Rubrique : Réinvestir des connaissances et consolider des savoirs.

Module : **Section d'un cube par un plan.**
IREM de Poitiers

Objectifs :

Découvrir quelques énoncés de géométrie dans l'espace (trois points non alignés déterminent un plan ; deux plans sécants se coupent selon une droite ; deux plans parallèles coupent un troisième plan selon deux droites parallèles).

Calculer le volume d'un cube, d'un tétraèdre.

Décomposer un problème compliqué en sous-problèmes plus simples (trouver l'intersection d'un plan avec le cube revient à chercher les intersections avec chacune des faces).

Réinvestir dans l'espace des méthodes de géométrie plane.

Etablir que deux droites de l'espace sont parallèles.

Construire un patron pour réaliser un cube.

Utiliser les propriétés de la perspective cavalière (conservation des proportions et du parallélisme, non-conservation des distances et des angles) et les conventions de dessin (arêtes visibles ou non) pour faire une figure.

Pré-requis : Théorème de Thalès, Théorème de Pythagore.

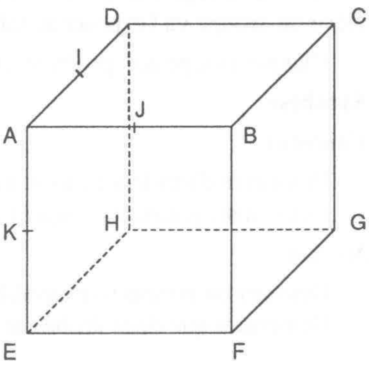
Présentation de la séance.

ÉNONCÉ

Un cube a des arêtes de 7 cm. On porte sur les trois arêtes issues d'un sommet A les points I, J, K tels que $AI = 3$, $AJ = 4$, $AK = 4$.

1- Etudier l'intersection du cube avec le plan (IJK).

2- Dessiner les deux solides séparés par la section plane, et calculer leurs volumes.



3- Sur l'arête *[AD]*, on porte *I'* tel que *AI'* = 4,5. Etudier l'intersection du cube avec le plan passant par *I'* et parallèle au plan *(IJK)*.

CONSIGNE :

Faire une maquette du cube en carton mince, et une figure en perspective cavalière la plus précise possible.

Raisons du choix :

La longueur 7 cm a été choisie d'une part parce que le patron tient dans une feuille A4, d'autre part parce que les rapports 3/7 et 4/7 ne sont pas décimaux (ce qui doit pousser, pour placer les points *I, J, K* à effectuer une construction plutôt qu'une mesure).

La formulation *»Etudier l'intersection du cube avec le plan (IJK)»* est volontairement vague pour que les élèves la précisent eux-mêmes. On espère, par exemple, qu'un élève proposera de dessiner le triangle *IJK* en vraie grandeur (sinon le professeur le proposera lui-même), ce qui suppose de nouveaux savoir-faire (calculer les longueurs des côtés, construire un triangle, connaissant les longueurs des côtés,...).

Gestion de l'activité :

La séance dure 1h30, davantage si cela s'avère nécessaire.

La maquette a été pré-découpée à la maison, le collage se faisant en début de séance. On peut envisager un cube en plastique transparent qui peut être rempli d'eau ou de sable.

Le logiciel «Dessiner l'espace» peut être mis à la disposition des élèves en libre-service.

Les élèves sont en groupes de 3 ou 4.

Quand émerge d'un groupe une idée qui peut intéresser tout le monde, un élève du groupe va l'exposer au tableau.

Chaque groupe doit produire un compte-rendu en fin de séance.

Synthèse :

Contenus :

Propriétés d'incidence (droites et plans).
Deux plans parallèles coupent un troisième selon deux droites parallèles.

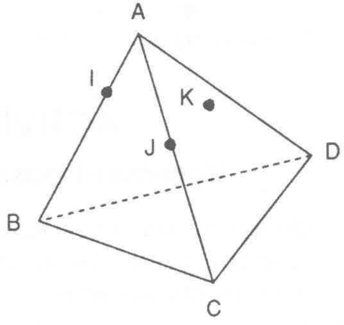
Méthodes :

Dessiner en perspective cavalière.
Démontrer que deux droites de l'espace sont parallèles.

Exercices d'appropriation des méthodes :

1- Faire la question 3 en remplaçant le point *I'* par le point *D* (Attention, l'intersection n'est plus un triangle).

2- Dans le tétraèdre ci-contre, *I* est sur *[AB]*, *J* sur *[AC]* et *K* appartient au plan *(ABD)*.
Construire l'intersection du plan *(IJK)* avec le tétraèdre.



3- *SABCD* est une pyramide régulière à base carrée *ABCD*. *I* étant le milieu de *[SA]*, on considère le plan *(P)* passant par *I* et parallèle au plan *(SBC)*. Déterminer son intersection avec la pyramide.

Prolongements possibles :

Dans la situation de l'énoncé :

1- Construire les intersections du plan *(IJK)* avec les trois autres faces du cube.
(**But :** sortir du cube)

2- On appelle *L* l'orthocentre du triangle *IJK*. Est-ce que la droite *(AL)* est orthogonale au plan *(IJK)* ?
(**But :** introduire les problèmes d'orthogonalité).

Utilisation pour les modules :

1- Observer comment les élèves placent les points *I, J, K* sur la figure en perspective cavalière :
Utilisent-ils le double-décimètre ? Font-ils des calculs ?
Utilisent-ils le quadrillage de la feuille ? Refont-ils éventuellement le dessin du cube pour pouvoir exploiter le quadrillage ?

2- Observer s'ils prennent l'initiative de décomposer la question *«Etudier l'intersection du plan (IJK) avec le cube»* en sous-questions *«Etudier l'intersection avec chacune des faces»*.

3- Observer s'ils ont des difficultés à dessiner les deux parties alors qu'il suffit de recopier, en modifiant certains pointillés. Voir fiche module «Comment passer de l'espace au plan».

4- Observer comment ils calculent le volume du petit tétraèdre.

(la formule volume $= \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$ pouvant être utilisée de 4 façons).

5- Observer s'ils tracent des parallèles à *(IJ)*, *(JK)* et *(KL)*,

a) sur la maquette,

b) sur le dessin.

Voir fiche module «Comment construire une intersection».

ACTIVITÉ MODULAIRE
Comment passer de l'espace au plan.

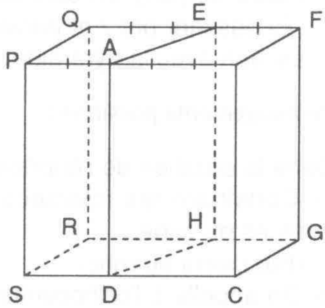
1- On donne différentes maquettes d'objets (cube, prisme, pyramide, cylindre, cône), éventuellement tronquées de façon simple. Dessiner chaque objet.

2- Le cube ci-contre a été découpé selon le plan indiqué.

a) Dessiner en vraie grandeur le rectangle *AEHD*.

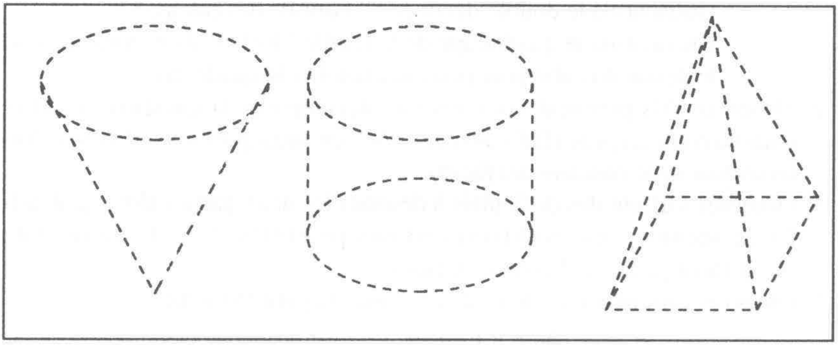
b) Dessiner séparément les deux parties, en perspective cavalière.

c) Dessiner un patron de chaque partie.

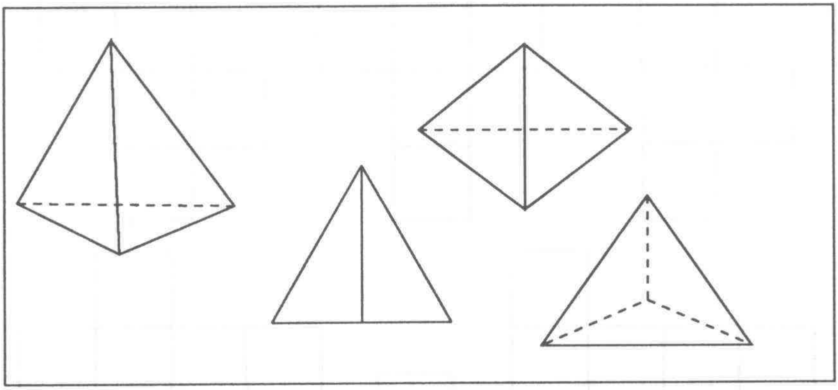


3- *D'après EVA2-92*

Trois solides sont représentés ci-dessous en perspective : pour chacun d'eux, repassez en couleur les lignes que vous considérez comme visibles, et laissez les autres en pointillés.

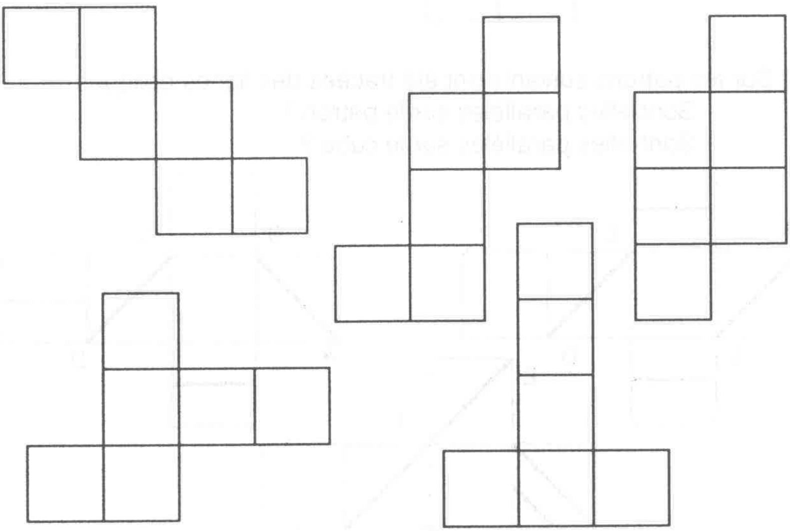


4- Les figures suivantes représentent le même tétraèdre régulier. Laquelle vous paraît la plus commode pour trouver la hauteur de ce tétraèdre ?

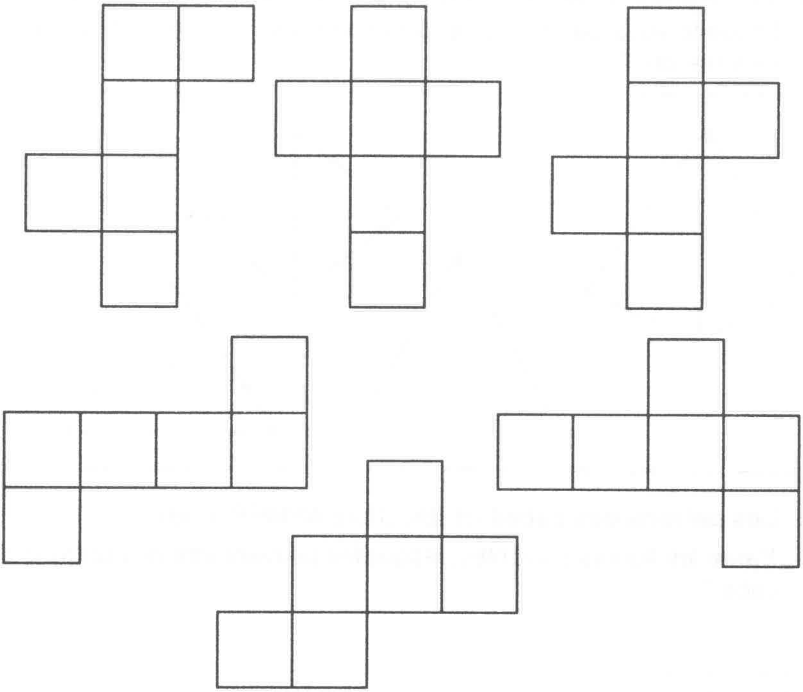


5- **Les patrons des cubes** (cf. Brochure APMEP n°58).

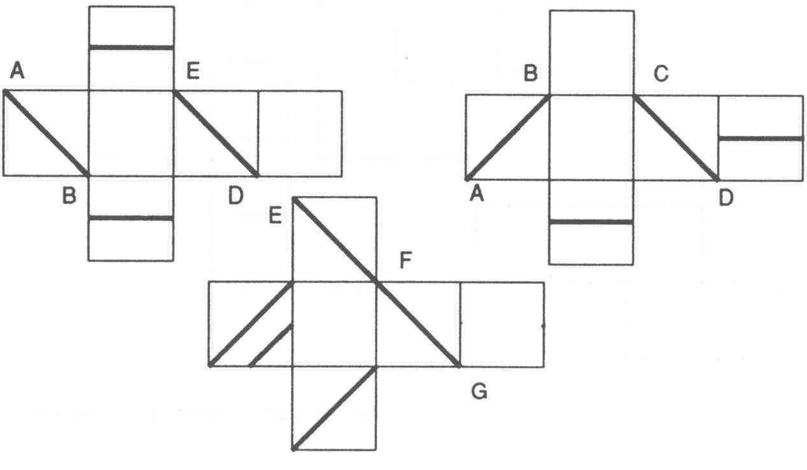
a) Parmi les figures suivantes, lesquelles peuvent être des patrons de cube ?



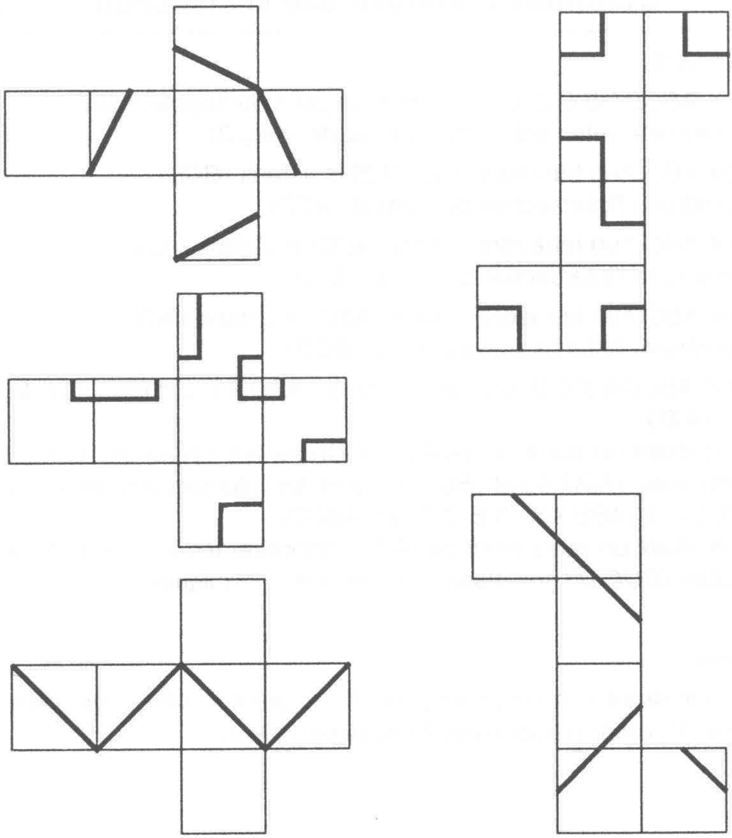
voir les autres patrons page suivante



b) Sur les patrons suivants ont été tracées des lignes obliques.
Sont-elles parallèles sur le patron ?
Sont-elles parallèles sur le cube ?



c) Sur les patrons suivants ont été tracées des lignes.
Sont-elles fermées sur le cube ?



Synthèse

Quelles sont les différentes façons d'associer à un objet de l'espace une figure plane ?

Quels en sont les avantages et les inconvénients ?

ACTIVITÉ MODULAIRE

Comment construire une intersection.

ÉNONCÉS.

1- Soit *ABCDA'B'C'D'* un cube et *K* un point du segment *[BC']*.
Construire l'intersection de *(D'K)* et de *(ABCD)*.

2- Soit *ABCD* un tétraèdre, *I* sur *[AB]* et *J* dans *(BCD)*.
Construire l'intersection de *(IJK)* et *(ACD)*.

3- Soit *ABCD* un tétraèdre, *I* dans *(ABC)* et *J* dans *(BCD)*.
Construire l'intersection de *(IJ)* et *(ACD)*.

4- Soit *ABCD* un tétraèdre, *I* dans *(ABC)* et *J* dans *(BCD)*.
Construire l'intersection de *(IJ)* et *(BCD)*.

5- Soit *ABCDA'B'C'D'* un cube, *I* dans *(ADD'A')*, *J* dans *(BCC'B')*, *K* sur *(A'B')*.
a) *K* étant un point de *(A'B')*, construire les intersections du plan *(IJK)* avec *(ADD'A')* et *(BCC'B')*, puis les intersections de *(IJ)* avec *(DCC'D')*, *(ABB'A')*, *(A'B'C'D')* et *(ABCD)*.
b) *K'* étant un autre point de *(A'B')*, comparer les intersections avec le plan *(DCC'D')* des plans *((IJK)* et *(IJK')*. Expliquer.

Synthèse :

Si une droite *(D)* coupe un plan *(P)* au point *A*, alors, tout plan qui contient *(D)* coupe *(P)* selon une droite passant par *A*.