Rubrique : Réinvestir des connaissances et consolider des savoirs.

Module : L'irrationnel $\sqrt{2}$

IREM de Clermont-Ferrand.

Thème :

Ce travail porte sur trois points précis :
- Ecriture décimale illimitée périodique d'un rationnel et réciproque.
- Preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.
- Exemples de recherche des premières décimales de $\sqrt{2}$.

Objectif général :

Le but principal de cette activité est de donner une dimension épistémologique au traitement d'une partie bien ciblée du programme.

Objectif par rapport à la construction des connaissances :

Cette activité a pour but de faire manipuler des inégalités comportant des irrationnels, et de permettre aux élèves de faire le lien entre la relation d'ordre sur l'ensemble des nombres et la détermination de valeurs approchées d'un nombre. Elle permet, dans la deuxième partie, d'introduire les écritures sous la forme $2p$ pour un nombre pair et $2p + 1$ pour un nombre impair.

Articulation avec le cours et les T.D.

Constitution des groupes :

L'enchaînement proposé pour cette activité est le suivant :

1 heure de cours,
1 heure et demie de module,
1 heure de travaux dirigés.

La constitution des groupes (décrite ci-après, dans la présentation de l'activité) est faite à partir d'un exercice proposé aux élèves en recherche individuelle ; le professeur peut aussi s'aider de l'évaluation réalisée en début d'année.

Présentation de la séance.

En préliminaire, le professeur donne aux élèves un travail à la maison comportant :

- un texte à étudier sur l'histoire des nombres (un extrait de leur manuel : le NATHAN de 2*),
- un exercice à chercher au brouillon.

EXERCICE :

1- A l'aide de votre calculatrice, donnez une valeur approchée à 10^{-6} près des nombres suivants : $\frac{67}{33}$; $\frac{45}{37}$; $\frac{20}{3}$.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous le confirmer en posant la division pour un des nombres ?

2- Donnons-nous à présent le nombre $0,\overline{71} = 0,7171...$

Est-il rationnel ?

Cherchons une équation qui a pour unique solution $0,\overline{71}$.

Posons $X = 0,\overline{71}$. Calculer $100X$. Comparer $100X$ et X. Que constatez-vous concernant leur différence ?
Résoudre l'équation ainsi trouvée. Conclure.

Première partie : 1 heure (une heure de cours).

Le professeur interroge les élèves sur le texte qui était à étudier, et à ce moment, capitalise sur un cahier les notations des différents ensembles de nombres. L'exercice qui avait été proposé est ensuite corrigé et la correction est, elle aussi, entièrement écrite sur le cahier.

Toujours dans cette première partie, le professeur distribue aux élèves l'exercice proposé ci-dessous, et leur demande de produire une réponse sur feuille avant la fin de l'heure. A la fin du cours, le professeur ramasse les différents travaux. Ces copies vont lui permettre de répartir la classe en deux groupes ; il peut aussi s'aider de l'évaluation de début d'année (par exemple pour ce qui concernait une utilisation de cette activité durant l'année scolaire 92-93, le professeur pouvait utiliser les réponses aux items 8 et 13 de l'évaluation).

Enoncé distribué aux élèves lors de la première partie :

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec

a et b entiers ($b \neq 0$) et $\frac{a}{b}$ irréductible.

1- Expliquez pourquoi on a $a^2 = 2b^2$.

2- Supposons que a soit impair, c'est-à-dire que a peut s'écrire sous la forme $a = 2p + 1$, avec $p \in \mathbf{N}$.
Montrez qu'alors $4p^2 + 4p + 1 = 2q^2$.
$4p^2 + 4p + 1$ est-il pair ou impair ? $2q^2$? Montrez que l'on aboutit à une contradiction.

3- Supposons que a soit pair ($a = 2p$). On doit alors avoir b impair.
Ecrivons $b = 2q + 1$. Montrez qu'alors $2p^2 = 4q^2 + 4q + 1$.
En vous aidant du (2), concluez.

Deuxième partie : 1h30 (Module).

Le professeur corrige l'exercice et cette correction est capitalisée sur le cahier. A la fin de ce travail, les élèves sont placés en situation de recherche individuelle sur les thèmes suivants :

Groupe 1

Théorème : $a \geq 0$; $b \geq 0$, on a : $a < b$ ssi $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
NB : si $a > 0$ et $b > 0$, alors $a < (a + b)/2 < b$.

1- Montrez que $\sqrt{2}$ est compris entre 1 et 2.

2- Considérez $C = \frac{1+2}{2}$.

Calculez C^2, en le comparant à 2 et établir que $\sqrt{2} < C$.

En déduire que $1 < \sqrt{2}$.

3- Considérez $C = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2}$ Calculez C^2. Comparez C et $\sqrt{2}$.

4- Continuez.

Groupe 2

Montrez que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$:

a) Si $a < \sqrt{2}$ alors $\sqrt{2} < \frac{2}{a}$.

b) Si $a > \sqrt{2}$ alors $\sqrt{2} > \frac{2}{a}$.

c) En déduire que pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$, $\sqrt{2}$ est compris entre a et $2/a$.

d) $\forall a \in \mathbf{R}_+^*$; $\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.

e) Prendre $a = 1$, montrez que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Prendre $a = 1{,}5$, montrez que $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Prendre $a = \frac{17}{12}$, montrer que $\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$.

Continuez.

Troisième partie : 1 heure (travaux dirigés).

Le professeur corrige les feuilles 4 et 5, ainsi les groupes auront capitalisé exactement la même chose, ce qui évite toute «différence».