Rubrique : Recenser différentes méthodes pour résoudre un problème.
L'outil informatique

Module : **La droite d'Euler**. IREM de Nice

Objectifs : Révisions au sujet des droites remarquables dans un triangle et conjecture d'un alignement.
Démonstration de l'alignement à l'aide de différents outils..

Présentation de la séance.

Cette activité comporte deux parties :

La partie conjecture avec CABRI-Géomètre, qui permet à l'élève de revoir ce qu'il a appris au Collège concernant les hauteurs, les médiatrices, les médianes.

LES HAUTEURS

Tracer deux hauteurs de ce triangle *(MENU CONSTRUCTION)*.

Définir et nommer *H* le point d'intersection

(MENU CONSTRUCTION Intersection de deux objets puis MENU EDITION Nommer)

Effacer les hauteurs

(MENU EDITION Aspect des objets, Gomme).

Questions :

Que pouvez-vous affirmer concernant la 3ème hauteur ?
Quel nom porte le point H ?
Donner des conditions sur le triangle pour que :

H soit confondu avec un sommet du triangle,
H soit sur l'un des côtés du triangle,
H soit à l'intérieur du triangle,
H soit à l'extérieur du triangle.

Pour ces dernières questions, conjecturez, puis vérifiez en déplaçant un sommet du triangle.

LES MÉDIATRICES

Mêmes procédés que pour les hauteurs. On nommera *O* le point d'intersection.

Questions :

Que pouvez-vous affirmer concernant la 3ème médiatrice ?
Quel nom porte le point *O* ?
Donner des conditions sur le triangle pour que :

O soit confondu avec un sommet du triangle,
O soit sur l'un des côtés du triangle,
O soit à l'intérieur du triangle,
O soit à l'extérieur du triangle,
O et *H* soient alignés avec un sommet du triangle,
O et *H* soient tous deux à l'intérieur du triangle,
O et *H* soient tous deux à l'extérieur du triangle,
O et *H* soient l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du triangle,
O soit sur l'un des côtés et *H* sur un sommet du triangle.

Pour ces dernières questions, conjecturez, puis vérifiez en déplaçant un sommet du triangle.

LES MÉDIANES

Mêmes procédés que pour les hauteurs. On nommera *G* le point d'intersection.

Questions :

Que pouvez-vous affirmer concernant la 3ème médiane ?
Quel nom porte le point *G* ?
Donner des conditions sur le triangle pour que :

G soit confondu avec un sommet du triangle,
G soit sur l'un des côtés du triangle,
G soit à l'intérieur du triangle,
G soit à l'extérieur du triangle.

TRACEZ LA DROITE PASSANT PAR *O* ET *H*.
Que constatez-vous ?
Est-ce toujours vrai ? (Déplacez un sommet, puis un autre).

La partie démonstration avec différents outils présente cinq problèmes : le but de chacun d'entre eux étant de démontrer que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés.

GÉOMÉTRIE DES CONFIGURATIONS :

Soit *A'* le point symétrique de *A* par rapport à *O*.

1- Montrer que les droites *(CH)* et *(BA')* sont parallèles.
2- Montrer que les segments *[BC]* et *[HA']* ont le même milieu *I*.
3- Montrer que *G* est le centre de gravité du triangle *AHA'*.
4- En déduire que les points *O, G, H* sont alignés et déterminer la position du point *G* par rapport aux points *O* et *H*.

OUTIL VECTORIEL :

Soient *I* milieu de *[BC]* et *H'* le point tel que : $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

1- Montrer que $\overrightarrow{AH'} = 2\overrightarrow{OI}$, puis en déduire que *(AH')* est une hauteur du triangle *ABC*.
2- Montrer que *(BH')* est une autre hauteur du triangle *ABC*. Que représente le point *H'* pour le triangle *ABC* ?
3- *G* étant le centre de gravité du triangle *ABC*, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$, déduire de cette égalité que les points *O, G, H* sont alignés et donner la position de *G* par rapport à *O* et *H*.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O', \vec{i}, \vec{j})$, soient les points $A(3 ; 9)$; $B(-3 ; 1)$; $C(9 ; -3)$.

1- Déterminer les coordonnées du point *H* orthocentre du triangle *ABC*.
2- Déterminer les coordonnées du point *G* centre de gravité du triangle *ABC*.
3- Déterminer les coordonnées du point *O*, centre du cercle circonscrit au triangle *ABC*.
4- Montrer que les points *O, G, H* sont alignés et déterminer la position du point *G* par rapport à *O* et *H*.

TRANSFORMATIONS (HOMOTHÉTIES) :

Soient *I, J, K,* les milieux respectifs des côtés *[BC], [AC], [AB].*

1- Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre G qui transforme A en I. Justifier.

2- Déterminer l'image par h du triangle ABC.

3- Que représente le point O pour le triangle IJK? Justifier. En déduire une égalité entre $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{HG}$.

4- Montrer que les points O, G, H sont alignés et déterminer la position du point G par rapport à O et H.

TRANSFORMATIONS (HOMOTHÉTIES) :(Plus difficile)

Soient *I, J, K,* les milieux respectifs des côtés *[BC], [AC], [AB], P* un point quelconque du plan et Δ_A, Δ_B et Δ_C les droites parallèles respectivement aux droites *(PI), (PJ), (PK).* passant respectivement par *A, B, C.*

1- Montrer que les droites Δ_A, Δ_B et Δ_C sont concourantes en un point Q aligné avec P et G.

2- Si P est en O, que deviennent les droites Δ_A, Δ_B et Δ_C et leur point d'intersection ? Conclusion.

(HACHETTE Collection Terracher. Ed.1986)