SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN CERCLE

Nathalie PASCAL - Elisabeth HEBERT
IREM de Rouen

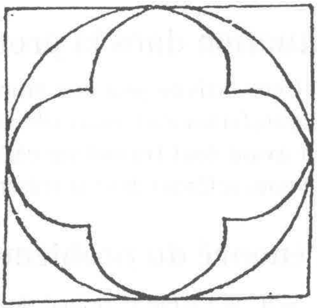
3

Objectifs :

- Modifier les conceptions des élèves sur les propriétés de conservation des transformations.
- Donner du sens aux expressions :
  - Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle.
  - Points invariants, ensemble de points globalement invariants.
- Faire découvrir l'existence de courbes autres que droites et cercles.

Travail demandé :

Représenter le symétrique de quelques figures par rapport à un cercle.



Un exemple de production obtenue :

Image d'un carré.

Scénario : (environ 2 heures).

- Découverte : mise en place de la symétrie par rapport à un cercle par une recherche collective.
- Construction de quelques figures à transformer (les premières identiques pour tous, les suivantes différentes selon les élèves).
- Observation des diverses figures produites.
- Enoncé des propriétés et de l'invariance en lien avec les transformations usuelles.

Symétrie par rapport à un cercle.

Objectifs :

Chacun sait que les élèves accordent peu de poids aux propriétés de conservation qu'ils énoncent sur les transformations et, en conséquence, à leurs éventuelles démonstrations. Il nous est apparu que si l'on voulait que les élèves saisissent la force de cet outil, et par suite, en viennent à l'utiliser pour résoudre un problème ; il fallait leur proposer une transformation qui soit une activité de référence de la «fantaisie» (non conservation) de certaines transformations. Au cœur de cette fantaisie, des propriétés surprenantes apparaissent, les figures à transformer visent à repérer certaines d'entre elles.

Le travail mène donc à un temps de capitalisation portant sur :

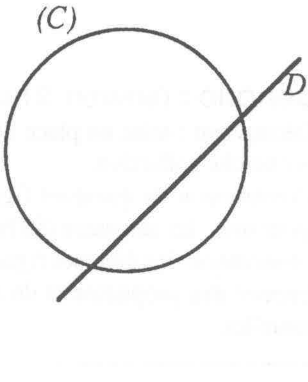
- Image d'une droite, d'un segmentn d'un cercle.
- Points invariants, ensemble de points globalement invariants.
- Existence de courbes autres que droites et cercles.

Situation dans la progression :

Cette activité peut être proposée à tout moment par rapport au cours sur les transformations, mais elle nous semble particulièrement pertinente à étudier **avant tout travail** sur celles-ci. C'est à cette place dans la progression que nous référons dans la présente analyse.

L'énoncé du problème posé :

Soit un cercle *C* donné de centre *O*. Déterminer par le dessin, les symétriques par rapport au cercle *C* des quelques figures qui vous sont proposées. Par exemple, on pourra chercher l'image d'une droite *D* par rapport à *C*.



En déduire quelques caractéristiques de cette transformation.
(Les diverses figures étudiées sont présentées par la suite).

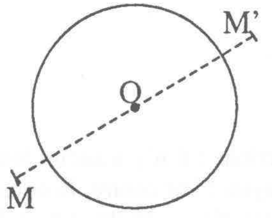
Etrange anamorphose :

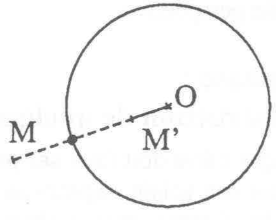
La symétrie que nous avons baptisée «symétrie par rapport à un cercle» est une anamorphose qui se rapproche sensiblement de l'anamorphose cylindrique, cette étrange transformation qui donne d'un objet son image dans un miroir cylindrique. Nous renvoyons le lecteur pour plus d'information à l'article du *PLOT* d'octobre 1987, qui, lui-même propose une bibliographe. Nous invitons aussi le lecteur à découvrir cette transformation avec l'outil informatique, en étudiant l'évolution de certaines images en fonction des variations des figures initiales (voir annexe 1).

Le scénario :

1ère phase : Découverte de la symétrie par rapport à un cercle. (10 minutes).

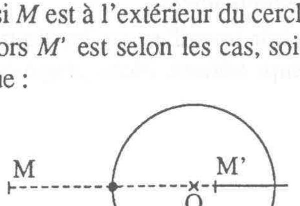
Il s'agit de faire transférer les savoir-faire portant sur la symétrie par rapport à une droite à la symétrie par rapport à un cercle.
Choisissons un point M extérieur au cercle et tel que $OM < 2R$
Les élèves, naturellement, proposent de prendre pour image de M, soit M' à l'intérieur du cercle, soit M' à l'extérieur du cercle :

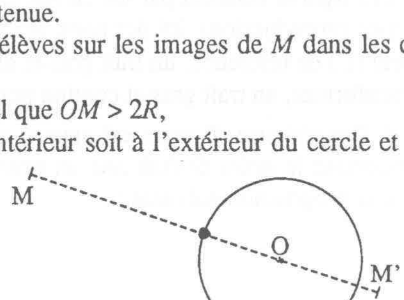




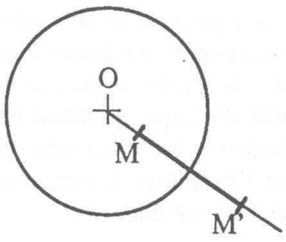
On fera remarquer aux élèves que cette deuxième position revient à étudier la symétrie par rapport au point O, ce qui est ici de peu d'intérêt. C'est la première proposition qui est donc retenue.

On se mettra d'accord avec les élèves sur les images de M dans les cas suivants :
- si M est à l'extérieur du cercle et tel que $OM > 2R$,
alors M' est selon les cas, soit à l'intérieur soit à l'extérieur du cercle et tel que :





- si M est à l'intérieur du cercle, alors M' est à l'extérieur du cercle et tel que :



Attention, le **centre** O du cercle pose un problème délicat : l'image de O n'est pas un point mais le cercle de rayon $2R$ et réciproquement. On ne peut donc, en toute rigueur, parler de transformation sans restriction des ensembles du plan. Travailler sur cette difficulté fait perdre au problème sa simplicité initiale et perturbe inutilement les élèves par rapport aux objectifs assignés à cette activité.

Par contre, **définir** une véritable transformation peut être un objectif en Première S ; la *«Feuille à problèmes» n° 45* publiée par l'IREM de Lyon relate d'ailleurs une activité sur la symétrie par rapport à un cercle construite dans cette perspective.

2ème phase : La construction de quelques figures.

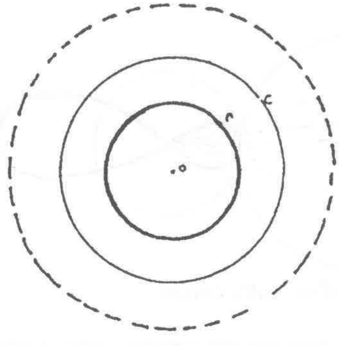
Chaque élève doit faire **ses propres** constructions : il n'y a aucun intérêt à regarder son voisin «agiter» sa règle et son crayon ! Par contre, la **comparaison** des figures images obtenues avec d'autres élèves étudiant la même situation est riche d'enseignement pour les élèves.

Les figures étudiées par les élèves jouent sur les couleurs pour la lisibilité. Les reproductions ici données, utilisent un trait continu et fin pour le cercle *(C)* de référence, un trait gras et discontinu pour l'ensemble des points à transformer, un trait gras et continu pour l'ensemble image.

A l'expérience, il nous est apparu que vouloir travailler sur les figures comportant le point O était ans un premier temps néfaste. Nous proposons donc la progression suivante.

1) Images de deux figures, communes à tous les élèves.

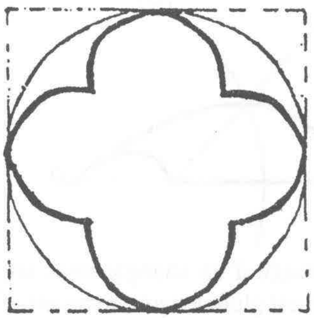
Image d'un cercle concentrique à (C).



Objectifs :

- permettre à chaque élève de s'approprier la «transformation» établie collectivement. Il retrouve un résultat facile à établir et bien connu : l'image d'un cercle est un cercle ! Voilà qui est sécurisant !
- permettre à l'enseignant de s'assurer que chacun a bien compris ce dont il s'agit. En particulier la confusion entre le cercle *(C)* et le cercle à transformer *(Γ)* peut être levée à cette occasion.

Image d'un carré exinscrit à (C).



Objectifs :

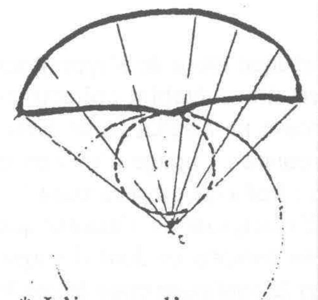
- mettre en échec les conceptions de l'image d'un segment.
- proposer à tous une situation se prêtant aisément à ce questionnement : puisque le milieu des côtés du carré sont invariants et que les images des sommets sont intérieurs au cercle, l'image d'un segment ne peut être un segment !
- obtenir un objet «séduisant» !
- permettre à l'enseignant quelques mises au point, éventuellement collectives, sur le travail demandé.

Trouver la figure image peut être, pour certains élèves, très délicat. Nous étudions ci-après les obstacles et procédures employées par certains d'entre eux.

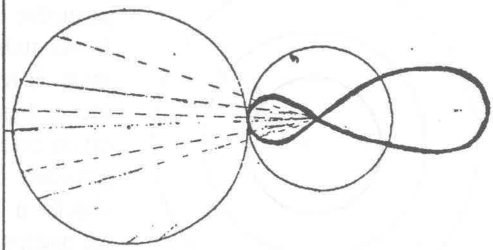
2) Images de figures différentes selon les groupes.

Pour les élèves parvenant à la construction de la figure image précédente, on répartira en binômes ou trinômes les différentes figures. Attention, de petites variations dans les positions des cercles, droites, peuvent faire perdre à la figure image tout son «charme».

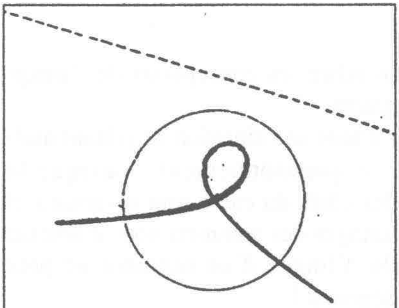
L'objectif est de **faire émerger les propriétés** de cette transformation en diversifiant les situations étudiées. Après plusieurs expérimentations, nous avons retenu les situations s uivantes :



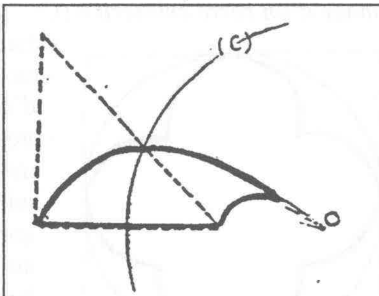
* L'image d'un cercle



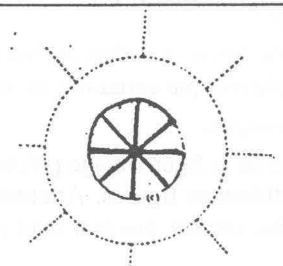
* L'image d'un autre cercle



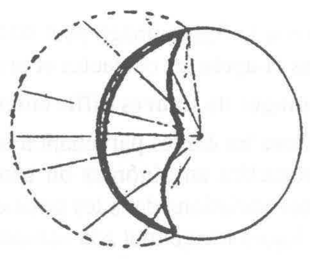
* L'image d'une droite



* L'image d'un triangle dont un côté est globalement invariant



* L'image d'un «soleil» qui se ramène en O ! (interviennent ici 3 cercles concentriques de rayons R, $2R$, $3R$)



* L'image d'un croissant formé de deux demi-cercles dont l'un est invariant

3ème phase : Restitution.

Il s'agit, pour l'ensemble des élèves, de prendre conscience des diverses figures obtenues et de les aider à pointer, à partir de ces figures, les propriétés que l'on souhaite fixer.

Si le travail se fait en classe entière, l'utilisation de transparents devient nécessaire. Il est en particulier possible de faire ajouter les étranges figures obtenue sur des transparents photocopiés comportant les figures initiales. En demi-classe, il est possible de rassembler tous les élèves autour du bureau du professeur ou de tables pour observer et commenter les figures produites.

Des photocopies compmortant en réduction les diverses figures obtenues sont distribuées ultérieurement. Elles assurent la trace écrite de l'activité ou mieux, servent de "gommettes" lors du temps de capitalisation.

4ème phase : Capitalisation.

Les propriétés observées avec une symétrie par rapport à un cercle, concernant l'image d'une droite, l'image d'un segment, l'image d'un cercle, l'ensemble des points invariants, les ensembles de points globalement invariants, sont comparées aux propriétés similaires pour les transformations usuelles.

L'annexe 4 propose la fiche distribuée aux élèves afin de mettre en place les propriétés des transformations usuelles. La présence d'«intrus», à savoir l'homothétie et la similitude aiguise la curiosité des élèves, et annonce le temps de synthèse. Celui-ci se fait à partie de la fiche donnée à l'annexe 5, elle est brièvement commentée par le professeur, les élèves illustrent par les "gommettes" adéquates les propriétés énoncées.

Obstacles et procédures utilisées : étude de cas.

Les obstacles que rencontrent les élèves pour la construction des figures, semblent liés aux conceptions que ceux-ci ont des transformations et des objets géométriques. Pour quelques rares élèves ce travail ne pose que le problème de la précision du tracé ; pour la plupart, des obstacles résistent. Nous relatons en annexe, brièvement et partiellement les errances de quelques élèves pour lesquels les difficultés se situent à des niveaux différents.

Pour l'un des binômes, il s'agit de transformer le triangle ABC inscrit dans le cercle. Initialement, l'image d'un triangle n'est pas perçue comme un unique objet mathématique, il y a donc plusieurs triangles-images. La transformation n'est pas perçue comme agissant sur une «globalité», l'aspect ponctuel est privilégié.

Au fur et à mesure que la recherche se déroule, les élèves accordent plus de place à la globalité de la figure. Ils privilégient certains points qui semblent tenir en eux-mêmes toute l'information. L'avancée se fait à petits pas, certaines informations valides se trouvant oubliées dans la prise en compte de nouvelles. Face à la complexité du problème, les élèves abandonnent leur recherche.

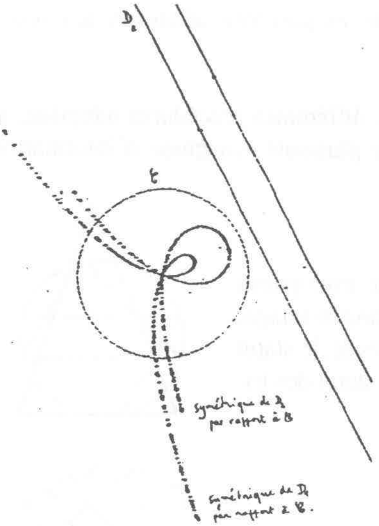
Pour le deuxième binôme, dont nous relatons la démarche, il s'agit de transformer un carré exinscrit au cercle. Les deux élèves de ce binôme ont compris ce que comporte l'idée de transformation d'une figure : la figure comporte quatre axes de symétrie, ce qu'ils exploitent d'emblée. L'obstacle auquel ils se heurtent est lié à leur certitude que l'image d'un segment ne peut être autre chose qu'un segment ou arc de cercle. Ils s'interdisent par la même la recherche d'une solution point par point. Ils engagent de multiples solutions toutes insatisfaisantes jusqu'à l'intervention de l'enseignant qui propose - et donc autorise - l'utilisation d'autres images que celles de droites et cercles.

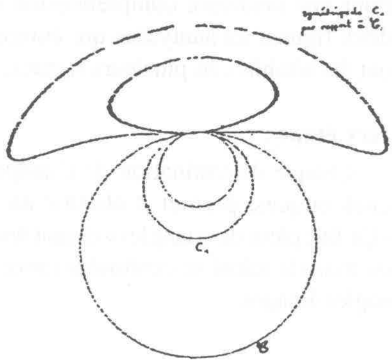
Conclusion.

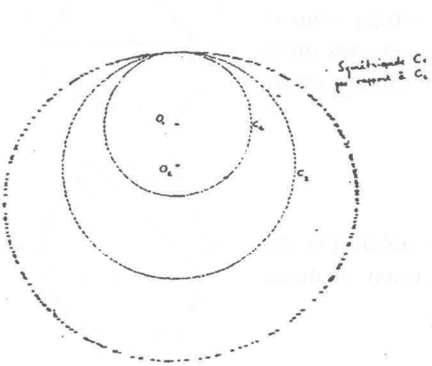
Pour certains élèves, cette activité est un «jeu d'enfants», pour d'autres, un véritable «casse-tête». Une telle activité déroute et passionne. Les élèves la rejettent ou «l'adorent». Elle ne laisse indifférents ni les élèves, ni les enseignants.

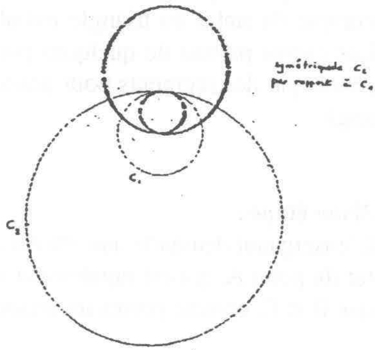
Annexe 1 :
Etude de quelques familles de figures.

Ces couples de figures C_1 et C_2 et de leurs images C'_1 et C'_2 par rapport au cercle ont été construites en utilisant soit le logiciel *«CABRI-GEOMETRE»*, soit le logiciel *«GEOPLAN»* (CREEM, Diffusion CRDP de Poitiers). Il est possible, avec ce dernier d'étudier les variations des images en fonction de la position des cercles ou droites d'origine.









Annexe 2 :
Etude de cas : Image d'un triangle inscrit.

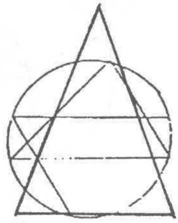
L'activité relatée ici se déroule avec un groupe extrêmement restreint envisageant une première S. Le groupe est constitué de 4 binômes. L'enseignant intervient à quelques rares occasions auprès des binômes pour relan-

cer la recherche. Il lui est donc possible, en parallèle, d'assurer une observation relativement précise.

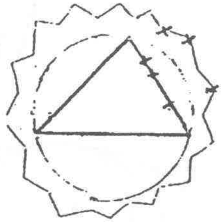
Pour une meilleure compréhension des différentes procédures adoptées, les deux figures ici analysées qui comporte plusieurs «couches» d'informations ont été rétablies en plusieurs figures.

1ère étape :

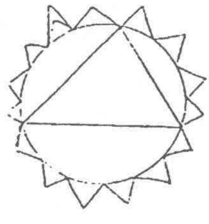
Chaque détermination de l'image de trois points quelconques, permet d'obtenir un triangle-image. «Ça fait plein de triangles» disent les élèves, le statut du triangle initial se confondant avec le statut des triangles-images.



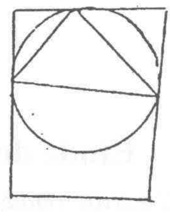
2ème étape :
L'enseignant, pour aider à une meilleure prise en compte du statut du triangle initial, colorie celui-ci. Les élèves partent de quelques points images qu'ils relient par des segments pour générer l'image du triangle.



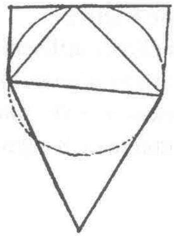
3ème étape :
L'enseignant demande aux élèves de préciser le statut du point A, qui est rapidement reconnu, de même que B et C, comme points invariants.



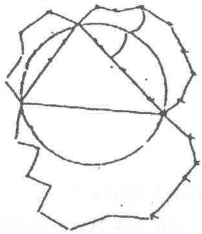
4ème étape :
L'enseignant interroge les élèves sur l'origine des points placés sur le cercle. Il tente alors de faire émerger les connaissances antérieures sur les images d'une figure, mais n'obtient que des souvenirs extrêmement parcellaires et confus.
Les élèves construisent alors une nouvelle figure et proposent une nouvelle piste : «L'image du triangle pourrait être un rectangle».



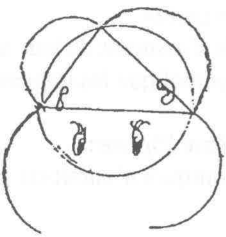
5ème étape :
Puisque chacun des côtés devrait pouvoir se transformer en un rectangle, ils proposent une modification de leur figure.



6ème étape :
Cette dernière proposition est reprise par la recherche de l'image de quelques points.



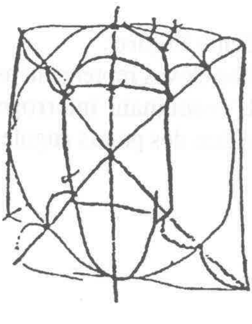
7ème étape :
Les élèves sont alors amenés à constater que «ça fait presque des cercles». Ils cherchent alors à construire ceux ci ... En vain .Puis abandonnent cette recherche «sui leur prend la tête».



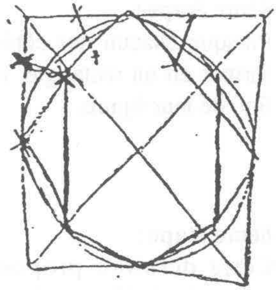
Annexe 3 :
Etude de cas : L'image du carré exinscrit

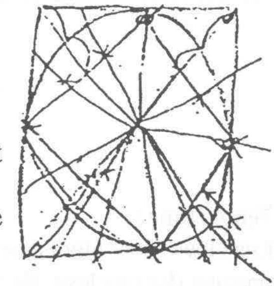
1ère Figure :
Les élèves utilisent :
- les images des sommets par définition de la transformation,
- l'image d'un carré est un carré de côtés parallèles.

Puis ils adjoignent:
- l'existence de 2 points invariants,
- si l'image n'est pas un segment, ce ne peut être qu'un arc de cercle.



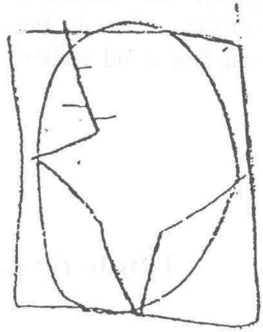
2ème Figure :
Les élèves utilisent ici :
- l'image d'un point quelconque,
- l'existence de quatre points invariants,
- l'image de 8 segments.



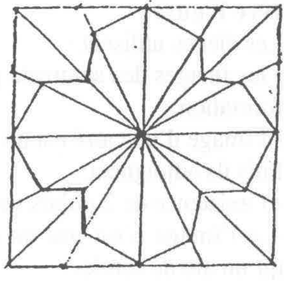


3ème Figure :
Les élèves reviennent ici à «l'image d'un carré est un carré».
Ils s'assurent de leur solution en plaçant de manière symbolique les images de nombreux points.

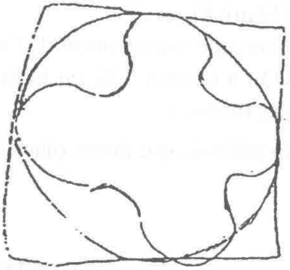
4ème Figure :
Pourquoi n'aurait-on pas quelque chose du genre …



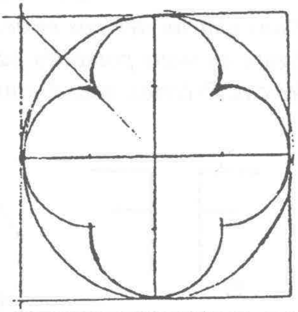
5ème Figure :
Les élèves reprennent avec soin leur recherche.
L'enseignant interroge les élèves sur la raison d'être des points anguleux.



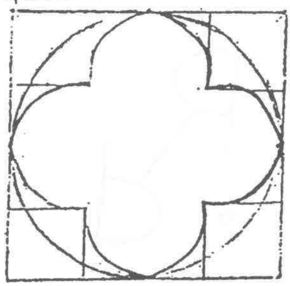
6ème Figure :
Puisque les points anguleux n'ont pas de raison d'être, la solution est d'utiliser plusieurs arcs de cercle suivant une figure du type :



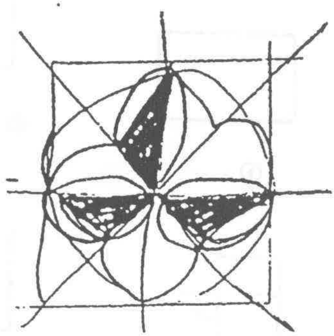
7ème Figure :
Les élèves établissent une figure soignée formée d'arcs de cercle centrés au milieu du rayon du cercle initial. Mais, désespoir ! ... les mesures prouvent que cette proposition n'est pas satisfaisante pour les images des sommets du carré.



8ème Figure :
Les élèves reprennent l'étude de cette précision par la construction de l'image point par point? Puis cherchent à trouver les centres des arcs de cercles qui la constituent. Evidemment, cette recherche est vaine.



9ème Figure :
L'enseignant intervient : «Pourquoi ne pourrait-on pas obtenir des courbes qui soient autre chose que des portions de cercle ?»
Nouvelle piste : «Puisque ce ne sont pas des demi-cercles, ce sont des droites ... donc des triangles.»



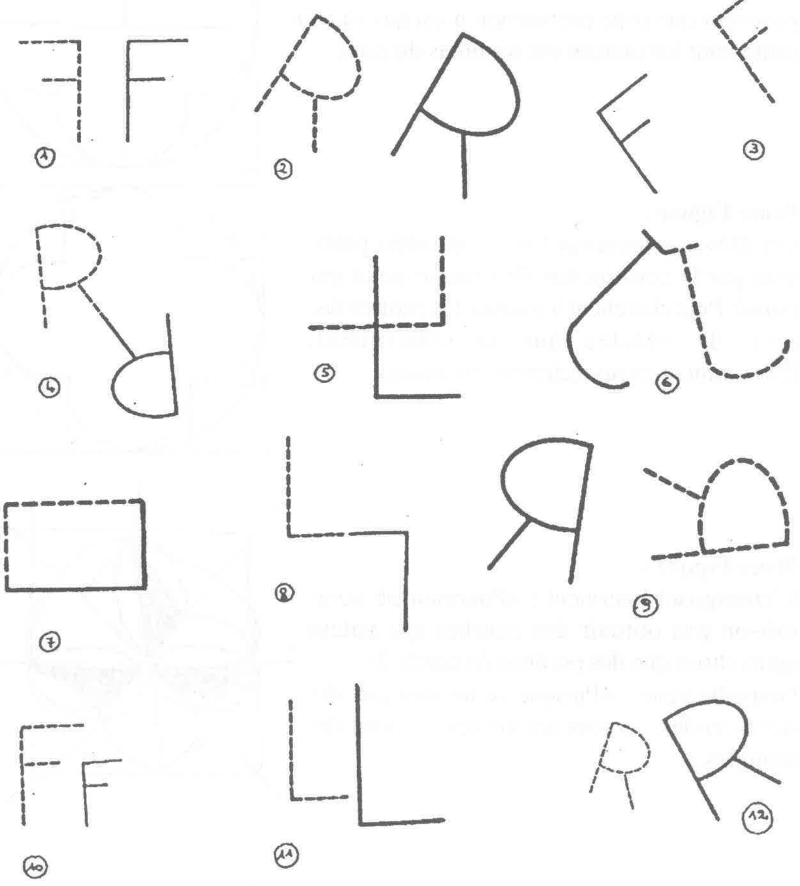
10ème Figure ...

Nouvelle intervention de l'enseignant : «Cela peut être autre chose ...»
«On a le droit ? Si on le fait à main levée, ce n'est plus précis, ce n'est plus des maths.»

Inquiétude qui laisse place à l'étonnement, puis à l'émerveillement !

ANNEXE 4 :
Les transformations usuelles.

Dans chacun des cas ci-dessous, la figure en trait plein est l'image de la figure en traits pointillés par une transformation inconnue, différente selon les cas. Précisez, quand vous le savez la transformation dont il s'agit.



ANNEXE 5 :

Fiche de synthèse

Tout le vocabulaire utilisé est volontairement flou (et d'ailleurs discutable). Il s'agit de donner aux élèves du recul sur le monde des transformations. Les élèves placent les «gommettes» correspondant aux propriétés énoncées.

La diversité des transformations

• Il existe des transformations qui conservent les «formes» et les dimensions.

Exemples : ***les symétries centrales*** ***Les réflexions*** ***Les translations*** ***Les rotations.***

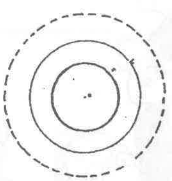
• Il existe des transformations qui conservent les «formes» mais pas les dimensions.

Exemples : ***Les homothéties*** ***Les similitudes***

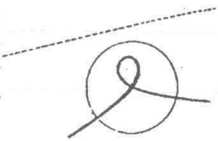
•Il existe des transformations qui ne coservent même pas les «formes» !

Exemple : ***Les symétries par rapport à un cercle.***

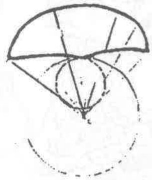
- L'image d'un cercle de centre O *est un cercle de centre O.*



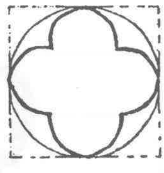
- L'image d'une droite, qui ne passe pas par O, *n'est pas une droite.*



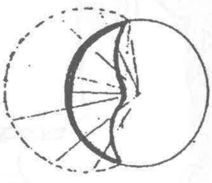
- L'image d'un cercle, de centre autre que O *n'est pas un cercle.*



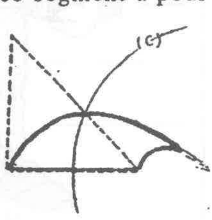
- L'image d'un segment dans la plupart des cas, *n'est pas un segment.*



- L'image de tout point M du cercle C est le point M lui-même : On dit que C est un cercle *invariant* pour la symétrie par rapport au cercle C.



- Soit [AB] un segment tel que son milieu I appartient à C, la droite (AB) passe par O et O n'appartient pas à [AB]. Tout point M de ce segment a pour image un point M' de ce segment. On dit que [AB] est *globalement invariant* pour la symétrie par rapport au cercle C.



Notes personnelles