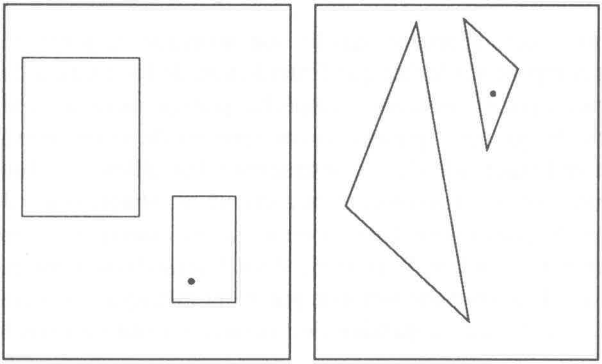
A PROPOS DE L'HOMOTHÉTIE

Gilles Aldon

IREM de Lyon

Énoncé du problème :



Dans les deux cas, la grande figure est un agrandissement de la petite. Un point a été oublié. Trouver une méthode qui permette de le replacer.

Objectif principal :

Faire découvrir les éléments caractéristiques et les propriétés élémentaires de l'homothétie en s'appuyant sur les connaissances des élèves concernant agrandissement et réduction.

Situation dans la progression :

Cette activité est proposée avant toute introduction par le professeur de la notion d'homothétie. Les autres transformations du plan au programme de seconde ont été étudiées.

Capitalisation possible :

Notion d'homothétie, homothétie-outil dans la résolution de problèmes, lien avec Thalès.

Scénario :

Un temps de recherche d'une solution en groupe (1h30)
Un temps de débat entre les élèves sur les solutions (1h)
Un temps de capitalisation du travail des élèves (1h).

Prolongement possible :

Tracer les diagonales d'un quadrilatère dont les sommets sont en dehors de la feuille (annexe 6).

A PROPOS D'HOMOTHÉTIE

Les nouveaux programmes de collège ont permis aux élèves de se familiariser avec la notion d'agrandissement/réduction. Nous nous sommes appuyés sur cette constatation pour préparer une activité d'introduction à la notion d'homothétie en seconde. Dans cet article, je me propose de rendre compte du déroulement du travail en classe en expliquant au passage les choix divers que les précédentes expérimentations (*) ont permis de faire.

A propos de l'énoncé :

Cet énoncé autorise toute approche, qu'elle soit métrique ou purement géométrique. Ce choix repose sur le fait que l'interdiction de l'utilisation des mesures (présent dans un précédent énoncé) empêche, pratiquement, les vérifications internes dans les groupes (puisque la consigne est de ne pas mesurer même pour vérifier l'exactitude d'une construction). Par ailleurs, si l'ancrage sur une situation connue est un objectif de l'activité, il est nécessaire de permettre aux élèves de puiser dans leurs connaissances antérieures pour résoudre ce problème. Cependant le triangle dont l'agrandissement est "inversé" complique l'utilisation d'une méthode purement métrique (sans l'interdire) et doit permettre de faire apparaître des méthodes n'utilisant pas le rapport de l'homothétie.

A propos des objectifs :

L'homothétie est une notion nouvelle en seconde ; cependant, dans les classes antérieures, un certain nombre de notions ont été abordées préparant à son introduction. Il est donc important d'en tenir compte dans l'introduction de l'homothétie. Citons, en particulier :

- théorème de Thalès
- agrandissement-réduction
- proportionnalité
- projection et rapport de projection.

Analyse préalable : le produit attendu

Les élèves vont en général proposer une méthode de construction du point oublié qui sera juste. Le problème sera de leur faire mettre en évidence les propriétés utilisées pour faire leur construction.

La méthode la plus performante, c'est-à-dire celle qui est facilement réinvestissable dans le cas du triangle, va-t-elle être la même pour tous les élèves ?

(*) Voir la brochure *«Liaison Collège -2de»* produite par la Commission niveaux d'approfondissement et publiée par l'IREM de Lyon

Celle qui consiste à projeter orthogonalement le point marqué sur les côtés du rectangle et d'utiliser le rapport d'homothétie pour construire le point oublié sera sûrement disqualifiée, mais les autres méthodes ?

Compte rendu d'une expérimentation en classe

Première partie : travail en travaux dirigés (1/2 classe)

Enoncé : La feuille de l'annexe 1 est distribuée aux élèves.

Je note au tableau : *«Dans les deux cas, la grande figure est un agrandissement de la petite. Un point a été oublié. Trouver une méthode qui permette de le replacer.»*

Consigne : sur une feuille, chaque groupe écrira son programme de construction ; il n'est pas interdit de joindre un dessin ! Une méthode sera d'autant plus performante qu'elle pourra s'appliquer aux deux cas de figure présentés.

Cette dernière remarque rend une méthode purement calculatoire délicate à mettre en œuvre dans le deuxième cas et tend à privilégier une recherche plus géométrique.

Recherche individuelle : 10 minutes.

Cette phase permet bien sûr aux élèves de s'approprier le problème mais aussi de faire apparaître diverses méthodes. Ainsi, avant le travail en groupe, les stratégies suivantes sont apparues :

- utilisation exclusive de la règle non graduée et du compas (les effets du contrat didactique et de précédents travaux de construction se font sentir !).
- utilisation de la règle graduée et recherche d'un coefficient d'agrandissement.

Recherche en groupe : environ 1 heure.

Dans tous les groupes, cependant, la constatation de la concourance des droites formée avec les couples de points homologues a été un point fort jamais remis en question.

Dans les groupes où les deux stratégies sont apparues, un débat s'est instauré : est-il possible de donner une solution n'utilisant que les constatations sur le dessin ou faut-il nécessairement "construire" au sens mathématique du terme, sens déjà explicité dans la classe à propos d'autres problèmes ? A cet instant de la recherche de plusieurs attitudes ont vu le jour suivant les groupes :

Adopter le point de vue numérique et calculer le rapport d'agrandissement (cf. annexe 2, méthode 1).

Adopter un point de vue de construction (cf. annexe 2 méthode 2, ou annexe 3).

Par ailleurs, l'idée d'une transformation apparaît plusieurs fois dans les compte rendus des groupes (cf. annexe 4, très significative et imagée).

A ce stade de la recherche, les compte rendus ont été ramassés et le travail a repris lors du cours suivant en classe entière.

Deuxième partie : travail de synthèse en classe entière (1h.)

J'ai photocopié des compte rendus les plus significatifs (à mon sens) des travaux des élèves. (Annexe 2, 3, 4) qui ont été redistribués à la classe. Il est à noter que tous les groupes pouvaient se reconnaître dans ces compte rendus, et que, mis à part la formulation parfois plus maladroite ou confuse, l'une ou l'autre des idées exprimées dans ces pages était présents.

Après avoir lu et commenté le compte rendu n°4 à la classe, j'ai demandé aux élèves de décrire plus avant cette transformation en utilisant une fiche d'identité des transformations déjà manipulée pour les symétries, translation et rotation (cf. annexe 5).

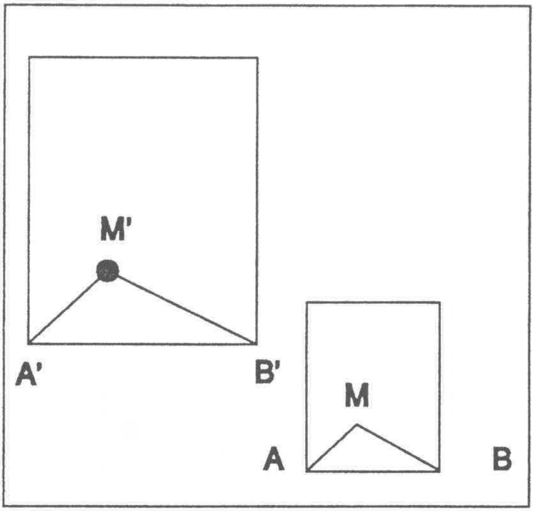
L'élaboration d'une définition de l'homothétie me paraissant à ce stade du travail difficile, j'ai fait le choix de commencer à la décrire par ses propriétés avant de la définir. Les questions de la non-conservation des distances et de la conservation de l'orientation (droite-gauche, haut-bas) ont alors été au centre de la discussion. Cependant, les éléments caractéristiques de la transformation (un point et un nombre) ont permis aux élèves de se mettre d'accord sur l'importance du rapport (puisqu'il faut l'appeler par son nom) dans ce problème.

A ce moment (fin du cours), j'ai proposé la définition vectorielle de l'homothétie, puis j'ai posé la question : pour quelles valeurs du rapport une homothétie agrandit, réduit, conserve l'orientation, la change ?

Troisième temps : 2 heures en classe entière.

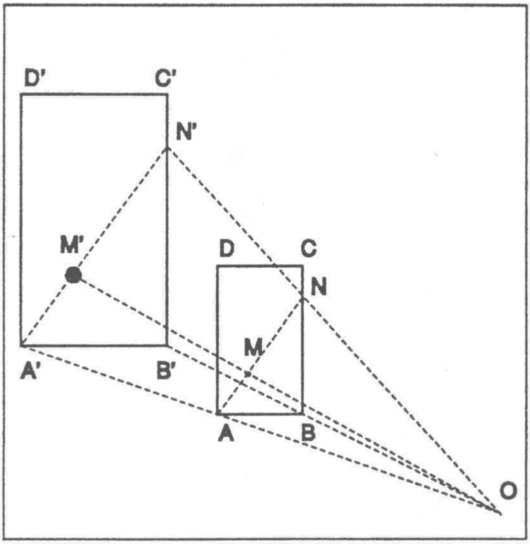
Les deux heures ont été l'occasion d'écrire un résumé des connaissances nécessaires à propos de l'homothétie, de faire des exercices d'application directe et de tracé (image d'un triangle par une homothétie de centre et de rapport donnés) et de laisser chercher le problème des diagonales. (annexe 6)

Exemple de méthode de construction du point oublié en utilisant le parallélisme d'une droite et son image.



Par A', on trace une parallèle à (AM) et par B', une parallèle à (BM). Les deux droites se coupent en M' qui est le point oublié.

Exemple de méthode utilisant le centre et la conservation de l'alignement.



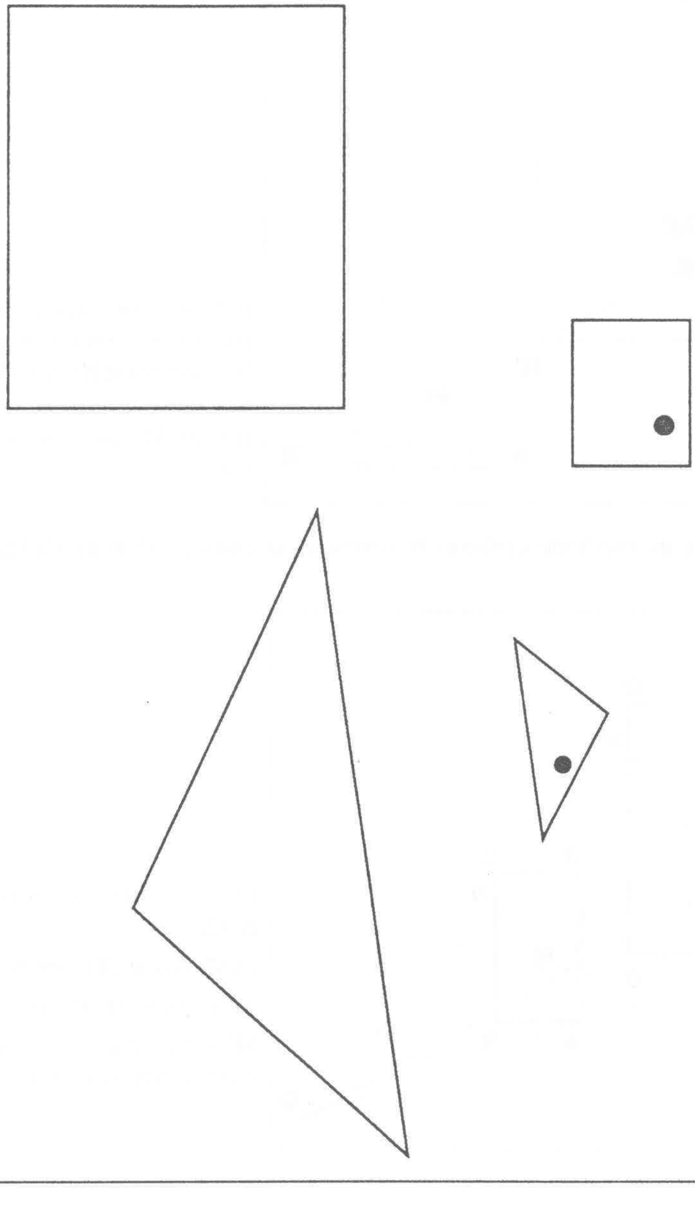
(AA') et (BB') se coupent en O.

(AM) coupe (BC) en N.

(ON) coupe (B'C') en N'.

M' est à l'intersection des droites (AN') et (OM).

ANNEXE 1 :
Les figures distribuées aux élèves



ANNEXE 2 :
Travaux d'élèves

Méthode 1

- Relier A à A', B à B', C à C' et D à D'. Les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en O..

- Le point à reproduire s'appelle E'. Tracer (EO).

- Calculer $\frac{A'O}{AO}, \frac{B'O}{BO}, \frac{C'O}{CO}, \frac{D'O}{DO}.$

On a : $\frac{A'O}{AO}=\frac{B'O}{BO}=\frac{C'O}{CO}=\frac{D'O}{DO}$

- Mesurer EO et multiplier par $\frac{A'O}{AO}$

- E' est sur (EO) à la distance de $EO \times \frac{A'O}{AO}$ *de O.*

Méthode 2 *: le point à reproduire est E'.*

- Relier A à A' et B à B'. (AA') et (BB') se coupent en O

- Tracer (EO) et (BE). (BE) coupe (CD) en I.

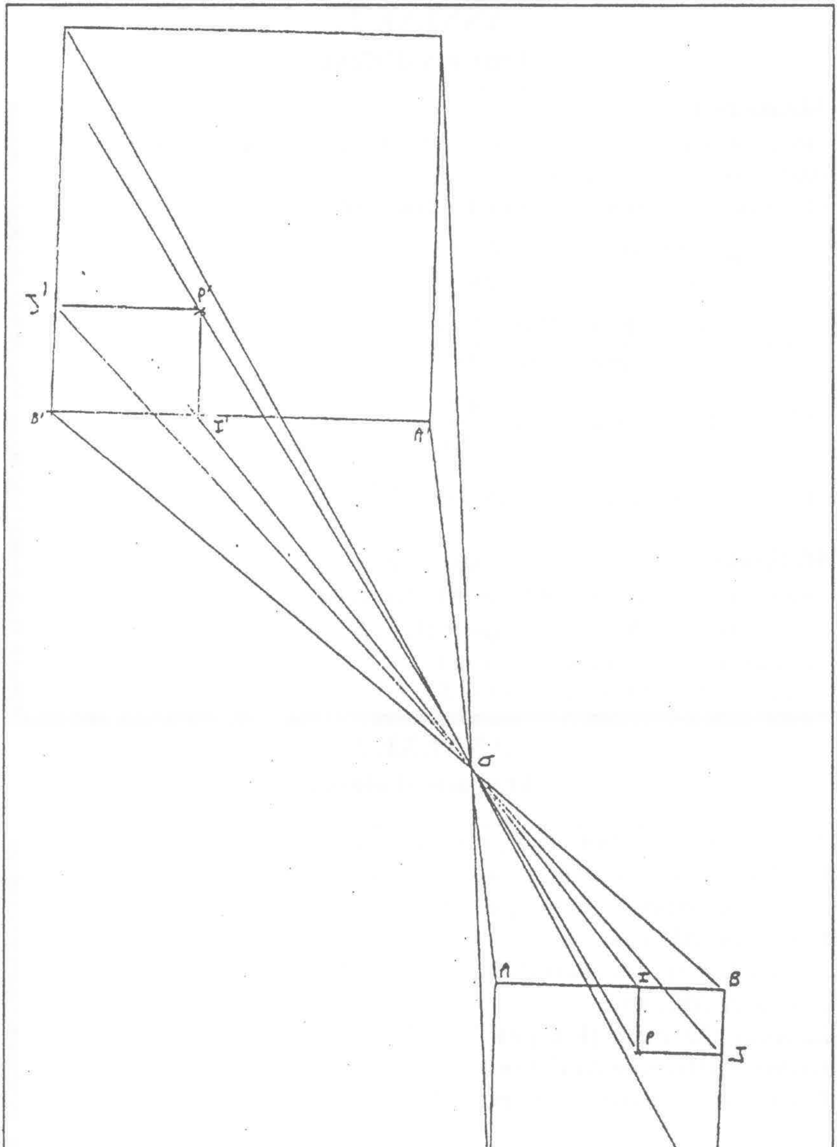
- Tracer (IO). (IO) coupe (D'C') en I'.

- Tracer (I'B'). (I'B') coupe EO en E'.

ANNEXE 3 :
Travaux d'élèves

Je trace les droites (AA') (BB') (CC') et (DD')
Ces 4 droites sont sécantes en un même point appelé O.
Je trace la perpendiculaire à [AB], issue de P.
Elle coupe [AB] en I.
Je trace la perpendiculaire à [BC], issue de P.
Elle coupe [BC] en J.
La droite (JO) coupe [B'C'] en J'.
La droite (IO) coupe [A'C'] en I'
Elle sont donc sécantes en un point P'.

Voir le dessin page suivante.


J'
P'
B'
I'
A'
O
A
I
B
P
J
D
C

ANNEXE 4 :
Travaux d'élèves

Soit un rectangle ABCD et un point O à l'intérieur de ce rectangle.
Soit A'B'C'D' l'agrandissement de ABCD.
Il faut trouver une méthode pour replacer le point oublié dans l'agrandissement.

Méthode :

On joint les points A, B, C et D respectivement aux point A', B', C' et D'. On observe que toutes ces droites se coupent en un même point (car il y a agrandissement).

A partir de cette remarque, on peut en déduire que cette transformation est une "symétrie centrale agrandissante" de centre I.

On peut donc replacer le point O' en pratiquant la "symétrie centrale agrandissante" de centre I.

Pour agrandir, il faut diviser par exemple la longueur B'I à BI. On multiplie le résultat par la longueur OI et on trouve IO'.

Nous pouvons alors placer O'..

ANNEXE 5 :

FICHE D'IDENTITÉ

nom :

Définition :

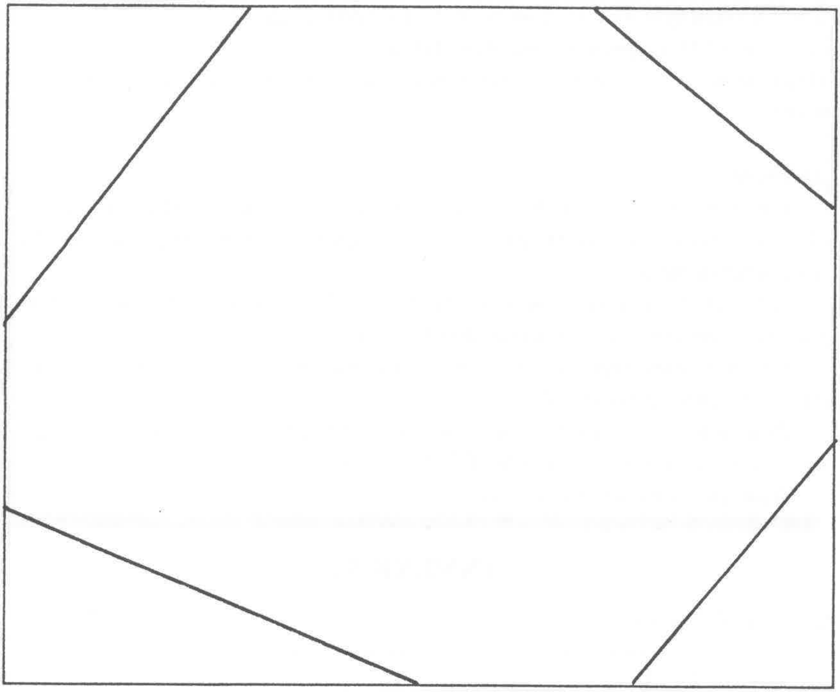
dessin

Image d'une droite :
Image d'un segment :
Image de trois points alignés :
Image d'un cercle :
Image d'un parallélogramme :

Effet de la transformation sur :

le parallélisme :
les distances :
les aires :
l'orientation (gauche-droite, haut-bas):

ANNEXE 6
Prolongement possible :



Construire les diagonales du quadrilatère représenté sur cette feuille. Il est interdit de prolonger les côtés au-delà des limites de la feuille.