

Rubrique : Les mathématiques en relation avec d'autres disciplines.

Module : Scrutin proportionnel.

IREM de Strasbourg.

Objectifs :

Lecture d'énoncés.

Simulation de situations numériques ; expériences en mathématiques.

Organisation des calculs.

Réflexion pluridisciplinaire sur le lien entre mathématiques et situations concrètes (surtout avec la géographie et les sciences économiques).

Articulation avec le cours et les TD.

Constitution des groupes :

- Calcul numérique.

- Programmation de calculs, écriture d'algorithmes.

Présentation de la séance.

A partir de situations concrètes, étudier les différents modes de répartition des sièges dans un scrutin à la proportionnelle.

On étudiera d'abord quelques situations de manière empirique, en demandant aux élèves de répartir les sièges de façon équitable, sans modèle théorique préalable. L'observation des situations litigieuses permettra ensuite de justifier la mise en place d'algorithmes méthodiques. La dernière phase du travail consiste à tester les différents procédés dans des situations sensibles, pour essayer de donner des moyens «politiques» de choisir entre les différents procédés.

Description de l'activité :

I- Exemples introductifs :

La première situation est triviale : deux listes ont recueilli respectivement 40% et 60% des voix lors d'une élection et doivent se répartir 5 sièges. Quelle est la répartition la plus équitable ?

La seconde situation est beaucoup plus délicate : que se passe-t-il s'il y a 4 sièges à répartir, ou 6 ?

La troisième situation est encore plus délicate, et très liée au vécu des élèves : pour l'élection des délégués de classe, les textes officiels prévoient que chaque fois que c'est raisonnable, il y aura un garçon et une fille. A par-

tir de quelle répartition garçons/filles peut-on admettre que les deux délégués soient du même sexe, ou quelle est la taille à partir de laquelle une minorité peut être négligée ?

II- Description des systèmes classiques :

Les modes de répartition commencent tous par la même opération : on divise le nombre de suffrages exprimés par le nombre de sièges à pourvoir ; le nombre obtenu est appelé *quotient électoral*. Ensuite on divise le nombre de voix obtenu par chaque liste par ce quotient électoral ; la partie entière du résultat correspond au nombre de sièges minimal que chaque liste recevra. Mais, sauf exception, cette première répartition ne permet pas d'attribuer tous les sièges. C'est pour l'attribution des sièges restants que les procédés sont nombreux. Nous étudierons d'abord les deux plus classiques :

- Répartition au plus fort reste :

Après la division précédente, on classe les listes en présence dans l'ordre décroissant des parties fractionnaires des quotients obtenus (ou des restes, pour garder le vocabulaire de l'arithmétique), puis on attribue un des sièges restants à chacune des listes en tête du classement.

- Répartition à la plus forte moyenne :

Après la première attribution des sièges, on rajoute fictivement un siège à chaque liste, on divise le nombre de voix obtenues par chaque liste par ce nouveau nombre de voix (ce qui revient à calculer combien d'électeurs représenterait chaque élu, en moyenne) et on attribue un siège à la liste qui obtient ainsi la plus forte moyenne. On réitère ce procédé jusqu'à épuisement des sièges à pourvoir.

ACTIVITÉ N°1

Répartir les sièges suivant les deux procédés, reprenant les résultats des élections régionales de Mars 1992 (voir les données en annexe, ou au C.D.I.). On pourra ensuite étudier l'impact des deux règles annexes du scrutin régional : les listes qui ont obtenu moins de 5% des voix n'ont aucun siège, et la répartition se fait département par département. On constatera que, dans l'ensemble, les différentes variantes ne modifient pas le résultat de façon significative.

ACTIVITÉ N°2

Voici maintenant quelques situations plus particulières, pour prendre conscience des faiblesses de chaque mode de répartition :

Tout d'abord, on peut gagner des voix et perdre une place dans un classe-

ment, ce qui peut faire perdre un siège : trois listes se disputent cinq sièges. Un premier décompte des voix donne le résultat suivant :

liste A : 1 622 voix

liste B : 1 757 voix

liste C : 1 621 voix.

En recomptant, on trouve :

liste A : 1 624 voix

liste B : 1 751 voix

liste C : 1 625 voix.

Calculer la répartition des sièges dans les deux cas.

Ensuite, le nombre de sièges à pourvoir peut réserver des surprises : trois listes obtiennent respectivement 12%, 34% et 54% des voix. Calculer la répartition avec 4, puis avec 5 sièges.

III- Problèmes à l'envers, questions de stratégie.

On étudie maintenant le problème à l'envers : étant donné un mode de scrutin, et quelques informations générales, on cherche à prévoir le résultat des élections.

Situation n°1 : 7 sièges sont à pourvoir ; 2 listes sont en présence. Quel est le pourcentage de voix nécessaire pour obtenir un siège ? Pour obtenir la majorité ? Reprendre la question avec 3 listes, n listes en présence. Pour que le travail soit intéressant, il faut bien sûr le faire avec les deux modes de répartition.

Situation n°2 : 7 sièges sont à pourvoir, au plus fort reste. Répartir les sièges entre trois listes ayant obtenu les résultats suivants :

Liste A	liste B	Liste C
40%	30%	30%
50%	25%	25%
52%	24%	24%
52%	38%	10%

et vous verrez comment on peut avoir une coalition minoritaire en voix et majoritaire en sièges.

Situation n°3 : Reprendre les résultats des élections régionales, et étudier l'effet qu'aurait eu une fusion de deux listes, en supposant un report de voix parfait (par exemple, Verts + Génération Ecologie, ou P.S. + P.C., ou toute autre alliance qu'on voudrait tester).

Situation n°4 : 7 sièges sont à pourvoir. Une liste A dispose à coup sûr, de 40% des voix. Combien faut-il de listes adverses, qui se partagent équitablement les voix qui restent, pour que la liste A soit majoritaire en sièges ?

On verra ici comment, avec le scrutin à la plus forte moyenne, la majorité relative des voix permet d'avoir une majorité absolue des sièges, pourvu que les adversaires soient suffisamment divisés.

L'ensemble de ces observations permet de comprendre comment un mode de scrutin peut modifier le fonctionnement politique d'un pays, en favorisant les coalitions larges, ou en poussant à la dispersion. On peut attirer l'attention des élèves sur le fait que les mathématiques ne permettent pas de trancher de façon absolue, et que le choix d'un mode de scrutin est nécessairement un choix politique, pour lequel les modèles mathématiques ne sont que des aides à la décision.

