Rubrique : Lecture et compréhension d'énoncé.
Construire un raisonnement, une argumentation
Aide à la recherche d'un problème.

Module : Problèmes de construction. IREM de Montpellier.

Thème :

Mise en œuvre d'une méthodologie de traitement des problèmes de construction : l'abandon des contraintes.

Objectifs :

- 1- Donner aux élèves une manière d'aborder les problèmes de construction.
- 2- Montrer les limites d'une méthode unique de traitement pour une catégorie de problèmes.

Méthode : Description des problèmes de construction, de la méthode d'abaissement des contraintes. Mise en œuvre sur des exercices de difficultés progressives. Exemples d'exercices montrant les limites de la méthode.

Articulation avec le cours et les T.D.

Constitution des groupes :

Le contenu de cette séance ne s'insère pas dans le programme, mais permet un réinvestissement des connaissances. Il est différent du T.D. dans lequel on fait des applications directes du cours.

Il n'est pas nécessaire de faire des groupes déterminés mais le public peut être ciblé (en particulier des élèves pour lesquels le programme de géométrie sera conséquent en Première).

Cette séance est en aval du cours sur les Transformations, mais il n'a pas besoin d'être connecté à celle-ci. Elle structure une méthode souvent employée de façon qui paraît artificielle à l'élève.

Présentation de l'activité

Le mot «CONSTRUIRE»

Les problèmes de construction, du seul point de vue graphique, sont ceux dont la solution peut être obtenue à l'aide :

- de la règle et du compas,
- du compas seul,
- de la règle seule,
- d'autres appareils que l'on puisse assimiler à la règle et au compas.

«L'algèbre et l'analyse permettent d'affirmer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression analytique puisse être construite à la règle et au compas est qu'elle se déduise de grandeurs connues par des opérations rationnelles ou par des racines carrées en nombre fini». Cette citation de F.KLEIN définit les grandeurs constructibles à la règle et au compas, et, de là, les problèmes de construction qui ont une solution et surtout, ceux qui n'en n'ont pas ... Mais ce n'est pas l'objet de ce document.

La nature des problèmes :

Résoudre un problème de construction va donc consister à définir un enchaînement de tâches correspondant à des tracés de droites ou de cercles et à la mise en évidence de points d'intersection. Cet enchaînement de tâches devra être une conséquence des **contraintes** imposées par l'énoncé.

Par exemple, pour construire un triangle ABC sachant que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 3$, l'unité étant choisie, il faut respecter trois contraintes qui sont les trois longueurs. La méthode de traitement traditionnelle consiste à dessiner d'abord le segment $[AB]$ par exemple et ensuite de retenir qu'une seule des deux contraintes restantes, par exemple $AC = 4$. De là, le point C ne peut être que sur le cercle de centre A et de rayon 4 et enfin introduire la troisième contrainte $BC = 3$ pour construire les deux triangles solutions. Il est évident que l'on ne peut à la fois mettre en jeu les trois contraintes et c'est de façon presque naturelle que l'on choisit d'en considérer une, puis deux simultanées et enfin trois simultanées. On a là une approche d'une méthode plus générale de traitement qui consiste de façon systématique à gommer une contrainte.

Les exercices 1, 2, 3, 4, 5 et 6 suivants proposent d'approcher puis de mettre en œuvre cette méthode.

Les difficultés :

La première de toutes réside dans le choix de la contrainte à abandonner ; là, il faut faire preuve de patience, peut-être encourager les mauvais choix pour mieux les dénoncer ensuite ...

La deuxième provient du fait que gommer une contrainte revient très souvent à transformer le problème en un problème de lieu géométrique (droite ou cercle) dont l'approche est en général donnée par une construction géométrique : isométrie, homothétie, ...

Enfin, bien que semblant naturelle, cette méthode (qui peut être d'ailleurs utilisée dans d'autres domaines) a ses limites comme le montrent les exercices 7 et 8.

Cette séance contient 8 problèmes de construction :

- les problèmes 1 à 6 proposent d'approcher puis de mettre en œuvre cette méthode ;
- les problèmes 7 et 8 montrent les limites de cette méthode.

Voici deux exemples de ce qui est proposé :

Exercice 1 :

On donne deux droites D_1 et D_2 sécantes en O et un point I n'appartenant ni à D_1 , ni à D_2 et N sur D_2 tels que I soit milieu de $[MN]$ en adoptant la démarche suivante :

- 1- Déterminer les différentes contraintes du problème.
- 2- Résoudre le problème en abandonnant une des contraintes.
- 3- Réintroduire la contrainte abandonnée.
Donner une solution au problème.

Remarques :

1- Le comptage des contraintes ne pose pas de problèmes majeurs, de même que la ressemblance entre « M sur D_1 » et « N sur D_2 ». La difficulté réside dans le choix de la contrainte à abandonner. Il faut laisser du temps au temps...

2- Si l'on abandonne « N sur D_2 », l'alignement des points n apparaît rapidement, la difficulté se situe au niveau de la preuve de cette propriété.

3- Cette méthode n'exclut nullement la possibilité de traiter le problème en le supposant résolu... autre méthode bien connue, mais parfois moins évidente.

Exercice 7 :

On donne un triangle ABC . Construire M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$ tels que $BM = NM = NC$.

Remarques :

Les contraintes sont ici au nombre de 4. Supprimer une égalité, par exemple $MN = NC$ est toujours possible, mais alors le lieu de M reste le segment $[AB]$

et seul le hasard peut conduire à la solution. Il reste donc à supprimer une contrainte d'appartenance, par exemple $M \in [AB]$, mais cela revient à construire N sur $[AC]$ tel que $BN = 2NC$. Etudier les positions de N telles que $BN > 2NC$ ou $BN < 2NC$, ... C'est l'impasse, sauf si l'on pense à l'exercice 5 et que l'on transforme l'énoncé en : «construire N' sur $[AC]$, B' sur $[BC]$ et M' tel que $(B'M') \parallel (BA)$ et $B'M' = M'N' = N'C$. On aura alors une solution «plus petite» qu'une homothétie de centre C permettra de recréer.