

Une formation des enseignants à la modélisation et nouveaux besoins épistémologiques

Berta BARQUERO⁶

Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona

Marianna BOSCH⁷

Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona

Résumé. La formation des enseignants de tout niveau doit prendre en compte les besoins épistémologiques de la profession. Ces besoins ne sont pas toujours bien connus quand il s'agit de répondre aux demandes curriculaires d'enseigner les mathématiques comme outil de modélisation et dans des démarches d'investigation. L'élaboration conjointe par enseignants et didacticiens des outils mathématiques et didactiques nécessaires pour combler ces besoins est toujours une question ouverte. Nous abordons ici cette question dans la perspective de la théorie anthropologique du didactique (TAD) à travers des *parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants*. Les expériences menées par notre équipe de l'Université de Barcelone nous servent de point d'appui pour présenter une réflexion sur le rôle des outils de la TAD autour des notions de modèle, système et objet ostensif pour aider les enseignants à gérer des processus didactiques autour de la modélisation. Ces expériences mettent aussi en évidence de nouveaux besoins terminologiques, mathématiques et didactiques qui devraient nourrir et la recherche didactique sur l'enseignement de la modélisation et la collaboration indispensable entre chercheurs et enseignants.

Mots-clés. Modélisation mathématique, théorie anthropologique du didactique, parcours d'étude et de recherche, formation des enseignants.

Abstract. Teacher education at all levels must consider the epistemological needs of the profession. These needs are not always well known when it comes to responding to curricular demands to teach mathematics as a modelling tool and in investigative approaches. The joint development by teachers and didacticians of the mathematical and didactic tools needed to meet these needs is still an open question. Here we address this question from the perspective of the anthropological theory of the didactic (ATD) through *study and research paths for teacher training*. The experiments carried out by our team at the University of Barcelona provide the basis for a discussion of the role of the ATD approach in helping teachers manage didactic processes based on modelling. These experiences also highlight new terminological, mathematical and didactic needs, which should feed both didactic research on the teaching of modelling and the essential collaboration between researchers and teachers.

Keywords. Mathematical modelling, anthropological theory of the didactic, study and research paths, teacher education.

Resumen. La formación del profesorado a todos los niveles debe tener en cuenta las necesidades epistemológicas de la profesión. Estas necesidades no siempre son bien conocidas cuando se trata de responder a las exigencias curriculares de enseñar las matemáticas como herramienta de modelización y en enfoques de investigación. El desarrollo conjunto por parte de profesores y didactas de las herramientas matemáticas y didácticas necesarias para responder a estas necesidades sigue siendo una cuestión abierta. Aquí abordamos esta cuestión desde la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) a través de los *recorridos de estudio e investigación para la formación* del profesorado. Las experiencias llevadas a cabo por nuestro equipo en la Universidad de Barcelona proporcionan la base para una discusión sobre el papel de las herramientas de la TAD para ayudar a los profesores a gestionar procesos didácticos basados en la modelización. Estas experiencias también ponen de manifiesto nuevas

⁶ bbarquero@ub.edu

⁷ marianna.bosch@ub.edu

necesidades terminológicas, matemáticas y didácticas, que deberían alimentar tanto la investigación didáctica sobre la enseñanza de la modelización como la imprescindible colaboración entre investigadores y profesores.

Palabras clave. Modelización matemática, teoría antropológica de lo didáctico, recorridos de estudio e investigación, formación del profesorado.

Introduction : La modélisation comme savoir à enseigner

Pour pouvoir aborder les problèmes d'enseignement et apprentissage des mathématiques dans une perspective scientifique, la didactique doit élaborer des *modèles* des *systèmes* qu'elle prend comme objet d'étude. C'est dans ce processus de modélisation qu'elle *construit* ces objets. Ce que nous présentons ici est la manière dont la Théorie Anthropologique du Didactique aborde les problèmes d'enseignement, apprentissage ou, plus largement, d'étude des processus de modélisation mathématique. Il nous faudra donc modéliser (en didactique) l'activité de modélisation (mathématique ou autre). Il s'agit là d'un exercice de réflexivité propre à de nombreuses sciences humaines : dans la mesure où la didactique étudie les processus d'étude, elle est obligée de s'étudier elle-même. Il en va de même avec les processus de modélisation que nous nous voyons portés à modéliser.

Nous allons pour cela poser deux grandes questions auxquelles répondra notre proposition de modélisation. La première est de considérer cet objet que les systèmes d'enseignement de nombreux pays viennent à désigner comme « la compétence modéliser ». Il s'agit là de la modélisation en tant que *savoir à enseigner* dans le processus de transposition didactique (Chevallard, 1985). Il faudra le rattacher à la modélisation en tant que pratique scientifique en mathématiques et ailleurs. Puis, comme nous le disions plus haut, nous allons proposer notre propre conception (didactique) du *processus de modélisation* en tant que construction, délimitation, travail, validation et utilisation de modèles. Cette conception est celle que nous utiliserons comme outil pour décrire, concevoir, gérer, développer, analyser son enseignement. Nous parlerons à ce propos de la dimension épistémologique de l'analyse didactique puisqu'elle aborde la délimitation et définition même du savoir autour de la modélisation. Et nous verrons que cette analyse va dévoiler un manque de ressources épistémologiques (que nous appellerons plus tard praxéologiques) pour mettre en place « la compétence modéliser ».

La deuxième question est celle de l'enseignement de la modélisation (ou de « la compétence modéliser »), que ce soit au Primaire, au Collège, au Lycée, à l'Université ou en formation d'enseignants (qui, en Espagne, fait partie de l'enseignement universitaire). Nous l'aborderons à partir de l'analyse des besoins didactiques pour l'enseignement et l'apprentissage, bref l'étude, de la modélisation dans les institutions scolaires actuelles.

Le texte qui suit reprend, de manière parfois très littérale, des publications récentes des auteures, en particulier le cours de Berta Barquero à la XXIème École d'Été de Didactique des Mathématiques à l'Ile de Ré en 2021 (Barquero, 2024a), le TD associé à ce cours (Wozniak, Barquero, Bosch et Kaspary, 2024), la conférence de Barquero au congrès CERME13 (Barquero, 2024b) ainsi qu'une communication commune au congrès ICTMA-21 en 2022 (Barquero, Bosch et Wozniak, 2022).

1. 2. La modélisation d'après la TAD

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) propose une conceptualisation à la fois simple et flexible, ainsi qu'unitaire et générale de la modélisation, qui situe celle-ci au cœur de l'activité mathématique (et scientifique) :

Un aspect essentiel de l'activité mathématique porte sur la construction d'un modèle (mathématique) de la réalité que nous voulons étudier, sur le travail avec ce modèle et sur l'interprétation des résultats obtenus dans ce travail pour répondre aux questions posées initialement. Une grande partie de l'activité mathématique peut s'identifier, par conséquent, avec une activité de modélisation mathématique (Chevallard, Bosch, et Gascón, 1997, notre traduction).

La notion de modélisation est présente en TAD dès les premiers développements de la théorie. Chevallard (1989) la définit comme un processus qui relie un *système* à un *modèle* et distingue trois étapes : la définition du système à étudier, la construction du modèle, et le travail dans le modèle. Les notions de « système » et de « modèle » doivent s'entendre comme une fonction plutôt que comme une qualité. Un système est n'importe quel domaine de la réalité qui peut être isolé du reste – même si ce n'est que de manière hypothétique. La notion de système inclut les systèmes extra mathématiques et les (intra)mathématiques. Un modèle est alors une construction qui permet d'apporter des connaissances sur le système considéré. Chevallard (1989, p. 57) distingue « travailler le modèle » et « travailler sur le modèle ». Travailler le modèle consiste à produire des connaissances relatives au système étudié. Travailler sur le modèle peut s'interpréter comme la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude. La problématique de l'adaptation du modèle au système est une tâche qui doit être au cœur du processus de modélisation.

Le processus de modélisation n'est pas linéaire et deux propriétés fondamentales lui sont attribuées : la *réversibilité* de la relation système-modèle et la *réurrence* du processus de modélisation. D'un côté, le rapport du système au modèle peut s'inverser et faire apparaître le système comme un modèle de son modèle (nous en verrons un exemple tout de suite). D'un autre côté, le travail sur le modèle peut comporter la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude, et qui impliquent une redéfinition des systèmes à modéliser, qui intègrent alors les systèmes, modèles et connaissances préalablement engendrés. Il faut pour cela considérer que modéliser un système déjà mathématisé fait aussi partie du travail de modélisation.

Ajoutons ici que le processus de modélisation s'insère normalement dans un processus de questionnement de la réalité où appartient le système que l'on prend comme objet d'étude. L'on questionne ce système que l'on doit délimiter pour construire un modèle qui permette de produire des connaissances à son propos. L'on questionne le modèle (sa validité, fiabilité, sa productivité) et l'on questionne aussi le rapport du modèle au système : sa pertinence et représentativité, ses limitations et possibles biais. Nous sommes ici dans le paradigme pédagogique du *questionnement du monde* (Chevallard, 2002, 2015 et 2020) où les processus didactiques sont basés non dans l'étude d'organisations de savoir déterminées à l'avance – ce qui correspond à notre paradigme actuel de la *visite des œuvres* – mais dans l'enquête de questions vivantes. Ces enquêtes incluent des moments de recherche et d'étude d'œuvres disponibles – y inclus des modèles déjà élaborés par autrui pour étudier des questions semblables à celles abordées – et des moments d'exploitation des ressources disponibles pour élaborer des réponses appropriées.

Les œuvres se décrivent, en TAD, à l'aide de la notion de *praxéologie* qui permet d'appréhender aussi bien les activités humaines de toutes sortes que les savoirs produits par ces activités (Chevallard, 1999). Une praxéologie est l'union indissociable d'une *praxis* ou savoir-faire, décrite en termes de types de tâches à effectuer et de techniques utilisées pour ce faire ; et d'un *logos* ou savoir, décrit en deux niveaux : une technologie ou discours pour décrire, organiser, justifier et valider les techniques, et une théorie qui contient les éléments souvent implicites qui fondent et la technologie et la praxis.

Dans le processus de modélisation, les praxéologies interviennent à deux niveaux. D'une part, la modélisation en tant qu'activité humaine se décrit en termes de praxéologies de modélisation,

avec ses types de tâches, ses techniques et son discours technologico-théorique. Le fait que les praxéologies de modélisation soient peu enseignées et peu institutionnalisées dans le savoir mathématique savant – celui des producteurs de mathématiques – fait que leur *logos* n'est pas toujours très explicite ou uniformisé. Il n'existe pas de discours qui décrive de manière partagée dans la communauté savante en quoi consiste modéliser, quels sont les types de tâches essentielles au processus de modélisation et les techniques associées, et quel est l'univers notionnel correspondant. C'est cette situation qui a amené Wozniak (2012) à parler de « praxéologies muettes » pour se référer à ces pratiques qui manquent d'un *logos* développé et pour lesquelles on a peu de mots pour décrire et expliquer ce que l'on fait.

Le second niveau d'intervention des praxéologies dans le processus de modélisation correspond aux notions même de système et de modèle. Un système est une portion de la réalité que l'on délimite et isole. Il y intervient généralement des praxéologies plus ou moins développées à propos desquelles on se pose des questions. Les modèles sont à leur tour aussi pris dans des praxéologies où ils sont utilisés comme éléments techniques ou technologiques. « Faire travailler un modèle » pour le développer et pour produire des connaissances à propos du système n'est possible que parce qu'il existe des praxéologies où ce modèle peut fonctionner, selon des principes et des règles fondés par leur *logos*.

Prenons un exemple simple d'une classe avec des garçons et des filles. Ce sera notre système à modéliser. Le fait de faire une distinction entre genres montre déjà que le système n'est pas neutre, mais qu'il fait partie d'un ensemble de praxéologies sociales et scolaires très particulières que l'on devra prendre en charge au moment de le délimiter et le questionner. Si l'on s'interroge sur le rapport entre filles et garçons dans la classe, plusieurs modèles sont possibles, chacun s'inscrivant dans une certaine organisation praxéologique qui les rendra plus ou moins productifs à propos de la question posée. On peut travailler directement sur le système en rapprochant chaque fille d'un garçon, puis de deux, etc. On peut aussi utiliser un modèle graphique ou un modèle numérique. Ce dernier peut prendre la forme d'une comparaison entre fractions (si une praxéologie autour des nombres fractionnaires ou rationnels est disponible) ou d'un rapport entre deux quantités (qui suppose une variation non-négligeable de la praxéologie précédente). Le passage entre ces différents modèles (par exemple 15 et 11, puis 15/26 et 11/26 ou « 15 à 11 », enfin 58% et 26% ou 1,36) est un cas élémentaire de *modélisation récurrente* : du système au modèle numérique, puis à la comparaison de fractions, enfin à la comparaison de pourcentages. Ce même exemple permet d'illustrer aussi le caractère *réversible* de la relation de modélisation. Considérons comme système à étudier les fractions 15/26 et 18/29. Comment déterminer la plus grande ? Prenons comme modèle une classe à 26 élèves dont 15 filles. Si trois filles arrivent dans la classe, la proportion de filles augmente, d'où on déduit que 15/26 < 18/29. Le rôle des objets (et praxéologies associées) « classe avec des garçons et des filles » et « fractions » s'est inversé : le modèle est devenu système et le système joue le rôle de modèle (Figure 1).

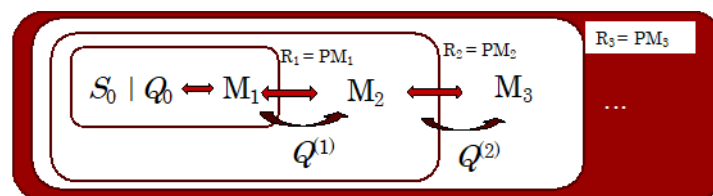


Figure 1 : La récursivité du processus de modélisation.

2. Quel cadenas est le plus sûr ? Récursivité et réversibilité du processus de modélisation

Considérons un autre exemple de processus de modélisation où interviennent aussi les propriétés de récursivité et réversibilité mises en place dans un environnement scolaire au niveau du secondaire (Vásquez, Barquero et Bosch, 2021). Le système considéré est un ensemble de cadenas divers (Figure 2) que l'on utilise habituellement pour fermer des guichets. La question que l'on se pose est de savoir quel cadenas est plus sûr, ce qui revient à déterminer le nombre de codes possibles de chacun.

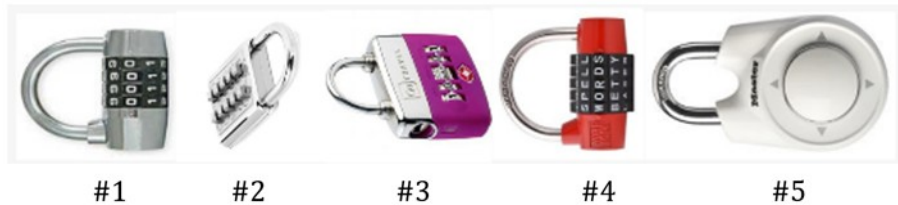


Figure 2 : Premier jeu de cadenas utilisé par les élèves

Un premier modèle pour répondre à la question est une liste des codes possibles. Ce premier modèle s'appuie sur une codification des éléments à prendre en compte et une certaine systématisme dans la production d'une liste. Il donne lieu à un deuxième modèle en forme de calcul numérique qui permet d'obtenir le nombre d'éléments de la liste sans avoir à les écrire et les énumérer tous. Ce premier modèle numérique peut à son tour se modéliser par une formule numérique où les nombres concrets utilisés adoptent un certain caractère générique. Ces formules pourront se modéliser à leur tour par des formules algébriques concrètes produites dans chaque cas. La figure 3 montre un exemple de chacun de ces modèles successifs qui peuvent être considérés.

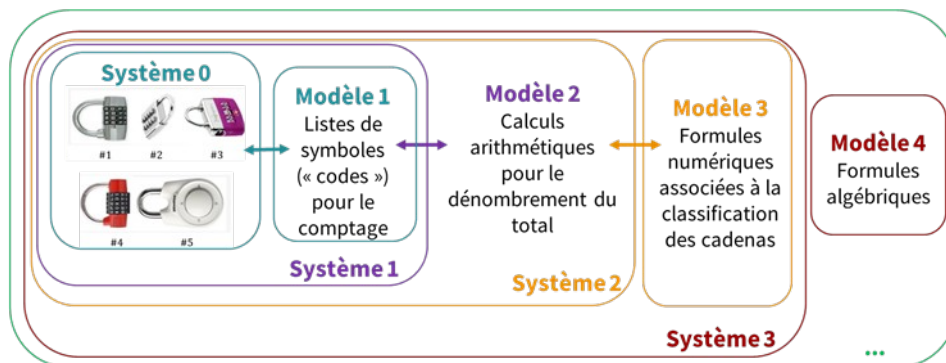


Figure 3 : Construction progressive des modèles dans l'étude des cadenas (système 0).

La récursivité du processus est claire avec la production de modèles successifs (modèles 1, 2, 3 et 4) et la construction de nouveaux systèmes qui incluent, à chaque étape : le système antérieurement délimité, le modèle et le travail dans ce modèle. On voit ainsi apparaître un nouveau système S1 qui inclut S0 et les listes produites par le modèle 1 (M1, voir Figure 4). C'est ce système qui est modélisé par le modèle 2 avec des calculs numériques pour dénombrer le total (M2, Figure 5), donnant lieu à son tour à un nouveau système S2 qui sera modélisé par les formules numériques associées à la classification des cadenas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
"012"										
"013"	102									
"014"	103									
"015"	104									
"016"	105									
"017"	106									
"018"	107									
"019"	108									
"020"	109									
"021"	120	210								
"022"	123	213								
"023"	124	214								
"024"	125	215								
"025"	126	216								
"026"	127	217								
"027"	128	218								
"028"										

Figure 4 : Type de Modèle 1 avec le répertoire des combinaisons possibles pour chaque cadenas (les couleurs marquent certaines des combinaisons qui utilisent les mêmes symboles).

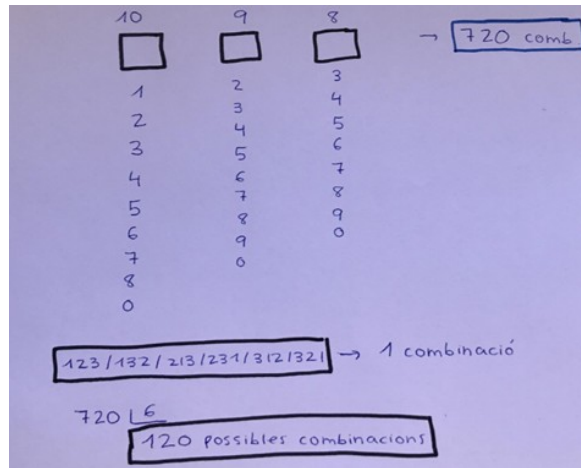


Figure 5 : Type de Modèle 2 avec un modèle numérique et le calcul qui en découle.

Le cas des cadenas offre un exemple très intéressant de récursivité. En effet, dans le processus didactique que nous présentons dans ce qui suit, une fois que les formules algébriques ont été institutionnalisées, les élèves devaient aborder un ensemble de systèmes divers (parfums de glaces, couleurs de tee-shirts, etc.) incluant des problèmes de dénombrement. La stratégie qui est apparue alors – et qui n’avait pas été anticipée par l’enseignante – est l’*utilisation des cadenas comme modèles des systèmes* à étudier : les élèves distinguaient les cas de figure des « cadenas à chiffres » de ceux des « cadenas à piston », avec ou sans contraintes, etc. Les cadenas vont ainsi jouer le jeu de *modèles intermédiaires* entre les systèmes à dénombrer et les modèles algébriques à choisir pour produire le dénombrement demandé (Figure 6).

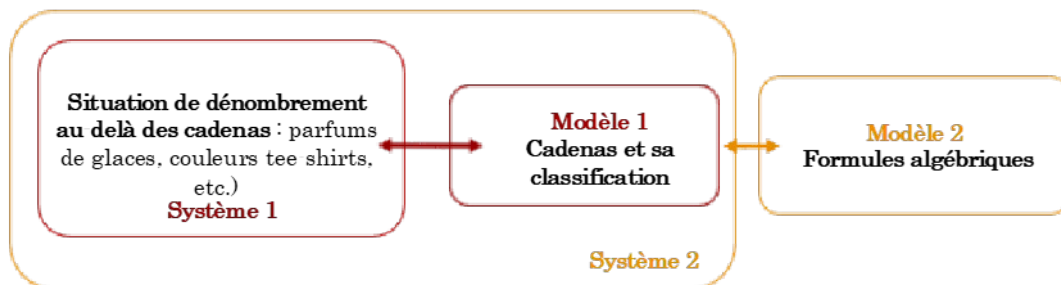


Figure 6 : Réversibilité du rôle de système-modèle

Quel cadenas est le plus sûr ? Modélisation et questionnement du monde

Le processus de modélisation des cadenas a été implémenté sous forme d'un *parcours d'étude et de recherche* (PER) pendant quatre années consécutives dans une école des alentours de Barcelone (Vásquez, Barquero et Bosch, 2021). Les PER sont des dispositifs d'enseignement conçus et expérimentés dans le but d'analyser les conditions qui permettent de faire vivre dans la classe des processus d'enquête basés sur l'étude de questions dans la perspective du « paradigme du questionnement du monde ». Les PER servent aussi à identifier des contraintes de différents ordres – mathématiques, didactiques, pédagogiques, scolaires mais aussi sociales et civilisationnelles – qui pèsent sur les processus d'enquête et sur les processus de modélisation qui permettent la recherche et l'élaboration de réponses aux questions abordées.

Le PER que nous présentons ici part de la considération des différents types de cadenas considérés plus haut (Figure 2) et de la question génératrice Q_0 : « Quel cadenas est le plus sûr ? ». Le PER a été mis en place avec trois classes de 2^e englobant une soixantaine d'élèves avec trois enseignants qui changent de classe à chaque séance. Les élèves travaillent en groupes de 5-6 et doivent fournir : un « bilan d'étape » par écrit à la fin de chaque séance, une présentation orale à la fin du parcours, passer un examen et répondre à un questionnaire individuel. Nous verrons comment la description du processus de modélisation constitue un élément primordial non seulement pour le développement du PER mais aussi pour sa conception et son analyse. Barquero (2024a) présente une description détaillée du processus que nous reprenons ci-après et dont les principales étapes ont été décrites plus haut.

Dans un premier temps, les étudiants travaillent avec différents cadenas en se focalisant sur la question dérivée Q_1 « Combien de 'codes' peut-on former avec chaque cadenas ? Quelles stratégies peut-on utiliser pour les dénombrer ? » Ces cadenas constituent le *système initial* (S1). Dans une première phase, les étudiants peuvent proposer des modèles initiaux pour bien décrire le répertoire des combinaisons possibles. Ils obtiennent ainsi un premier modèle à partir de, par exemple, la liste des codes ou combinaisons possibles pour chaque cadenas (en les écrivant manuellement ou en utilisant Excel) (M1, Figure 4) ou en préparant une liste initiale de codes possibles et des calculs arithmétiques pour faciliter le comptage total (M2, Figure 5).

Dans cette première phase, il est important que, une fois que les étudiants ont prédit le nombre total de codes, ils puissent expliquer les modèles utilisés, justifier leur utilisation et la réponse qui en résulte. Il apparaît une limitation importante relative à la validation des résultats finaux pour savoir si l'on a compté toutes les combinaisons. Ici, la *dimension expérimentale* est cruciale, car les élèves peuvent vérifier manuellement en utilisant les cadenas pour *simuler* toutes les combinaisons possibles, ils ne disposent pas de techniques pour calculer le total sans avoir à écrire la liste entière des codes. A ce stade, il faut que les étudiants puissent identifier et débattre à propos des variables critiques du système initial à modéliser et il faut accorder une terminologie spécifique pour décrire les éléments à compter et déterminer leurs caractéristiques. En particulier, des questions dérivées importantes sont : Comment nommer les positions du cadenas et les autres éléments (chiffres, lettres, symboles, etc.) ? Combien de symboles peut-on avoir dans chaque position ? Les éléments peuvent-ils être (ou non) répétés ? L'ordre dans lequel on saisit chaque élément est-il important ?

Dans une deuxième phase, les enseignants apportent quatre nouveaux cadenas avec quelques variations par rapport aux cinq initiaux. Les étudiants continuent aussi à travailler avec les cinq cadenas précédents avec de nouvelles restrictions ajoutées par les enseignants. Avec cette variation sur le système, avec les neuf cadenas, ils introduisent de nouvelles conditions sur la composition du code des cadenas. La question principale Q_2 à traiter est : « Peut-on utiliser le même type de techniques de comptage pour trouver le nombre total de codes de sécurité pour

n'importe lequel de ces nouveaux cadenas ? » L'objectif principal de cette étape est de tester la validité des techniques de modélisation et des modèles résultants (M1 et M2) considérés dans la situation précédente et de comprendre les changements que les nouveaux cadenas introduisent dans le système. On pourrait dire que cette deuxième phase vise à renforcer la praxéologie de modélisation, en rendant la partie *logos* plus explicite (ce qu'ils ont fait, ce qui fonctionne et ne fonctionne pas, pourquoi, etc.). De plus, c'est un moyen de discuter de la portée des techniques et des modèles en proposant aux étudiants un système élargi. Une fois que les étudiants ont effectué tous les calculs pour les neuf cadenas, de nouvelles questions apparaissent (de la part des élèves ou introduites par les enseignants) : « Q_3 : Est-ce qu'il existe une formule qui pourrait simplifier le comptage total des combinaisons ? Ces formules sont-elles spécifiques du type de cadenas que nous voulons comprendre ? » Les enseignants introduisent alors de nouveaux modèles (M3 ; voir Figure 7) basés sur les *formules numériques* associées à la classification (bien que provisoire) des cadenas.

La troisième phase arrive avec une extension importante de la situation initiale, allant au-delà de la problématique du cadenas présentée initialement. Dans ce sens, tout le travail construit dans les phases précédentes fait maintenant partie du système à modéliser. La question à aborder est Q_4 : « Comment élaborer une technique générale pour trouver le nombre de combinaisons pour chaque cadenas ? ». Cette phase implique que des informations « externes » soient ajoutées à l'étude : par exemple des formules algébriques (M4) pour le calcul du nombre total de combinaisons possibles sont considérées. Cette introduction peut être faite par l'enseignant ou résulter de la recherche des élèves.

Classification of all padlocks according to the resolution method

Name of the group of padlocks	Padlocks in the group	Calculation of the number of combinations of each padlock	Proposed formula
The raised padlocks	1	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ combinations	n^m
	3*	$4 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 10 = 48.000$ combinations	$n = \text{number of cell elements}$ $m = \text{number of cells}$
	4	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$ combinations	*unless the number of cell elements is different, we use the multiplication of the number of cell elements (as in padlock 3)
	5	$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ combinations	
The dividing padlocks	2	$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 / 6 = 120$ combinations	$n!$ is the number of cell elements multiplied by the next number in descending order.
	7	$10 \cdot 9 \cdot 8 / 2 + 10 \cdot 9 \cdot 8 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots = 1.013$ combinations	$m!$ is the number of cells multiplied by the next number in descending order. $\frac{n!}{m!(n-m)!}$
The factorial padlocks	6	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ combinations	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots$
	8*	$4 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 9 = 38.880$ combinations	$n = \text{number of cell elements}$
	9	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ combinations	*unless the number of cell elements does not change (as in padlock 8)

Figure 7 : Travail dans le Modèle 3 avec les formules numériques et algébriques.

La séquence des questions abordées, qui peut subir des variations dans chaque implémentation en fonction du travail et des propositions des élèves, est aussi un outil pour les enseignants lors de la planification et de la préparation des séances du PER. Le détail de ces questions est aussi un outil pour les enseignants lorsqu'ils ont à prévoir le travail de chaque séance et à discuter ou faire un bilan des avancées de l'enquête. Ainsi, les deux premières séances sont associées à Q_0 (quel cadenas est le plus sûr ?) et $Q_{0.1}$ (quel cadenas admet le plus de codes ?), les quatre suivantes à Q_1 (comptage du nombre de codes) avec une mise en commun des résultats partiels, puis Q_2 (cas général pour un cadenas quelconque) et Q_3 (équivalences entre cadenas). On peut ensuite prévoir un cours pour institutionnaliser les stratégies trouvées par les élèves et se consacrer à Q_4 (autres types de situations de dénombrement). Bien que le questionnement soit ouvert et qu'il revienne aux élèves de proposer et aborder les questions dérivées de Q_0 , les

enseignants peuvent anticiper minimalement des parcours possibles, pour ensuite introduire au fil des séances les modifications jugées pertinentes. Ce sont les questions, et non (ou pas seulement) les différents types de modèles, qui constituent le moteur déclencheur de l'enquête et, en conséquence, du processus de modélisation.

4. Modélisation et formation des enseignants

Les PER sont aussi un dispositif utilisé en formation des enseignants, donnant lieu au *parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants* (PER-FE). Nous ne développerons pas ici les raisons d'être et le fonctionnement de ces dispositifs, que le lecteur trouvera dans (Barquero, Bosch et Romo, 2018 ; Wozniak et al., 2024). Nous soulignerons uniquement que les PER-FE intègrent un module d'expérimentation d'un PER et d'analyse de ses composants dans la triple perspective d'aborder un problème de la profession, créer un milieu partagé pour analyser l'activité mathématique dans le paradigme du questionnement du monde, d'apporter des outils d'analyse didactique de cette activité, en particulier le cadre d'analyse des processus de modélisation. De plus, ils commencent à traiter le problème de l'écologie de processus d'enquête propres au paradigme du questionnement du monde et qui sont aujourd'hui fortement contraints par le paradigme dominant de la visite des œuvres. Nous présentons ici deux PER-FE expérimentés en formation initiale de futurs enseignants du primaire qui nous permettront d'illustrer deux aspects clé des processus de modélisation : l'importance de la modélisation intramathématique pour comprendre les mécanismes de processus de modélisation complexes et le rôle des simulations dans ces processus.

4.1. La boîte du pâtissier : un processus de modélisation progressif

La situation de modélisation que nous envisageons est inspirée d'une activité bien connue (Chappaz et Michon, 2003) : une pâtissière souhaite fabriquer différentes boîtes pour emballer ses gâteaux. Elle envisage d'utiliser une méthode de fabrication par pliage illustrée par la Figure 8.

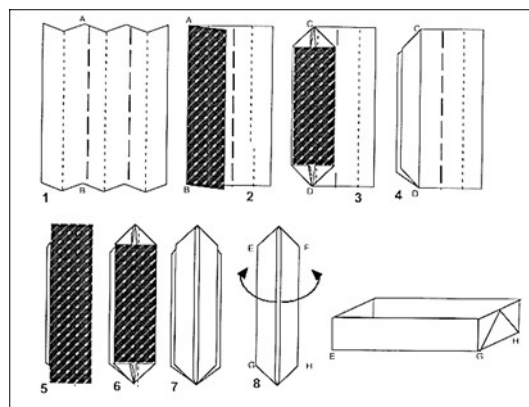


Figure 8 : La construction de la boîte (Chappaz and Michon, 2003, p. 32).

Cette situation déclenche un processus de modélisation engendré par différentes questions qui se posent successivement : « Quelles sont les dimensions de la boîte fabriquée à partir d'une feuille de papier donnée ? Quelle feuille de papier faut-il pour obtenir une boîte donnée ? Peut-on obtenir n'importe quelle boîte ? Quelle est la relation entre les dimensions de la boîte et celles de la feuille de papier ? » Les réponses à ces questions motivent le développement de différents modèles et ouvrent de nouvelles questions qui engendrent les suivantes.

Cette situation a été mise en œuvre à l’Université de Barcelone dans une unité de didactique des mathématiques pour la formation initiale d’enseignants du primaire, avec des étudiants de quatrième et dernière année d’université. Ce cours est le dernier des unités à contenu mathématique et didactique. Il vise à transférer des outils pour la conception, l’analyse et la gestion des mathématiques scolaires. La situation de la boîte du pâtissier est la dernière du cours. Elle est généralement mise en œuvre au long de sept séances de deux heures par semaine, avec des groupes d’environ 50 étudiants. Les étudiants n’ont pas reçu auparavant d’enseignement spécifique sur la modélisation mathématique.

Lors des trois premières séances, on propose aux étudiants de vivre l’activité de modélisation. L’objectif principal est de leur faire expérimenter une tâche peu familière qui pourrait, sous certaines conditions, exister dans une classe ordinaire. Au cours de ces séances, les étudiants travaillent en groupes de 4-5 et rédigent un rapport décrivant les processus suivis (questions abordées, modèles utilisés, réponses apportées et nouvelles questions pour poursuivre l’enquête). Les trois séances suivantes sont consacrées à l’analyse du processus de modélisation tel qu’il a été vécu. La mise en commun des rapports des élèves permet au formateur, en collaboration avec les étudiants, d’institutionnaliser les éléments du processus de modélisation et leur rôle (propriétés et limites des modèles, cohabitation ou concaténation des modèles, etc.).

Avec des feuilles DIN-A4, la construction de boîtes amène les étudiants à constater que l’on peut faire deux boîtes différentes (Figure 9) selon que l’on plie dans le sens de la longueur ou dans le sens de la largeur. Ils remarquent également qu’avec une feuille carrée, on ne peut réaliser qu’une seule boîte. Lorsque les dimensions de la boîte sont mesurées à partir de feuilles de différentes tailles (DIN-A4, DIN-A5, etc.), les élèves commencent à travailler avec le premier modèle 1 (M1) qui découle d’une praxéologie basée sur les *mesures empiriques*. Cette praxéologie fournit des outils techniques et théoriques pour répondre aux questions relatives aux dimensions des boîtes obtenues à partir de différentes feuilles.



Figure 9 : Boîtes produites avec une feuille A4 pliée en longueur (à gauche) ou en largeur (à droite).

A partir du travail avec M1, les étudiants fournissent des réponses à l’aide d’une table de mesures (voir exemple dans la Table 1) et ouvrent de nouvelles questions telles que : « avec une feuille carrée, on n’obtient pas une boîte à fond carré ; avec une feuille rectangulaire, on peut obtenir une boîte à fond carré ou rectangulaire ». Cependant, le travail avec M1 ne montre pas de lien apparent entre les dimensions de la feuille et les dimensions de la boîte obtenue.

Tableau 1 : Dimensions des boîtes et feuilles présentées par l’équipe B comme exemple de M1.

	Dimensions de la feuille			Dimensions de la boîte obtenue				
	A (longueur)	B (largeur)	Aire	A (long)	B (large)	Hauteur	Aire de la base	Volume
DIN-A2	59.4	42	2494.8	21.5	28.5	10.9	612.75	6678.975
DIN-A3	42	29.7	1247.4	<i>(nous n’avons pas recueilli les données)</i>				
DIN-A4	29.7	21	623.7	11.3	10	4.9	113	553.7
DIN-A5	21	14.5	155.925	15.8	5.1	2.5	80.58	201.45

Ce travail initial avec M1 aide les étudiants à hypothétiser certaines relations possibles telles que : « la hauteur semble toujours être la moitié de l'une des deux dimensions du fond ». L'étude de cette question conduit à considérer un système enrichi S1, qui comprend maintenant le système initial S0 composé de la feuille, de la boîte avec la procédure de pliage empirique, et M1.

En dépliant la boîte, une analyse géométrique des plis (dont certains représentent les dimensions de la boîte) conduit à la recherche d'une relation entre les différentes dimensions. On obtient un nouveau modèle 2 (M2) basé sur une praxéologie *géométrico-numérique*. Il inclut des propriétés géométriques élémentaires (logos), notamment celles du carré (par exemple, ses diagonales sont des axes de symétrie, Figure 10), et permet la recherche de relations numériques entre les longueurs (praxis). Dans la Figure 10, l'équipe C travaille avec cette praxéologie en essayant de trouver les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte à base carrée de 10 cm x 10 cm. Les plis forment 6 bandes verticales composées de deux carrés (5 cm x 5 cm) et d'un rectangle (5 cm x 10 cm). La longueur des côtés des 12 carrés de la figure correspond à la largeur d'une bande. Ces observations, basées sur le processus de pliage et les mesures (S1), sont validées par les propriétés géométriques des figures. Le travail avec M2 permet de décrire, valider et généraliser la relation entre les dimensions de la boîte et celles de la feuille, à travers un discours pré-algébrique. Par exemple, certains élèves établissent que « la hauteur de la boîte est égale à la moitié de sa largeur », ce qui « est égal au tiers de la longueur de la feuille », « alors que la longueur de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins deux hauteurs ».

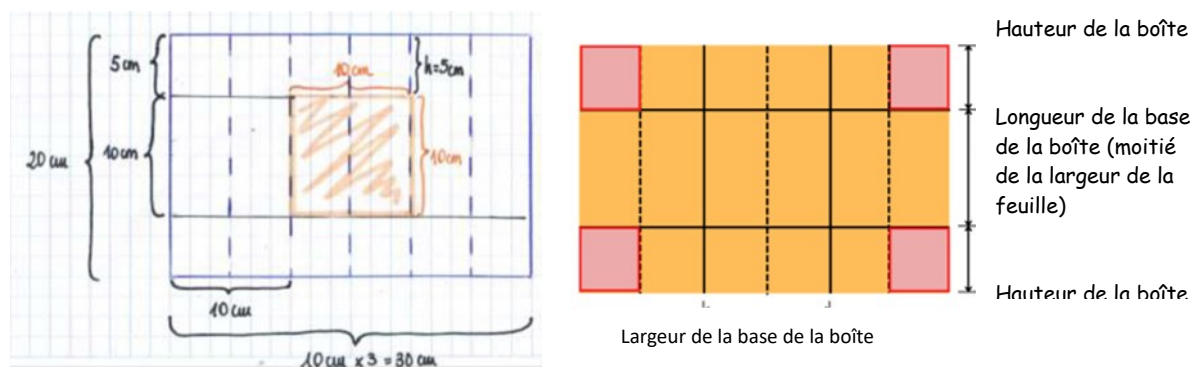


Figure 10 : Exemple de deux utilisations de M2 : équipe C (gauche) et équipe D (droite).

M2 généralise ce qui a été observé avec la mesure des boîtes (M1) par l'examen de nouvelles questions, telles que : « Quelle boîte peut-on faire avec une feuille de (n'importe quelles) dimensions données ? Quelle boîte peut être fabriquée avec une feuille de (n'importe quelles) dimensions données ? Quelle feuille doit être fournie pour obtenir une boîte de (n'importe quelles) dimensions données ? » Le processus de modélisation considéré ici constitue un nouveau système S2 qui comprend à la fois : le système précédent S1 et M2.

Comme nous l'avons vu dans la Figure 9, une feuille rectangulaire peut être utilisée pour construire deux boîtes différentes selon le sens du pliage. En notant x et y la largeur et la longueur de la feuille ; x_b et y_b les deux dimensions du fond de la boîte et z sa hauteur, l'équipe E (Figure 11) établit les relations algébriques qui lient les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis. Par exemple, si les plis sont parallèles à la largeur, ils indiquent :

- Nous savons que : $x_b = 1/3 x$. Nous observons aussi que la hauteur de la boîte correspond à $1/6 x$
- On en déduit que : $z = 1/6 x$

- Finalement, nous observons que la largeur de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins le double de sa hauteur :
 $y_b = y - 1/6 x - 1/6 x$
 $y_b = y - 2/6 x$
 $y_b = y - 1/3 x$
- Étant donné que $y_b = y - 1/3 x$, l'on obtient : $y_b = y - x_b$

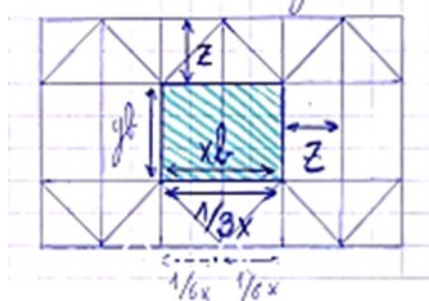


Figure 11 : Modélisation algébrique M3 de S2 fournie par l'équipe E.

Nous disposons donc maintenant d'un nouveau modèle M3 basé sur les praxéologies de l'algèbre élémentaire. Il inclut et étend les modèles précédents. En poursuivant le travail de généralisation et de développement du modèle algébrique, et en abordant, par exemple, les problèmes de maximisation de volume, un quatrième modèle M4 peut être construit sur la base de la praxéologie des fonctions élémentaires à plusieurs variables. Dans le premier sens de pliage, la fonction F1 associe les dimensions (a, b) d'une feuille aux dimensions (x, y, z) de la boîte et, dans le sens inverse, la fonction F2 associe les dimensions de la boîte (x, y) à celles de la feuille (a, b) :

$$F_1(a, b) = (a/3; b - a/3; a/6) \quad F_2(x, y) = (3x; x + y).$$

Cette brève analyse montre comment les praxéologies de modélisation se développent en même temps que de nouvelles questions émergent. Chaque modèle mathématique est motivé par l'apparition de nouvelles questions dans le système précédent et fait partie du nouveau système dans lequel le modèle mathématique suivant est construit. La Figure 12 synthétise l'évolution, et la concaténation, des praxéologies de modélisation lors de l'expérience de la situation de la boîte du pâtissier.

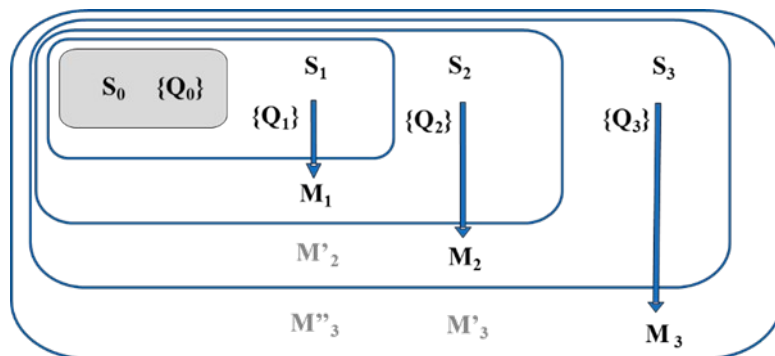


Figure 12 : Schéma du processus de modélisation de la boîte du pâtissier.

Dans un deuxième module du PER-FE, les participants sont invités à assumer un nouveau rôle, celui d'analystes mathématiques et didactiques. Assumer ce rôle implique de s'immerger dans l'analyse mathématique et didactique du processus de modélisation et du parcours qu'ils viennent de vivre. Afin de ne pas réduire cette analyse à une simple énumération des contenus

abordés ou à la correction des réponses, la formatrice souligne l'importance d'analyser la dynamique établie par les questions traitées, les systèmes considérés, les modèles construits et ceux qui peuvent coexister. L'on propose pour cela l'élaboration de *cartes de questions et de réponses* (Winsløw, Matheron et Mercier, 2013 ; Florensa, Bosch et Gascon, 2021) en tant qu'outil principal d'analyse.

Dans (Barquero, Bosch et Florensa, 2022), on trouve quelques exemples de cartes de questions-réponses (QR) élaborées par les enseignants en formation, dans le cadre de ce même PER-FE. À partir de ces cartes QR, on peut observer comment les étudiants, sous la guidance de la formatrice, attribuent une terminologie spécifique pour exprimer des phases ou étapes dans le processus de modélisation et nomment les différents modèles (par exemple, « modèle de boîte dépliée » (décrite comme M2) ou « modèle algébrique » (décrite comme M3) qui peuvent émerger et coexister dans les différentes étapes de PER.

Un élément crucial ici est que les enseignants en formation considèrent l'activité de modélisation dans son ensemble et soient capables de repérer les différents modèles coexistants, ainsi que de comprendre comment les utiliser, les valider et les faire évoluer. L'étude des limites des modèles et des techniques associées, ainsi que leur développement vers d'autres modèles plus complexes, par exemple, sont des questions qui enrichissent le logos didactique des enseignants sur le processus de modélisation et son analyse mathématique et didactique.

4.2. La ségrégation scolaire : modélisation et simulation

Le deuxième PER a été conçu pour travailler sur une situation d'enquête concernant la ségrégation scolaire. Il aborde un cas différent de ceux considérés plus haut car, ici, le processus de modélisation est directement nourri par l'examen de modèles déjà existants. Dans ce cas, le processus de modélisation comprend la délimitation du système, la recherche de modèles existants, leur sélection et leur comparaison, l'analyse de leurs propriétés et de leurs limites, le travail avec les modèles pour produire des réponses et les comparer, ainsi que leur validation finale et leur développement.

Le PER a été expérimenté pour la première fois en 2022/23 dans le cadre du premier cours obligatoire de mathématiques pour des étudiants de deuxième année de formation initiale d'enseignants du primaire à l'Université de Barcelone. Sa mise en œuvre s'est déroulée sur trois séances de deux heures (et un travail équivalent hors classe) avec un groupe de 45 étudiants, en début d'année. La question à l'origine de ce PER est née de la publication d'un rapport commandé par le bureau de l'Ombudsman de la Catalogne – et des nouvelles qui s'en sont dérivées – sur l'évolution de la ségrégation scolaire dans les municipalités catalanes les plus importantes. La question a été formulée comme suit : « Qu'est-ce que la ségrégation scolaire et comment est-elle mesurée ? Que signifie pour une municipalité une ségrégation scolaire de 0,43 ou de 0,21 ? D'où viennent ces chiffres et comment les interpréter ? »

Une recherche rapide sur Internet a permis aux étudiants de découvrir que la ségrégation scolaire est définie comme la répartition inégale des élèves vulnérables entre les écoles d'une municipalité. Ils ont utilisé comme principale source d'information le site web d'une fondation catalane d'études pédagogiques (www.fundaciobofill.cat). Comme l'indique le site, les déséquilibres contribuent à une concentration d'élèves vulnérables dans certaines écoles. En outre, la vulnérabilité de ces établissements est supérieure à celle des zones environnantes. Le site indique comme mesure typique de la ségrégation scolaire l'indice de dissimilarité D (voir la figure 13) et explique que D peut s'interpréter comme la proportion d'enfants vulnérables qui devraient être déplacés pour parvenir à une distribution complètement équilibrée. L'indice varie de 0 (absence de ségrégation) à 1 (niveau maximal de ségrégation). Même si certains étudiants

ont commencé l'enquête en essayant d'élaborer une mesure propre de la ségrégation – en entamant un processus de modélisation à partir de zéro –, le défi du PER s'est transformé en l'analyse et utilisation du modèle mathématique fourni par l'indice de dissimilarité.

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{X} - \frac{y_i}{Y} \right| \quad 0 \leq D \leq 1$$

x_i : nombre d'élèves vulnérables dans l'école i

y_i : nombre d'élèves non-vulnérables dans l'école i

X et Y : nombre total d'élèves vulnérables et non-vulnérables respectivement dans la municipalité ou le district.

Figure 13 : Indice de ségrégation D .

Le modèle de dissimilarité a donc été exploré par les étudiants qui ont travaillé en groupes, sous la direction du formateur. La première limite a été qu'ils ont trouvé différentes expressions du même indice de dissimilarité, dont certaines étaient mal formulées. Les premières étapes ont donc été consacrées à une meilleure formulation du modèle avec une définition plus claire des variables à prendre en compte. La Figure 14 montre le modèle convenu pour D par la classe et un exemple illustratif de son calcul. Ensuite, les groupes ont commencé à soulever des questions sur l'interprétation de la formule, le facteur $\frac{1}{2}$, son calcul, les cas correspondant à ses valeurs extrêmes, le type de pourcentages utilisés et l'interprétation de la valeur obtenue. Des questions se posent également sur la définition d'« élève vulnérable » et sur la fiabilité des données fournies par les municipalités. Après une première mise en commun, il a été convenu que chaque groupe travaillerait sur la simulation de certains scénarios inventés à propos d'une municipalité avec trois écoles, avec le total d'élèves vulnérables et non vulnérables qu'ils ont décidé, certaines avec beaucoup de ségrégation, d'autres avec presque aucune. Les étudiants ont rassemblé les cas simulés dans un fichier Excel partagé afin de disposer d'une grande variété de sous-systèmes à examiner.

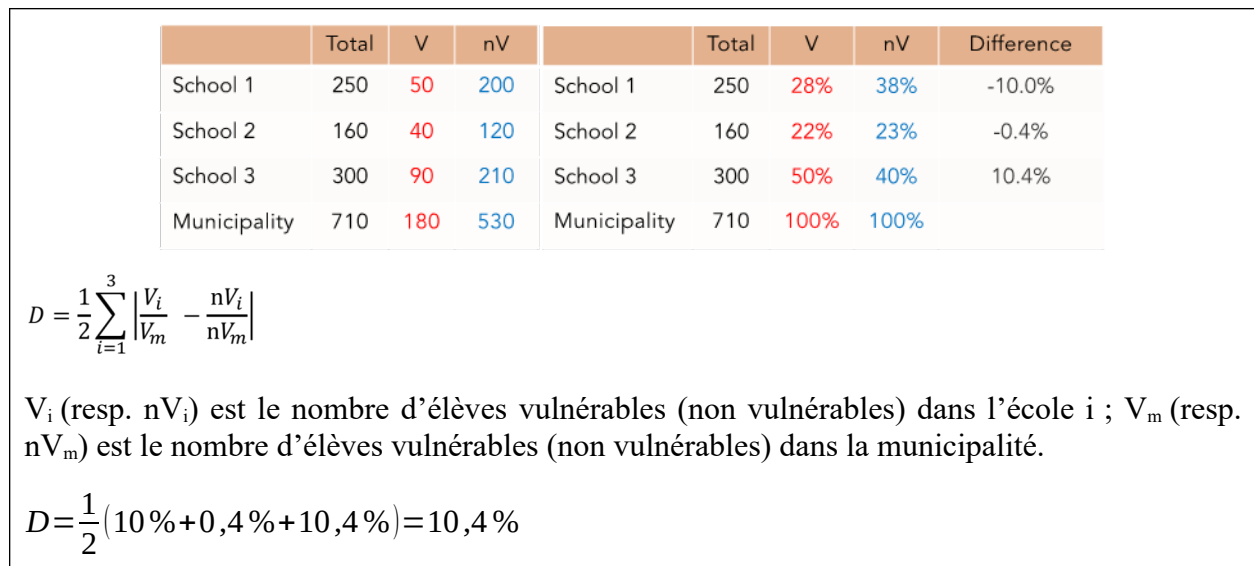


Figure 14 : Exemple de calcul de D pour une municipalité à trois écoles et expression adoptée en classe.

A partir de là, les groupes ont travaillé à modifier les valeurs de départ pour atteindre des indices de dissimilarité plus petits ou plus élevés. Ce travail a été possible par le fait que les étudiants s'étaient entraînés à simuler des sous-systèmes, qui n'étaient pas donnés par le formateur. Ils se sont alors attachés aux variables du modèle et à comprendre comment leur variation influence le

calcul de D . La variation systématique des paramètres a facilité un travail approfondi sur la simulation de sous-systèmes et sur l'interprétation et l'anticipation des valeurs de D . A la fin, les étudiants ont pu raisonner sur la manière de faire varier les variables du modèle afin d'atteindre un certain D . Ils ont pu trouver des cas avec D proche de 0, mais il était plus difficile d'obtenir $D = 1$ (ou 100%) qui correspond au cas d'une école avec tous les élèves vulnérables et seulement ceux-là. De plus, les simulations ont permis de découvrir que l'interprétation fournie par le rapport (D étant la proportion d'élèves vulnérables à relocaliser) n'est pas correcte. Le cas $D = 1$ le laissait déjà présager. Cette question est restée ouverte à la fin du PER (et nous invitons les lecteurs à l'explorer).

Le travail de modélisation développé dans ce deuxième cas peut être interprété de deux manières. D'une part, il s'agit d'un cas où un modèle déjà construit – la formule D – inverse son rôle : de modèle d'un système (la ségrégation scolaire), il devient pour les étudiants un objet d'étude et, donc, un système à examiner. Grâce à la simulation de modèles numériques partiels, avec des décisions sur les valeurs des variables de la formule, les étudiants ont créé des sous-systèmes pour élaborer de nouvelles connaissances sur le modèle donné. Ces sous-systèmes ont donc joué le rôle de modèle de la formule. Par ailleurs, la simulation a permis aussi de créer des sous-systèmes pour lesquels le modèle est valide et interprétable, contribuant ainsi à la délimitation du système initial considéré (la distribution des élèves vulnérables dans les écoles). Dans ce travail, la création de sous-systèmes simplifiés comme environnement empirique pour le travail de modélisation apparaît comme cruciale. C'est là que les décisions sur les cas à simuler ou sur la manière de modifier la simulation permettent d'étudier progressivement un modèle donné. Nous n'irons pas plus loin ici sur le rôle des simulations et leur statut dans les mathématiques enseignées. Mais il s'agit sans doute d'une dimension du travail d'enquête et de modélisation tout à fait fondamental et qu'il convient de continuer à explorer.

5. Questions ouvertes : Besoins épistémologiques et didactiques

Nous voulons terminer par deux grands groupes de questions que soulèvent les travaux antérieurs et qui devraient suggérer des voies possibles d'avancée. Les premières questions portent sur les praxéologies didactiques des enseignants pour concevoir et gérer des processus de modélisation dans toute leur complexité. Les processus de transposition didactique qui ont jusqu'à présent forgé les mathématiques à enseigner n'ont pas développé un cadre spécifique pour la modélisation. On remarque d'un côté qu'il n'y a pas de consensus à ce propos dans les mathématiques savantes et, d'un autre côté, que le peu de travail transpositif qui existe est encore peu développé, malgré l'explosion de manuels universitaires sur la matière qui sont publiés ces dernières années (Puchaczewski, Bosch et Strømskag, soumis). Sans cet appui mathématique et épistémologique, il devient difficile de construire des praxéologies didactiques appropriées dont le logos devrait inclure ces fondements mathématiques manquants, ce logos mathématique qui permettrait d'éviter que les processus de modélisation restent « muets » (Wozniak, 2012) ou limités à être considérés comme des moyens d'étude d'autres outils ou connaissances mathématiques. Il semble que les programmes scolaires de nombreux pays naturalisent ce logos mathématique et ne prennent en compte, au plus, que quelques éléments généraux du logos didactique.

Le second groupe de questions porte sur le statut de la « compétence modéliser » dans les mathématiques scolaires et le paradigme pédagogique associé. Si nous nous situons dans le paradigme de la visite des œuvres (Chevallard, 2015, 2020), le processus de modélisation peut se concevoir soit comme une œuvre (mathématique) en soi, soit comme un moyen pour visiter d'autres œuvres mathématiques, ce qui l'approcherait d'un outil d'étude, soit une stratégie didactique. Ces deux rôles attribués à la modélisation coexistent aujourd'hui dans les systèmes

actuels d'enseignement. Pourtant, lorsque l'on adopte la perspective du paradigme du questionnement du monde, la modélisation s'intègre dans les processus d'enquête comme un instrument pour élaborer des réponses aux questions abordées. La question n'est plus alors « comment enseigner la modélisation ? » mais « comment conduire (ou aider à conduire) des processus d'enquête ? » qui, inévitablement, incluront des processus de modélisation. En réalité, les recherches menées par notre groupe sur les parcours d'étude et de recherche dans l'enseignement secondaire et universitaire, ainsi qu'en formation des enseignants montrent à quel point les développements qu'apporte la TAD pour décrire et gérer les processus de modélisation apparaissent comme des outils praxéologiques indispensables dans la construction et la mise en place des processus d'enquête à l'école. Nous en avons présenté quelques exemples ici, en espérant avoir réussi à montrer à quel point le travail empirique et de collaboration entre enseignants et chercheurs en didactique reste indispensable pour obtenir des avancées robustes et effectives.

Remerciements

Travail réalisé avec le support des projets de recherche PID2021-126717NB-C31, PDC2022-133812-C21 et PDC2022-133812-C22 du gouvernement espagnol : MCIN/ AEI /10.13039/501100011033/ et FEDER (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Références bibliographiques

- Barquero, B. (2024a). La modélisation mathématique comme domaine de recherche : avancées dans l'analyse écologique. In (eds) *Actes 21e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. ARDM.
- Barquero, B. (2024b). Mathematical modelling as a research field: transposition challenges and future directions. In P. Drijvers & H. Palmér (Eds.), *Proceedings of the 13th CERME conference* (in press). ERME.
- Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM*, 21, 87–106. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4232seiem.es>
- Barquero, B., Bosch, M., Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43.
- Barquero, B., Bosch, M., Wozniak, F. (sous presse). Moving beyond mute modelling praxeologies in pre-service elementary teacher education. In H. S. Siller, G. Kaiser, & V. Geiger (Eds.) *Researching mathematical modelling education in disruptive/challenging times. ICTMA20 Proceedings*. Springer.
- Chappaz, J., & Michon, F. (2003). Il était une fois...La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.
- Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

Berta Barquero et Marianna Bosch

- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2015). Pour une approche anthropologique du rapport au savoir. *Dialogue*, 155, 1-11. https://gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial155_enligne_anthropo_rap_savoir_chevallard.pdf
- Chevallard, Y. (2020). Assumer un changement civilisationnel : pacte scolaire et mathématiques. Printemps de la recherche en éducation 2019. *Éducation et didactique*, 14-1. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.5448>
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona : ICE-Horsori.
- Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J. (2021). Question–answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(2), 203–225. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09454-4>
- Puchaczewski, E., Bosch, M., Strømskag, H. (soumis). The university perspective on modelling: an exploratory study. *Conference INDRUM2024, June 2024*.
- Vásquez, S., Barquero, B., Bosch, M. (2021). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the ATD. *Quadrante*, 30(2), 200–219. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23878>
- Winsløw, C., Matheron, Y., Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267–284. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3>
- Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(1), 7-55. <https://revue-rdm.com/2012/des-professeurs-des-ecoles-face-a/>
- Wozniak, F., Barquero, B., Bosch, M., Kaspary, D. (2024). Les praxéologies muettes de la modélisation. *Actes 21e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. ARDM.