# LE CYLINDRE

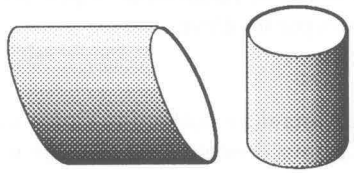
## de l'âge du numérique à l'âge du fonctionnel

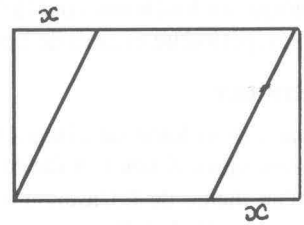
**Patrick Brandebourg**
IREM de Dijon

## Objectif principal :

Apprendre aux élèves à résoudre graphiquement et numériquement une équation, algébriquement une équation de type $x^2 = A$

## Énoncé du problème :






Il est "construit" autour du problème suivant :

On découpe les triangles hachurés. Pour quelle valeur de $x$ les cylindres obtenus en roulant ce patron dans un sens (amener A sur B), et dans l'autre (amener A sur C), ont-il même volume ?

## Situation dans la progression :

Au début de l'année et avant toute introduction par le professeur de la notion de fonction.

## Capitalisation :

- Les connaissances mises à jour (résolution algébrique, résolution numérique d'équations) sont notées sur des fiches de cours.
- La méthode utilisée peut être considérée comme suffisamment marquante pour introduire dans le comportement futur des élèves l'utilisation éventuelle d'une fonction.

## Scénario :

- Temps de recherche en groupe en classe avec un temps de débat.
- Rédaction de plans et brouillons de démonstrations trouvées en classe sont à faire chez soi par les élèves, ainsi que la réalisation soignée des graphiques.
- Temps de capitalisation (1 heure).

## Durée :

De 4 à 7 heures selon le degré d'autonomie laissé aux élèves.

Si la géométrie dans l'espace est le terrain d'activités spécifiques, elle fournit aussi un cadre pour la résolution de problèmes numériques. L'activité présentée dans cet article utilise divers patrons de cylindres. Les savoirs qu'elle vise sont de deux types :

- l'apprentissage de techniques mathématiques : résolution numérique et graphique d'équations ;
- l'approche d'une notion fondamentale en mathématiques : les fonctions.

Certes, ces savoirs ne sont pas entièrement nouveaux pour les élèves (ils ont, par exemple, abordé au collège fonctions linéaires et fonctions affines), mais peut-on pour autant penser que toutes les subtilités sont comprises ?

Utilisé en début d'année, ce problème suit un "chapitre" exploitant le théorème de Pythagore à des fins fonctionnelles, et, permettant le passage du numérique au fonctionnel par la mise en évidence de relations de dépendance de côtés, périmètre et aires de figures connues par les élèves.

## Un énoncé

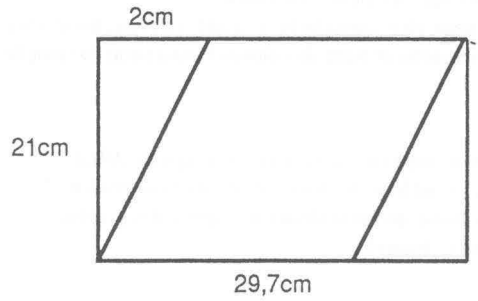
Dans le volume de cinquième de leur première collection *Faire des mathématiques* (Cedic), A.Delédicq et C.Lassave donnaient un exercice inspiré d'un thème de E.Castelnuovo et M.Barra (in *La mathématique dans la réalité* chez Cedic). Cet exercice constitue les deux premières questions de l'énoncé suivant :

*Dans tout le problème, on prendra comme valeur de $\pi$ le nombre 3,14. Les graphiques seront faits sur papier millimétré.*

On prend une feuille de papier de format 21 x 29,7 cm.

1) On roule cette feuille de manière à obtenir un cylindre. Mais ... on peut la rouler de deux façons. Les cylindre obtenus ont-ils le même volume ?

2) On prend la même feuille et on y découpe des petits triangles selon le schéma ci-dessous puis on roule la feuille dans le sens de la longueur. Quel est le volume du solide obtenu ?



3) On reprend la même question qu'au 2) mais en ôtant 4 cm, puis 6 cm, puis 8 cm ... etc. Combien faut-il ôter pour que le volume obtenu soit égal à la moitié de celui que l'on avait au départ ? On fera une résolution graphique et une résolution algébrique.
4) On reprend la même question qu'au 2). Mais ... on peut rouler la feuille d'une autre façon. Quel est alors le volume du solide obtenu ?
5) On reprend la 4ème question en ôtant 4 cm, puis 6 cm, puis 8 cm ... etc. Existe-t-il un nombre (ou plusieurs) pour lequel les solides obtenus en roulant dans un sens puis dans l'autre ont le même volume ? Quelle est alors la forme du patron ?

## Pourquoi cet énoncé ?

On peut remarquer la distance séparant l'énoncé distribué aux élèves à celui donné dans la fiche descriptive de cet article. En fait, les énoncés possibles sont au nombre de quatre, au moins :

➠ Le premier *«Parmi les parallélogrammes, quels sont ceux qui, en les roulant dans un sens ou dans un autre, font que les solides obtenus aient le même volume»* a le mérite d'être un problème bien "ouvert". Mais son traitement algébrique nécessite l'emploi de deux variables, ce qui est exclu en Seconde, et l'on pourra consulter l'énoncé IV de l'annexe 4 pour avoir quelques surprises ! On pense, peut-être à tort, que cet énoncé peut ne pas être un problème pour les élèves ; soit qu'ils sont persuadés que **tous** les parallélogrammes roulés dans un sens ou dans l'autre font que les solides ont un même volume, soit que la solution "losange" est immédiate. Il se poserait bien sûr le problème de l'unicité de cette solution, mais est-ce un problème d'élève de seconde ?

➠ Le second s'obtient à partir du premier en fixant le format du rectangle. On évite les deux variables, mais on conserve les comportements des élèves.

➠ L'énoncé donné dans la fiche descriptive, quitte à fixer le format du rectangle pour causes institutionnelles, nous semble trop induire le traitement algébrique, et, par là même, masquer l'utilisation d'une fonction et sa représentation.

➠ Cela étant dit, l'énoncé distribué aux élèves n'est pas exempt de critique. En particulier, la troisième question est là par "souci de professeur" pour résoudre des équations du type $f(x) = a$ et être exhaustif, mais elle n'apporte rien au problème posé.

Cet énoncé peut être donné aux élèves aux premières minutes de la première séance. A leur charge de **fournir une ou plusieurs solutions** sur les-

quelles toute la classe s'entende. Cet accord commun à la classe tient lieu de validation de la solution trouvée à moins que le professeur n'émette un doute, mais en dernier, après que la discussion entre les élèves soit close. Le rôle du professeur est donc bien souvent de gérer les conflits socio-cognitifs entre les élèves, parfois de révéler une contradiction entre deux solutions trouvées par des démarches exactes mais différentes, parfois de relever la faiblesse d'un accord commun (en particulier sur les valeurs approchées du volume). La tâche de l'élève est, bien sûr, de trouver une solution ou de comprendre une solution sur laquelle un accord majoritaire est en train de se faire. L'enjeu sera pour lui soit de trouver une solution sur laquelle l'accord commun se fera, soit de trouver la «critique qui tue».

On peut, si l'on préfère, distiller les questions au fur et à mesure de leur résolution pour éviter l'empressement de certains élèves à résoudre ce problème chez eux et conserver des exigences de rédaction et présentation du travail achevé. En effet, les élèves ont pour consigne de rédiger individuellement la ou les solutions trouvées; la plupart du temps, ceci se fait hors du temps de classe et constitue tout ou partie des «exercices à la maison».

L'énoncé révèle des choix qu'il est important de préciser. l'«angle d'attaque» choisi ici est de fonder la résolution du problème sur la mise en évidence d'une fonction à partir d'un traitement numérique où l'idée d'algorithme est sous-jacente pour permettre le passage de l'«âge du numérique» à l'«âge du fonctionnel». Les deux premières questions fournissent le cadre du problème et permettent de faire le point sur les connaissances anciennes ou d'éliminer les difficultés éventuelles de visualisation de l'espace. Ceci fait, on peut se consacrer au véritable problème que posent les troisième et cinquième questions. On pense qu'éviter les essais pour 2, 4, 6 et 8 cm pour aller directement à une mise en équation, c'est privilégier la résolution algébrique au détriment de l'utilisation des fonctions et de leurs représentations graphiques. Mais peut-être faut-il ôter dans la question 3 la phrase *«on fera une résolution graphique et une résolution algébrique»* qui est trop inductrice de méthodes ? Le danger subsistera cependant que les élèves envisagent une résolution numérique de type dichotomique.

## 3 - Déroulement de l'activité en classe.

Cette activité a été exploitée en classe de seconde de différentes façons :

- dans le cadre d'heures de cours, le professeur faisant face à une classe complète.
- dans le cadre d'heures de travaux dirigés où les élèves se trouvent seuls ou

en groupe (selon leur désir) face à ce problème, le professeur servant alors de caution institutionnelle à la validité des résultats trouvés.

- les heures de cours suivantes sont alors réservées à une synthèse des savoirs et des techniques et à leur illustration de façon moins ouverte.

Le temps passé sur cette activité varie de quatre à sept heures environ pour le travail en classe.

Le travail de rédaction à partir des plans de démonstration et des résultats trouvés en classe, ainsi que les graphiques, sont faits à la maison. La rédaction doit satisfaire certaines exigences de présentation: feuille partagée en deux verticalement. La partie droite contient la résolution du problème; la partie gauche, un peu plus grande que la marge habituelle, permet de signaler les points de méthode, par exemple: résolution de l'équation $x^2 = A.$, une règle de calcul ...

Il faut remarquer que cet énoncé a été exploité avec d'autres niveaux d'approfondissement que celui de seconde, par exemple: en cinquième, en troisième et en première. Les exigences étaient alors modifiées.

## 4 - Résolution et commentaires de la question n°1.

*«Les cylindres obtenus ont-ils le même volume ?»*

### A-Pourquoi cette question ?

De prime abord, cette question montre peu d'intérêt pour les élèves? (*«Qu'est-ce qu'un problème intéressant pour les élèves?»*). Un sondage préliminaire à la résolution a montré que 80% des élèves d'une classe répondaient OUI à cette question; les 20% restant se partageant entre indécis et partisan du NON. On peut tirer parti du conflit créé par les résultats de ce sondage pour favoriser l'éclosion «d'un débat scientifique» dans la classe. Mais les argumentations proposées par les élèves pour convaincre leurs camarades sont rarement de type calculatoire, bien plus souvent géométrique ... et peu scientifiques! L'accord commun de la classe ne se fera pas. Le calcul se fera souvent en désespoir de cause, et sur l'injonction du professeur. Peut-être faut-il, comme Marc Legrand *(voir bibliographie)* le propose, recommencer le vote à chaque étape de la discussion pour que les élèves se rendent compte eux-mêmes si l'argument donné par l'un des leurs atteint le but fixé.

### B - Résolution quand on roule dans le sens de la longueur.

Les solutions proposées par les élèves sont de trois types, toutes fonctionnant sur un même plan. La liste ci-après n'est pas exhaustive.

| | | |
|---|---|---|
| *Calcul du rayon du cercle de base* | | |
| $2\pi r = 29{,}7$<br>$r = \dfrac{29{,}7}{2\pi}$ | $r \approx 4{,}7$ cm | $r \approx 4{,}7$ cm |
| *Calcul de la surface de base* | | |
| $S = \pi r^2$<br>$S = \pi \times \left(\dfrac{29{,}7}{2\pi}\right)^2$<br>$S = \dfrac{29{,}7^2}{4\pi}$ | $S = \pi r^2$<br>$S = \dfrac{29{,}7^2}{4\pi}$<br>$S \approx 70{,}23$ cm$^2$ | $S = \pi r^2$<br>$S = 4{,}7^2 \times \pi$<br>$S \approx 69{,}36$ cm$^2$ |
| *Calcul du volume du cylindre* | | |
| $V = S \times h$<br>$V = \dfrac{29{,}7^2 \times 21}{4\pi}$<br>$V \approx 1474{,}832$ cm$^3$ | $V = 70{,}23 \times 21$<br>$V \approx 1474{,}83$ cm$^3$ | $V = 69{,}36 \times 21$<br>$V \approx 1456{,}56$ cm$^3$ |

**C - Exemples d'aides à la résolution éventuellement fournies par le professeur.**

- Manipulez une feuille de format 21 x 29,7 cm et recherchez les éléments caractéristiques du cylindre.
- Que devient, pour le cylindre, la longueur de la feuille de papier ?
- Rappel de formules : aire du disque, périmètre du cercle, volume du cylindre.

**D - Remarques :**

- Le vocabulaire équation est cité par les élèves alors qu'il s'agit de faire des calculs. Il faut donc, en classe de seconde, amener les élèves à réfléchir sur le type de travail demandé «faire un calcul» ou «résoudre une équation» avant même la résolution.

- Les calculs menés de manière autonome par les élèves aboutissent à une grande variété de résultats du fait de la diversité des méthodes et du mode de fonctionnement de certaines calculatrices. C'est, après collection des résultats que s'engage une réflexion sur une méthode «idéale» d'approximation (qui est pour les élèves une manière d'avoir tous le même résultat) puis sur les conventions concernant les arrondis éventuels.
- Une des difficultés posée par la méthode «idéale» est l'utilisation de la lettre $\pi$. *«Avec $\pi$, on fait comme avec des lettres»* ou *«on fait en fonction de $\pi$»* sont deux remarques qu'on peut entendre.

**E - Dans le sens de la largeur, roulons ...**

On obtient : $V = \dfrac{21^2 \times 29{,}7}{4\pi} \approx 1042{,}81 \text{ cm}^3$

Aucune aide n'est fournie. On vérifie que la méthode d'approximation en fin de calculs est comprise par tous.

**F - Conclusion**

On peut constater l'effet de la résolution de cette question par un nouveau vote. Somme toute, une occasion de voir ou rappeler que deux solides peuvent avoir le même surface latérale sans avoir le même volume.

## 5 - Autour de la deuxième question.

**A - Résolution :**

La distance restante sur la longueur devient le périmètre du cercle.

On trouve : $V = \dfrac{27{,}7^2 \times 21}{4\pi} \approx 1282{,}889 \text{ cm}^2$

La discussion et la règle établie sur l'approximation ont été faites en résolvant la première question.

**B - Aide fournie éventuellement :**

- Découpez le patron dans une feuille quadrillée de format 21 x 29,7 cm.
- Roulez ! Roulez ! ...

**C - Remarques**

- La première étape est celle de la recherche du solide obtenu. Le résultat s'obtient soit immédiatement, soit après la manipulation du patron.
- Le professeur peut légitimer l'emploi d'un tel patron par un argument de réalité (un élève nous a rappelé le patron des rouleaux de papier WC !) et par un argument de solidité (lorsque le cylindre roule, la force de frottement ne s'exerce que sur l'un des points du joint).
- Le schéma de calcul mis en place est bien présent dans l'esprit des élèves, comme le montre la rapidité de leur résolution. Le schéma de calcul devient ainsi un algorithme.

## 6 - Au tour de la troisième question.

Le professeur distingue deux phases : la mise en évidence d'une relation de type fonctionnel et la résolution de l'équation. Quant aux élèves, s'ils veulent bien effectuer un ou deux calculs du type de la question 2, ils regimbent lorsqu'il faut en effectuer un troisième. Mettre en fonction de $x$ devient le plus souvent un principe d'économie et non un moyen de résoudre la question posée.

**A - Mise en fonction de $x$. Sa résolution.**

Les élèves proposent trois types de procédures :

- le «parachutage», motivé par l'analogie avec ce qui précède, de la formule

$$V(x) = \frac{(29{,}7 - x)^2 \times 21}{4\pi}$$

- l'utilisation de la formule $V = 21 \times \frac{r^2}{4\pi}$ , puis le remplacement de $r$ par $29{,}7 - x$.
- le plan «traditionnel»

$$P = 29{,}7 - x$$

$$P = 2\pi r \text{ donc } r = \frac{P}{2\pi} = \frac{29{,}7 - x}{2\pi}$$

$$S = \pi r^2 = \frac{(29{,}7 - x)^2}{4\pi}$$

$$V = 21 \times S = 21 \times \frac{(29{,}7 - x)^2}{4\pi}.$$

**B - Aide fournie**

- Faites les calculs en utilisant la lettre $\pi$.

**C - Remarque sur cette première phase.**

- L'appréhension du mot «fonction» que l'on espère voir naître dans l'esprit des élèves est forcément réductrice par rapport au contenu mathématique de ce mot. Il s'agit, ici, de privilégier l'axe «relation de dépendance du type : $y = f(x) \Rightarrow$ fonction $\Rightarrow$ tableau de nombres $(x\ ,\ y) \Rightarrow$ représentation graphique». Il faudra, au cours de l'année, mettre en place d'autres activités pour que les élèves puissent faire évoluer leur concept de fonction vers celui du mathématicien, mais pour le moment, aucune instuitutionnalisation n'est faite sur les fonctions. En particulier, l'étude du domaine d'astreinte n'est pas faite a priori.
- Une notion sous-jacente importante est celle de composition des fonctions, encore qu'elle ne soit envisagée que sous l'angle technique de remplacement d'une expression littérale dans une autre. Aucune définition, aucun développement sur ce sujet.
  On peut juste préciser un informe ou informel théorème : «Quand on remplace, on met des parenthèses autour de ce par quoi on remplace». Un mode d'explications (professorales) peut utiliser l'apport de l'informatique : l'algorithme 1 évident $P = 29{,}7 - x$

  $r = \frac{P}{2\pi}$ où $r$ est écrit en fonction de $P$

  $S = \pi r^2$ où $S$ est écrit en fonction de $r$

  $V = 21.S$ où $V$ est écrit en fonction de $S$

  peut se réduire de manière successive en une suite d'algorithmes aboutissant à la formule recherchée.

| algorithme 2 | algorithme 3 | algorithme 4 |
|---|---|---|
| $r = \frac{29{,}7 - x}{2\pi}$ | | |
| $S = \pi r^2$ | $S = \pi \times \left(\frac{29{,}7 - x}{2\pi}\right)^2$ | |
| $V = 21.S$ | $V = 21.S$ | $S = 21 \times \pi \times \left(\frac{29{,}7 - x}{2\pi}\right)^2$ |

Cette dernière formule sera simplifiée à la demande du professeur, mais alors, bien souvent, les élèves veulent développer l'identité remarquable. Faut-il lutter contre ce désir ?

Dans l'esprit des nouveaux programmes et, considérant que le doute est une vertu scientifique, il est bon d'obliger les élèves à constater l'absence de contradictions «flagrantes». Les calculs faits précédemment pour $x = 0$ (cf. question 1) et $x = 2$ (cf. question 2) le permettent.

La deuxième phase est celle de la résolution de l'équation. A l'entrée en seconde, sans aide, les élèves ont du mal à y parvenir.

*A*- L'écriture de l'équation $V(x) = \frac{1}{2} V(0)$ c'est-à-dire $V(x) = 737{,}416$ ne pose aucun problème. Certains élèves manifestent contre la valeur approchée utilisée pour $V(0)$ ; c'est à ce moment que le professeur peut leur proposer une résolution graphique (quitte à être imprécis ...).

Le domaine d'astreinte [0 ; 29,7] est évident pour les élèves.

Le travail préparatoire à la représentation graphique faite sur papier millimétré ne doit pas être négligé sous prétexte du peu d'intérêt mathématique. Il est à mettre en place, même en seconde, avec rigueur vu l'importance accordée à ce genre de travaux dans d'autres disciplines.

La représentation graphique sera faite point par point, seule méthode possible à l'entrée en Seconde, hormis l'utilisation de calculatrices graphiques ou d'ordinateurs. Elle nécessite la recherche de l'intervalle de définition et le calcul de valeurs de $V(x)$ : on propose de faire les calculs pour $x$ entier pair de [0 ; 29,7] soit en répartissant le travail dans la classe, soit en apprenant aux élèves l'usage d'une calculatrice programmable. La recherche d'un repère adéquat à la représentation ne semble pas naturelle à moins que les nombres utilisés paraissent peu fréquentables aux élèves.

Un repère agréable est :

en abscisse : 1 cm représente 2 cm de la réalité

en ordonnée : 1 cm représente 100 $cm^3$ de la réalité.

Il impose une réflexion sur la «représentabilité» des valeurs approchées obtenues pour $V(x)$.

Le reste du travail se déroule sans trop de peine.

La résolution algébrique demande à être corrigée. Une méthode astucieuse consiste à utiliser le «truc» suivant :

$$V(x) = \frac{1}{2} V(0)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{21}{4\pi}(29{,}7-x)^2=\frac{1}{2}\times\frac{21}{4\pi}\times(29{,}7)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (29{,}7-x)^2=\frac{1}{2}\times 29{,}7^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (29{,}7-x)^2=\left(\frac{29{,}7}{\sqrt{2}}\right)^2$$

On trouve les deux valeurs possibles dont on calculera une valeur approchée : $x = 29{,}7 - \frac{29{,}7}{\sqrt{2}}$ ou $x = 29{,}7 + \frac{29{,}7}{\sqrt{2}}$

La seconde solution étant rejetée soit par manque de pertinence réelle (on ne peut pas construire de cylindre avec la feuille initiale), soit parce qu'elle n'appartient pas au domaine de définition. Ce phénomène est un moyen pour un professeur de légitimer l'étude du domaine d'astreinte ou de définition.

***B - Remarque :***

Les savoirs utilisés pour la résolution de cette question feront l'objet d'une synthèse soit tout de suite, soit en fin d'activité. Il s'agit de rédiger une fiche sur *«résolution graphique d'une équation»* du type $f(x) = a$ avec la description générale du processus et un exemple, ainsi qu'une autre fiche *«résolution algébrique d'équations»* du type $X^2 = A$.

## 7 - Où l'on ne résout pas la quatrième question pour se précipiter sur la cinquième.

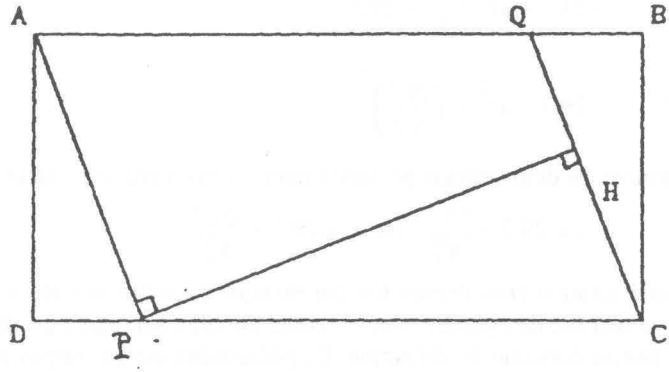
**A - Aide fournie obligatoire.**

Ayant lu l'énoncé entier, les élèves proposent d'intervertir l'ordre des questions, envie qu'ils légitiment d'autant mieux que, procédant par analogie avec la réponse précédente et par interversion de la longueur et de la largeur, ils disposent, selon eux, de la formule :

$$V'(x)=\frac{29{,}7}{4\pi}(21-x)^2$$

Le professeur doit intervenir rapidement et autoritairement : «Cette formule est fausse !». Il faut ensuite persuader les élèves qu'ils ne disposent pas des éléments caractéristiques du cylindre. Un moyen est de les faire manipuler le patron découpé dans une feuille quadrillée (roulant dans le sens de la longueur, le quadrillage restait perpendiculaire à la base du cylindre ; maintenant, il penche !).

En observant le patron, éventuellement en aplatissant le cylindre formé, on voit que la hauteur du cylindre est donnée par une perpendiculaire à [AP], par exemple (PH).




**B - Recherche de la formule**

C'est ici l'occasion de réinvestir des savoirs anciens.

En examinant l'algorithme initial, seuls périmètre du cercle de base et hauteur du cylindre sont inconnus.

Le **calcul du périmètre *AP*** ne pose aucun problème et aboutit au résultat: $AP = \sqrt{441 + x^2}$ .

Le **calcul de la distance *AH*** peut être mené de diverses façons. La méthode utilisée par les élèves fait intervenir la trigonométrie. Après comparaison des angles des triangles DPA et PHC,

et en utilisant l'angle $\widehat{DPC}$ , on obtient:

$$\widehat{A} = \widehat{P} ,$$

donc $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{P}$ ,

d'où $\dfrac{PH}{PC} = \dfrac{AD}{AP}$ .

On en déduit la formule $PH = \dfrac{21\,(29{,}7 - x)}{\sqrt{441 + x^2}}$ .

La formule du volume $V'(x)$ devient alors, après simplification:

$$V'(x) = \frac{21\,(29{,}7 - x)\sqrt{441 + x^2}}{4\pi}$$

Une méthode plus astucieuse permettrait d'obtenir la distance *AH* en calculant de deux façons l'aire du parallélogramme AQCP :

$$\mathcal{A}\,(\text{AQCP}) = \mathcal{A}\,(\text{ABCD}) - 2\mathcal{A}\,(\text{ADP})$$

$$= 21 \times 29{,}7 - 2 \times \frac{21 \times x}{2}\,.$$

$$= 21\,(29{,}7 - x)$$

et $$\mathcal{A}\,(\text{AQCP}) = \text{AP} \times \text{PH}$$

$$= \sqrt{441 + x^2} \times \text{PH}$$

On obtient ainsi *PH* en écrivant l'égalité des résultats obtenus. Cette méthode peut faire l'objet d'un exposé du professeur.

**C - Aide fournie éventuellement :**

- Faites d'abord un raisonnement sur les angles des triangle DAP et PHC.

- En utilisant le fait que $\widehat{\text{DPC}}$ est un angle droit, comparez alors les angles de ces triangles.

- Comparez $\cos\widehat{\text{DAC}}$ et $\cos\widehat{\text{HPC}}$ . En déduire *PH*.

- Rappel : $\cos\hat{\text{A}} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ dans un triangle rectangle.

**D - Remarques :**

Les nouveaux programmes de collège ont déplacé le cosinus de la troisième à la quatrième ; de ce fait, cette notion devient un argument de démonstration bien maîtrisé par les élèves en seconde.

Réussir à obtenir cette démonstration demande du temps si les élèves travaillent de manière autonome.

**E - Résolution de l'équation $V(x) = V'(x)$**

L'écriture de l'équation ne pose aucun problème. On obtient :

$$\frac{21}{4\pi} \times (29{,}7 - x)^2 = \frac{21}{4\pi} \times (29{,}7 - x) \times \sqrt{441 + x^2}$$

Les élèves, effrayés par cette équation en proposent une résolution graphique. La résolution graphique de $x \to V'(x)$ sera, bien sûr, faite sur le gra-

phique précédent ; elle sera facilitée par l'utilisation d'une calculatrice éventuellement programmable.

La résolution numérique demande à être corrigée par le professeur. Au vu de l'exemple précédent, les élèves proposent de simplifier par $\frac{21}{4\pi} \times (29{,}7 - x)$ . Il ne sera fait aucun obstacle. On obtient :

$$(29{,}7 - x) = \sqrt{441 + x^2}$$

d'où les élèves déduisent :

$$(29{,}7 - x)^2 = 441 + x^2$$
$$882{,}09 - 58{,}4x + x^2 = 441 + x^2$$
$$x = \frac{441{,}09}{59{,}4}$$
$$x \approx 7{,}4 \text{ cm.}$$

Le professeur doit faire remarquer que l'on obtient qu'une seule solution alors que la résolution graphique en fait apercevoir deux, dont la solution $x = 29{,}7$. Après qu'un débat se soit instauré entre les élèves et se soit appauvri faute d'arguments, les élèves mettent en doute la validité de cette solution. Le professeur intervient en remarquant que l'on peut toujours vérifier si 29,7 est une solution, puis propose une explication.

**F - Remarque :**

La résolution graphique ne pose aucun problème et fait l'objet d'un point de cours en fin d'activité. Sur la fiche *«Résolution graphique d'équations»*, on précise la méthode permettant de résoudre les équations du type $f(x) = g(x)$. L'exemple $x^2 = 3x - 2$ illustre cette méthode.

La résolution algébrique est difficile et doit être menée avec doigté. Elle fait l'objet d'un point de cours sur la fiche *»Résolution algébrique d'équations»* à partir d'un exemple moins compliqué.

**G - Et la forme du patron ?**

Si $x = 29{,}7$, la question ne se pose pas. La confection du patron permet, dans l'autre cas, de donner la réponse : un losange.

Le professeur doit imposer une vérification numérique, les élèves se satisfaisant de ce qu'ils voient, même si elle n'est faite que sur la valeur approchée $x = 7{,}4$ cm.

## 8 - Où la coupe ... cylindrique est pleine.

Placée en début d'année, cette activité impressionne les élèves. Elle leur permet une meilleure appréciation du travail attendu dans la classe et modi-

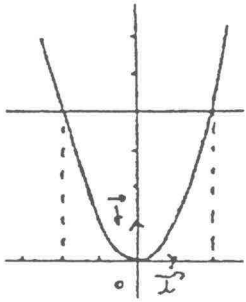
fie, pour certains, leur représentation des mathématiques. Il est cependant évident que les savoirs institutionnalisés après une première utilisation n'imprègnent pas encore suffisamment les élèves ; ceci est en particulier vrai pour la notion de fonction. On propose à titre de documentation les fiche de cours (annexe 0), les exercices donnés à faire à la maison (annexe 1), des exemples de contrôles faits en classe (annexes 2 et 3) et quelques suggestions (annexe 4). Les exercices de l'annexe 1 sont très réducteurs par rapport à l'activité elle-même. Il s'agit que les élèves fassent quelques «gammes» sur les points de l'activité valant pour méthode.

# ANNEXE 0
# Fiches de cours

## FICHE 1 : Résolution graphique d'équations.

**1 - Du type *f(x) = a.***

*Méthode :* on trace la représentation graphique de la fonction *f* (on dit aussi la courbe d'équation $y = f(x)$.
on trace la droite d'équation $y = a$.
on compte le nombre de points d'intersection de ces deux "courbes".
on donne l'ensemble des solutions de l'équation
- soit par une phrase en français : «les solutions de l'équation $f(x) = a$ sont ...»
- soit par $S = \{...;...;...\}$

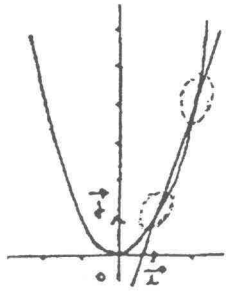


*Exemple :* résolution de $x^2 = 4$

Les solutions de l'équation de l'équation $x^2 = 4$ sont : $-2$ et 2.

**2 - Du type *f(x) = g(x)***

*Méthode :* on trace la représentation graphique de la fonction *f*.
on trace celle de *g*.
on regarde le nombre de points d'intersection des deux courbes.
on lit l'abscisse de ces points.
on donne l'ensemble des solutions de l'équation.



*Exemple :* résolution de $x^2 = 3x - 2$.
Les solutions de l'équation $x^2 = 3x - 2$ sont : 1 et 2.

*Sur cet exemple, avec cette représentation graphique, les solutions graphiques 1 et 2 n'apparaîssent pas clairement.*

*Suite de la fiche 1.*
Remarque importante :
Une équation étant donnée, on peut, avant d'employer la méthode précédente, la "triturer" algébriquement pour avoir des représentations de fonctions plus simples à tracer.
Exemple : pour résoudre $x^2 - 3x + 2 = 0$, il vaut mieux résoudre $x^2 = 3x - 2$ .

## Fiche 2 : Résolution algébrique d'équations.

**1 - Du type $X^2 = A$**

- On regarde le signe de A.
- Si $A < 0$ l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut être strictement négatif (pensez à $x^2 = -1$)
- Si $A = 0$, l'équation a une seule solution $X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 0$
- Si $A > 0$,...attention danger.

Il y a deux méthodes possibles :

***Première méthode :***

| *On pense* | *On rédige* |
|---|---|
| A positif | $X^2 = A$ |
| $\sqrt{A}$ existe | $X^2 = (\sqrt{A})^2$ |
| | $X^2 - (\sqrt{A})^2 = 0$ |
| Identité $a^2 - b^2$ | $(X - \sqrt{A})(X + \sqrt{A}) = 0$ |
| Un *produit* de facteurs est nul ... | $X - \sqrt{A} = 0$ ou $X + \sqrt{A} = 0$ |
| | $X = \sqrt{A}$ ou $X = -\sqrt{A}$ |

***Deuxième méthode :***

| *On pense* | *On rédige* |
|---|---|
| A positif | $X^2 = A$ |
| $\sqrt{A}$ existe | $X^2 = (\sqrt{A})^2$ |
| $a^2 = b^2$ si et seulement si | |
| $a = b$ ou $a = -b$ | $X = \sqrt{A}$ ou $X = -\sqrt{A}$ |

*Pour des exemples, voir activité cylindre.*

# ANNEXE 1
# Exercices

## 1 - Pour s'entraîner sur les équations

Résoudre (on dit aussi : résoudre dans **R**)

(1) $3(2-5x)+3+x-(1+2x)=5x+7$

(2) $3-7x-(1-x)=2(x+1)$

(3) $6x-(3-7x)-10(x+1)=3(x-3)-4$

(4) $12(x+1)+1{,}5x=8{,}6$

(5) $\dfrac{x-7{,}1}{3}+\dfrac{1-2{,}7x}{2}=\dfrac{7}{6}-\dfrac{1{,}2x-5}{3}$

(6) $\dfrac{21}{4\pi}(x+3)^2=\dfrac{21}{4\pi}(2x-7)^2$

(7) $(x+1)(5x-8)-(x+1)(9x-4)=(x+1)(7x-5)$

(8) Résoudre pour $x$ compris entre $-4$ et $4$ : $(x+5)^2=(2x-3)^2$

(9) Résoudre pour $x$ négatif : $13x-(8x+10)=3x$.

(10) Résoudre pour $x$ positif : $-5x-(-8x+1)=-3x$.

## 2 - Pour résoudre graphiquement

Résoudre l'équation

$x^2=2$ pour $x$ compris entre $-2$ et $2$

$x^2=-1$ pour $x$ positif

$2x^2-5=0$ pour $x$ compris entre $-2$ et $2$

$3x+2=2$ pour $x$ compris entre $-2$ et $4$

$x^2+x-1=1$ pour $x$ compris entre $-3$ et $2$

$(x-1)^2=-2$ pour $x$ compris entre $-1$ et $3$.

## 3 - Pour mettre en équation

(1) Déterminer un triangle rectangle dont les côtés soient trois entiers naturels consécutifs.

(2) Trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 18.

(3) Un cylindre de 10 cm de rayon à la base contient une certaine quantité d'eau. Lorsqu'on y plonge un autre cylindre de 5 cm de rayon, le niveau de l'eau monte de deux cm. Calculer la hauteur $h$ du cylindre immergé. Le second cylindre est entièrement sous l'eau.

## 4 - Pour représenter graphiquement une fonction

Tracer la représentation graphique de $f$ quand :

(1) $f(x) = -2x + 3$ et $x$ compris entre $-2$ et 3

(2) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ et $x$ compris entre 2 et 6

(3) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ et $x$ compris entre $-2$ et 3

(4) $f(x) = x^2$ et $x$ compris entre $-2$ et 1

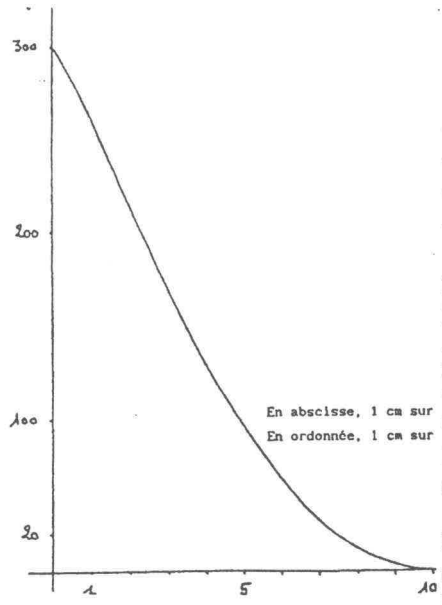
(5) $f(x) = x^2 + 1$ et $x$ compris entre $-2$ et 2

(6) $f(x) = (x + 1)^2$ et $x$ compris entre $-3$ et 2.

# ANNEXE 2
# Interrogation écrite

**EXERCICE 1**

Sur le dessin ci-dessous, on a représenté les points de coordonnées $(x, y)$




1) a) Entre quelles valeurs $x$ varie-t-il ?

b) entre quelles valeurs $y$ varie-t-il ?

c) Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3 ?

d) Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 100 ?

2) Les coordonnées des points de la courbe sont liés par la relation $y = 3(10 - x)^2$.

Résoudre algébriquement, pour $x$ compris entre 3 et 7, l'équation : $3(10 - x)^2 = 100$.

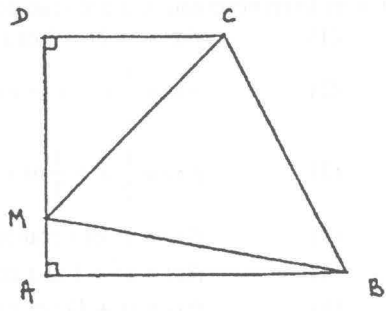
(valeur exacte, valeur approchée).

En abscisse, 1 cm sur le dessin représente 1.

En ordonnée, 1 cm sur le dessin représente 20.

**EXERCICE 2**

Dans la figure ci-contre, on a :
AB = 5 cm
DC = 3 cm
AD = 4 cm
$x$ = AM avec $x$ compris entre 0 et 4 cm.
On note :
$a$ l'aire en $cm^2$ du triangle DMC
$b$ l'aire en $cm^2$ du triangle ABM
$c$ l'aire en $cm^2$ du triangle CBM.




1) Exprimer en fonction de $x$ les nombres $b$ et $a$.

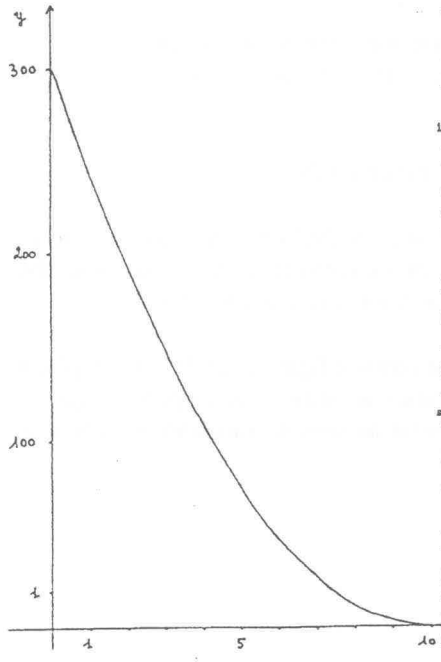
2) α) Calculer la surface du trapèze ABCD
β) Exprimer en fonction de $x$ le nombre $c$

3) Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on :
α) $a = b$
β) $c = a + b$ ?

# ANNEXE 3
## Interrogation écrite

**EXERCICE 1**

Sur le dessin ci-dessous, on a représenté les points de coordonnées $(x\ ,\ y)$




1) a) Entre quelles valeurs $x$ varie-t-il ?

b) entre quelles valeurs $y$ varie-t-il ?

c) Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3 ?

d) Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 100 ?

2) Les coordonnées des points de la courbe sont liés par la relation $y = 3(10 - x)^2$.

Résoudre algébriquement, pour $x$ compris entre 3 et 7, l'équation : $3(10 - x)^2 = 100$.

(valeur exacte, valeur approchée).

En abscisse, 1 cm sur le dessin représente 1.

En ordonnée, 1 cm sur le dessin représente 20.

**EXERCICE 2**

On prend une feuille carrée de $x$ cm, avec $x$ compris entre 0 et 10. On la roule.

1) Exprimer en fonction de $x$ le volume du cylindre obtenu noté $v(x)$.

2) Pour les valeurs entières de $x$ comprises entre 0 et 10, calculer $V(x)$ à la précision de la machine.

3) Faire une représentation graphique de la fonction $V$.

4) Pour quelle valeur de $x$, le volume $v(x)$ est-il égal à la moitié de $V(10)$ ? (Résolution graphique).

# ANNEXE 4
## Suggestions
## à la discrétion des collègues

I - On prend une feuille de format 21 x 29,7 cm.
On enlève une bande $x$ x 21 et on roule pour obtenir un cylindre.
Quelle distance $x$ faut-il ôter pour qu'en roulant dans un sens ou dans l'autre, on obtienne le même volume ?

II - Même question si on enlève une bande $x$ x 29,7.

III - On prend deux feuilles de format 21 x 29,7 cm. Sur l'une, on ôte une bande 21 x $x$ et sur l'autre une bande 29,7 x $x$. Quelle distance ôter pour obtenir le même volume pour les cylindres formés avec ces feuilles ?

IV - On peut reprendre l'activité dont l'énoncé figure page ??? en remplaçant 21 x 29,7 par $l$ x $L$. On pourra raisonner en utilisant le rapport $l/L$ que l'on notera $k$, et, s'intéresser particulièrement au sens de variation de la fonction volume du cylindre.