antropológica de la didáctica (TAD) con la noción de praxeología, como en la teoría de las situaciones didácticas (TSD) con la noción de situación fundamental, para captar una característica esencial de las matemáticas, la economía del pensamiento, es decir, la idea de que la modelización matemática tiene como objetivo producir modelos instrumentales en la resolución de problemas. En el marco de este modelo didáctico de la modelización matemática, presentamos las grandes líneas de una vía centrada en la modelización funcional, donde las funciones aparecen, no como la expresión de una teoría deductiva ya constituida, sino como la expresión de la economía del pensamiento en acción, dando lugar a la constitución de clases de funciones paramétricas que constituyen otros tantos modelos eficaces para clasificar y resolver familias de problemas.

<sup>8</sup> L'enregistrement de la conférence dont cet article est issu est disponible à l'adresse suivante : <https://irem.univ-poitiers.fr/colloque2023/videos.html>

<sup>9</sup> pierre.job@ichec.be

<sup>10</sup> mschneider@uliege.be

**Palabras clave.** Modelización intra/extra-matemática, pensamiento funcional, economía del pensamiento, praxeología, nivel de racionalidad.

## Introduction

À l'image de l'expression « résolution de problèmes », le terme « modélisation » fait partie des incontournables dans les discours des décideurs et des chercheurs à travers le monde, lorsque les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques sont abordées. Leur caractère incontournable pourrait laisser entendre que cette expression et ce terme sont porteurs, à quelques variations près, d'une interprétation qui fait consensus ou du moins de suffisamment de convergences pour se dispenser d'en préciser le sens et la portée, au-delà de l'établissement de listes normatives plus ou moins détaillées qui constituent les programmes et autres référentiels, permettant le contrôle bureaucratique des pratiques enseignantes qui leur sont inféodées. Nous souhaitons montrer qu'il n'en est rien et, bien au contraire, que l'expression « résolution de problèmes » et le terme « modélisation » peuvent s'envisager sous des angles suffisamment différents pour en devenir incompatibles. Plus spécifiquement, nous souhaitons montrer à quel point l'abord par le prisme, largement répandu, de la notion de compétence et plus encore par celui des compétences dites « transversales », comme c'est le cas dans les évaluations PISA et en Belgique francophone sous l'impulsion du Service Général du Pilotage du Système Éducatif (SGPSE), de l'expression « résolution de problèmes » et du terme « modélisation », peut s'avérer porteur de contradictions fortes avec ce que nous considérons être, preuves à l'appui, des caractéristiques incontournables de l'épistémologie des mathématiques, dont l'économie de pensée, qui sera développée dans ce qui suit, constitue un des piliers.

Cette étape tout à la fois de contraste et de positionnement concernant la « résolution de problèmes » et la « modélisation » nous semble incontournable pour au moins deux raisons. Elle nous permet d'une part d'expliquer dans quelle mesure le prisme des compétences « transversales » place les enseignants devant une véritable injonction paradoxale qui les somme de choisir entre premièrement l'enseignement de savoirs/modèles émancipateurs résultant d'activités de modélisation en vue de résoudre (en un sens fort qui sera également explicité par la suite) des problèmes et deuxièmement mettre les élèves en situation d'évaluation de la compétence « transversale » « résolution de problèmes » d'une manière où le principal critère de réussite est le talent individuel des apprenants, et non l'acculturation à un enseignement instrumental et où paradoxalement, la compétence « modélisation » se réduit en l'utilisation algorithmique de modèles préétablis dont la construction (et encore moins la validation) n'est pas ou peu prise en charge par les élèves.

D'autre part, cette étape de contraste et de positionnement nous servira également de cadre théorique permettant de présenter et donner du relief à différentes ingénieries expérimentées depuis plusieurs décennies à présent au sein de nos laboratoires de recherche le Ladimath et le Ladichec. Ces ingénieries nous permettront de concrétiser et exemplifier un type d'enseignement qui nous semble propice à l'exercice de la modélisation d'une manière qui soit en phase avec l'épistémologie des mathématiques et donc instrumental dans la résolution de problèmes.

### 1. La modélisation à l'aune des compétences et des compétences dites « transversales »

Voyons dans cette section le point de vue qui se dégage sur la modélisation mathématique au travers du prisme des compétences et des compétences dites « transversales », en partant de la « résolution de problèmes » qui lui est étroitement associée. Piloté par l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE), le Programme International pour le

Suivi des Acquis des élèves (PISA) propose tous les 3 ans des évaluations à l'échelle internationale dans différents domaines dont les mathématiques. Les évaluations PISA sont présentées comme une invitation à « Préparer les élèves à la résolution de problèmes. » (SGPSE, s.d.), à « [...] [les] confronte[r] [...] à des problèmes ancrés dans le monde réel » (SGPSE, s.d.), à « Des problèmes qu'ils seront susceptibles de gérer, collectivement ou individuellement, en tant que citoyens ou professionnels adultes » (Van Dieren, 2005). Il ressort de ces propos que les problèmes sur lesquels il conviendrait de mettre l'emphase devraient jouir d'une certaine « authenticité » et d'un certain caractère « concret ». L'authenticité des problèmes proposés dans PISA est contestée par différents auteurs dont Delord (2013) et Bart & Daunay (2016) et la notion d'authenticité elle-même est questionnée par Tricot (2017). S'agit-il d'un but ou d'un moyen pour enseigner ? Nous reviendrons sur le caractère « concret » des problèmes par la suite pour dénoncer l'entendement trop étriqué qui est assigné à ce qualificatif en lien avec la modélisation (intra et extra-mathématique). Malgré ces écueils, en Belgique francophone, le SGPSE adopte des directives en matière d'éducation qui entrent en résonance avec le point de vue prôné par PISA. En effet, la « Résolution de problèmes » fait partie des compétences « transversales » fondamentales à développer et à évaluer à l'école, pour former des « citoyens responsables ». Le focus sur les compétences induit un rapport particulier au savoir car « PISA porte davantage sur la maîtrise des compétences que sur l'acquisition de savoirs et de contenus scolaires. » (SGPSE, s.d.).

Analysons l'item des pommiers (tiré de PISA 2000<sup>11</sup>) pour mettre en lumière en quoi le point de vue adopté par PISA sur la compétence « transversale » « résolution de problèmes » pose problème et en quoi ce point de vue induit dans la foulée un positionnement tout aussi discutable concernant la modélisation et les savoirs mathématiques. Dans cet item, on demande notamment de déterminer le nombre de conifères entourant un carré formé de pommiers. Une présentation plus détaillée de l'item est donnée dans l'annexe 1. La réponse attendue est  $8n$  où  $n$  représente le nombre de pommiers dans un côté du carré. Schneider et Job (2016) examinent deux approches distinctes pour résoudre ce problème. La première, que l'on pourrait qualifier d'« astucieuse » est détaillée dans l'annexe 2. La seconde consiste à reconnaître que le nombre de conifères en question suit une progression arithmétique, conduisant ainsi directement au nombre recherché, soit  $8n$ . Cela suppose un apprentissage préalable sur les modèles fonctionnels dont les progressions arithmétiques constituent un cas particulier. Krysinska, Mercier et Schneider (2009) démontrent la possibilité et la faisabilité d'un tel enseignement dès le début du secondaire, avec des élèves de 12 ans. Suite à un tel enseignement, les élèves disposent de critères de reconnaissance leur permettant de déterminer si une situation relève ou non de l'un des modèles étudiés antérieurement.

Le contraste entre ces deux résolutions montre que, de manière solidaire, les notions de « problème » et de « modélisation » sont relatives aux institutions auxquelles est assujéti un élève. Selon l'enseignement reçu, la résolution d'un item PISA, ou plus généralement d'un « problème », peut être considérée comme une mise à l'épreuve du talent personnel de l'élève à créer un modèle pertinent pour le résoudre, ou comme un élément attestant de sa capacité à identifier, parmi des modèles auxquels il est acculturé, celui lui permettant de répondre de manière efficace à la question posée. On est alors en droit de se demander quel sens donner à la compétence « transversale » « résolution de problèmes », à la notion de « problème », quelle place occupent la modélisation et les modèles pour résoudre ces « problèmes », et comment organiser et évaluer l'ensemble ?

Ces questions, les enseignants du secondaire y sont confrontés dans leur pratique car, en Belgique francophone, ils ont l'obligation de mettre en œuvre l'évaluation de la compétence

<sup>11</sup>Tiré de [https://www.pisa-fwb.uliege.be/cms/c\\_8488467/fr/pisafwb-pommiers](https://www.pisa-fwb.uliege.be/cms/c_8488467/fr/pisafwb-pommiers).

transversale « résolution de problèmes ». D'autre part, à différents niveaux du système éducatif, la promotion de la réussite est une compétence professionnelle soumise à un décret. Répondre à ces questions ne va pas de soi et peut mettre les enseignants en grande difficulté et à la suite les élèves également. Schneider (2006 a et b) expose comme suit le déroulement d'une formation destinée à des enseignants du début du secondaire. Les enseignants se plaignent des faibles performances de leurs élèves concernant des problèmes portant sur des nombres figurés, tels ceux fréquemment rencontrés dans PISA, dont l'item des pommiers fait partie. Malgré le travail sur des exemples, le transfert attendu de la compétence ne se produit pas. La formatrice les initie à la modélisation fonctionnelle évoquée plus haut. Les enseignants sont heureux de disposer de cet outil qui facilite leur propre compréhension de ce type de problème. Ils souhaitent cependant ne pas enseigner ces modèles à leurs élèves car cela les empêcherait d'évaluer les capacités « véritables » de « résolution de problèmes » de leurs élèves, ces « problèmes » n'en étant alors plus. Ils font dès lors le choix, pour se conformer au prescrit légal, de privilégier l'évaluation de cette compétence, ou du moins la manière dont ils la perçoivent, au détriment de savoirs et modèles instrumentaux, ce qui les plonge dans un cercle vicieux. La compétence envisagée à l'aune d'une transversalité « désincarnée » et a-culturelle conduit à des évaluations peu probantes ce qui les mène à des pratiques professionnelles où la rencontre avec les problèmes est cadrée pour permettre aux élèves de s'y frotter de manière essentiellement contractuelle (Brousseau, 1998), quand tout simplement cette rencontre n'est pas minimisée au point d'une intersection quasi vide.

Les enseignants se trouvent donc dans la position périlleuse de devoir choisir entre l'évaluation de la compétence et l'enseignement de savoirs et modèles efficaces. Ce choix est particulièrement interpellant si l'on se réfère à la genèse de la didactique initiée par Brousseau (1998) et à la notion de situation fondamentale dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD). Cette notion constitue une modélisation didactique des savoirs mathématiques qui met justement en avant leur instrumentalité pour résoudre des problèmes. Mettre les savoirs en arrière-plan en même temps que les modèles dans l'évaluation apparaît dès lors pour le moins incongru. Détaillons, dans la section suivante, en quoi une telle mise au placard apparaît inacceptable au plan épistémologique.

## **2. Un modèle didactique de l'activité de modélisation et des modèles mathématiques**

Pour ce faire, nous allons présenter, expliciter et motiver un modèle didactique de la notion de modélisation et de modèle mathématiques.

### **2.1. Socio-constructivisme versus positivisme empirique**

Avant de poursuivre, commençons par une incise qui nous semble importante afin d'éviter certains malentendus. Nous invitons le lecteur à garder la plus grande attention à la lecture de ce qui suit car, selon les circonstances, les termes « modèle » et « modélisation » feront référence tantôt aux mathématiques, tantôt à la didactique. Nous avons souhaité utiliser et assumer ces termes en lien avec le travail didactique exposé dans ces notes, malgré les risques de confusion, pour plusieurs raisons.

Premièrement, parler de « modèle didactique » nous permet de mettre l'emphase sur le fait que nous présentons une construction didactique consciente, explicite et explicitée et non simplement, comme c'était le cas pour PISA et le SGPSE dans la section précédente, un « point de vue » plus ou moins implicite sur la modélisation mathématique, avec toutes les dérives dont ces implicites sont porteurs. Nous avons effectivement d'emblée insisté dans l'introduction sur la

polysémie des termes « modèle » et « modélisation » et la nécessité de préciser la manière dont on les envisage, ce que nous faisons ici en explicitant quel est notre modèle didactique de la modélisation et des modèles mathématiques.

Deuxièmement, utiliser l'expression « modèle didactique » et annoncer qu'il s'agit d'une construction, nous permet également de souligner que la légitimité de ce modèle didactique que nous allons dévoiler ne tient pas dans sa capacité à « décrire » de manière « exacte » la modélisation mathématique, mais dans son instrumentalité à mettre en évidence des phénomènes didactiques. Autrement formulé, nous souhaitons nous distancier par rapport à une forme de positivisme empirique dont nous avons largement dénoncé les écueils s'agissant notamment de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, notamment dans Job et Schneider (2014), en montrant comment ce positivisme empirique constitue un obstacle épistémologique (Brousseau, 1983) majeur aux multiples déclinaisons. En substance, le positivisme empirique est une épistémologie postulant (Fourez, Englebert-Lecomte et Mathy, 1997) que les concepts scientifiques sont des reflets « exacts » du monde qui peuvent être découverts par l'observation de « faits objectifs », indépendants des interprétations et dispositifs d'observation de l'observateur.

Notre modèle didactique n'est donc pas plus ou moins « vrai » ou plus ou moins « faux » parce qu'il « décrit » ou ne « décrit » pas tel ou tel aspect de la modélisation mathématique. La validité de notre modèle didactique est liée à la possibilité de falsifier au sens de Popper (1973), par des expériences, les hypothèses, interprétations et observations qu'il autorise, dans un esprit phénoménoteknique (Schneider & Job, 2016) c'est-à-dire l'idée que ce sont les interactions dialectiques entre le dispositif d'observation et donc le modèle didactique adopté et les observables qui constituent le résultat de recherche et non simplement les observations qui constitueraient les « faits objectifs ».

Cela nous permet également de préciser la posture épistémologique dans laquelle nous nous inscrivons et qui sert de toile de fond à la globalité de notre propos. Il s'agit de l'épistémologie socio-constructiviste (Fourez et al., 1997) aux yeux de laquelle les théories scientifiques (Schneider, 2011, p. 177) :

*« sont des créations de l'esprit humain, adoptées provisoirement pour leur efficacité à réaliser un projet donné ou à interpréter des phénomènes. Mais les mêmes concepts sont rejetés ou modifiés lorsque cette efficacité est mise à mal. Il ne s'agit donc pas d'y croire mais d'en tester les limites ».*

Le modèle didactique proposé dans ce texte n'est donc pas envisagé comme un absolu mais comme un outil provisoire en perpétuelle restructuration. Il servira de cadre théorique pour faire ressortir la légitimité et les intentions derrière les exemples à venir qui illustreront la manière dont on peut envisager les modèles et la modélisation mathématiques au niveau secondaire, du collège au lycée. Parallèlement, ce modèle didactique nous permettra d'explicitier, au-delà des problèmes professionnels qu'il génère chez les enseignants et dont nous avons déjà parlé précédemment, pourquoi le point de vue sur la modélisation, adopté par PISA et le SGPSE nous semble difficilement tenable. Une telle clarification nous apparaît importante étant constatée la prégnance forte de PISA et de la mouvance des compétences en Belgique francophone et à l'international et ce malgré la multitude de recherches qui en dénoncent les écueils et aspects délétères (Bart & Daunay, 2016 ; Bodin, 2006 ; Crahay, 2006 ; Delord, 2013 ; Matheron, 2012 ; Schneider, 2006a). Présentons à présent notre modèle didactique en deux strates.

## 2.2. Strate 1 : les mathématiques comme économie de pensée

L'épistémologie socio-constructiviste sur laquelle nous prenons appui n'est pas un isolat applicable à la seule didactique. Elle est tout autant pertinente pour les mathématiques. Partant, il n'est guère surprenant de considérer que les savoirs mathématiques et en particulier les modèles mathématiques sont construits pour réaliser avec efficacité les buts qui leur sont assignés. Cette notion d'efficacité est présente dans d'autres disciplines, comme la physique, ainsi que le défend Mach (1987) en parlant d'« économie de pensée », expression dont nous nous emparons en étendant son usage aux mathématiques.

L'économie de pensée réalisée par les savoirs et modèles mathématiques peut être localisée à différents niveaux dont les suivants. Dans la volonté de développer des modèles unificateurs, applicables à la plus grande variété possible de problèmes, problèmes qui pouvaient initialement être considérés comme disjoints, offrant ainsi l'opportunité de développer des techniques de résolution générales et instrumentales. Dans la volonté de développer des modèles dont l'architecture interne est simplifiée (moins d'axiomes, possibilité de démonstrations plus courtes...). Simplification et unification ne sont évidemment pas des intentions disjointes mais se complètent et se répondent. À un niveau macroscopique, toute l'entreprise du groupe Bourbaki et la création des structures qui ont révolutionné les mathématiques du 20<sup>e</sup> siècle peuvent s'envisager comme l'expression même de cette volonté d'économie de pensée (Bourbaki, 1948, p. 42) :

*« Les « structures » sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. »*

Des disciplines comme l'analyse, l'algèbre et la géométrie sont les témoins perpétuels et vivants de l'application de ce principe. Donnons quelques exemples en commençant par l'analyse.

### L'économie de pensée en analyse

La quadrature de la parabole, soit le problème de déterminer la mesure de l'aire d'une surface délimitée par une parabole et une droite, semble avoir été adressée pour la première fois par Archimède dans un traité justement nommé « La quadrature de la parabole ». Dans ce traité Archimède, considère deux techniques de résolution. Une de nature géométrique et une autre de nature mécanique. Toutes les deux prennent appui sur un procédé d'approximation, la méthode d'exhaustion, typique des mathématiques grecques, procédé assez lourd qui utilise une double réduction par l'absurde.

L'exemple d'Archimède nous permet d'illustrer l'économie de pensée à différents niveaux. Premièrement, la lourdeur de la méthode d'exhaustion servira (en conjonction avec d'autres éléments) d'impulsion au développement de techniques plus instrumentales pour déterminer des mesures. Il s'agit notamment des différentes conceptions infinitésimales et de la notion de limite. On peut voir la notion moderne de limite comme culmination de cette volonté d'améliorer l'instrumentalité de la méthode d'exhaustion en lui substituant un outil qui permet de se dispenser de la double réduction par l'absurde, ce qu'autorisent notamment les propriétés des limites (voir Job (2011) pour plus de détails sur cette connexion). Les mathématiciens grecs ne

disposaient pas de cette possibilité d'appliquer des propriétés de la méthode d'exhaustion pour en simplifier l'usage, notamment parce que cette méthode s'appliquait à des objets géométriques fortement ancrés dans l'empirisme et non à des objets algébriques susceptibles de calculs comme cela est le cas avec la notion de limite qui peut notamment s'appliquer à des fonctions et par la suite à une multitude d'autres objets (filtre, topologie, système dirigé, foncteur...).

Deuxièmement, la quadrature de la parabole, le volume du cylindre, celui de la pyramide et celui de la sphère (abordés dans d'autres traités) sont des problèmes considérés par Archimède comme distincts. Au-delà de la méthode d'exhaustion commune, les découpages employés sont suffisamment différents pour laisser penser que les résolutions sont étrangères les unes aux autres et que tout est à refaire pour chaque nouvel objet géométrique à étudier : il utilise par exemple des triangles dans le cas de la parabole et des prismes dans le cas de la pyramide. Il a fallu des siècles pour réaliser que tous ces problèmes peuvent être fédérés par un même modèle, l'intégrale définie dont l'intégrande est une fonction du second degré, qui réalise ainsi une économie de pensée significative. Cette économie significative est bien mise en évidence par Bourbaki qui, s'exprimant à propos de l'œuvre d'Archimède, marque de manière forte l'écart séparant le travail du mathématicien grec et l'instrumentalité du calcul intégral moderne (Bourbaki, 2007, p. 210) :

*« [...] pour qu'on ait le droit de voir là un "calcul intégral", il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de classification des problèmes suivant la nature de "l'intégrale" sous-jacente. Au XVIIe siècle, nous allons le voir, la recherche d'une telle classification devient peu à peu l'un des principaux soucis des géomètres ; si l'on n'en trouve pas trace chez Archimède, n'est-ce pas un signe que de telles spéculations lui seraient apparues comme exagérément "abstraites", et qu'il s'est volontairement, au contraire, en chaque occasion, tenu le plus près possible des propriétés spécifiques de la figure dont il poursuivait l'étude ? Et ne devons-nous pas conclure que cette œuvre admirable, d'où le calcul intégral, de l'aveu de ses créateurs, est tout entier sorti, est en quelque façon à l'opposé du calcul intégral ? »<sup>12</sup>*

### L'économie de pensée en algèbre et en géométrie

Un autre exemple phare mettant en évidence l'économie de pensée à l'œuvre en mathématiques est donné par les interactions entre algèbre et géométrie. Avant Descartes, en écho aux propos de Bourbaki sur l'intégration, chaque problème de géométrie synthétique euclidienne constituait une mise à l'épreuve du talent de la personne qui s'y frottait. L'algébrisation de la géométrie offerte par Descartes au XVIIe siècle a permis de mettre à la portée du plus grand nombre la résolution de tels problèmes géométriques grâce à la géométrie analytique classique. Mais l'histoire ne s'arrête pas là.

L'algébrisation de la géométrie va de pair avec la géométrisation des mathématiques pour constituer une dialectique fondamentale de modélisation réciproque entre algèbre et géométrie (Dunia, 2014). Les propos de Dieudonné (cité dans Lehmann et Bkouche, 1988, p. 489) vont dans ce sens :

*« [...] la linéarisation de la géométrie permet en retour une géométrisation du linéaire et par cela même une géométrisation des divers domaines de la*

<sup>12</sup>C'est nous qui soulignons.

*connaissance où intervient le linéaire. [...] C'est la prise de conscience par les mathématiciens d'un caractère commun à ces divers domaines qui a conduit à l'algèbre linéaire telle que nous la connaissons aujourd'hui, construction unificatrice qui continue l'idéal d'une méthode universelle que l'on retrouve tout au long de l'histoire des mathématiques ; la représentation géométrique de l'algèbre linéaire issue de la représentation linéaire de la géométrie [...] a conduit alors à cette géométrisation universelle, nouveau principe unificateur induisant les transferts d'intuition [...] qui sont autant que la puissance du raisonnement formel, l'un des aspects du développement des mathématiques contemporaines [...] »*

Cette dialectique entre algèbre et géométrie a permis le développement de modèles toujours plus performants : de la géométrie analytique classique au formalisme bipoint en passant par la géométrie vectorielle (Nguyen & Schneider, 2016).

### **Retour sur PISA et la posture du SGPSE**

L'économie de pensée au cœur des mathématiques nous permet de revenir sur la manière dont la modélisation et la résolution de problèmes sont envisagés dans PISA et par le SGPSE. La démarche du mathématicien ne consiste pas à « simplement » résoudre des problèmes « épars », sans liens de parenté, mais à littéralement tuer des classes entières de problèmes, à l'aide de modèles unificateurs, basés sur des savoirs conçus à cet effet, modèles qui sont de nature à faire ressortir les traits communs de ces problèmes permettant ainsi de les *déproblématiser*. Résoudre un problème consiste en bien autre chose que d'en trouver la solution en un sens strict.

Alors, devrait-on renoncer à l'instrumentalité des modèles et savoirs mathématiques dont l'algébrisation de la géométrie, la géométrisation des mathématiques, les modèles fonctionnels et relationnels au motif de permettre l'évaluation « pure » de la compétence « résolution de problèmes » dans sa dimension « transversale », comme prôné par le SGPSE qui s'inscrit dans le sillon de PISA ? Cela nous apparaît absurde et constituer une régression par rapport aux millénaires qui ont été nécessaires pour que les esprits les plus brillants de leur temps développent des modèles et savoirs instrumentaux à vaste portée. La mise en arrière-plan des savoirs, prônée dans PISA, au profit des compétences dites « transversales » et avalisée par le SGPSE en Belgique francophone, ne peut manquer d'interpeller, tant pareil choix semble porteur de contradictions de fond avec l'histoire et l'épistémologie des mathématiques.

Ce contraste fort entre la modélisation abordée à l'aune de l'épistémologie et le point de vue du SGPSE et de PISA nous permet en retour de nous exprimer sur une certaine perception du pouvoir politique concernant les mathématiques et plus généralement de la noosphère qui envisage les mathématiques comme un élément important dans le développement de la citoyenneté, au point d'une certaine forme de réductionnisme qui voudrait les enfermer toutes entières dans le seul moule des mathématiques dites « citoyennes ». La citoyenneté des mathématiques est notamment localisée dans leur capacité supposée à adresser des problèmes « concrets », les défis de demain et à outiller le raisonnement de tout un chacun d'une manière propice au débat démocratique. Si nous pouvons souscrire à l'intention générale de développement de l'esprit humain qui sous-tend l'idée de mathématiques « citoyennes », nous ne pouvons cependant manquer d'être dubitatifs sur la manière dont cette intention est déclinée par le monde politique et la noosphère. D'une part, les défis de demain sont par essence inconnus, au moins dans la forme précise qu'ils revêtiront. Il apparaît dès lors pour le moins hautement spéculatif de prétendre préparer les citoyens et donc les élèves à ces défis futurs. D'autre part, l'authenticité des problèmes considérés est critiquée par plus d'un auteur dont notamment Delord

(2013) et Bart et Daunay (2016). Mais plus fondamentalement encore le « concret » évoqué par le SGPSE semble bien être réduit à des problèmes ancrés dans « la vie de tous les jours » ce qui nous pose une question de fond. Bien entendu nous ne sommes pas opposés à ce que les mathématiques puissent avoir une utilité « concrète » en ce sens. Par contre, la réduction à cette dimension nous semble très problématique car précisément une partie importante des modèles mathématiques est à visée interne aux mathématiques. Les mathématiques se modélisent elles-mêmes ! C'est bien ce dont témoigne la citation de Bourbaki sur les structures mathématiques et la dialectique entre algèbre et géométrie évoquées plus hauts. C'est donc un pan entier des mathématiques qui est ainsi mis au rebus : comme le note Matheron (2012) la dimension intra-mathématique est absente des évaluations PISA. On pourrait se dire qu'il s'agit simplement d'un choix de société qui s'impose face à l'ampleur de l'édifice mathématique : on ne peut pas tout aborder, il faut choisir. Un tel point de vue et surtout ce choix particulier apparaissent cependant insoutenables en référence au positivisme empirique évoqué ci-dessus. Réduire les mathématiques à une forme d'utilitarisme primaire ne peut manquer de favoriser la cristallisation d'obstacles épistémologiques chez les apprenants comme le montrent Job et Schneider (2014). La volonté à tout prix de « concrétiser » en un sens restreint au motif de mise à disposition du plus grand nombre ne s'avère-t-elle pas en définitive l'instrument même de la privation de cette mise à disposition ?

En contrepoint, il nous paraît crucial d'outiller les citoyens intellectuellement notamment au travers d'une formation mathématique, mais d'une manière qui soit cohérente avec l'épistémologie de la discipline et qui ne force pas les mathématiques dans un moule trop étriqué dans lequel elles ne peuvent se glisser sous peine d'en donner une vision tronquée. La dimension intra-mathématique de la modélisation ne peut donc pas être évacuée et les exemples qui suivront montreront comment une telle rencontre peut être envisagée au niveau secondaire. Les « mathématiques citoyennes » peuvent donc s'envisager à différents niveaux qui ne sont pas réductibles les uns aux autres et surtout peuvent être incompatibles entre eux et avec l'épistémologie des mathématiques. Mais encore faut-il avoir interrogé suffisamment en quoi consiste la modélisation mathématique pour en prendre conscience.

Au-delà de la mise à l'écart de la dimension intra-mathématique de la modélisation dans PISA, le manque de questionnement dont nous faisons état transparaît d'emblée dans l'utilisation du terme « compétence ». Envisager la modélisation comme une compétence et donc comme quelque chose dont la finalité serait en définitive d'être évaluée est porteur d'un implicite fort. En réduisant la modélisation à une compétence, on fait l'hypothèse que tout un chacun sait plus ou moins de quoi on parle lorsqu'on prononce le mot « modélisation », la notion étant suffisamment transparente pour se contenter de la décrire de manière plus ou moins sommaire, presque comme une manière de « rafraîchir » la mémoire des enseignants, au-delà de l'aspect normatif dont une telle description peut être porteuse. C'est que la finalité de la mouvance des compétences tient moins, malgré les effets d'annonce, à l'émancipation des êtres humains qu'au formatage de leurs esprits pour leur permettre de se conformer aux « lois » du marché et à l'idéologie capitaliste (Job, Le Hebel et Schneider, sous presse).

### 2.3. Strate 2 : les types de praxéologies I et II

Les modèles mathématiques sont la résultante d'une certaine activité, l'activité de modélisation mathématique. En tant qu'activité humaine, cette activité de modélisation mathématique peut elle-même être modélisée à l'aide de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique du didactique (TAD) initiée par Yves Chevallard (Bosch & Chevallard, 1999). En effet, la TAD postule que toute activité humaine (dont l'activité mathématique et spécifiquement l'activité de modélisation mathématique) peut être modélisée par une praxéologie. Une praxéologie est un

quadruplet composé d'une tâche, d'une technique, d'une technologie et d'une théorie. Pour parler simplement, la tâche indique « quoi faire », la technique « comment le faire » et la technologie et la théorie s'attachent à légitimer l'adéquation de la technique à réaliser la tâche, la théorie étant un niveau supérieur de justification par rapport à la technologie. Nous renvoyons le lecteur à Bosch et Chevallard (1999) et Schneider (2011) pour plus de détails sur la notion de praxéologie, dont la distinction entre technologie et théorie, en nous tenant, dans ce texte, aux éléments indispensables de cette notion pour développer notre propos. En nous inspirant de Schneider (2008, 2011), distinguons à présent deux types de praxéologies, le type I et le type II. Chacun de ces types de praxéologies capture une certaine facette de l'activité de modélisation mathématique.

### Les praxéologies de type I

Une praxéologie de type I est un type de praxéologie dans laquelle la tâche consiste à déterminer des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991, p. 91), c'est-à-dire un objet qui

*« n'est pas construit mais présenté, par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; l'objet est installé, par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion. »*

Au sein du *calculus*, par exemple, il s'agira de déterminer des objets préconstruits tels que des aires, des volumes, des vitesses variables, des tangentes en un point d'une courbe. Par *calculus*, nous désignons la période du calcul différentiel et intégral qui précède la genèse de l'analyse moderne initiée par Cauchy et fondée sur la notion de limite *algébrisée*, c'est-à-dire exprimée en  $\varepsilon$ - $\delta$ . Nous renvoyons à Job (2011) pour plus de détails sur la légitimité de cette distinction. Dans cette période *calculus*, les techniques employées sont notamment le calcul des limites *sous forme embryonnaire* (qui n'a donc pas encore été exprimé en  $\varepsilon$ - $\delta$ ), ou encore, le calcul plus performant des dérivées et des primitives. Dans cette période *calculus*, les objets cités plus hauts sont bien préconstruits au sens où leur existence n'est pas questionnée, parce que cette existence est considérée comme évidente. Les préconstruits peuvent faire l'objet de définitions mais leur existence n'est pas subordonnée à ces définitions, comme c'est souvent le cas dans les mathématiques contemporaines.

Le calcul des limites sous forme embryonnaire consiste à supprimer des termes, sans jeu de compensation dans une expression, pour déterminer l'objet considéré. Par exemple, si on s'intéresse à ce que pourrait être la tangente de la fonction  $f(x)=x^2$  en  $x=0$ , le calcul des limites embryonnaire consiste à supprimer  $h$  dans l'expression initiale ci-dessous et à évaluer l'expression résultante en  $x=0$ , sans se soucier de la légitimité *déductive* d'une telle technique et des égalités qui y interviennent :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

Entre la dernière expression et les autres, on a donc procédé à la suppression du terme  $h$  au dénominateur, sans jeu de compensation. Nous renvoyons le lecteur à Schneider (1992) pour un exposé détaillé de cette technique et une analyse de la manière dont elle est mise en jeu dans la détermination d'un taux de variation instantanée.

Les techniques employées pour déterminer ces objets (aires, volumes...) sont cependant justifiées, mais par des arguments qu'on peut qualifier de pragmatiques au sens suivant. Une technique est justifiée lorsqu'elle donne des résultats en accord avec les résultats obtenus à l'aide d'autres techniques, que ces autres techniques soient de nature ou non mathématique, appartiennent ou non au même domaine mathématique. Les calculs de limite donnent par exemple des résultats en accord avec ceux obtenus par la méthode d'exhaustion ou des arguments cinématiques. Dans ce type de praxéologie la validation d'une technique peut donc se faire autrement que de manière déductive. Ce type de validation a été omniprésent à travers l'histoire des mathématiques, notamment pendant toute la période de constitution du *calculus*, avant l'avènement de l'analyse et semble incontournable à ce niveau praxéologique, car il engage des objets préconstruits qui justement n'ont pas encore fait l'objet de définitions qui permettent de les manipuler de manière strictement déductive. Au niveau du secondaire, les travaux du Ladimath (Job & Schneider, 2014) montrent que ce type de praxéologies constitue une alternative à la dichotomie devenue classique en didactique qui consiste pour un enseignant à se replier derrière des pratiques ostensives conscientes ou non (Salin, 1999) face à la difficulté de faire vivre une activité mathématique strictement déductive. Lorsque de telles praxéologies ont suffisamment mûri, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive. Les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées... ce qui nous conduit aux praxéologies de type II.

### Les praxéologies de type II

Dans une praxéologie de type II, le type de tâches consiste à concevoir une architecture déductive (Patras, 2001) qui constitue un modèle d'une portion plus ou moins grande des mathématiques ou d'un domaine extra-mathématique, qu'il appartienne au monde sensible ou à d'autres disciplines (physique, biologie, économie, linguistique...). Cette activité de modélisation peut donc être à visée intra-mathématique ou extra-mathématique. La constitution de telles architectures deductives constitue un aspect central de l'activité de modélisation mathématique contemporaine. Chaque architecture résultant d'une telle activité et ses différents composants sont autant de modèles mathématiques : les définitions des notions impliquées sont des modèles, les théorèmes de l'architecture sont également des modèles, l'ordonnement particulier des théorèmes constitue également un choix particulier d'agencement et donc un modèle.

La conception d'une architecture peut prendre des formes diverses, selon son caractère plus ou moins local/global et selon que cette architecture doit être créée de toutes pièces ou constitue une refonte plus ou moins importante d'une architecture préalable. Il peut notamment s'agir de définir des objets qui étaient jusqu'alors préconstruits, au sens évoqué ci-dessus dans les praxéologies de type I, afin d'en contrôler les propriétés et l'utilisation par le seul raisonnement déductif. Les concepts de l'analyse, en tant qu'entreprise de refonte déductive du *calculus*, si l'on considère, à l'instar de nombre d'historiens (Dugac, 2003), Cauchy comme un des pères fondateurs de l'analyse, constituent des exemples caractéristiques : les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées.

Mais il peut également s'agir de démontrer un théorème ou d'en simplifier la démonstration. Ces différentes formes ne sont évidemment pas mutuellement exclusives et interagissent le plus souvent les unes avec les autres. La simplification ou la démonstration d'un théorème peut par exemple demander de définir « déductivement » (par opposition à « descriptivement » comme c'est souvent le cas avec les objets « préconstruits ») de nouvelles notions, en même temps que la reformulation de l'énoncé du théorème. Une technique possible pour accomplir une telle tâche est la dialectique des (tentatives de) preuves et réfutation mise en évidence par Lakatos (1984). Toujours en analyse, un exemple typique de ce type de dialectique est donné par les différentes

définitions de la notion de limite qui constituent autant de modèles différents. Ainsi par exemple, si l'on s'en tient au seul contexte de l'analyse réelle à une variable, deux définitions/modèles de la notion de limite existent : la définition dite pointée et la définition dite époincée (Douady, 1996). À un niveau d'abstraction plus élevé, on trouve également dans ce type de tâches des praxéologies de type II, la constitution d'une axiomatique aussi simple et instrumentale que possible (non redondante), quitte à creuser l'écart avec une possible mise en correspondance avec le monde sensible.

Nous avons évoqué la dialectique des preuves et réfutations comme technique possible pour accomplir le type de tâches caractéristique des praxéologies de type II. Cette technique n'est évidemment pas algorithmique en un sens strict et de manière générale il n'y a pas de technique « canonique » pour accomplir ce type de tâches, la raison étant que le type de praxéologies considéré ici constitue un modèle (avec les praxéologies de type I) de l'activité de modélisation mathématique et non simplement une « description » d'une théorie mathématique déjà constituée/ canalisée. Cela est également valable pour les praxéologies de type I.

Dans tout ce qui précède la dimension d'économie de pensée est omniprésente à tous les niveaux. Définir la notion de limite peut s'envisager comme volonté d'exercer une certaine économie de pensée. Au lieu de prouver séparément les propriétés des fonctions dérivables et continues, on peut mettre en évidence, grâce à la notion de limite, des traits communs à ces deux notions, ce qui autorise l'étude des propriétés « abstraites » des limites pour ensuite les transférer automatiquement aux concepts qui leur sont subordonnés, évitant ainsi de devoir recommencer à chaque fois des travaux similaires.

### 3. L'exemple de la modélisation fonctionnelle source de nombreux apprentissages

Nous avons souligné plus haut les limites de la notion de compétence « transversale » lorsque la transversalité est envisagée de manière trop « désincarnée ». Il nous apparaît cependant que la notion de transversalité et la question du transfert sous-jacente gagnerait à être considérée dans le cadre d'un entraînement à brasser des classes de problèmes toujours plus vastes et à développer les moyens pour les élèves d'identifier à quelle classe appartient une instance donnée et la ou les techniques associées permettant de la résoudre de manière efficace (Schneider, 2006a). La modélisation fonctionnelle est susceptible de fournir un cadre, couvrant l'enseignement secondaire et au-delà (Job Krysinska & Schneider, 2023), pour la constitution de ces classes de problèmes. Les classes de problèmes sont constituées à partir de classes de fonctions paramétrées qui en constituent autant de modèles. Cette modélisation fonctionnelle est également susceptible de servir de véhicule à l'enseignement de l'algèbre qui apparaît alors comme émergeant de pratiques de modélisation. Cette idée est proche du point de vue adopté par Bolea, Bosch et Gascon (2001) pour qui l'algèbre est une organisation mathématique au service des autres.

Plus généralement la modélisation (fonctionnelle ou non) offre une série d'opportunités dans les directions suivantes qui seront développées plus bas. Une première opportunité est de travailler et faire prendre conscience de la dimension intra-mathématique des savoirs/modèles mathématiques et de la modélisation. Comme souligné précédemment, la modélisation intra-mathématique constitue le parent pauvre de la modélisation dans l'enseignement secondaire en Belgique francophone. En effet, le focus est souvent réduit à la dimension extra-mathématique en partie sous l'impulsion d'une vision étriquée de ce que peuvent être des mathématiques « citoyennes ». Mais il y a aussi le manque de formation des enseignants qui envisagent difficilement la dimension intra-mathématique autrement que par l'entremise d'une théorie déductive déjà constituée, ce qui nous renvoie à la justification de la découpe effectuée entre

praxéologie de type I et de type II. Une seconde opportunité est de travailler la dimension intramathématique par l'exercice de la dialectique de modélisation réciproque entre algèbre et géométrie (Lebeau & Schneider, 2009 ; Dunia, 2014). Une troisième opportunité est de confronter le rapport positiviste empirique dont nous avons souligné qu'il constitue un obstacle épistémologique majeur amenant les élèves à articuler les dimensions intra et extramathématiques (voir les exemples ci-dessous).

Proposons une vue panoramique (et donc nécessairement allusive) d'un parcours, découpé pour les besoins de l'exposé en épisodes, qui couvre les 6 années du secondaire en Belgique Francophone, de 12 à 18 ans et prend appui sur la modélisation fonctionnelle.

### 3.1. Épisode 1 : les suites arithmétiques et géométriques

Dès la 1<sup>re</sup> année du secondaire, entre 12 et 13 ans, l'étude de suites figurées permet de faire émerger les premiers modèles fonctionnels au travers d'une série de questions (Krynska & Schneider, 2010). Il s'agit de demander le nombre d'objets à une étape éloignée, le nombre d'objets à n'importe quelle étape, le numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets.

Interroger les élèves sur le nombre d'objets à une étape éloignée et non à une étape proche les pousse à réfléchir au mécanisme d'engendrement des figures. Ils ne peuvent se contenter de compter le nombre d'objets à l'étape donnée en considérant le schéma qui leur est initialement fourni ou en continuant simplement à dessiner de nouvelles figures. Par exemple, si on demande à un élève le nombre d'allumettes à la troisième étape de la figure 1, il est simple de compter les allumettes en les pointant du doigt et en récitant la comptine des naturels apprise par cœur. Il y a 1, 2, 3 ... 13 allumettes. Cette technique « du doigt » (qui peut être mentale par ailleurs) peut encore s'envisager à l'étape 6, par exemple, même si elle devient vite assez fastidieuse et peut conduire à des erreurs : l'élève peut oublier de compter une allumette ou la compter plusieurs fois. Par contre, elle n'est plus envisageable si on demande le nombre d'allumettes à l'étape 42 : simplement dessiner les maisons jusqu'à l'étape 42 prend un temps considérable.

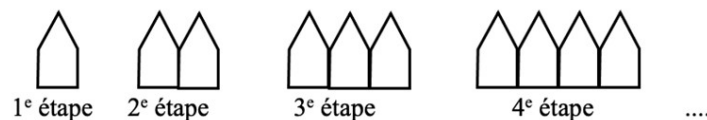


Figure 1 : Exemple de suite figurée.

Une autre technique plus performante demande à être développée. Le développement de cette nouvelle technique passe par l'identification d'un invariant, valable d'une étape à la suivante. Il ne s'agit évidemment pas d'exposer aux élèves une théorie formelle des invariants mais de sortir de l'impasse d'un comptage qui devrait pour chaque étape être intégralement renouvelé. Au lieu de cela, l'idée est de se demander à chaque nouvelle étape combien d'allumettes ont été ajoutées. La régularité est facilement observable à l'aide d'un tableau numérique.

Numéro d'étape	1	2	3	4	5	...
Nombre d'allumettes	5	9	13	17	21	...

Figure 2 : Représentation du nombre d'allumettes en fonction du nombre d'étapes.

En cela, une telle manière de penser préfigure l'idée générale de variation qui est à la base de la notion de dérivée et de différence finie. À nouveau, l'objectif n'est pas de développer avec des élèves de cet âge la théorie des dérivées et des différences finies mais de les faire travailler une certaine idée commune à ces théories et surtout pour l'enseignant d'en prendre conscience et de

pouvoir ainsi, lors des moments d'institutionnalisation, mettre une certaine emphase sur le chemin de pensée qui a permis l'émergence de la nouvelle technique.

Cette nouvelle technique constitue bien évidemment, en lien avec notre cadre théorique, une économie de pensée par rapport à la précédente. Les deux techniques ne sont cependant pas disjointes et la seconde peut notamment s'envisager comme tentative de rationaliser la première et d'éviter les erreurs de comptage en développant une manière plus systématique et consciencisée de compter. Les élèves sont donc invités à travailler dans un esprit dialectique et la technique initiale constitue ainsi un objet du milieu au sens de la TSD (Brousseau, 1998).

À ce niveau éducatif, les élèves n'ont pas encore été mis au contact de l'algèbre et ne sont guère familiers avec l'usage des lettres. Cependant, la question de déterminer le nombre d'objets à n'importe quelle étape constitue une invitation à prendre un pas de côté sur la nouvelle technique et l'exprimer, non pas seulement en acte, mais sous forme discursive. Il ne s'agit plus d'appliquer la technique mais d'expliquer, pour une étape donnée, le calcul qu'il faudrait effectuer pour obtenir la réponse attendue. En ce sens, l'ingénierie relatée ici est proche de la perspective des programmes de calcul initiée par Chevallard (1989a, 1989b, 1990). Nous renvoyons donc le lecteur au texte de Auroy et al. « La modélisation algébrique. Rendre les élèves producteurs de modélisations algébriques au sein du programme du cycle 4 », dans ces mêmes actes, qui travaille dans une perspective qui nous semble complémentaire et proche de la nôtre.

Dans ce contexte, les élèves proposent donc un modèle de leur technique sous une forme qu'on pourrait qualifier de pré-algébrique. Si la variation constante est facile à identifier à l'aide d'un tableau numérique, les suites sont cependant choisies pour permettre différentes modélisations, selon que le focus de l'élève soit polarisé sur les allumettes ou les maisons. Les trois modèles suivants peuvent ainsi émerger.

Un premier modèle peut être qualifié d'itératif et se polarise directement sur les allumettes. C'est le modèle directement inspiré du tableau numérique. On identifie que d'une étape à l'autre on ajoute toujours quatre allumettes. Ainsi, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'allumettes ajoutées est un multiple de quatre. À la première étape, il y a cinq allumettes. Aux suivantes, il faut ajouter quatre allumettes, autant de fois qu'il y a d'étapes, moins une. Le programme de calcul associé est donc «  $5+4 \cdot (\text{numéro d'étape}-1)$  ».

Un second modèle résulte d'une approche fonctionnelle centrée sur les maisons. C'est le comptage du nombre de maisons qui permet de déduire le nombre d'allumettes. À ceci près que toutes les maisons sont construites avec quatre allumettes, sauf la première qui en comporte cinq. Le programme de calcul associé est donc «  $1+4 \cdot \text{numéro d'étape}$  ».

Un troisième modèle résulte également d'une approche fonctionnelle centrée sur les maisons. On observe que le nombre de maisons correspond au nombre d'étapes et que chaque maison utilise cinq allumettes : on multiplie donc le nombre d'étapes par cinq. Mais comme deux maisons contiguës possèdent une allumette commune qui est donc comptée deux fois, on doit la retirer autant de fois qu'il y a de passages d'une maison à l'autre c'est-à-dire le nombre d'étape moins une. Le programme de calcul associé est donc «  $5 \cdot \text{numéro d'étape} - (\text{numéro d'étape}-1)$  ».

On rencontre parfois dans les classes des enseignants mis à mal par les réponses proposées par les élèves aux questions posées et les raisonnements qui y ont conduit, lorsque ces raisonnements divergent trop par rapport à la réponse préétablie attendue. Ici c'est « tout le contraire » dans la mesure où la multiplicité des modèles possibles constitue également un objet du milieu qui permet de questionner les modèles dans différentes directions.

Une première direction est celle de l'équivalence et par suite de la correction des modèles. En effet, à une étape donnée il ne peut y avoir qu'un nombre donné d'allumettes. La question est donc posée de déterminer si les différents modèles conduisent bien à un même nombre. Cette multiplicité constitue donc également une stratégie (par la bande) qui pousse les élèves à s'emparer de la question de la correction des modèles établis. Si un seul modèle avait été établi, l'incitation est nettement moindre pour les élèves de s'intéresser à cette question de la correction, au-delà de l'effet de contrat, car l'unicité en acte dans les productions des élèves agit comme une sorte de blanc-seing et d'auto-validation du modèle : c'est le seul qui émerge chez tout le monde, ce doit donc être le bon, il n'est pas nécessaire de le questionner plus avant. Ici, bien au contraire, la multiplicité ne permet pas d'éluder la question de la validation. A minima, la question est posée de l'équivalence des modèles. Fournissent-ils le même nombre d'allumettes à toutes les étapes ? Dans la négative, quels sont les modèles à écarter, et sur quelle base ? Dans l'affirmative, la concordance des modèles au travers de leur multiplicité constitue un élément de validation de leur correction qui s'inscrit dans les praxéologies de type I introduites plus haut, soit des praxéologies dont les justifications sont de nature pragmatique et pas strictement déductives.

Cette dimension pragmatique s'exprime également dans la possibilité de questionner l'équivalence des modèles de différentes manières. La variété des arguments employés pour justifier un modèle est également typique de l'aspect pragmatique où une forme de raisonnement n'est pas prédominante par rapport aux autres au point de les écraser, voire de les exclure. Comme exprimé précédemment, ce foisonnement justificatif est lié à la nature des objets traités qui sont, pour une partie, préconstruits, comme c'est le cas ici des maisons et des allumettes. Ces maisons et ces allumettes existent pour les élèves, non pas en tant qu'entités abstraites, comme cela pourrait être le cas en topologie algébrique, avec la notion de simplexe, mais par le simple fait de leur matérialité scripturale : le non-ostensif est pour ainsi dire identifié à l'ostensif (Bosch & Chevallard, 1999).

C'est donc l'observation, par les sens, qui permet en premier lieu la validation. Les modèles dénotent des objets géométriques (allumettes et maisons) et les élèves constatent que les modèles sont équivalents, car ils correspondent « simplement » à des découpages différents de ces objets. On pourrait dire que ces modèles sont équivalents du point de vue de la dénotation « géométrique ».

La question de l'équivalence peut aussi être traitée dans le registre numérique en considérant les modèles comme autant de « programmes de calcul ». Les élèves peuvent dresser un tableau, comme sur la figure 3, et vérifier pour suffisamment de numéros d'étapes que les différents programmes de calcul donnent bien les mêmes résultats.

Numéro d'étape	$5+4 \cdot (\text{numéro d'étape}-1)$	$1+4 \cdot \text{numéro d'étape}$	$5 \cdot \text{numéro d'étape} - (\text{numéro d'étape}-1)$
1	$5+4 \cdot 0=5$	$1+4 \cdot 1=5$	$5 \cdot 1 - (1-1)=5$
2	$5+4 \cdot 1=9$	$1+4 \cdot 2=9$	$5 \cdot 2 - (2-1)=9$
3	$5+4 \cdot 2=13$	$1+4 \cdot 3=13$	$5 \cdot 3 - (3-1)=13$
4	$5+4 \cdot 3=17$	$1+4 \cdot 4=17$	$5 \cdot 4 - (4-1)=17$

Figure 3 : Équivalence numérique des programmes de calcul.

Dans cette manière de procéder, les élèves sont, à l'image de la validation précédente, encore dans une forme d'« empirisme numérique ». Cette manière de procéder serait mise en question, dans le cadre d'une théorie mathématique déjà constituée de manière strictement déductive, mais nous ne sommes pas encore à ce stade de développement et c'est donc le croisement et la concordance de ces différents niveaux de rationalité (Rouy, 2007), ici géométrique et numérique, qui emportent l'adhésion et valident les modèles établis par les élèves.

La question de déterminer le numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets ouvre de nouvelles perspectives et permet d'approfondir l'étude des modèles en continuant à faire évoluer la nature du travail des élèves vers des aspects plus deductifs et algébriques. Les trois modèles n'ont pas la même instrumentalité pour déterminer par exemple à quelle étape on obtient 165 allumettes. De fait le second modèle «  $1+4 \cdot \text{numéro d'étape}$  » se prête plus facilement à un « calcul à l'envers » que les deux autres. Dans la foulée, il devient légitime d'introduire une lettre pour simplifier les écritures et encore augmenter l'instrumentalité des modèles. Au lieu de noter à chaque fois « numéro d'étape », on peut se contenter d'utiliser une seule lettre, par exemple «  $n$  ». Les élèves ne proposent pas tous les mêmes lettres et c'est l'occasion de s'interroger sur l'équivalence de modèles qui différeraient par la lettre employée, comme par exemple  $1+4 \cdot n$ ,  $1+4 \cdot a$ ,  $1+4 \cdot x$ . Parallèlement, l'équivalence entre les trois modèles conduit à adopter les premières règles de calcul sur les modèles. En croisant les différents niveaux de rationalité à disposition (géométrique et numérique), les règles algébriques non « conformes » peuvent être falsifiées et le contexte du problème rend plausibles et/ou intelligibles les autres. Par exemple, une règle de distributivité comme  $4(n-1)=4n-4$  doit être acceptée si on veut conserver l'équivalence des modèles  $5+4(n-1)$  et  $1+4n$ . Par ailleurs cette règle de distributivité rend compte de propriétés du calcul des grandeurs ce qui renforce sa crédibilité. De manière similaire, on peut ainsi introduire la règle du changement de signe à l'ouverture de la parenthèse précédée du signe moins et la règle du regroupement des termes semblables.

Par rapport à notre cadre théorique, ce travail sur l'établissement et la validation de règles algébriques peut à nouveau se situer dans le contexte d'une praxéologie de type I et du niveau de validation pragmatique. C'est la concordance entre différents niveaux de rationalité qui emporte l'adhésion et guide la constitution initiale d'un nouveau niveau de modélisation, soit la constitution d'un modèle explicitant les manipulations licites et illicites sur les trois modèles initiaux et plus largement sur les programmes de calcul. C'est à l'occasion de cette étude que les élèves effectuent une première incursion dans l'algèbre et plus seulement dans le pré-algébrique.

Soulignons à nouveau que le niveau de rationalité pragmatique, même s'il ne correspond pas au niveau de rationalité deductif des mathématiques déjà canonisées n'en est pas moins légitime comme relevé au moment d'introduire les praxéologies de type I. Cette légitimité est d'ordre institutionnel et offre une opportunité de sortir de la dualité/complémentarité entre enseignement « formel » et pratiques ostensives. Mais elle est également historique et épistémologique. Pour paraphraser l'épistémologue Lakatos, les mathématiques ne sont pas tombées du ciel, déjà axiomatisées. Il a fallu construire ces axiomes et cette entreprise initiale de constitution ne s'est pas jouée dans le seul registre deductif. Différents niveaux de rationalité ont été engagés pour en venir à extraire la substance deductive. N'est-ce pas cette idée qui est mise en avant par Lakatos (1984) et la notion de discours heuristique ?

Revenons à notre ingénierie. Le déroulement ne reste pas « figé » au niveau des praxéologies de type I. Bien au contraire, les praxéologies de type II font leur apparition car les règles initialement adoptées pour des raisons pragmatiques deviennent peu à peu le niveau de rationalité privilégié permettant de transformer un modèle en un autre équivalent afin de proposer une mise en forme facilitant la réponse aux questions posées. C'est ainsi que les élèves

sont conduits à résoudre leur premières (in)équations et à rédiger leurs premières démonstrations algébriques en faisant usage d'identités. L'instrumentalité des règles algébriques donne la pleine mesure de sa puissance et le recours aux autres niveaux de rationalité, bien que toujours possible, perd de sa prégnance initiale.

Les élèves sont également mis au contact des fonctions lors du traitement des questions posées. Dans le langage fonctionnel, ces questions consistent à calculer l'image par une fonction d'un point et à calculer l'image réciproque d'un nombre par une fonction. Cette rencontre avec les fonctions est intéressante à souligner à plusieurs titres. Pour commencer, en Belgique francophone, dans les programmes, la première rencontre est prévue en 3<sup>e</sup> année du secondaire soit vers 14-15 ans. Cela indique qu'un travail sur les fonctions est possible bien avant ce qui est prévu par le cadre légal. Il ne s'agit pas ici d'inciter à sortir des clous par provocation mais de montrer la (grande) relativité des choix qui ont été posés dans la constitution des programmes, choix qui tendent avec le temps à se fossiliser en dogme, en l'occurrence l'idée que la notion de fonction est trop sophistiquée pour pouvoir être abordée avant la 3<sup>e</sup> année. Les phénomènes de fossilisation ne sont pas d'ordre « folklorique » et peuvent impacter de manière significative la manière d'envisager et de structurer les *curricula*.

Ensuite, il est tout à fait remarquable de constater que le calcul de l'image réciproque d'une fonction dans le contexte considéré ici ne soulève pas de difficulté majeure chez les élèves alors que, dans le même temps, la notion de réciproque introduite en 6<sup>e</sup> vers 17-18 ans met à mal plus d'un élève et plus d'un enseignant. Comment comprendre cette disparité ? Une hypothèse est la suivante. L'incapacité de la noosphère à distinguer entre la théorie des fonctions « à la Bourbaki » qui repose sur la théorie des ensembles et la notion de fonction qui n'a pas encore été formalisée de la sorte conduit si l'on veut à mettre la charrue avant les bœufs. Pour plus d'un enseignant, il apparaît difficilement envisageable de faire travailler la notion de fonction avant que les résidus de terminologie bourbakiste n'aient été présentés aux élèves (domaine, image...). Ce faisant la tendance en Belgique francophone est de passer un temps considérable (pour ne pas dire exclusif) à introduire cette terminologie et à proposer des exercices qui tournent à vide, en oubliant le fait qu'avant d'être une théorie, les fonctions constituent un mode de pensée et un outil pour résoudre des problèmes. Ici c'est la mise en correspondance et l'explicitation, sous forme algébrique, d'un lien entre un numéro d'étape et un nombre d'arêtes qui permet de trivialisier la réponse aux questions posées initialement. Cette mise en correspondance ne nécessite pas un apprentissage préalable de la théorie ensembliste des fonctions. Les problèmes rencontrés en 6<sup>e</sup> année concernant les réciproques de fonctions nous semblent donc plus imputables à une insistance et une incapacité à envisager cette notion en dehors du formalisme déjà constitué qu'à l'idée même de réciproque, car des élèves de 1<sup>re</sup> année sont parfaitement en capacité de s'emparer de ce type de question. On pourrait donc soutenir l'idée que nous sommes ici face à un obstacle didactique (Brousseau, 1998) lié à l'épistémologie « formaliste » des enseignants. Cette épistémologie est tout à fait paradoxale car elle propose un enseignement des fonctions où celles-ci sont des modèles de pas grand-chose et sont réduites à de la terminologie. Dans cette ingénierie, le travail sur les fonctions n'est pas superficiel. Il ne se réduit pas à « calculer quelques réciproques ». Le projet est plus ambitieux et s'inscrit pleinement dans une démarche de modélisation en marquant à nouveau une distance par rapport à ce qui se pratique classiquement en Belgique francophone concernant l'enseignement des fonctions.

Les élèves sont mis au contact de nouvelles suites d'objets avec les mêmes questions comme illustré à la figure 4.

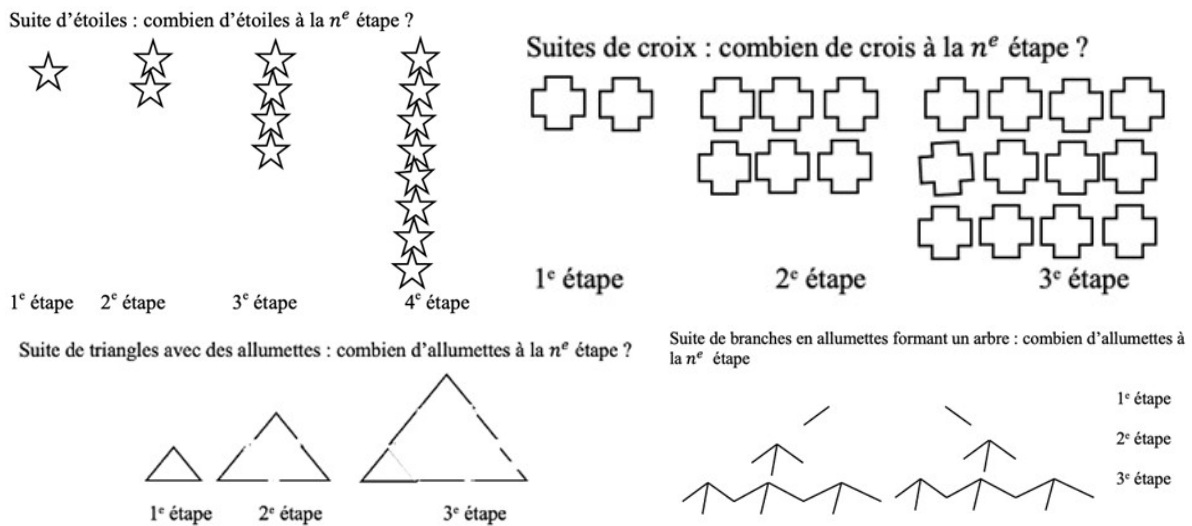


Figure 4 : De nouvelles suites figurées.

Ils ont donc l'opportunité de travailler les raisonnements et techniques employés précédemment mais surtout, ils se voient offrir l'opportunité de mettre en évidence des liens de parenté entre les différentes suites au travers du modèle algébrique.

La suite des étoiles peut être modélisée par  $2^{(n-1)}$ , celle des croix par  $(n+1)n$ , celle des triangles par  $3n$ , celle des branches par  $2.3^{(n-1)}$ . Ainsi la suite des maisons et des triangles ont en commun d'être construites à l'aide d'une addition répétée ; et la suite des étoiles et des branches d'être construites à partir d'une multiplication répétée. La suite des croix constitue à ce stade un isolat qui indique « simplement » (mais c'est important) que d'autres types de suites sont envisageables que celles engendrées par addition ou multiplication répétées. Une suite figurée n'est pas nécessairement une suite arithmétique ou géométrique.

Les modèles  $2^{(n-1)}$  et  $2.3^{(n-1)}$  jouissent d'une particularité intéressante. Ces modèles ne posent pas problème pour les valeurs naturelles plus grandes ou égales à deux. Mais que se passe-t-il lorsque  $n=1$  ? Les expressions se réduisent respectivement à  $2^0$  et  $2.3^0$  et font apparaître un exposant nul, ce qui à ce stade n'a pas de sens pour les élèves. Si cela en avait et pour qu'elles aient une utilité, ces expressions devraient valoir respectivement 1 et 2 pour que les modèles proposés soient également valables à l'étape 1. Dans l'esprit pragmatique adopté précédemment, il n'est pas choquant d'attribuer un sens à la puissance zéro de sorte que  $2^0=1=3^0$ . Cela permet d'augmenter la portée des modèles et évite de devoir considérer deux cas distincts, lorsque  $n=1$  et  $n \geq 2$ . Ce choix est d'autant moins arbitraire, si on continue à raisonner de manière pragmatique, toujours à l'image de ce qui a précédé. Pour la suite des branches, un autre modèle était envisageable. Il s'agit de  $\frac{2}{3}.3^n$ . Comme le nombre de branches à une étape donnée est

unique, les deux modèles ne peuvent être équivalents que lorsque  $\frac{2}{3}.3^n=2.3^{n-1}$ . On en déduit que

nécessairement  $3^0=\frac{3^1}{3}=\frac{3}{3}=1$  ce qui constitue un autre argument en faveur de  $3^0=1$ . Ce

raisonnement peut encore être complété par l'argument suivant. Si ajouter une unité à un exposant induit une multiplication de plus par 3, retirer une unité à un exposant induit une division par 3. Donc, comme  $3^0=3^{1-1}$ , pour obtenir  $3^0$ , il faut partir de  $3^1=3$  et diviser par 3 ce qui donne 1. On peut évidemment compléter de manière similaire la justification de  $2^0=1$  et plus généralement de  $c^0=1$ . Ce type de raisonnement préfigure ce qui sera systématisé dans la suite du parcours pour étendre la portée des suites géométriques à des ensembles de nombres plus

vastes. Travailler cette manière d'étendre la portée du symbolisme algébrique avec les élèves nous semble fondamental pour plusieurs raisons. Cela offre une opportunité de casser l'idée que les notations mathématiques sont des conventions arbitraires. Cela met ensuite les élèves en contact avec la modélisation intra-mathématique. Le sens des notations n'est pas choisi en référence au monde sensible mais en référence à la logique interne des modèles travaillés et constitue à ce titre une possibilité (à petite échelle) de mettre en question l'ubiquité du positivisme empirique critiqué plus haut.

Les traits communs à ces suites peuvent être exprimés au niveau de l'algèbre en introduisant un nouveau type de lettre, le paramètre. Les suites des maisons et des triangles peuvent toutes s'écrire sous la forme  $an+b$  et celles des étoiles et des branches sous la forme  $c \cdot d^{(n-1)}$ . Les modèles paramétrés constituent si l'on veut une nouvelle couche de modélisation, des modèles de modèles. Dans le premier modèle (de modèles),  $an+b$ ,  $b$  est un paramètre qui désigne le nombre d'objets initial et  $a$  est un paramètre qui désigne le nombre d'objets qu'on ajoute à chaque étape. Dans le second modèle (de modèles),  $c \cdot d^{(n-1)}$ ,  $c$  est un paramètre qui désigne le nombre d'objets initial et  $d$  est un paramètre qui désigne le nombre par lequel on multiplie à chaque étape pour obtenir le nouveau nombre d'objets.

Ces modèles (de modèles) ouvrent la porte à une nouvelle manière d'aborder les problèmes de suites figurées. C'est cette manière de procéder qui a été mise à contribution précédemment pour résoudre l'item des pommiers extrait de PISA. Au lieu de devoir à chaque fois partir de zéro face à une nouvelle suite figurée, les élèves peuvent tenter de déterminer si la suite donnée met en évidence une addition ou une multiplication répétée. Dans l'affirmative, les modèles  $an+b$  et  $c \cdot d^{(n-1)}$  peuvent être mis à contribution et faire gagner un temps précieux. On voit avec le parcours présenté jusqu'à présent l'économie de pensée à l'œuvre à différents niveaux et notamment dans la constitution de modèles (de modèles) toujours plus performants, jusqu'à culminer avec les modèles fonctionnels paramétrés. Ces modèles unificateurs permettent de réaliser une économie de pensée substantielle. Les connaissances obtenues à partir du travail sur un modèle paramétré sont valables pour toutes les instances où il s'applique. On résout ainsi d'un seul coup, non pas un seul problème, mais plusieurs, en l'occurrence une infinité. Le paramétrage apparaît alors comme une marge de liberté qui permet de tenir compte des spécificités du problème traité. Il est intéressant de relever à nouveau que, dans les programmes de la Belgique francophone, les suites arithmétiques et géométriques sont abordées en 5<sup>e</sup> vers 15-16 ans. Les travaux de Krysinska et al. (2009) constituent une mise en perspective intéressante de plus concernant les capacités « précoces » des élèves par rapport au prescrit légal.

À nos yeux, ce qui précède justifie de vouloir remplacer la manière usuelle d'étudier les fonctions au secondaire, « une par une », par celle de classes de fonctions paramétrées envisagées comme modélisations instrumentales des caractéristiques communes à des familles de problèmes. Voilà qui tranche nettement avec la vision des fonctions considérées comme « langage universel » mais dont les élèves n'ont pas forcément la conscience de quoi ce langage parle. Modélisation et « résolution de problèmes » sont des activités fortement connectées. L'activité de modélisation vise à produire des modèles instrumentaux dans la résolution de problèmes. La validation des modèles peut se faire selon des niveaux de rationalité différents (pragmatique avec les praxéologies de type I et déductif avec les praxéologies de type II) mais articulés ou typiquement, les praxéologies de type II succèdent aux praxéologies de type I lorsque ces dernières sont arrivées à un stade de maturité suffisant, tout en précisant que le recours au niveau de rationalité pragmatique reste toujours possible, quand bien même c'est le déductif qui tend à dominer, au-delà d'un certain stade de développement. Insistons donc sur le fait qu'il semble bel et bien réducteur pour ne pas dire incongru d'envisager ces activités comme des « compétences à évaluer ». Évidemment, on peut vouloir mettre en place des évaluations mais

qu'est-ce que les mathématiques ont en définitive à voir avec une terminologie et des notions (compétence, compétence transversale...) dont la fonction principale semble plus relever de la mise en place d'un contrôle bureaucratique et normatif des pratiques enseignantes que d'une volonté d'élever l'esprit humain (Job & al., sous presse) ?

Le choix des suites arithmétiques et géométriques pour débiter le parcours n'est pas anodin. Ce choix conduit en effet aux fonctions du 1<sup>er</sup> degré et exponentielles par « densification » des tableaux numériques employés dans les phases exploratoires. Cette « densification » se fait via une dialectique entre numérique et algébrique. Expliquons-nous sur la signification de cette « densification » et de cette dialectique.

### 3.2. Épisode 2 : les fonctions du premier degré

L'extension à tous les points d'une même droite d'une même relation  $y=ax+b$  ou le regroupement de toutes les droites du plan en un seul et même ostensif  $ax+by+c=0$  contraint les règles de calcul sur les relatifs. Ici, c'est l'algébrique qui commande au numérique puisqu'il s'agit de prolonger un même modèle algébrique des naturels aux relatifs en définissant en conséquence l'extension des opérations. Voici les lignes principales d'une telle extension.

#### Première extension

À partir de la droite de la figure 5, on peut construire le tableau numérique de la figure 6 pour les valeurs de  $x$  positives.

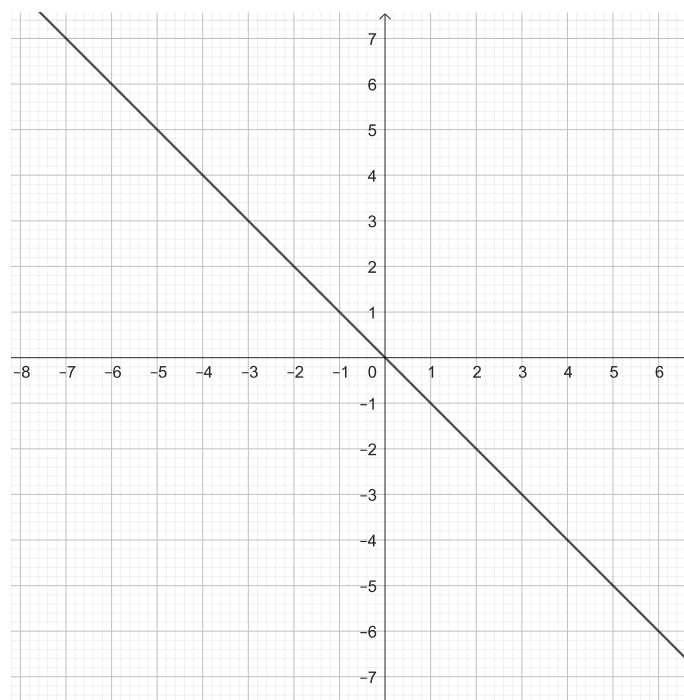


Figure 5 : La droite  $y=-x$ .

$x$	1	1,5	2	2,3	7
$y$	-1	-1,5	-2	-2,3	-7

Figure 6 : Tableau relatif aux valeurs positives de  $x$  pour  $y=-x$ .

Le modèle algébrique exprimant l'opération à effectuer sur une valeur de  $x$  pour obtenir la valeur de  $y$  correspondante est assez évident. Il s'agit de  $y = -x$ . L'exploration numérique pour les valeurs de  $x$  négatives donne le tableau de la figure 7.

$x$	-1	-1,5	-2	-2,3	-7
$y$	1	1,5	2	2,3	7

Figure 7 : Tableau relatif aux valeurs négatives de  $x$  pour  $y = -x$ .

Si l'on souhaite que le modèle initial  $y = -x$  soit également valable pour les nombres négatifs, on n'a guère le choix, il faut accepter que  $(-(-x)) = x$ .

### Seconde extension

Considérons à présent la droite de la figure 8 et construisons similairement le tableau numérique de la figure 9 pour les valeurs de  $x$  positives.

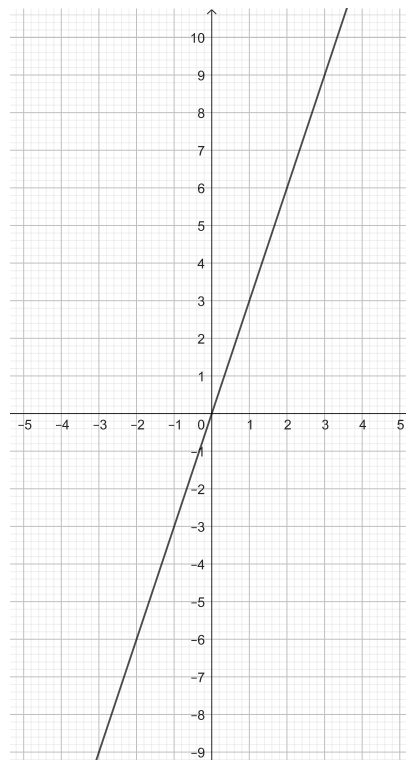


Figure 8 : La droite  $y = 3x$ .

$x$	1	1,5	2	2,3	3
$y$	3	4,5	6	6,9	9

Figure 9 : Tableau relatif aux valeurs positives de  $x$  pour  $y = 3x$ .

Le modèle algébrique exprimant l'opération à effectuer sur une valeur de  $x$  pour obtenir la valeur de  $y$  correspondante est assez évident. Il s'agit de  $y = 3x$ . L'exploration numérique pour les valeurs de  $x$  négatives donne le tableau de la figure 10.

x	-1	-1,5	-2	-2,3	-3
y	-3	-4,5	-6	-6,9	-9

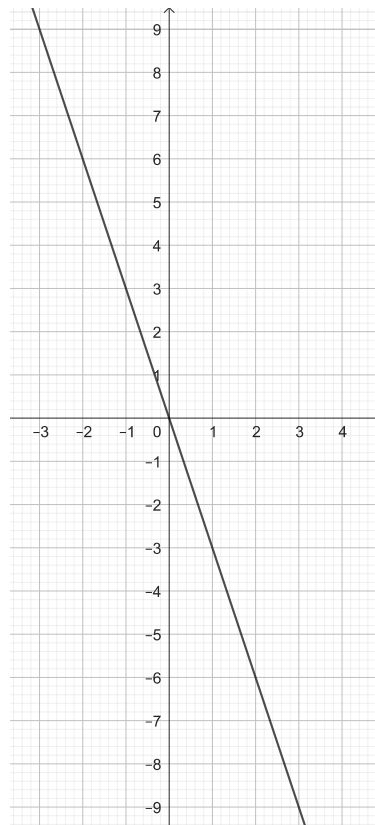
**Figure 10** : Tableau relatif aux valeurs négatives de  $x$  pour  $y=3x$ .

Si l'on souhaite que le modèle initial  $y=3x$  soit également valable pour les nombres négatifs, on n'a guère le choix, il faut accepter que  $-3=3.(-1)=(-1).3$ , pour autant que la commutativité soit également préservée. Des expériences avec d'autres coefficients directeurs conduisent à accepter la règle plus générale  $-a=a.(-1)=(-1).a$  valable pour tout naturel  $a$ . Cette règle a ainsi comme conséquence que deux naturels donnés  $a$  et  $b$  doivent vérifier

$$(-a).b=(-1).a.b=(-1).(a.b)=-ab=a.(-1).b=a.(-b).$$

### Troisième extension

Considérons à présent la droite de la figure 11 et construisons similairement le tableau numérique de la figure 12 pour les valeurs de  $x$  positives.



**Figure 11** : La droite  $y=-3x$ .

x	1	1,5	2	2,3	3
y	-3	-4,5	-6	-6,9	-9

**Figure 12** : Tableau relatif aux valeurs positives de  $x$  pour  $y=-3x$ .

Le modèle algébrique exprimant l'opération à effectuer sur une valeur de  $x$  pour obtenir la valeur de  $y$  correspondante est assez évident. Il s'agit de  $y=3x$ . L'exploration numérique pour les valeurs de  $x$  négatives donne le tableau de la figure 13.

$x$	-1	-1,5	-2	-2,3	-3
$y$	3	4,5	6	6,9	9

**Figure 13** : Tableau relatif aux valeurs négatives de  $x$  pour  $y = -3x$ .

Si l'on souhaite que le modèle initial soit vérifié pour les valeurs négatives, on doit accepter que  $3 = (-3) \cdot (-1)$ . Des expériences avec d'autres coefficients directeurs conduisent à accepter la règle plus générale  $a = (-a) \cdot (-1)$  valable pour tout naturel  $a$ . En particulier,  $1 = (-1) \cdot (-1)$ . Ce cas particulier est important car il permet de déduire les autres cas abordés dans cette extension, ce qui contribue à mettre en évidence la cohérence globale des règles de calcul ainsi élaborées. De fait, si  $a$  est un nombre naturel, il suit

$$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b = 1 \cdot a \cdot b = ab.$$

On voit ainsi comment la notion d'économie de pensée peut se décliner dans le cadre de la modélisation mathématique et aussi comment la construction d'un modèle peut relever de considérations intra-mathématiques qui font sortir d'une certaine vision figée qui voudrait réduire la conception de modèles à une dialectique d'ajustement « bijectif » entre monde sensible et modèle mathématique. Ici, c'est la volonté de préserver la validité d'un modèle qui est génératrice de mathématiques, en l'occurrence de règles de calcul sur les entiers. C'est en ce sens que dans cette partie du parcours l'algébrique commande au numérique.

### 3.3. Épisode 3 : les fonctions exponentielles

L'étude des suites géométriques est prolongée pour des nombres appartenant à des ensembles de plus en plus vastes et conduit aux fonctions exponentielles. Les progressions géométriques sont étendues aux entiers négatifs puis aux rationnels sur la base des régularités observées dans les tables numériques de suites géométriques c'est-à-dire l'idée de multiplication répétée qui s'exprimera par la suite à l'aide d'une équation fonctionnelle  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ . Prenons le cas de  $2^x$  pour illustrer. Si augmenter d'une unité l'exposant de  $2^x$  revient à multiplier  $2^x$  par 2 alors retrancher une unité à l'exposant de  $2^x$  revient à diviser  $2^x$  par 2. On est ainsi conduit à  $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$  et à  $2^{x-n} = \frac{2^x}{2^n}$  pour  $n$  naturel en itérant le raisonnement. En particulier,  $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ .  $2^x$  a alors un sens pour des valeurs de  $x$  qui sont des entiers négatifs.

Similairement, comment attribuer un sens à  $2^{\frac{1}{2}}$  ? Si on fait l'hypothèse qu'augmenter de  $\frac{1}{2}$  l'exposant correspond encore à une multiplication, on est amené à conclure que  $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$  car  $2 = 2^1 = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ . En raisonnant de la même manière, on est conduit à poser  $2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}$  pour tout  $n$  naturel. Et ainsi de suite pour d'autres bases et exposants rationnels. L'extension « pragmatique » des progressions géométriques à de nouvelles classes de nombres est motivée, complétée et systématisée par l'analyse de divers contextes : nombre de bactéries, variation de la température d'un corps, transformation du sucre de canne en dextrose. L'enseignement va jusqu'à l'extension

aux nombres irrationnels via la continuité du numérique assurée par l'axiome des intervalles emboîtés.

### 3.4. D'autres classes de fonctions

Ceci conduit, outre la classe des fonctions exponentielles, à celle des fonctions logarithmes : intensité d'un tremblement de terre, valeurs du pH comme mesure de l'acidité d'une solution... Le détail des progressions et constructions se trouvent dans Schneider et al. (2016). Le contexte des fonctions exponentielles et logarithmes permet de mettre en évidence l'intérêt de considérer des contraintes qui portent sur les fonctions elles-mêmes ce qui conduit à considérer des équations fonctionnelles et à s'intéresser à leur résolution :  $f(x_1+x_2)=f(x_1) \cdot f(x_2)$  ,  $g(x_1 \cdot x_2)=g(x_1)+g(x_2)$ ...

Les fonctions du second et troisième degré sont introduites dans un esprit similaire à ce qui précède. Des problèmes appartenant à la cinématique, l'économie, la géométrie sont soumis aux élèves. Il s'agit par exemple de déterminer la hauteur maximale d'un objet lancé verticalement, maximiser le bénéfice obtenu en vendant un bien astreint à des contraintes élémentaires où la diminution du nombre de ventes est directement proportionnelle à l'augmentation du prix de vente unitaire, maximiser/minimiser l'aire de figures géométriques simples de périmètre (ou apparenté) fixé. Dans tous ces cas, des fonctions du second degré apparaissent et la mise en évidence de leur parenté par l'intermédiaire de l'écriture standardisée  $y=ax^2+bx+c$  amène la question de l'étude de cette famille de fonctions, c'est-à-dire des caractéristiques pertinentes pour répondre aux questions soulevées par les problèmes initiaux. Parmi ces caractéristiques on trouve les extrema, les racines, les questions de croissance/décroissance. Cette étude est menée en partant de  $y=x^2$ .

On transforme géométriquement la courbe de référence correspondante (diverses translations et dilatations) en étudiant l'impact de ces transformations sur les propriétés de la courbe : comment évoluent les extrema par exemple. Parallèlement, on modélise algébriquement ces transformations ce qui fait émerger la forme canonique  $y=a(x+\beta)^2+\gamma$ . Les transformations de la courbe de référence fournissent donc les raisons d'être de la forme canonique. Suivant Job et al. (2023, p. 20) :

*« Ce parcours est différent du parcours dit classique dans lequel on transforme d'abord algébriquement le trinôme du second degré en forme canonique  $(x+\beta)^2+\gamma$  pour traiter d'abord les équations du second degré et ensuite, seulement, pour l'interpréter géométriquement. »*

Une approche similaire est envisagée pour les fonctions du 3<sup>e</sup> degré et les fonctions harmoniques usuelles. Le lecteur est invité à consulter respectivement Krysinska et Schneider (2010) et Henrotay et al. (2015) pour plus de détails.

## 4. Conclusion

Le parcours exposé propose une approche possible de la modélisation mathématique, autant dans sa dimension intra-mathématique, qu'extra-mathématique, en prenant appui sur la notion d'économie de pensée qui nous semble être au cœur de l'épistémologie des mathématiques. Ce point de vue épistémologique nous amène à envisager la modélisation comme une activité visant à produire des modèles instrumentaux pour la résolution de problèmes. Les modèles peuvent être validés selon différents niveaux de rationalité, pragmatique et déductif, mis en évidence par les

praxéologies de type I et II. Ces deux niveaux ne sont pas disjoints et entretiennent des liens dialectiques. Dans ce contexte, la modélisation fonctionnelle est susceptible de jouer un rôle majeur. Les élèves sont amenés à construire des classes de fonctions paramétrées qui modélisent les traits communs à des familles de problèmes et en fournissent ainsi une caractérisation autorisant l'utilisation de techniques de résolution instrumentales. La résolution de problèmes est ainsi déportée vers la capacité à brasser toujours plus de classes de fonctions paramétrées au fur et à mesure que de nouvelles sont introduites ce qui signifie pour un problème donné développer sa capacité à identifier à quelle classe le problème appartient et à constituer une nouvelle classe lorsqu'un problème ne fait partie d'aucune classe préalablement apprise.

Dans la manière dont le parcours est présenté, les fonctions constituent le principal objet d'étude. Cela ne signifie pas pour autant que « rien d'autre n'est travaillé » mais plutôt que d'autres apprentissages sont « subordonnés » aux fonctions. Ainsi l'algèbre émerge des activités de modélisation fonctionnelle (ce qui n'exclut pas d'autres fonctionnalités). Les équations et inéquations expriment des questions que l'on se pose à propos des fonctions. Les identités sont des outils de mise en forme de fonctions permettant de répondre à des besoins particuliers comme par exemple factoriser pour obtenir les racines... La sophistication des classes de fonctions considérées n'est pas gratuite et résulte des problématiques traitées. Par exemple, des fonctions irrationnelles sont requises dans certains problèmes d'optimisation comme minimiser le coût du transport d'un trajet dans des milieux différents (terre-mer).

Des éléments du formalisme ensembliste/bourbakiste des fonctions sont introduits mais n'en constituent pas la finalité comme cela est souvent le cas dans les classes ordinaires où ce formalisme tourne à vide. La pensée fonctionnelle existe indépendamment de ce formalisme. Le « sens » des fonctions n'est donc pas localisé dans ce formalisme mais dans l'utilisation qui est faite de la pensée fonctionnelle pour résoudre des problèmes par constitution de classes de fonctions paramétrées.

Dans cet univers, l'acquisition de la notion de fonction est jaugée à l'aune de la capacité des élèves à exprimer des récits relatant la genèse des différentes classes et leurs propriétés mais également à choisir de manière judicieuse une technique selon le problème posé s'il s'agit de considérer une équation, une identité, si telle lettre doit être considérée comme un paramètre ou une inconnue. Le travail de la dénotation est pour ainsi dire permanent.

### Références bibliographiques

- Bart, D., & Daunay, B. (2016). *Les Blagues à PISA*. Éditions du Croquant.
- Bodin, A. (2006). Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français. *Bulletin de l'APMEP*, 463, 240-265.
- Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposicion didactica de organizaciones matematicas en proceso de algebrizacion, El caso de la proporcionalidad. *Recherches de Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124. <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>
- Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Actes Sud.
- Bourbaki, N. (2007). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Springer.

**Job, P., Schneider, M.**

- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique* (2e ed.). La Pensée Sauvage.
- Crahay, M. (2006). Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation. *Revue française de pédagogie*, 154, 97-110. <https://doi.org/10.4000/rfp.143>
- Delord, M. (2013). Coup d'oeil rapide sur PISA 2013. <http://michel.delord.free.fr/pisa2013-quick.html>
- Douady, A. (1996). Remarque sur le « point de vue » de R. Bkouche sur l'enseignement de la notion de limite. *Repères - IREM*, 25, 87-88.
- Dugac, P. (2003). *Histoire de l'Analyse*. Vuibert, Paris.
- Dunia, A. (2014). De l'écologie d'un discours heuristique d'acculturation à l'algèbre linéaire [Thèse de doctorat non publiée]. Université de Liège.
- Fourez, G., Englebert-Lecomte, V., & Mathy, P. (1997). *Nos savoirs sur les savoirs*. De Boeck Université.
- Henrotay, P., Krysinska, M., Rosseel, H., & Schneider, M. (2015). *Des fonctions taillées sur mesure*. Presses universitaires de Liège.
- Job, P. (2011). Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques [Thèse de doctorat, Université de Liège].
- Job, P., Le Hebel, F., & Schneider, M. (sous presse). Deux approches contrastées de l'évaluation internationale PISA. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.
- Job, P., Krysinska, M., & Schneider, M. (2023). *Un enseignement de l'algèbre structuré par la modélisation, du secondaire au supérieur*. Repères - IREM, 128, 5-38.
- Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education*, 46, 635–646.
- Krysinska, M., Mercier, A., & Schneider, M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(3), 247–303. <https://revue-rdm.com/2009/problemes-de-denombrement-et/>
- Krysinska, M., & Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Presses Universitaires de Liège.
- Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique* (Balacheff, N. & Laborde, J.-M., Trad.). Hermann.

- Lebeau, C., & Schneider, M. (2009). *Vers une modélisation algébrique des points, droites et plans*. Presses universitaires de Liège.
- Lehmann, D., & Bkouche, R. (1988). *Initiation à la géométrie*. Presses Universitaires de France.
- Mach, E. (1987). *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement* (Bertrand, É., Trad.). Sceaux : J. Gabay (œuvre originale publiée en 1883).
- Matheron, Y. (2012). *PISA : Prudence (envers les) Interprétations Statistiques Avancées. IFE, EAM-ADEF, conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques du 13 mars 2012*. <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/conference-nationale-textes-4>
- Nguyen, G., Schneider, M. (2017). *Une approche heuristique d'une géométrie calculatoire*. Presses universitaires de Liège.
- Popper, K. (1973). *La logique de la découverte scientifique*. Éditions Payot.
- Patras, F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. Presses Universitaires de France.
- Rouy, E. (2007). Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changement de posture vis-à-vis de la rationalité [Thèse de doctorat, Université de Liège].
- Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. In G., Lemoine & F., Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352). Les presses de l'Université de Montréal.
- Schneider M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantanée. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 317-350.
- Schneider, M. (2006a). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue française de pédagogie*, 154, 8-8. <https://doi.org/10.4000/rfp.136>
- Schneider, M. (2006b). Comment des théories didactiques permettent-ils de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 9-38.
- Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques - La didactique par des exemples et contre-exemples*. Liège : Les Éditions de l'Université de Liège.
- Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique? In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, & P. Gibel (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques : actes de la XV<sup>e</sup> école d'été de Didactique des Mathématiques* (pp.175-206). La Pensée Sauvage.
- Schneider, M., Ballhan, K., Gérard, I., & Henrotay, P. (2016). *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique*. Presses universitaires de Liège.
- Schneider, M., Clarys, M., Coché, F., De Brouwer, M., Dedeur, V., Docq, C., Gilbert, T., Henrotay, P., Lambelin, N., Lemaire, L., Liégeois, M., Looze, A., Maquoi, J., Scrève, R., Solhosse, M. & Vlassis, J. (2016). *Rapport du groupe de travail mathématique dans le cadre du Pacte d'Excellence. Axe Thématique 1 « Savoirs et compétences »*. Groupe de travail I.I. « Cadre d'apprentissage, contenus des savoirs et compétences, et plans d'actions prioritaires ».
- Schneider, M. & Job, P. (2016). Ingénieries entre recherche et formation : Élèves-professeurs en mathématiques aux prises avec des ingénieries didactiques issues de la recherche. Un dispositif de

Job, P., Schneider, M.

formation à portée phénoménotechique. *Éducation & didactique*, 10, 91-112.  
<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2508>

Tricot, A. (2017). *L'Innovation pédagogique*. Éditions Retz.

Van Dieren, F. (2005). « Enseigner par compétences » ou « former à travers une discipline » : où sont les contradictions ? Conférence donnée au colloque franco-finlandais sur « L'enseignement des mathématiques à partir de l'enquête PISA » à Paris, les 6-8 octobre 2005.

Service Générale du Pilotage du Système Éducatif. (s.d.) PISA 2003. *Évaluation de la culture mathématique des jeunes de 15 ans. Document à l'attention des professeurs de mathématiques des 1er et 2ème degrés de l'enseignement secondaire*. [http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do\\_id=1343&do\\_check=BAKWQDOADG](http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=1343&do_check=BAKWQDOADG)

Annexe 1. Énoncé de l’item des pommiers et des conifères

Cet item est contextualisé de la manière suivante (PISA, 2000) :

« Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre ( $n$ ) de rangées de pommiers. »

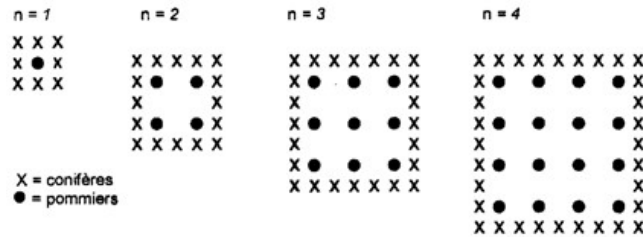


Figure 1 : Représentation des pommiers et des conifères.

On donne également aux élèves les expressions  $n^2$  et  $8n$  qui donnent respectivement le nombre de pommiers et le nombre de conifères à chaque étape. On leur demande de compléter le tableau suivant :

Complétez le tableau:

$n$	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

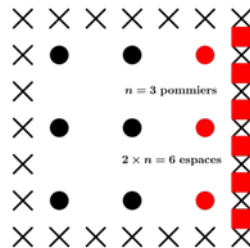
Figure 2 : Tableau à compléter.

Les élèves doivent alors déterminer la valeur de  $n$  pour que le nombre de pommiers soit égal au nombre de conifères. On leur demande en outre de déterminer lequel des deux nombres augmente le plus vite lorsque le fermier agrandit son champ ?

Dans la version analysée par Schneider et al. (2016), les expressions  $n^2$  et  $8n$  ne sont pas données aux élèves.

Annexe 2. Résolution « astucieuse » de l'item des pommiers et des conifères

La formule  $n^2$  donnant le nombre de pommiers n'est guère problématique. Pour celle du nombre de conifères  $8n$ , on peut relever que pour une rangée de  $n$  pommiers, il y a le double d'intervalles entre conifères sur le côté correspondant, donc  $2 \times n$  (Figure 3).



**Figure 3** : Nombre d'espaces entre conifères en fonction du nombre de pommiers.

Comme il y a 4 côtés, en prenant soin de ne pas compter plusieurs fois les conifères aux coins du carré, on peut en déduire qu'il y a  $2 \times n$  conifères par côté et donc  $4 \times 2 \times n = 8n$  conifères au total.