

Rubrique : Construire un raisonnement, une argumentation.

Module : Correction d'un devoir à la maison.

IREM de Lyon. (*Activités pour les modules en 2de.Sept.93*).

Thème :

Confrontation de résultats construits par les élèves au sujet d'une question sur une configuration simple.

Objectifs :

Montrer et faire prendre conscience aux élèves :

- que l'on ne peut se contenter, comme seule preuve, d'un dessin ou d'une valeur approchée.
- qu'il existe en général différentes méthodes pour résoudre un problème, et qu'elles conduisent au même résultat.

Constitution des groupes :

Cette séquence est centrée autour de la correction d'un devoir à la maison.

Lors de la séance de correction de ce devoir, les élèves sont répartis en petits groupes ; traiter cette activité en module permet donc, par exemple, de regrouper des élèves qui sont arrivés à des résultats différents avec des méthodes semblables - au sein de chaque groupe on peut ainsi faire naître une certaine confrontation, qui permettra aux élèves d'atteindre, en particulier, le premier objectif mentionné ci-dessus -.

En fin de séance, une mise en commun des travaux de chacun des groupes mettra en évidence la pluralité des méthodes de résolution du problème posé.

Présentation de la séance.

ÉNONCÉ

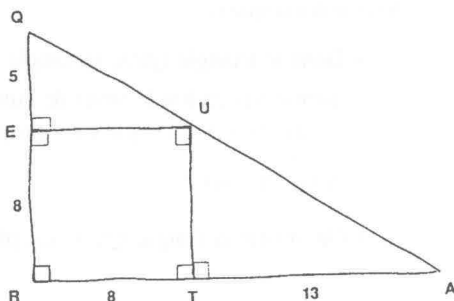
Le dessin ci-contre est un dessin à main-levée.

Les dimensions sont données en centimètres.

Que pouvez-vous dire des points Q , U et A ?

J'ai trouvé trois méthodes.

Qui dit mieux ?



Consignes

A propos du devoir dont l'énoncé est reproduit ci-dessus, et à l'aide de vos copies, mettez-vous d'accord sur :

- la position de Q , U , A ;
- les démonstrations qui vous paraissent correctes.

Chaque groupe devra présenter ce travail, au bout d'une heure, au reste de la classe.

Descriptif - Quelques éléments d'analyse.

Le document élève a été donné dans le cadre d'un devoir à la maison. La correction a eu lieu en module.

Notons d'abord que la quantité de démarches possibles permet de poser ce problème en tout début d'année. L'énoncé est extrait d'un manuel de 4ème (Pythagore, p.134, édition 1988).

Les copies n'ont pas été annotées, mais elles ont permis de constituer des groupes de 3 ou 4 élèves dont les résultats, quant à la réponse pour Q , U et A , ne sont pas identiques, et, si possible, avec un même type de démarche.

Ce choix permet de favoriser les confrontations à l'intérieur d'un même groupe.

Une mise en commun à la fin a permis de lister les différentes méthodes, après discussion sur leur validité dans certains cas.

Démarches possibles des élèves pour la résolution de ce problème :

En supposant que tous les élèves donnent la bonne réponse, à savoir que les points ne sont pas alignés, ils peuvent utiliser plusieurs méthodes :

- a) Calcul des aires QUE , $UTRE$, AUT et QRA . Confrontation et conclusion ; ici, les calculs utilisent des nombres décimaux, et c'est ce qui était proposé dans le livre de mathématiques de quatrième.
- b) Utilisation du théorème de Pythagore pour calculer les hypoténuses (QU , UA et QA) des triangles et vérifier que $QU + UA > QA$ (inégalité triangulaire avec des racines carrées) ;
- c) Utilisation des mesures d'angles (ce qui reviendra à calculer des lignes trigonométriques).

- Dans le triangle QRA , rectangle en R , les angles $\widehat{Q}$ et $\widehat{A}$ sont complémentaires (ou le sinus de l'un est le cosinus de l'autre). On utilise alors les triangles rectangles QEU et UTA pour calculer $\sin \widehat{Q}$ et $\cos \widehat{A}$.

- On vérifie si l'angle $\widehat{QUA}$ est plat. D'où, avec les mêmes petits tri-

angles, on évalue les angles $\widehat{EUQ}$ et $\widehat{TUA}$.

- Si les droites sont parallèles, les angles correspondants sont égaux.

On compare les angles $\widehat{EQU}$ et $\widehat{TUA}$.

d) Dans un repère (orthonormé en général) défini par $\left(R; \frac{1}{21}\overrightarrow{RA}; \frac{1}{13}\overrightarrow{RQ}\right)$,

on utilise deux des trois droites (QU) , (UA) et (QA) .

- On compare les coefficients directeurs des droites avec la formule :

$$a = (y_B - y_A) / (x_B - x_A).$$

- On détermine une des équations de droites, (QA) par exemple, et on vérifie l'appartenance du troisième point (les équations sont données sous forme réduite ou sous forme cartésienne) à la droite (QA) .

- Plus tard dans l'année, on peut étudier la colinéarité des vecteurs

$\overrightarrow{QU}$ et $\overrightarrow{QA}$ par exemple.

e) *Utilisation du théorème de Thalès :*

On suppose que U' est sur la droite (QA) et sur la droite (EU) . On applique le théorème de Thalès avec les droites parallèles (EU) et (RA) par exemple. On calcule EU' avec les rapports $EU'/RA = QE/QR$.

D'où $EU' = \frac{QE \times RA}{QR} = 5 \times \frac{21}{13}$ donc EU' et EU sont différents, car

$$\frac{5 \times 21 - 8 \times 13}{13} = \frac{1}{13}$$

f) Calcul vectoriel, en vérifiant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{QU}$ et $\overrightarrow{QA}$, en utilisant la définition de points alignés et la propriété du carré. Ainsi

$$\overrightarrow{QU} = \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EU}.$$

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RA} \text{ avec } \overrightarrow{QR} = \frac{13}{5}\overrightarrow{QE} \text{ et } \overrightarrow{RA} = \frac{21}{8}\overrightarrow{EU}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{QA} = \frac{13}{5}\overrightarrow{QE} + \frac{21}{8}\overrightarrow{EU}.$$

Or, dire que des points sont alignés, signifie que $\overrightarrow{QA} = k\overrightarrow{QU}$, ce qui

conduit à écrire $\frac{13}{5} = \frac{21}{8}$!

g) *Utilisation de l'homothétie et de ses propriétés* (à condition de l'avoir vue dès le début de l'année). On peut rapprocher de l'agrandissement et de la réduction du programme de troisième.

Production des élèves dans les copies :

- Certains élèves ont basé leur conviction sur le dessin : faute de précision, (un seul élève a fait le dessin sur papier millimétré), ils concluent à l'alignement des points. Les justifications s'appuient sur des calculs approchés.
- D'autres, ce qui paraît très étonnant, ont obtenu à l'aide d'une méthode, des points alignés et le contraire avec une autre méthode. Ils ne se sont pas aperçus de la contradiction et de l'incohérence des résultats proposés.
- La méthode basée sur le calcul de l'aire n'est apparue qu'une fois (c'était la méthode de quatrième).
- L'utilisation du théorème de Pythagore et de la trigonométrie sous toutes ses formes est fréquente.
- Le cas des vecteurs colinéaires est apparu, mais plus pour des raisons de contrat que de conviction personnelle des élèves-auteurs, car, peu de temps auparavant, nous l'avions étudié (à vrai dire, je m'attendais un peu à cette démarche).
- Certains ont utilisé Thalès, avec un essai de mise en œuvre d'un raisonnement par l'absurde de façon maladroite, mais il est à noter que la démarche est quand même naissante.
- En ce qui concerne la comparaison des rapports et racines carrées (les nombres décimaux sont bien traités), le travail ne fut pas traité de manière correcte pour tous : le syndrome de la calculatrice a frappé chez la plupart ! D'où certaines conclusions erronées, car les deux premières décimales des résultats concordent. Par contre, un travail, parfois remarquable, a été fait par certains quant à la comparaison des racines carrées.

Travail des groupes, mise en commun :

Sur certaines démonstrations, les groupes se sont mis d'accord facilement : celles qui utilisent les mesures d'angles, celle avec les aires (qui a fait l'unanimité, les élèves étant heureux de retrouver une méthode de 4ème). Sur les problèmes liés aux valeurs approchées (rapports ou radicaux), il est plus difficile de se mettre d'accord : ce problème sera traité en grand groupe, avec l'aide du professeur.

En conclusion de cette séance, j'ai énoncé comme règles de fonctionnement dans la classe les objectifs écrits dans la présentation de ce travail.