Rubrique : Lecture et compréhension d'énoncés.

Module : Evaluation et aide à l'apprentissage.
IREM de Grenoble.

Objectifs :

Mettre en place une structure d'auto-évaluation qui va fonctionner toute l'année.
Donner à l'élève des points de repère pour la résolution des problèmes.

Méthode :

Traitement d'exercices de difficultés croissantes dont la méthode générale de traitement est définie par le premier exercice de chaque série.

Articulation avec le cours et les T.D.
Constitution des groupes :

Cette activité est à la base de tout le travail fait en classe, que ce soit en cours, en T.D. ou en Module. Ce travail a été mené à la rentrée de l'année scolaire 1991-92 alors que les modules n'étaient pas encore mis en place. Certaines séquences proposées peuvent donc être conduites en module, en T.D. ou en classe entière.

Le schéma «Points de repère» permet de repérer les aptitudes et les difficultés des élèves et ainsi, peut contribuer à concevoir des activités modulaires. Un des intérêts de travailler suivant ce thème est de pouvoir regrouper les élèves sur un des éléments du schéma.

Présentation de l'activité.

Je me suis posé la question suivante : «comment aider mes élèves dans leurs apprentissages en mathématiques ; en particulier, comment les aider à résoudre des problèmes ?»

Pour cela, en partant de la principale activité faite en mathématiques, la résolution de problèmes, j'ai essayé de donner des points de repères à mes élèves, à l'aide d'un «schéma» que nous utilisons et qui me permet de dialoguer avec eux, surtout lorsqu'ils ont des difficultés devant une tâche mathématique (voir annexe 1). De plus, ce schéma me permet d'introduire la fiche d'évaluation par compétence que nous utilisons (annexe 2).

Afin que mes élèves s'approprient ce schéma, plutôt que d'en discourir, je leur pose un exercice dès le premier jour de la rentrée, exercice qui me permet de mettre en évidence les différents éléments qui le constituent.

Voici le compte rendu des différentes séquences de cours destinées à la présentation et à l'utilisation de ce schéma. Elles se sont déroulées au début de l'année scolaire 1991-92.

PREMIERE SÉQUENCE

Exercice posé :

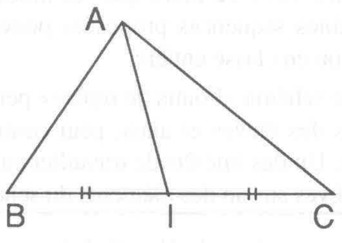
> *ABC* désigne un triangle quelconque.
>
> Démontre que les points *B* et *C* sont équidistants de la médiane issue de *A*.

De plus, j'ai donné à mes élèves les consignes suivantes :

- travailler seul (sans l'aide de leurs voisins),
- me poser toutes les questions qu'ils désiraient, mais par écrit,
- m'appeler lorsqu'ils auraient terminé leur démonstration.

Je leur demande de me poser des questions par écrit, pour les obliger à se centrer sur leur problème. D'ailleurs, assez souvent, en écrivant leur question, ils trouvent seuls la réponse qu'ils cherchent.

Les élèves ont commencé par faire une figure de la forme suivante, et très vite, ils m'ont appelé pour m'indiquer qu'ils avaient terminé.



Quatre d'entre eux ont dessiné un triangle isocèle. Une fois que je leur eus souligné les mots «triangle quelconque» de l'énoncé, ils ont pris conscience qu'ils n'avaient pas tenu compte de cette partie des données.

Deux élèves seulement m'ont demandé ce qu'était une médiane. Mais une fois la question mise par écrit, l'un d'eux s'est rappelé ce qu'était une médiane (il a alors dessiné une figure semblable à celle de ses camarades) ; quant à l'autre élève, je lui ai dit d'essayer de me dessiner une médiane, ce qu'il est arrivé à faire (peut-être en regardant la figure de son voisin !).

Réponse des élèves à l'exercice : «*B* et *C* sont équidistants de la médiane issue de *A*, car on a $BI = IC$, puisque *[AI]* est la médiane issue de *A*.»

J'ai demandé à chacun de comparer sa «démonstration» avec celle de son voisin. Dans certains binômes qui avaient écrit la réponse ci-dessus, après une brève discussion, j'ai entendu : «ça ne doit pas être ça, car le prof nous demande de démontrer alors que l'on a BI = IC puisque [AI] est la médiane».

Ensuite, j'ai demandé à un élève qui soutenait avoir terminé de nous exposer sa solution. Après avoir fait au tableau une figure semblable à la figure dessinée plus haut, il a redonné la réponse : «*B* et *C* sont équidistants de la médiane issue de *A* car *BI = IC* puisque I est le milieu de *[BC]*, car *[AI]* est une médiane.

Ses camarades se sont alors manifestés en lui disant : «ça ne doit pas être ça, car tu n'as pas fait de démonstration».

Tous mes élèves ont «senti» que la réponse ne pouvait être celle exposée, mais ils n'ont rien pu proposer d'autre.

Nous avons alors décidé de chercher ensemble une solution à cet exercice. Pour cela, nous avons commencé par «décortiquer» l'énoncé, après l'avoir écrit à nouveau au tableau.

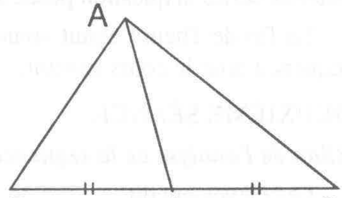
> *ABC* désigne un triangle quelconque.
>
> Démontrer que *B* et *C* sont équidistants de la médiane issue de *A*.

La première phrase n'a posé aucun problème aux élèves. Ils m'ont dit : «Il faut dessiner un triangle quelconque pour pouvoir démontrer ce qui nous est demandé». Il en a été de même avec le mot «équidistant». Nous avons remplacé la deuxième phrase de l'énoncé par : «Démontrer que les points *B* et *C* sont a égale distance de la médiane issue de *A*». *(ce qui n'a nullement débloqué la situation).*

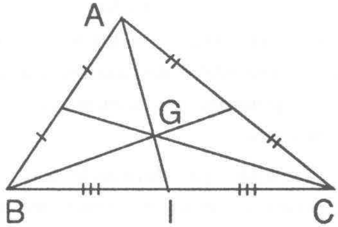
J'ai alors demandé de dessiner une médiane dans un tiangle quelconque, d'écrire ce quelle représentait pour eux, ainsi que ce qu'ils savaient sur les madianes d'un triangle.

J'ai obtenu :

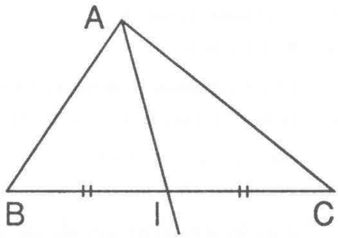
- une médiane est un segment qui part d'un sommet pour aller au milieu du côté opposé.
- la médiane est la longueur du segment qui joint un sommet au côté opposé



- les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point appelé *centre de gravité* du triangle, point situé aux 2/3 à partir du sommet.



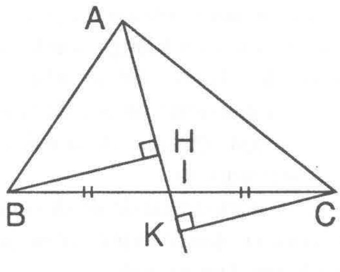
J'ai alors dessiné la figure ci-contre au tableau en leur indiquant que, dans ce problème, le mot «médiane» était utilisé pour désigner la demi-droite passant par *A* et le milieu de *[BC]*.



Pour aider mes élèves à maîtriser les connaissances rencontrées, je leur fais établir des fiches (appelées «figures fondamentales»), qu'ils complètent au fur et à mesure qu'ils rencontrent de nouvelles notions. Ici, nous avons commencé à élaborer la fiche «médiane d'un triangle» (voir en annexe).

Une fois revue la notion de médiane, la question posée a été écrite sous la forme: «Démontrer que les points *B* et *C* sont à égale distance de la droite *(AI)*».

Pour plus de la moitié des élèves, cela n'a rien changé: démontrer que *B* et *C* sont à égale distance de la droite *(AI)* correspondait toujours à *BI = IC*. Pour les autres, ils ont tracé les segments *[BH]* et *[CK]* perpendiculaires à la droite *(AI)* et ont pu essayer de poursuivre leur recherche. *Aucun élève n'est parvenu à trouver la solution.*



Il a donc fallu revoir la notion de distance d'un point à une droite avant de pouvoir écrire la question posée sous la forme: «démontrer que *BH = CK*».

La fin de l'heure ayant sonné, j'ai demandé aux élèves d'analyser cette séquence pour le cours suivant.

DEUXIÈME SÉANCE

Bilan de l'analyse de la séquence par les élèves.

Les élèves ont dit:

- j'ai commencé par faire un triangle isocèle, je n'ai pas fait attention à ce qui

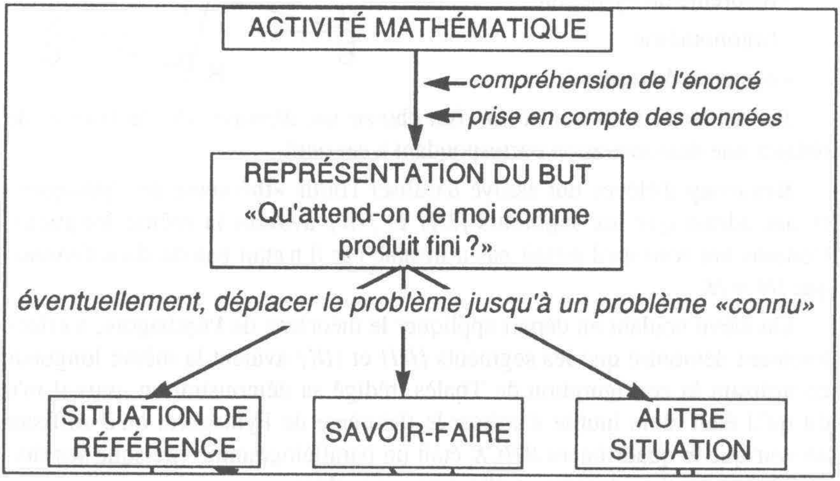
était écrit dans l'énoncé ;
- je n'ai pas pensé à tracer la droite *(AI)* pour médiane ;
- je pensais qu'une médiane était seulement un segment ;
- je me suis trompé dans la distance d'un point à une droite ;
- on ne nous donnait pas dans l'énoncé les segments *[BH]* et *[CK]*, je ne savais pas qu'il fallait les tracer, je n'ai pas assez réfléchi ;
- vous auriez dû nous dire de tracer *[BH]* et *[CK]*, puis de démontrer que ces segments étaient égaux.

Conclusion de ce bilan fait avec la classe.

Dans ce problème, il fallait :
- prendre en compte les données du problème, ne pas faire de triangle particulier ;
- «comprendre et traduire l'énoncé» (en langage opérationnel, comme le dira un élève), c'est-à-dire se ramener à démontrer que $BH = CK$ (problème fréquent en mathématiques : démontrer que deux segments ont même longueur).

La compréhension de tout énoncé d'une tâche mathématique demande de posséder les connaissances intervenant dans les données, ici : médiane, distance d'un point à une droite.

Dans le schéma «Points de repère» (annexe 1), cette phase correspond à :



La représentation du but est : «démontrer que deux segments ont même longueur».

Nous avons donc abordé la question : comment chercher un problème ? Quelles démarches utiliser ?

Devant un problème, lorsqu'il est ramené à une situation de référence, on se demande de quels outils on dispose ou quelles méthodes on peut utiliser. En géométrie, on peut classer les outils dans quatre boîtes (cadres), à savoir :

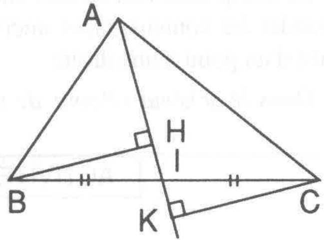
- la boîte des configurations (c'est-à-dire des figures) ;
- la boîte du calcul vectoriel ;
- la boîte «géométrie analytique» (que nous pourrons utiliser lorsque nous aurons un repère) ;
- la boîte des transformations (translations, symétries,...).

La première chose à faire, lorsqu'on ne trouve pas tout de suite la solution, c'est de se demander dans quelle boîte on a le plus de chance de trouver un outil adapté au problème posé.

Nous avons éliminé de notre recherche les deux boîtes «calcul vectoriel» et «géométrie analytique», puis j'ai demandé aux élèves de chercher dans les deux autres boîtes des outils qui pourraient être utilisables.

Les élèves ayant sous les yeux la figure ci-contre, ont proposé comme «outils» :

- configuration de Thalès ;
- théorème de Pythagore ;
- trigonométrie ;
- symétrie de centre *I*.



J'ai demandé à chacun d'eux d'en choisir un, d'essayer de l'utiliser et de rédiger une démonstration correspondant à cet outil.

Beaucoup d'élèves ont essayé d'utiliser l'outil «théorème de Pythagore» et ont admis que les segments *[IH]* et *[IK]* avaient la même longueur. Certains ont écrit qu'il n'était pas utilisable car il n'était pas dit dans l'énoncé que $IH = IK$.

Un élève voulant au départ appliquer le théorème de Puythagore, a effectivement démontré que les segments *[IH]* et *[IK]* avaient la même longueur en utilisant la configuration de Thalès, rédigé sa démonstration, puis il m'a dit qu'il était alors inutile d'utiliser le théorème de Pythagore, qu'il suffisait de voir que le quadrilatère *BHCK* était un parallélogramme (puisque ses diagonales se coupaient en leur milieu) pour conclure.

Certains ont utilisé l'outil trigonométrie dans les triangles *BIH* et *CIK* en écrivant :

Certains ont utilisé l'outil trigonométrie dans les triangles *BIH* et *CIK* en écrivant :

$$BH = BI \cos\widehat{IBH} \quad \text{et} \quad CK = CI \cos\widehat{ICK}$$

(Aucun élève n'a utilisé le sinus avec les angles opposés en I).

Deux d'entre eux ont essayé d'utiliser l'outil «symétrie centrale», mais ils ne sont pas parvenus à aller jusqu'au bout de leur démonstration. *Pendant que mes élèves cherchaient une démonstration, je passais dans les rangs pour voir ce que chacun faisait.*

Nous avons ensuite mis en commun les différentes «solutions» proposées, puis nous sommes revenus sur le schéma «point de repère» pour une activité mathématique.

La compréhension de l'énoncé et sa traduction en «langage mathématique» nous ont conduits à : «démontrer que $BH = CK$ » (situation de référence : deux segments ont même longueur).

Pour démontrer que deux segments ont même longueur, la première chose à faire est de trouver un outil ou une stratégie adaptés au problème posé. Nous avons commencé par chercher dans quelle cadre (boîte à outils) nous avions le plus de chances de trouver un outil adapté. Nous avons ainsi éliminé deux cadres : calcul vectoriel (ce n 'est pas un outil utilisable à l'entrée en seconde), géométrie analytique (car aucun repère n'est donné), pour ne conserver que les cadres : configuration, transformations. Ensuite, dans chaque cadre restant, nous avons essayé de trouver un outil (une stratégie) qui pourrait convenir au problème posé. *Cette phase qui, en général, ne figure pas sur les devoirs, est la* ***phase d'anticipation.***

«Après avoir choisi un outil (une stratégie), vous passez à la ***phase d'exécution*** *(réalisation), ce qui vous amène à utiliser des savoir-faire, par exemple : calculer la longueur d'un segment dans un triangle rectangle en utilisant la trigonométrie, montrer que I est le milieu de [HK] en utilisant la configuration de Thalès».*

La ***phase (auto-)contrôle*** *est évidemment présente dès la phase d'anticipation pour choisir la stratégie (l'outil). Par exemple, ici, pour utiliser l'outil «Pythagore», je dois «contrôler» ses conditions d'utilisation, ne pas admettre que les segments [IH] et [IK] ont la même longueur (ce que certains d'entre vous ont fait).*

L'auto-évaluation *est en quelque sorte un «retour» sur le problème. Elle consiste, ici par exemple, à se dire :*
- je n'ai pas considéré la médiane comme une demi-droite ;

- je ne savais pas ce qu'était la distance d'un point à une droite (ou je le savais) ;
- j'ai appliqué le théorème de Pythagore, mais j'ai admis que IH = IK ;
- j'aurais aussi pu utiliser les outils :
configuration de Thalès,
trigonométrie dans le triangle rectangle,
symétrie centrale,
etc.

Faire après chaque exercice un «bilan» des connaissances, des méthodes utilisées vous aidera à les mémoriser et cela vous permettra peut-être de les utiliser dans de nouveaux problèmes.»

J'ai demandé ensuite aux élèves de rédiger pour le cours suivant les différentes «solutions» de ce problème avec les différentes méthodes présentées durant le cours.

Lors d'une séance de Travaux Pratiques, alors que les élèves étaient en groupes de quatre, j'ai distribué à chaque groupe les photocopies de quatre copies (que j'avais choisies) en leur demandant de les étudier, de les comparer et d'essayer de définir les critères d'évaluation d'un devoir et d'une démonstration.

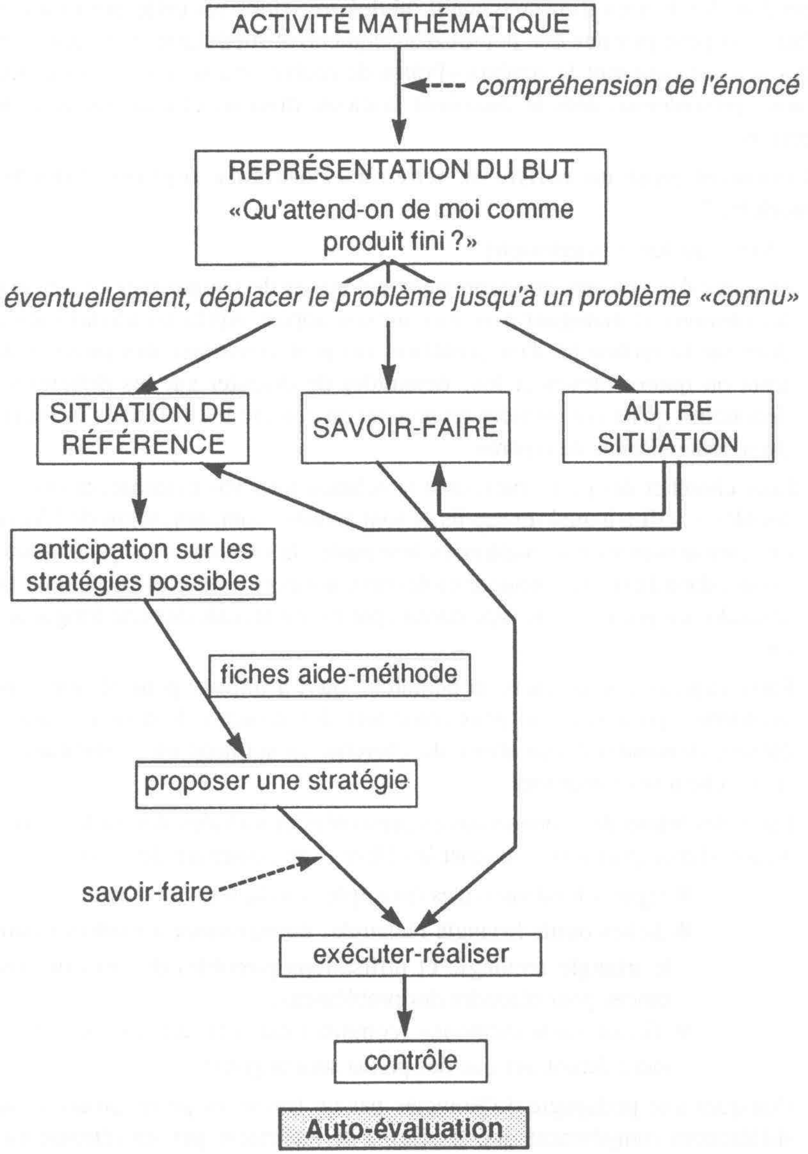
A la suite de ce travail de groupe, nous avons élaboré ensemble ce que j'attendais d'eux dans leurs futurs devoirs. Nous avons notamment abordé les problèmes de présentation (marge, devoir aéré...), de communication (figure claire et «parlante», phrases en français, sans symboles, utilisation du langage mathématique...), de reformulation de la question en langage opérationnel, de savoir si l'on devait énoncer la stratégie utilisée et enfin les problèmes d'argumentation.

Nous avons ensuite rédigé une démonstration répondant aux critères que nous venions de définir, démonstration que les élèves ont pu utiliser pour leurs devoirs, y compris les devoirs surveillés.

A leur demande, j'ai rédigé différentes copies utilisant les outils rencontrés, que je leur ai distribuées au cours suivant, et qu'ils ont pu utiliser lorsqu'ils le désiraient (voir annexe 4).

Je leur ai ensuite donné la fiche d'évaluation que nous allons utiliser cette année, fiche dans laquelle ils ont retrouvé les différentes compétences que nous avions mises en évidence. Puis nous avons parlé de l'utilisation de cette fiche en passant en revue les différentes rubriques (voir annexe 2).

Annexe 1
SCHÉMA POINTS DE REPÈRE



Quelles utilisations pour les modules ?

La présentation du schéma «Points de repère» et de la fiche d'évaluation peut être faite dès le début de l'année, en classe entière, en travaux dirigés ou pendant les heures d'enseignement modulaire. Une fois cette présentation faite, on peut profiter des heures d'enseignement modulaire pour proposer des activités utilisant le schéma «Points de repère» ou la fiche d'évaluation (nous présenterons dans le deuxième fascicule diverses utilisations de cette dernière).

Comment peut-on utliser le schéma «Points de repère» dans les modules ?

Voici quelques suggestions :

- Proposer des activités qui permettent aux élèves de s'approprier ce schéma, les observer et dialoguer avec eux sur son apport. Après un travail individuel sur la recherche d'un problème, on peut constituer des groupes de trois ou quatre élèves et leur demander de discuter sur les différentes démarches qu'ils ont utilisées en prenant en compte les différents éléments du schéma «Points de repère».
- Faire chercher des problèmes, dont la solution n'est pas évidente, et amener les élèves à dire à quel niveau ils se sont arrêtés : compréhension de l'énoncé, connaissances non maîtrisées (exemple : la distance d'un point à une droite, dans l'exercice proposé ci-dessus), outils et stratégies permettant de résoudre un problème de type donné (par exemple, calculer une longueur), etc.
- Faire exposer par un élève la démarche qu'il a utilisée pour résoudre un problème : pour cela, on peut constituer des groupes de trois ou quatre élèves, demander à l'un d'eux de chercher la solution en explicitant sa démarche à ses camarades.
- Faire des bilans des connaissances présentées et utilisées durant les autres heures d'enseignement et amener les élèves à se construire des fiches :
  - ✱ figures fondamentales (exemple : médianes d'un triangle) ;
  - ✱ fiches outils (triangle rectangle : connaissance à maîtriser dans le triangle rectangle et utilisations possibles de ces connaissances pour résoudre des problèmes) ;
  - ✱ fiches «aide-méthode» (comment calculer une distance, comment démontrer que des points sont alignés).
- Pratiquer une pédagogie différenciée par un travail en petits groupes, sur différences compétences que les élèves ne maîtrisent pas, en réponse aux

besoins qu'ils auront formulés à partir du schéma «Points de repère»: durant une même séance d'enseignement modulaire, on peut constituer des petits groupes travaillant sur des tâches différentes, telles que:

* l'apprentissage d'une connaissance ou d'un savoir-faire non maîtrisé, par exemple la résolution d'une équation du type $a = \frac{b}{x}$;
* la compréhension d'un énoncé et la reconnaissance d'un type de problème;
* la représentation du but, par exemple, l'appropriation des critères de réussite d'une démonstration;
* l'analyse en fonction du contexte, des méthodes et outils qui permettent de résoudre un problème, comme celui de démontrer que $BH = CK$ dans l'exercice présenté ci-dessus;
* la vraisemblance d'un résultat: on peut proposer différentes solutions à un problème et demander aux élèves d'éliminer celles qui ne peuvent convenir.

Notes personnelles