

PREMIERE RENCONTRE AVEC UNE FONCTION PÉRIODIQUE

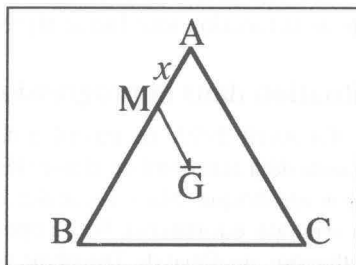
Hélène Olivé
IREM de Montpellier

Objectif par rapport à la construction des connaissances.

Découverte d'une fonction non linéaire, non monotone, définie par intervalle et de surcroît périodique.

Énoncé.

ABC est un triangle équilatéral de côté 8 cm. Pour chaque point M du contour, on désigne par x la distance (exprimée en cm), parcourue par le point M à partir de A. Etudier le plus précisément possible les variations de la longueur GM au cours du déplacement du point M sur le contour ABC.



Situation dans la progression de la classe.

Ce travail a été proposé à des élèves de seconde qui avaient déjà rencontré en classe des fonctions autres que affines et définies de façon algébrique. Mais, les seules connaissances requises étant les symétries du triangle équilatéral, les propriétés de ses médianes et le théorème de Pythagore, un élève de troisième peut aussi bien aborder l'activité.

Capitalisation.

Croissance, décroissance, maximum, minimum, périodicité, symétries d'une courbe.

Extensions possibles.

Des variantes de ce problème ont été expérimentées dans des classes de 3^{ème} mais peuvent être exploitées en seconde. Elles sont décrites dans une plaquette de l'IREM de Montpellier "*Proposition d'activité en classe de seconde*" ; "*Autour d'un triangle équilatéral*" (Hélène Olivé).

PREMIERE RENCONTRE AVEC UNE FONCTION PÉRIODIQUE

Objectif par rapport à la construction des connaissances

Il s'agit d'illustrer les phrases du programme «*exemples de modes de génération de fonctions*», «*description d'une situation par une fonction*», «*fonctions croissantes, décroissantes, parité, périodicité*». Plus précisément, cette activité est l'occasion de découverte d'une fonction non linéaire, non monotone, définie par intervalles et de surcroît périodique.

Le phénomène géométrique conduit à une représentation graphique qui ne nécessite pas, contrairement aux habitudes, l'obtention de la forme explicite de la fonction sous forme algébrique.

Situation dans la progression de la classe :

En Avril 1992, ce travail a été proposé à des élèves de Seconde qui avaient déjà rencontré en classe des fonctions autres qu'affines et définies de façon algébrique. Mais, les seules connaissances requises étant les symétries du triangle équilatéral, les propriétés de ses médianes et le théorème de Pythagore, un élève de Troisième peut aussi bien aborder l'activité.

Si l'on veut aller au-delà et chercher la forme explicite, il sera bon d'avoir déjà parlé de valeur absolue, mais ce n'est pas indispensable.

Énoncé et consignes :

Enoncé :

ABC est un triangle équilatéral de côté 8 cm, G son centre de gravité.

Un point M se déplace sur le contour du triangle.

Pour chaque position du point M, on désigne par x la distance (exprimée en cm), parcourue par le point M à partir de A.

On veut étudier le plus précisément possible les variations de la longueur GM au cours du déplacement du point M sur le contour ABC.

- Dessine le triangle, place le point G.
 - centre de gravité : à quoi penses-tu ?
 - à sa position ?
 - à une formule ?
 - le contour du triangle ?
 - la distance x : faut-il une formule pour trouver sa valeur ?
 - quelle est la plus petite valeur de x ?
 - quelle est la plus grande valeur de x ?
 - le déplacement de M : quelle est sa position pour $x = 0, x = 4, x = 7, x = 12, x = 16$?
 - le comportement de GM : tu peux *mesurer* la longueur GM ou la *calculer* ?
 - penses-tu qu'elle augmente ?
 - penses-tu qu'elle diminue ?
 - peut-on affirmer qu'elle est toujours supérieure à 2 ?
 - peut-on affirmer qu'elle est toujours inférieure à 4 ?

Quels mots, quels symboles te paraissent le mieux décrire les variations de GM?



2°) Quelques valeurs précises

Calculer GM lorsque

$x = 0$	$x = 2$	$x = 3,5$	$x = 4$	$x = 4,5$	$x = 7$
$x = 8$	$x = 10$	$x = 12$	$x = 18$	$x = 24$	

Valeurs de x	0	2	3,5	4	4,5	7	8	11,5
GM mesuré								
GM calculé								

Valeurs de x	12	13,5	15	16	18	20	22	24
GM mesuré								
GM calculé								



3°) Représentation graphique

Observe les trois graphiques (1), (2), (3) de l'annexe 1.

Où lit-on les valeurs de x ?

Parmi ces trois graphiques, lequel te paraît le meilleur pour représenter les variations de GM lorsque x augmente ?

Si tu rejettes certains graphiques, précise pourquoi.

4°) Fonction

Le graphique retenu est-il la représentation d'une fonction f avec $GM = f(x)$?

Précise l'ensemble de définition.

Comment vas-tu t'y prendre pour calculer $f(x)$ pour une valeur quelconque de x ?

Scénario prévu

Les élèves forment des équipes de 2 (ou 3 maximum). Chaque équipe a pour consigne de répondre par écrit aux questions posées.

Le matériel nécessaire comprend papier, règle graduée, compas, calculatrice.

9 h 00 : le professeur distribue l'énoncé accompagné seulement du paragraphe 1°) (Etude de l'énoncé).

Les élèves sont prévenus que d'autres questions suivront.

9 h 20 : Le professeur distribue le paragraphe 2°) (quelques valeurs précises).

9 h 40 : Le professeur distribue les paragraphes 3°) et 4°) et l'annexe 1 (représentations graphiques).

10 h 00 : On relève les copies. Le travail de la question 4°) est à préparer à la maison pour les élèves les plus avancés.

Analyse préalable

En plus des objectifs déjà décrits, l'énoncé comporte un certain nombre de locutions sur lesquelles l'élève va s'interroger : «le contour du triangle», «la distance parcourue par le point M», «les variations de GM».

- Les questions du paragraphe 1°) sont là pour susciter un dialogue entre l'élève et le professeur quant à la compréhension du problème posé- Le paragraphe 2°) est le temps de travail personnel, de concentration en silence, de réinvestissement des connaissances. Les résultats seront validés à partir des graphiques distribués avec les paragraphes 3°) et 4°).

- Le paragraphe 3°) (observation des graphiques) donnera à certains élèves

l'occasion de *s'exprimer oralement et «en public», d'argumenter, de justifier leurs choix.*

- Le paragraphe 4°) donne la réponse à la question 3°) et pour les plus rapides, ouvre la porte sur un problème plus difficile qui est l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

Compte-rendu de l'activité dans une classe

En Avril 1992, s'agissant d'une première expérience, le professeur de la classe est assisté d'un(e) collègue qui doit noter les réactions des élèves et le temps passé sur chaque partie de l'activité (18 élèves présents).

- Au départ, après distribution de l'énoncé, les élèves sont prolixes au sujet du centre de gravité. Manifestement, ils se complaisaient dans un domaine familier, c'est sécurisant.

Après dix minutes, le professeur estime qu'on s'est trop attardé sur ce début et invite les élèves à aborder les questions suivantes (déplacement du point M et variations de GM).

- Il y a quelques interrogations concernant le *sens* de déplacement de M à partir de A (vers B, ou vers C? toujours dans le même sens, ou peut-il reculer?). Le professeur fait remarquer la nécessité d'une convention sur le sens de parcours.
- Il y a de nombreuses erreurs au sujet du nombre x («distance parcourue par le point M») : de nombreuses équipes mesurent la longueur du segment [AM].

Ces fautes sont corrigées par le(s) professeur(s) présent(s) et donc n'apparaîtront pas dans les copies d'élèves reproduites plus loin.

- Après 20 minutes, on aborde la phase «mesures et calculs». Le théorème de Pythagore ne fait pas peur et on l'utilise volontiers. Cependant, la proportionnalité reste un réflexe, et plutôt que d'observer les propriétés de symétrie, certains élèves pensent que, lorsqu'on a calculé GM pour $x = 3,5$, il suffit de doubler le résultat pour $x = 7$. De même pour $x = 8$, $x = 16$, $x = 24$.

Ces élèves sont accaparés par la phase calcul. Ils sont complètement déconnectés du phénomène géométrique. Ces fautes-là non plus, n'apparaîtront pas dans les copies.

- Une bonne surprise cependant : une équipe a ébauché une représentation graphique (correcte) de GM en fonction de x avant qu'elle n'ait été suggérée par le professeur (voir paragraphe 3°) et 4°)). Cette équipe a évidemment reconnu très rapidement le bon graphique sur l'annexe 1.

- A la fin de l'heure, certaines équipes en étaient encore à calculer GM pour $x = 0, x = 2, x = 3,5 \dots$ et ont terminé le travail à la maison.

Analyse a posteriori

- Le choix d'un dialogue par écrit (paragraphe 1°)) dans cette classe réputée agitée a donné satisfaction en ce sens que les élèves se sont bien approprié l'énoncé. Le professeur passant d'un groupe à l'autre, chaque élève s'est senti écouté ; plus concerné aussi, par la nécessité de rédiger une réponse.

Notons ici que la présence de deux professeurs a bien amélioré la situation.

- Pour décrire le comportement de GM en fonction de x , le professeur aurait souhaité voir plusieurs positions de M sur le même triangle. Seule une équipe l'a fait. Il attendait aussi un tableau de variations mais à l'exception de l'équipe qui décrit «en dents de scie», aucune autre n'y a pensé. C'est un peu décevant car on avait déjà élaboré en classe des tableaux de variations.

Au contraire, la représentation du phénomène par un graphique est arrivée naturellement.

- Le calcul de GM pour des valeurs précises de x avait pour but de faire apparaître les symétries et la périodicité qui devaient alléger cette séquence, en apparence un peu longue. Dans la plupart des cas, cela s'est bien passé. La faute qui consiste à utiliser la proportionnalité était prévue ; la corriger faisait partie des objectifs.
- Le calcul de $f(x)$ en fonction de x est difficile pour l'élève de Seconde.

$$0 \leq x \leq 8 \quad f(x) = \sqrt{|4 - x|^2 + \frac{16}{3}}$$

$$8 \leq x \leq 16 \quad f(x) = \sqrt{|12 - x|^2 + \frac{16}{3}}$$

$$16 \leq x \leq 24 \quad f(x) = \sqrt{|20 - x|^2 + \frac{16}{3}}$$

Notons que si ces expressions sont utiles pour vérifier la périodicité, elles sont pratiquement inutilisables pour étudier algébriquement le sens de variation de la fonction f (au niveau Seconde, s'entend)

Capitalisation

Croissance, décroissance, maximum, minimum.

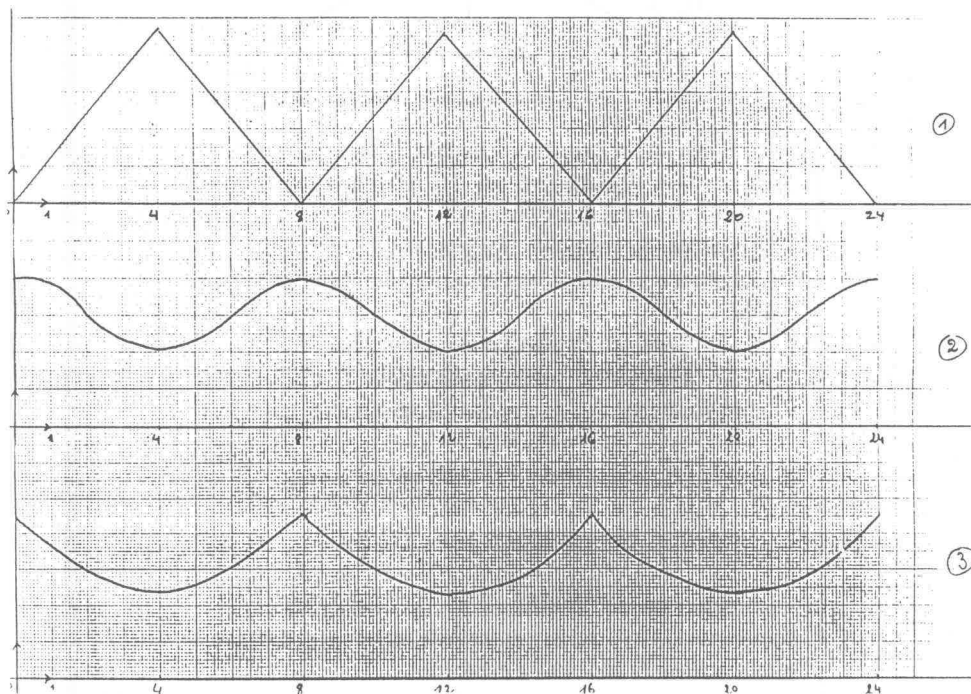
Périodicité.

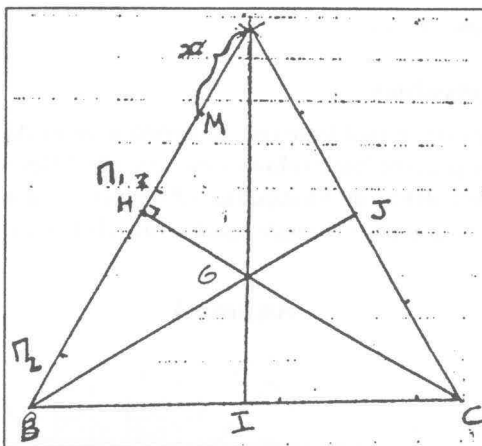
Symétrie d'une courbe.

Extensions possibles

Des variantes de ce problème ont été expérimentées dans des classes de Troisième, mais peuvent être exploitées en Seconde. Elles sont décrites dans une plaquette de l'IREM de Montpellier «*Propositions d'activités en classe de Seconde*», «*Autour d'un triangle équilatéral*» (H.Olivé).

Annexe 1



1°/ Etude de l'énoncé :

- Centre de gravité:

A quoi penses-tu ? centre d'inertie - Intersection

A sa position : $2/3$ du sommet, $1/3$ de la base sur les médianes.

A une formule : $GA = GB = GC$

- Le contour du triangle : 3 segments AC, CB, BA.

- La distance x : faut-il une formule pour trouver sa valeur ?
NON.

quelle est la plus petite valeur de x : 0.

quelle est la plus grande valeur de x : 8.

- Le déplacement de M : quelles est sa position pour

$x = 0$: pt A

$x = 4$; $1/2$ AB

$x = 7$; $7/8$ AB

$x = 12$ soit AB + $1/2$ BC

$x = 16$; soit AB + BC ou pt C.

- Le comportement de GM

Longueur GM : penses-tu qu'elle augmente : lorsque le point M va du milieu de côté à une extrémité

penses-tu qu'elle diminue : lorsque le point M va de l'extrémité du côté à son milieu

- peut-on affirmer qu'elle est toujours supérieure à 2.

GROUPE 1 - suite

Longueur de la hauteur, $4\sqrt{3}$

Longueur minimale de GM : $\frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,309$

oui elle est toujours supérieure à 2.
tjrs inférieure à 4.

longueur hauteur $4\sqrt{3}$

longueur maximale $\frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4,618$

non elle peut être supérieure à 4.

- Peus-tu décrire le comportement de la longueur GM sur un tableau ou un graphique? Oui.

- Quels mots, quels symboles te paraissent le mieux décrire les variations de GM?

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq GM \leq \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad GM \in \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3} \right]$$

2°/ Pour plusieurs valeurs de x , GM est la même (longueur)

$$x = 0 \quad GM = \text{longueur maximale} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$x = 2$ le point M est le milieu de H et A donc au milieu des deux

$$\text{valeurs } \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ et } \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\frac{12\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$x = 3,5$. Pythagore dans le triangle rectangle H,G,M₁

$$HG^2 + HM^2 = GM^2$$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 0,5^2 = GM^2$$

GROUPE 1 (suite)

$$GM^2 = \frac{16}{3} + 0,25 = \frac{16,75}{3}$$

$$GM = \sqrt{\frac{16,75}{3}} \approx 2,36$$

$$x = 4 = \text{plus grande valeur de } GM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 4,5 = \sqrt{\frac{16,75}{3}} \text{ car } HM = 0,5 \text{ comme pour } x = 3,5.$$

$$x = 7.$$

Pythagore dans le triangle rectangle H, G, M_2

$$HG^2 + HM^2 = GM^2$$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3^2 = GM^2$$

$$= \frac{16}{3} + 9 = \frac{43}{3}$$

$$GM = \sqrt{\frac{43}{3}}$$

$$x = 8 = \text{plus grande valeur de } GM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 10 \text{ milieu } BI = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 12 \text{ milieu } BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 18 \text{ pt} \quad C = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 24 \text{ pt} \quad A = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Terminé à 10^h 10.

GROUPE 2

Centre de gravité :

- A l'intersection des trois médianes du triangle
- Sa position est $\frac{1}{3}$ base et $\frac{2}{3}$ sommet.

- La formule est : $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ et $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Contour :

C'est les trois segments qui constituent le triangle.

On peut le calculer, se sera le périmètre.

x :

- I n'y a pas de formule pour trouver la valeur de départ x car c'est celle que l'on donne au départ de l'exercice.
- La plus petite valeur de x est : 0.
- La plus grande est $x = 24$ (périmètre).

M :

si $x = 0$, M est confondu avec A.

si $x = 4$, M est le milieu de [AB]

si $x = 7$, M est sur [AB] et $AB = 7$ et $MB = 1$

si $x = 12$, M est sur [BC] et M est milieu de [BC]

si $x = 16$, M est confondu avec C.

GM : La longueur GM varie .

plus petite : $\frac{1}{3} \times \sqrt{48} = 2,3$

Elle sera tjrs supérieure à 2.

plus grande : $\frac{2}{3} \times \sqrt{48} = 4,6$

Elle ne sera pas toujours inférieure à 4.

* La longueur GM varie avec l'éloignement avec le milieu d'un segment du triangle. Plus M est loin du milieu d'un segment et donc il est près d'un sommet, la longueur augmente et inversement.

Pour décrire GM on peut dire que la longueur est en dents de scie.



2°/ Quelques valeurs précises.

Calculer GM lorsque $x=0$ $x=2$ $x=3,5$ $x=4$ $x=4,5$ $x=7$
 $x=8$ $x=10$ $x=12$ $x=18$ $x=24$

As-tu des remarques à faire ? Donne sur une feuille à part le détail des calculs. Complète le tableau suivant, avec le minimum de calculs.

Valeurs de x	0	2	3,5	4	4,5	7	8	11,5
GM mesuré		3,1	2,4	2,3	2,4	3,8	4,1	2,4
GM calculé		3,05	2,4	2,3	2,4	3,9	4,6	2,4

Valeurs de x	12	13,5	15	16	18	20	22	24
GM mesuré	2,3	2,7	3,8	4,1	3	2,3	3,1	4,1
GM calculé	2,3	2,7	3,9	4,6	3,05	2,3	3,05	4,6

3°/ On lit les valeurs de x sur l'axe des abscisses.

C'est le graphique 3 qui représente les variations de GM lorsque x augmente.

Je rejette le graphique 1 car quand $x=0$ $GM=4,6$, le graphique 1 démarre de $(0; 0)$ il n'est donc pas bon.

Je rejette également le graphique 2 car il nous montre que $x \in [2; 4]$ alors que dans la réalité $x \in [2,3; 4,6]$.

Il n'est donc pas bon.

Si l'on test sur le 3 des valeurs trouvées, il reproduit bien la réalité et le calcul.

C'est donc le bon graphique.

4°/ Pour trouver GM, il y a trois fonctions selon le côté où se trouve M. Pour calculer, nous avons employé le théorème de Pythagore et les fonctions seront :

Si M est sur [AB] $f(x) = \sqrt{2,3^2 + (8-x)^2}$

Si M est sur [BC] $f(x) = \sqrt{2,3^2 + (16-x)^2}$

Si M est sur [CA] $f(x) = \sqrt{2,3^2 + (24-x)^2}$

Si l'on considère la longueur d'un côté uniquement et que l'on prend $x=20$ par exemple : on fait $8 \times 2 + 4 = 20$.

Alors on prend la fonction $f(x) = \sqrt{2,3^2 + (8-x)^2}$
 Par un petit calcul ces trois fonctions peuvent en fait, résulter à une seule.

Calcul de GM.

* Si $x = 4$, $x = 12$ et $x = 20$

$$\begin{aligned}\text{Calcul d'une médiane : } 8^2 &= 4^2 + m^2 \\ 8^2 - 4^2 &= m^2 \\ 64 - 16 &= m^2 \\ \sqrt{48} &= m\end{aligned}$$

$$GM = \frac{1}{3} \times \sqrt{48} = \underline{2,3}$$

* Si $x = 8$, $x = 16$ et $x = 24$

$$GM = \frac{2}{3} \times \sqrt{48} = \underline{4,6}$$

* Si $x = 2$; $x = 18$ et $x = 22$.

$$\begin{aligned}2^2 + 2,3^2 &= GM^2 \\ GM &\approx 3,05.\end{aligned}$$

* Si $x = 3,5$; $x = 4,5$, $x = 11,5$

$$\begin{aligned}0,5^2 + 2,3^2 &= GM^2 \\ GM^2 &= 2,35 \approx 2,4.\end{aligned}$$

GROUPE 3

1°/ * Centre de gravité G : nous pensons que le centre de gravité est l'intersection des médianes.

- sa position est au $\frac{2}{3}$ du sommet à G

- La formule est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

* Le périmètre du triangle (ou contour) est de $3 \times 8 = 24$ cm.

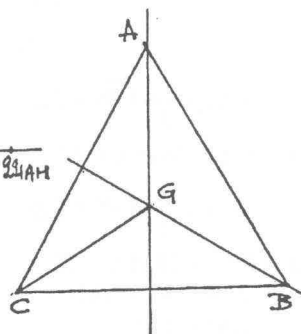
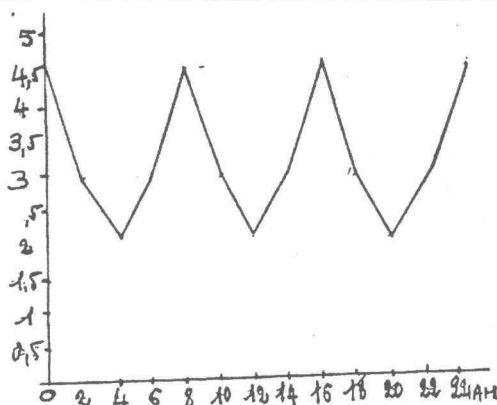
* La distance x n'a pas de formule précise, on la lit sur le dessin

- la plus petite valeur de x est $AM = 0$ cm

- la plus grande valeur de x est $AM = 24$ cm.

*

GROUPE 3 (suite)



- * pour $x = 0$ - A est confondu à M
- pour $x = 4$ - M est au milieu du segment [AB]
- pour $x = 7$ M est au $8/7$ de [AB]
- pour $x = 12$ - M est au milieu de [BC]
- pour $x = 16$ - M est sur C.

* Le comportement de GM..

- La longueur GM augmente lorsque M se rapproche d'un sommet et elle diminue lorsque M se rapproche du milieu d'un des trois côtés.

- La longueur GM est toujours supérieure à 2 car, $1/3$ de la hauteur est >

$$2 : \text{hauteur} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 6,92$$

$$1/3 \text{ hauteur} = 2,3$$

$$\text{donc } GM > 2$$

- La longueur GM n'est pas toujours inférieure à 4 parce que, les $2/3$ de la hauteur (6,92) donnent 4,6 cm.

GROUPE 4

1°/ Etude de l'énoncé

- Le centre de gravité est l'intersection des 3 médianes du triangle.
- Le centre de gravité est le milieu du cercle circonscrit, du cercle inscrit pour le triangle équilatéral.

- formules : $EG = \frac{1}{3} EC$

$$DG = \frac{1}{3} DB$$

$$FG = \frac{1}{3} FA$$

Les coordonnées du centre de gravité dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

- le contour du triangle est la trajectoire du point M le long des côtés [AB], [BC] et [CA] du triangle.
- quand M est sur [AB], on peut dire alors que $x = AM$
quand M est sur [BC], on peut dire que $x = AB + BM$
quand M est sur [AC], alors $x = AB + BC + CM$
- la plus petite valeur de x , c'est quand M est confondu avec A donc que x est nul.
- la plus grande valeur de x est le périmètre du triangle, c'est à dire 24.
- pour $x = 0$, M est confondu avec A
 $x = 4$, M est au milieu de [AB], sur E
 $x = 7$, M est à 1 cm de B
 $x = 12$, M est au milieu de [BC], sur F
 $x = 16$, M est confondu avec C.

- On peut mesurer la longueur GM et aussi la calculer grâce au théorème de Pythagore en travaillant dans les triangles AFB, AFC, BAD, BDC selon la position de M.

La longueur GM augmente vers les sommets A, B, C du triangle et diminue vers les milieux des segments, D, E, F.

- $DB^2 = BC^2 + CD^2$
 $DB^2 = 64 + 16 = 80$

$$DB = \sqrt{80} = 8,94 \approx 9$$

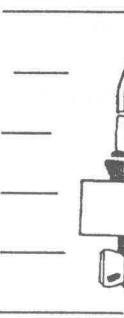
D et M confondus

$$GM = \frac{1}{3} MB \quad ; \quad GM = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

donc $GM \geq 3$

La longueur maximale de GM est 4.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. In the bottom right corner, there is a small, stylized circular logo or watermark. The overall appearance is that of a clean, unused piece of stationery.



1