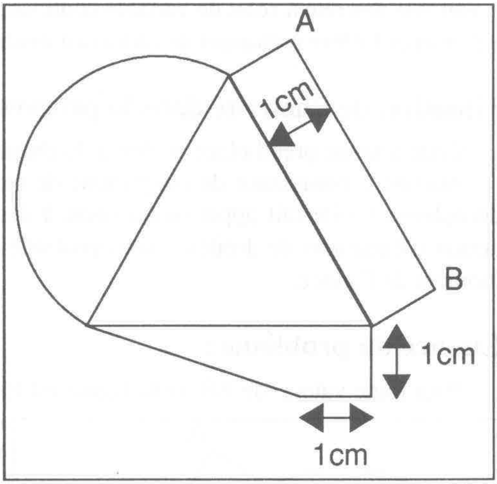
COMPARAISONS D'AIRES COMPARAISONS DE FONCTIONS

Jean-Alain RODIER
IREM de Clermont-Ferrand

Le problème :

Comparer, suivant les valeurs de AB, les aires respectives de ces quatre figures.



Objectif principal de l'activité :

Introduire la notion de fonction sous l'aspect comparaison de l'ordre de grandeur à l'aide de graphiques ou de résolution d'inéquations algébriques.

Situation dans la progression de la classe :

Cette activité prend place au début du chapitre sur les fonctions.

Scénario :

Un temps de recherche en groupe de la solution du problème.
Présentation par chaque groupe de sa solution.
Recherche individuelle sur la comparaison de deux des aires.
Réinvestissement du travail dans une activité de résolution de problèmes voisins.

COMPARAISONS D'AIRES
COMPARAISONS DE FONCTIONS

Objectif par rapport à la construction des connaissances :

L'objectif principal de cette activité est d'introduire la notion de fonction.

Elle a pour but :
- de faire en sorte que les élèves «s'imprègnent» des notations et de la notion de variable, et en particulier, tacitement, faire passer l'élève du concept de variable discrète à celui de variable continue,
- d'amener l'élève à changer de cadre et à évoluer dans chacun d'eux.

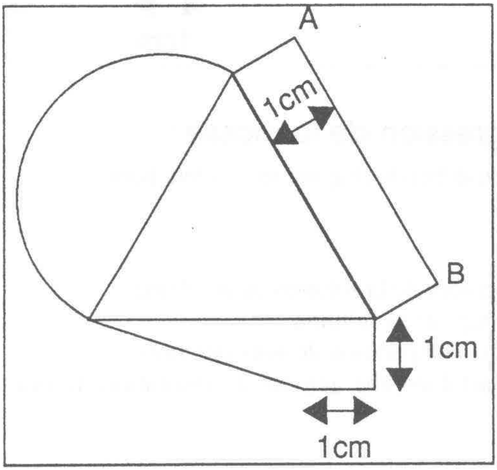
Situation de l'activité dans la progression de la classe :

Cette activité prend place au début du chapitre sur les fonctions.

Aucune connaissance du programme de seconde n'est exigible dans sont déroulement, elle fait appel uniquement à des calculs simples d'aires et la notion d'équations de droites ; aussi peut-elle être abordée à n'importe quel moment de l'année.

Enoncé du problème :

Pour toute valeur de AB, cette figure est formée d'un triangle équilatéral, d'un demi-disque, d'un rectangle dont un des côtés a pour longueur 1 cm et d'un trapèze rectangle dont 2 côtés ont pour longueur 1 cm. Comparez suivant les valeurs de AB, les aires respectives de ces quatre figures.



Le scénario :

Les élèves sont placés par groupes de quatre, et chaque groupe dispose d'une copie et d'une feuille de papier millimétré.

Première partie : 1 h 30.

Le professeur distribue l'énoncé et chaque groupe travaille pendant une heure et demie à la rédaction de la solution.
A la fin de l'heure et demie, les copies sont ramassées.

Deuxième partie : 1/2 h.

A l'heure de cours suivante, un élève de chaque groupe présente son travail au tableau.

Troisième partie : 1/2 h.

Le professeur propose de s'intéresser uniquement à la comparaison des aires de deux des figures. Chaque élève est placé en situation de recherche individuelle. A la fin de cette demi-heure, le professeur distribue la feuille de travaux dirigés présentée ci-après, le travail donné pour le prochain cours est la rédaction au brouillon des réponses aux questions posées sur cette feuille.

Quatrième partie : 1/2 heure.

Correction puis capitalisation.

Les raisons du choix de l'énoncé :

Les figures géométriques présentées dans le problème sont simples de façon à ce que tous les élèves, même les plus faibles, puissent aborder le problème.
L'énoncé donne toute liberté à l'élève au niveau du cadre de travail ; les connaissances nécessaires sont uniquement le Théorème de Pythagore et les relations dans le triangle rectangle.

Procédures de résolution du problème par le professeur :

Poser x = AB (en cm).

Noter $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ en fonction de x.

Etablir un tableau de valeurs pour les quatre fonctions f, g, h, et k, après avoir noté le caractère affine de certaines d'entre elles.

Tracer la représentation graphique de ces quatre fonctions et conclure suivant la position relative des courbes obtenues.

Analyse a priori :

Le texte, tout d'abord, demande réflexion au niveau de la phrase «comparez suivant les valeurs de AB...».

Le calcul de l'aire d'un triangle équilatéral n'est pas automatique et doit poser problème, l'expression algébrique des aires des autres figures devrait se faire plus facilement, mais attention aux erreurs de calcul.

Certains élèves ne vont pas poser x = AB et vont avoir des expressions algébriques compliquées au niveau littéral, de même pour l'introduction des notations $f(x)$, $g(x)$ ...

Pour établir les tableaux de valeurs, certains d'entre eux vont refaire systématiquement les mêmes calculs, sans passer par l'expression algébrique, d'autres vont se contenter à tort de reproduire la figure pour chaque valeur de AB, et de lire à la règle les valeurs nécessaires à leurs calculs. Au niveau de la représentation graphique, beaucoup ne comprendront pas pourquoi certains points sont alignés. (et pas d'autres).

Compte-rendu d'une utilisation :

Cette activité a été proposée en avril 1992 dans deux classes de seconde, correspondant à 18 groupes de 4 élèves (ou trois élèves pour certains).
Seulement trois groupes ont utilisé la notation x = AB. Le calcul des aires des différentes figures ne leur a pas posé beaucoup de problèmes (quelques fautes de calcul littéral au niveau du calcul de l'aire du demi-disque sont à signaler).

Au niveau du calcul des aires des différentes surfaces pour les valeurs de AB données, un seul groupe a calculé ces valeurs en recommençant chaque fois le même calcul, les autres ont remplacé AB par la valeur considérée dans les expressions littérales (un groupe s'est arrêté aux expressions littérales des aires).

En ce qui concerne les représentations graphiques, quatre groupes n'ont pas fait de représentation graphique et ont utilisé le papier millimétré pour reproduire la figure pour différentes valeurs de AB ; dans les autres groupes, le travail a été réalisé jusqu'à l'obtention de quatre courbes ; beaucoup de groupes ont obtenu 4 demi-droites, et un groupe a placé l'aire en abscisse et x en ordonnée.

Analyse mathématique :

Il serait bon, avant d'aborder cette activité, de faire quelques rappels sur les équations de droites, sur le calcul de l'aire d'un triangle, et la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral.

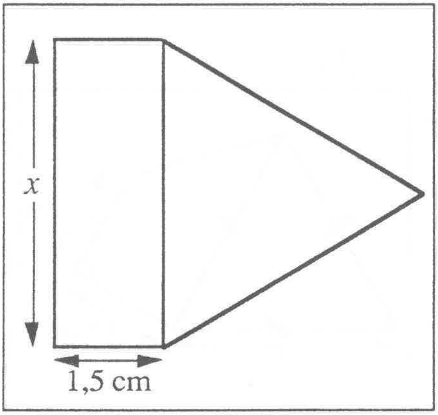
Les comparaisons d'aires proposées présentent l'avantage de ne pas être accessibles géométriquement. Les réels qui interviennent au cours de la résolution sont tous irrationnels, ceci peut permettre un travail sur l'approximation.

Capitalisation :

La capitalisation de ce travail est faite lors de la quatrième partie du scénario.

On peut envisager une capitalisation sous la forme d'un travail dirigé comme celui présenté ci-après.

Une possibilité de travail dirigé pour la troisième partie :



Pour toute valeur de x la figure est formée d'un rectangle dont un côté a pour longueur 1,5 cm et d'un triangle équilatéral :

1) Reproduire la figure ci-contre lorsque x = 0,5 cm, puis lorsque x = 7 cm. Que remarquez-vous au niveau des aires des figures obtenues ?

2) Les aires du rectangle et du triangle varient en fonction de x, notons-les respectivement $f(x)$ et $g(x)$. Calculer f (0,5) ; g (0,5) puis f (7) et g (7).

3) Exprimez $f(x)$ en fonction de x.

4) Remplir les tableaux suivants :

x	0,5	1,5	3	5	7
$f(x)$					

x	0,5	1,5	3	5	7
$g(x)$					

Que pouvez-vous conjecturer ?

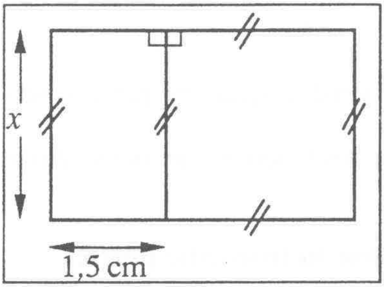
5) Dans un repère ayant pour unités 2 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée, placez les points M(x, $f(x)$) et N(x , $g(x)$) pour x = 0,5 ; 1,5 ; 3 ; 5 ; 7.

En joignant les points M obtenus puis les points N, vous obtenez deux courbes. A partir de quelle valeur de x l'aire du triangle équilatéral dépasse-t-elle l'aire du rectangle ?

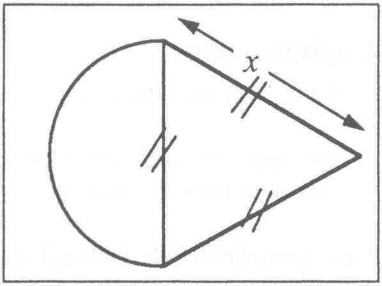
LES DIFFÉRENTES VARIANTES DU PROBLÈME

Etude comparée des aires.

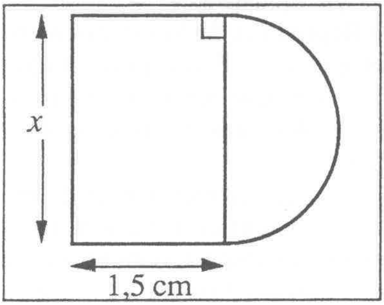
1



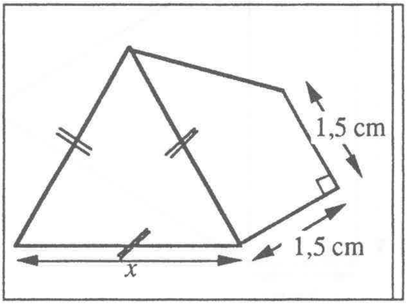
2



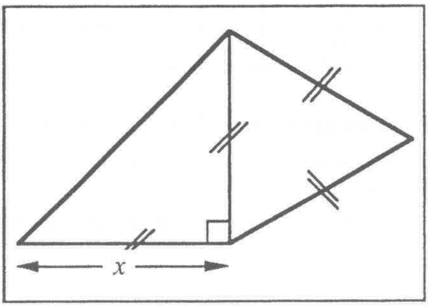
3



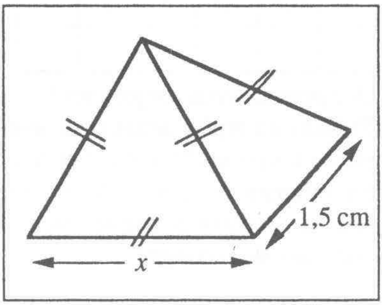
4



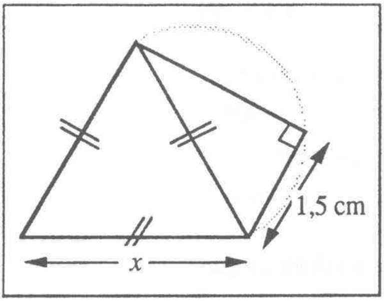
5



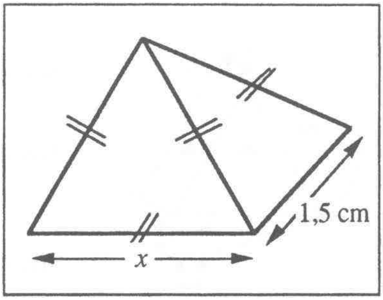
6



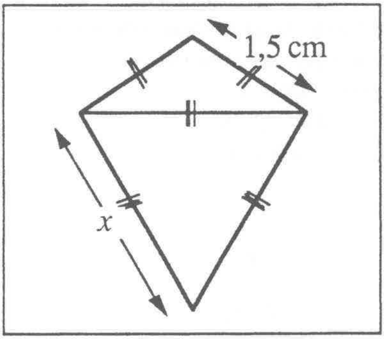
7



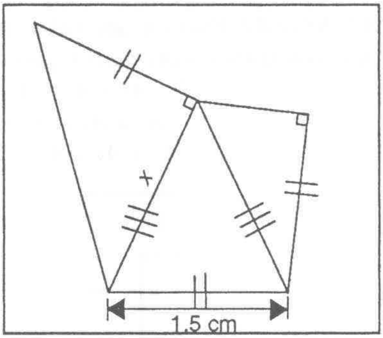
8



9



10



$$f : \to \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2$$

$$f : \to \frac{x}{2}\sqrt{1{,}5^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$f : \to \frac{1{,}5\,\sqrt{x^2 - 1{,}5^2}}{2}$$

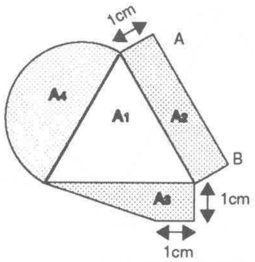
$$g : \to \frac{1{,}5\,\sqrt{x^2 - 0{,}75^2}}{2}$$

$$h : \to \frac{1{,}5 \times x}{2}$$

N.B. comportement «asymptotique» : ensembles de départ (justification géométrique).

Groupe 1

Enoncé du problème



Soit A1 l'aire du triangle équilatéral :

$$A_1 = \frac{\sqrt{3} \times AB^2}{4}$$

Soit A2 l'aire du rectangle :

$$A_2 = AB$$

Soit A3 l'aire du trapèze :

$$A_3 = \frac{AB + 1}{2}$$

Soit A4 l'aire du demi-disque :

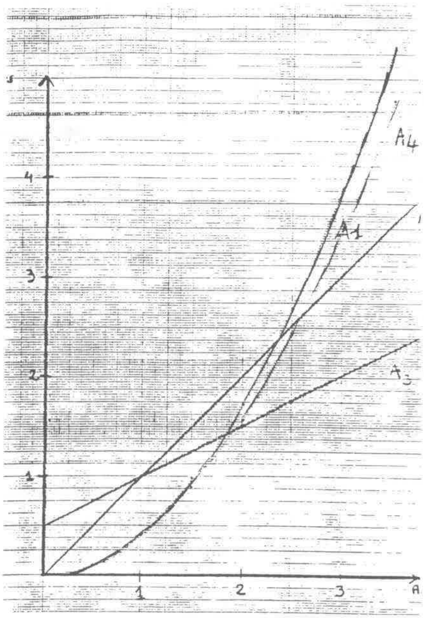
$$A_4 = \frac{\pi \times AB^2}{8}$$

A chaque valeur de AB, correspond une aire pour chacune des figures : A1, A2, A3 et A4. Pour chaque valeur de AB, à l'aide du graphique obtenu, on peut connaître l'ordre dans lequel les aires des figures sont rangées.

$A_3 > A_2 > A_1 > A_4$ *si* $0 < AB < 1$

$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$ *si* $1 < AB < 2{,}25$

$A_1 > A_4 > A_2 > A_3$ *si* $2{,}25 < AB < 3{,}5$



Groupe 2

Pour calculer h du triangle ABH.

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

donc $AH^2 = AB^2 - (AB/2)^2$

donc $AH^2 = \frac{4AB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

donc $AH^2 = \frac{3AB^2}{4}$

donc $\boxed{AH = \frac{\sqrt{3}AB}{2}}$

Formules des aires

le triangle : $\frac{B \times h}{2}$

le rectangle : $L \times h$

le demi-cercle : $\frac{\pi \times R^2}{2}$

le trapèze : $\frac{(b + B) \times h}{2}$

comparaison des différentes aires

si $AB = 5$ et $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

alors l'aire du rectangle est $5 \times 1 = 5\ cm^2$

" du triangle est $\frac{5 \times 5\sqrt{3}/2}{2} \approx 10{,}83\ cm^2$

" du demi-cercle $\frac{\pi \times 2{,}5^2}{2} \approx 9{,}82\ cm^2$

" du trapèze $\frac{(5 + 1) \times 1}{2} = 3\ cm^2$

donc l'aire du triangle > celle du demi-cercle > celle du rectangle > celle du trapèze

Si $AB = 0$ et $h = \frac{0{,}9\sqrt{3}}{2}$

alors l'aire du rectangle est $0{,}9\ cm^2$
l'aire du triangle $\approx 0{,}35\ cm^2$
l'aire du demi-cercle est $\approx 0{,}32\ cm^2$
l'aire du trapèze est $\approx 0{,}95\ cm^2$

donc l'aire du trapèze>celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle

si $AB = 1$ et $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

alors l'aire du rectangle est $= 1\ cm^2$
l'aire du triangle est $\approx 0{,}43\ cm^2$

l'aire du demi-cercle est ≈ 0,39 cm²

l'aire du trapèze est ≈ 1 cm²

donc l'aire du trapèze=celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle

Lorsque AB>1;

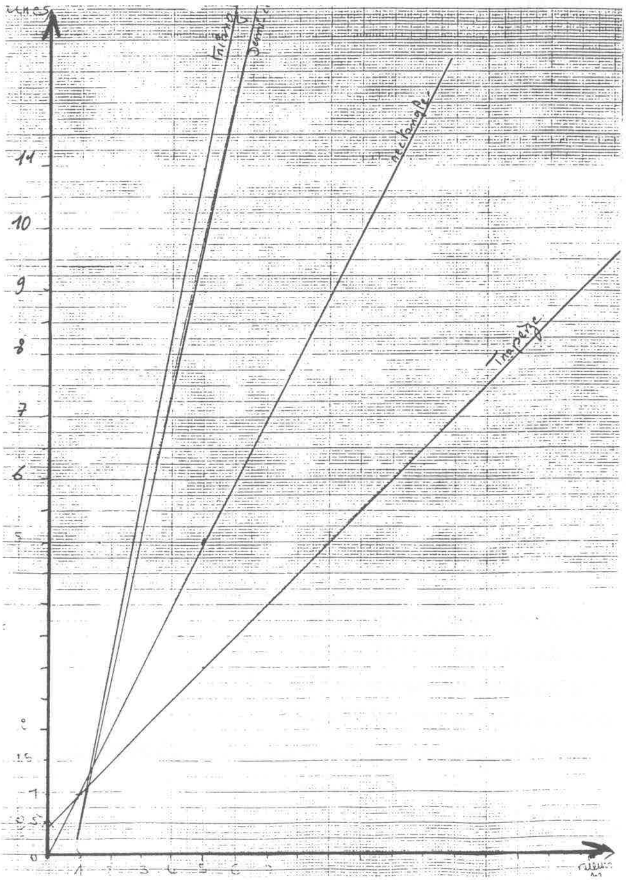
l'aire du triangle>celle du demi-cercle>celle du rectangle>celle du trapèze

Lorsque AB = 1 ;

celle du trapèze=celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle

Lorsque AB<1 ;

celle du trapèze>celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle



Groupe 3

Rappel

Aire du rectangle : $l \times L$

Aire du demi-disque : $\pi R^2 / 2$

Aire du triangle : $(B \times h)/2$

Aire du trapèze : $(B + b) \times h /2$

Nous avons pris pour chacune une valeur de AB

Gaëlle : 2 cm ; Virginie : 4 cm ; Maryline : 3 cm ; Frédérique : 6 cm.

Pour Gaëlle :	*Aire du rectangle :*	*2 cm²*
	Aire du triangle :	*18 cm²*
	Aire du demi-disque :	*1,57 cm² (π/2)*
	Aire du trapèze :	*1,5 cm²*
Pour Virginie :	*Aire du rectangle :*	*4 cm²*
	Aire du triangle :	*7,6 cm²*
	Aire du demi-disque :	*6,28 cm²*
	Aire du trapèze :	*2,5 cm²*
Pour Marilyne :	*Aire du rectangle :*	*3 cm²*
	Aire du triangle :	*4,05cm²*
	Aire du demi-disque :	*3,53 cm²*
	Aire du trapèze :	*2 cm²*
Pour Frédérique :	*Aire du rectangle :*	*6 cm²*
	Aire du triangle :	*15,6cm²*
	Aire du demi-disque :	*14,13 cm²*
	Aire du trapèze :	*3,5cm²*

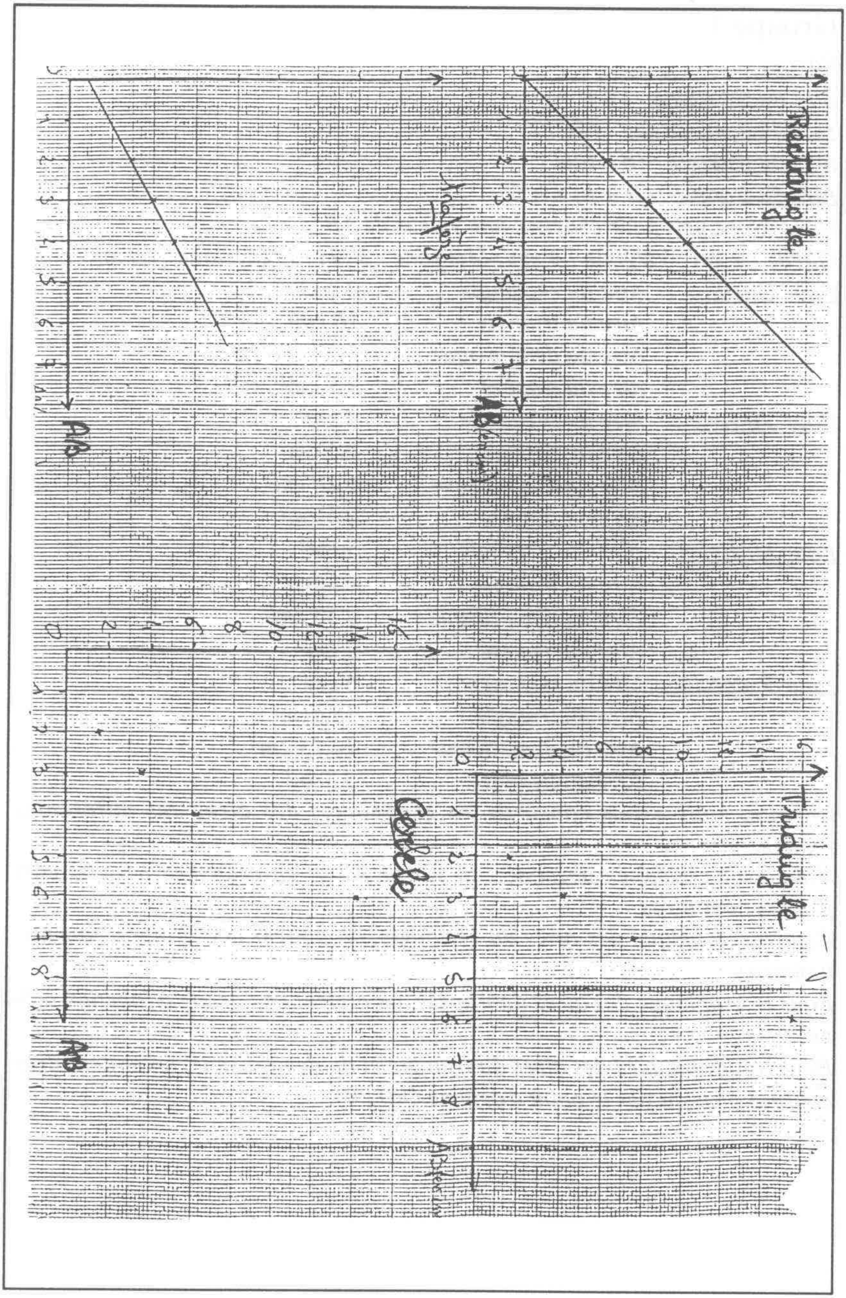
Ensuite, nous avons construit les graphiques des aires des différentes figures.

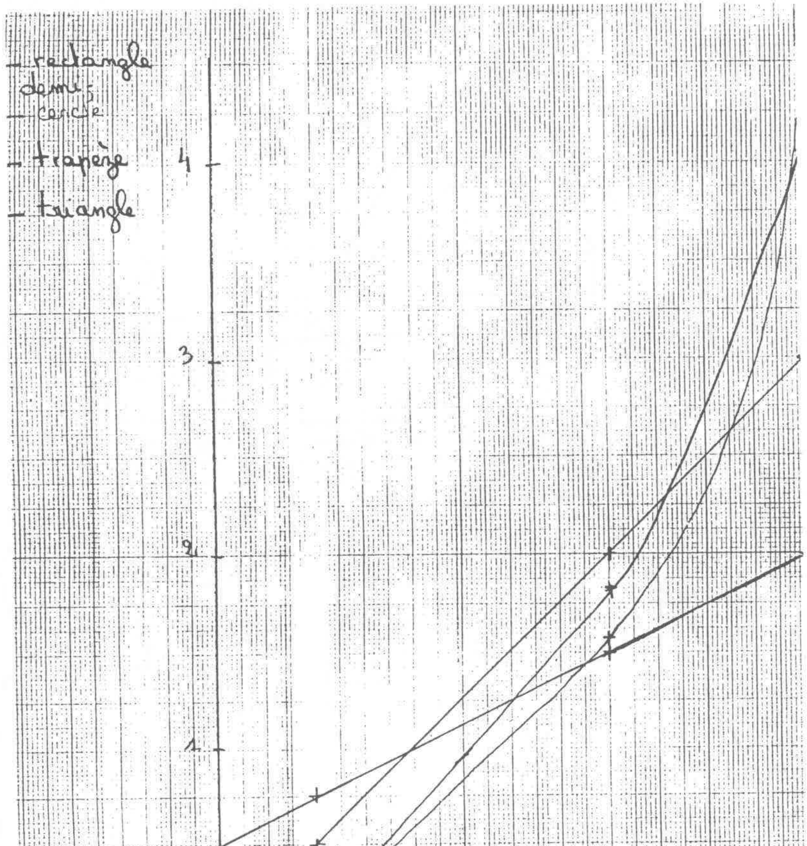
Nous avons placé en abscisse : la valeur AB et en ordonnée : les valeurs trouvées des aires.

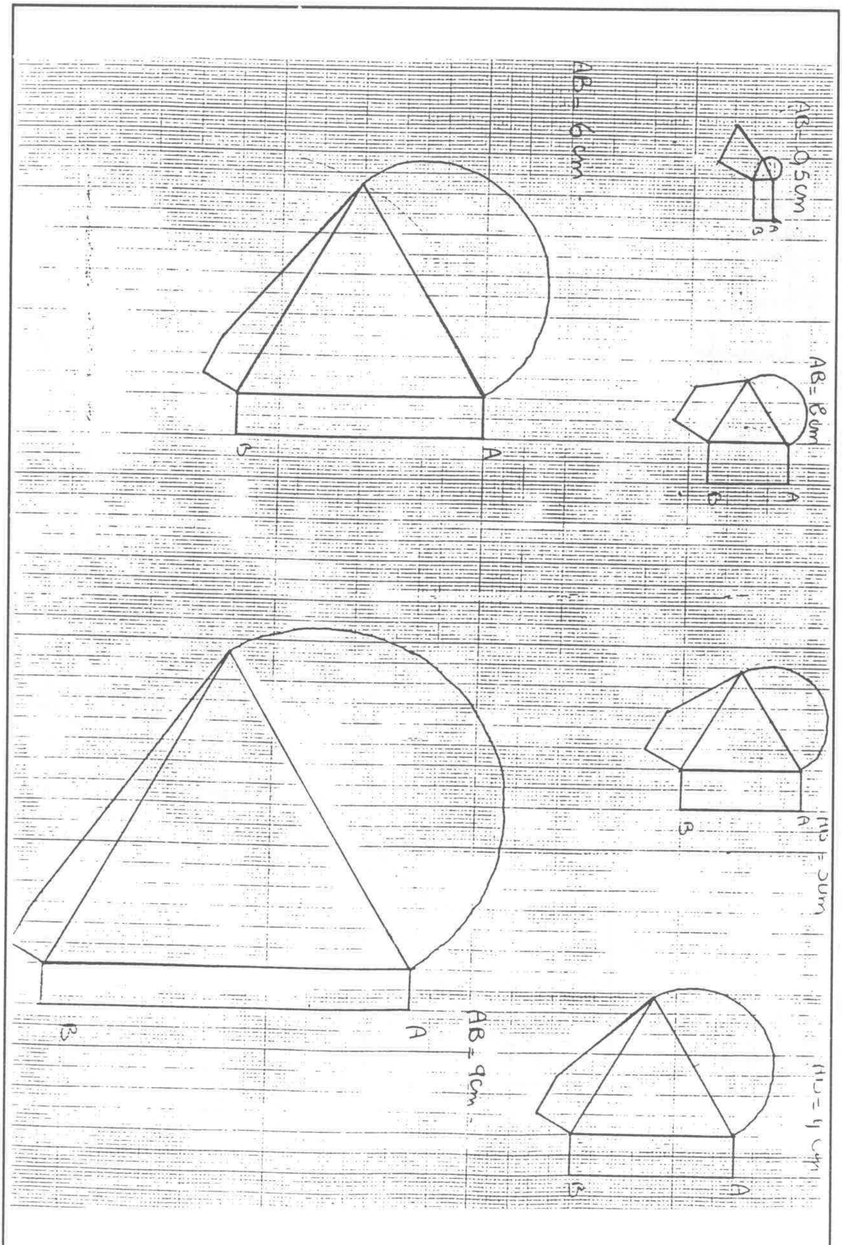
Pour le graphique des aires du rectangle, on obtient une droite à fonction linéaire.

Pour le graphique des aires du trapèze, on obtient une droite à fonction affine.

Pour les graphiques des aires du triangle et du demi-disque, on obtient deux courbes passant par le point d'origine O(0 ; 0).


Rectangle
Trapèze
Triangle
Cercle
AB
AB


rectangle
demi-cercle
trapèze
triangle
4
3
2
1
0
1
2


AB = 0.5 cm
AB = 6 cm
AB = 8 cm
AB = 9 cm
A
B

Groupe 4

On recherche les aires de toutes les figures en fonction de AB.

- Aire du rectangle :

$AB \times 1 = \underline{AB}$

- Aire du triangle équilatéral :

* *hauteur : H*

D'après le théorème de Pythagore

$AB^2 = H^2 + (AB/2)^2$

$AB^2 = H^2 + 1/4\ AB^2$

$H^2 = AB^2 - 1/4\ AB^2$

$$H = \sqrt{\frac{3}{4} AB^2}$$

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$

$$\text{* aire : } \frac{AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2$$

- Aire du trapèze :

$$\frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(AB + 1) \times 1}{2} = \frac{(AB + 1)}{2}$$

- Aire du demi-disque :

$$\frac{1}{2}(\pi r^2) = \frac{1}{2} \pi \times \frac{1}{4} AB^2$$

Comparaison des aires :

Aire du triangle = A

Aire du rectangle = A'

Aire du trapèze = A"

Aire du demi-disque = A'"

	A	A'	A"	A"'
1	$\sqrt{3}/2$	1	1	0,39
2	$\sqrt{3}$	2	1,5	1,57
6	$9\sqrt{3}$	6	3,5	14,14

Pour AB = 1

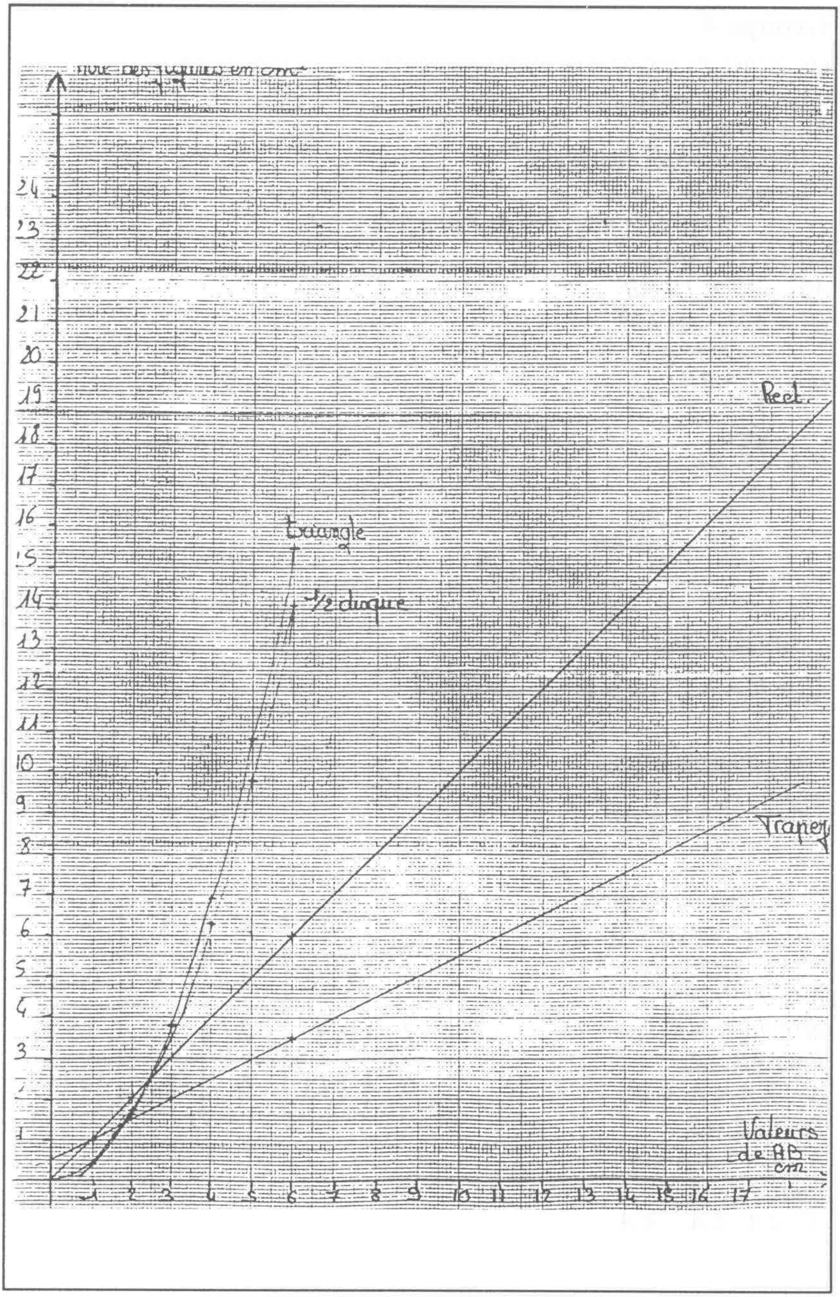
$A''' < A < A' = A''$

Pour AB = 2

$A'' < A''' < A < A'$

Pour AB = 6

$A'' < A' < A''' < A$


Rect.
triangle
1/2 disque
Trapez
Valeurs de AB cm

Groupe 5

Aire du rectangle :

$AB \times 1 = AB$

Aire du demi-disque :

$$\frac{\pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \boxed{\frac{AB^2 \times \pi}{8}}$$

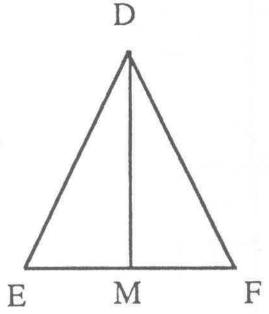
Aire du trapèze

$$\frac{(AB + 1) \times h}{2} \quad h = 1 \quad \boxed{\frac{AB + 1}{2}}$$

Aire du triangle :

Soit (DM) la hauteur issue de D.

Appliquons Pytthagore, dans le triangle DEM, rectangle en M.



donc $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + DM^2 = AB^2$

ssi $DM = \frac{AB \times \sqrt{3}}{2}$

Aire du triangle : $\frac{AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB}{2} = \boxed{\frac{AB^2 \times \sqrt{3}}{4}}$

Mise en équation de sroite

Soit $AB = x$

$y = x$ *pour le rectangle (1,1) (2,2)* ---------

$y = \frac{x + 1}{2}$ *pour le trapèze (1,1), (3,2)* ————

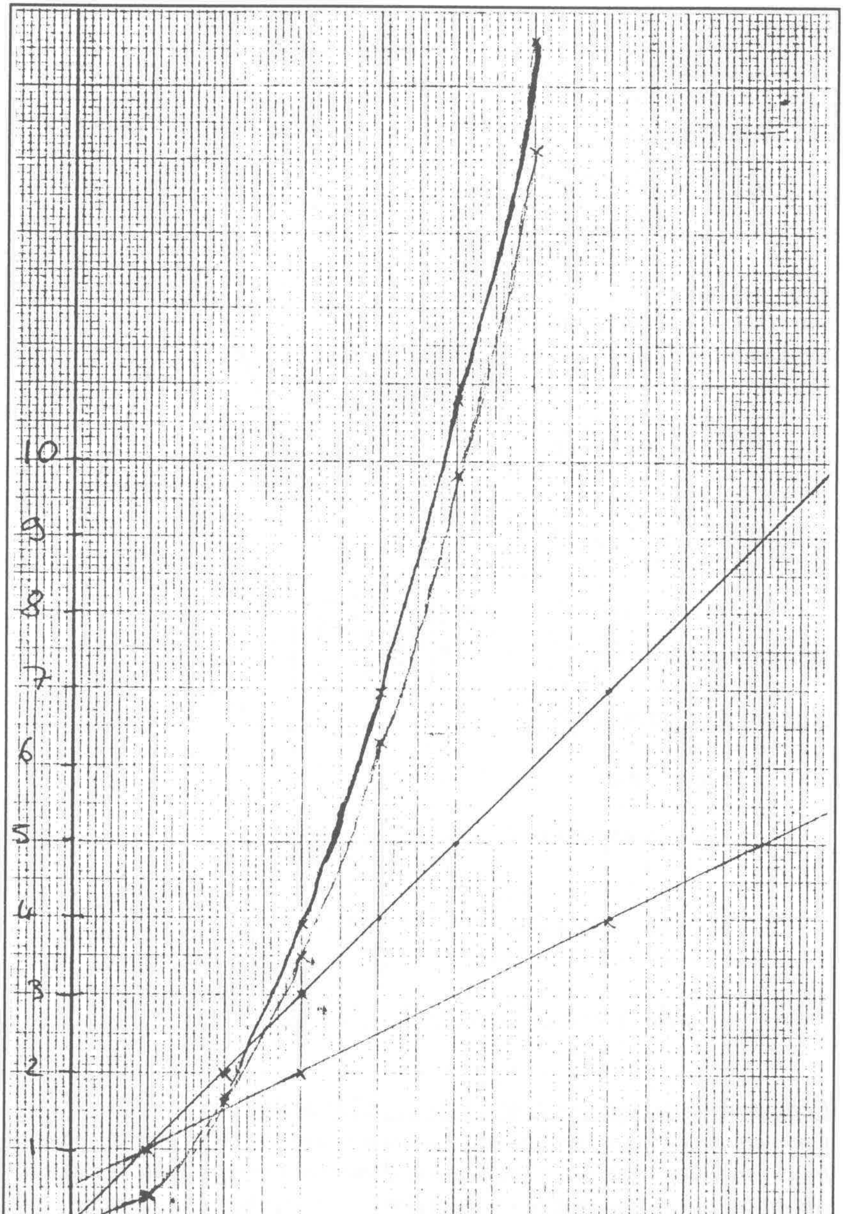
$y = \frac{x^2 + \pi}{8}$ *pour le demi-disque (1 ; 0,37) (4 ; 6,3)*

$y = \frac{x^2 + \sqrt{3}}{4}$ *pour le triangle (1 ; 0,4) (2 ; 1,7)* ....

Pour ces deux courbes, d'autres points ont été choisis.

Comparaison des aires en fonction de la valeur de AB

Chacune de ces représentations graphiques représentent l'aire de chaque figure en fonction de AB. Chaque point d'intersection représente les valeurs AB où les aures sont égales. On peut donc, en regardant le graphique comparer les aires.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9