

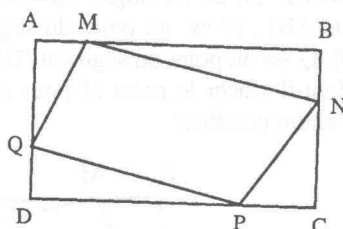
LE QUADRILATÈRE QUI TOURNE

Gilles GERMAIN - Jean-François ZUCCHETTA
Groupe Lycée
IREM de LYON

2

Énoncé du problème :

Où faut-il placer le point M sur le segment [AB] pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible ?



Objectif principal :

Permettre aux élèves de percevoir que la notion de fonction sous l'aspect algébrique est un outil qui a de l'intérêt (qui est indispensable) pour la résolution du problème posé.

Situation dans la progression :

Cette activité est proposée avant tout travail explicite sur la notion de fonction en seconde.

Capitalisation possible :

Notion de fonction sous forme algébrique, différents types de représentations d'une fonction (tableau de valeurs, formule algébrique, graphique), utilisation de l'outil fonction pour l'étude d'un phénomène continu.

Scénario :

Un temps de recherche et de production en groupe de solution sur un support matériel (1h30)

Un temps de débat entre les élèves sur les productions des groupes (1h)

Un temps de capitalisation du travail des élèves (1h)

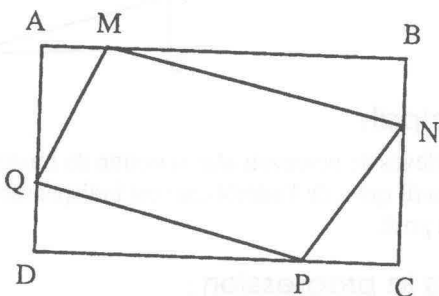
Prolongements éventuels.

LE QUADRILATÈRE QUI TOURNE

L'objectif de cette activité est d'introduire l'outil fonction sous sa forme algébrique comme moyen de résolution nécessaire d'un problème que les élèves ont à résoudre. Cet outil prenant du sens pour l'élève comme moyen de résolution de ce problème.

L'énoncé du problème :

ABCD est un rectangle. $AB=6,5$ cm; $BC=4$ cm. M est un point du segment [AB], N est un point du segment [BC], P est un point du segment [CD], Q est un point du segment [DA]. De plus on a $AM = BN = CP = DQ$. Où faut-il placer le point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible?



Pourquoi cet énoncé ?

Il s'agit de l'étude d'un phénomène continu. La réponse «évidente» après quelques minutes de recherches «M au milieu de [AB]» n'est pas la solution et elle peut être réfutée par les élèves (certains auront trouvé des aires plus petites) sans l'intervention du professeur. Tous les élèves peuvent progresser dans la recherche de la solution en choisissant par exemple diverses positions de M sur [AB] et en calculant l'aire du quadrilatère. Certains d'entre eux peuvent même obtenir par encadrement une valeur approchée. Cependant, la résolution complète de ce problème nécessite l'outil visé, c'est à dire, l'outil fonction sous sa forme algébrique (ici c'est une fonction polynôme du second degré): il permet d'être efficace pour effectuer des calculs répétitifs d'aire des quadrilatères en phase de recherche d'une réponse(conjecture) et pour prouver existence et la valeur du minimum. Les dimensions du rectangle ont été choisies pour que la bonne réponse $AM=(AB+BC)/4$ ne soit

pas un nombre entier ni un nombre décimal simple(ici 2,625 mais on peut faire plus compliqué !) et donc ne puisse être choisi comme conjecture pour cette raison ou trouvée rapidement par tâtonnement.

Les différentes procédures de résolution (du professeur).

Il ne semble pas qu'il y ait de solution purement géométrique, c'est-à-dire, de solution qui ne nécessite pas l'introduction d'une variable. L'étude d'une fonction algébrique du second degré est un outil efficace de résolution. Si on choisit $x = AM$ comme variable, le calcul de l'aire du quadrilatère $MNPQ$ par différence entre l'aire du rectangle et la somme des aires des 4 triangles rectangles extérieurs aboutit à l'expression

$$A(x) = 2x^2 - 10,5x + 26$$

Pour trouver le minimum de cette fonction sur l'intervalle $[0,4]$ on peut :

- utiliser la dérivée de $A(x)$, $A'(x) = 4x - 10,5$ ce qui donne $x = 2,625$ et la valeur de l'aire minimum est égale à 12,21875.
- mettre le trinôme sous la forme canonique :

$$A(x) = 2(x - 2,625)^2 + 97,75/8$$

Cette somme de 2 termes positifs étant la plus petite possible quand $x = 2,625$.

- Si on a fait la bonne conjecture $x = 2,625$ alors on peut montrer que $A(x) \geq A(2,625)$ en résolvant l'inéquation $A(x) - A(2,625) \geq 0$ qui, après un calcul algébrique élémentaire, se met sous la forme $2(x - 2,625)^2 \geq 0$, ce qui rend sa résolution évidente.

Remarque : Nous pensons que les deux dernières méthodes sont accessibles à des élèves de seconde : s'ils ne peuvent les trouver eux-mêmes(ce qui sera le cas pour la plupart d'entre-eux), nous pensons qu'ils peuvent en saisir le sens et l'intérêt pour ce problème après l'avoir cherché. Ce problème peut se transformer pour des élèves de première ou de terminale en remplaçant les mesures de la longueur et de la largeur du rectangle par L et l .

Scénario prévu

Première partie (1h30) : après 5 à 10 minutes de *réflexion individuelle* pour permettre à chaque élève de rentrer dans le problème, les élèves cherchent en *groupe de 3 ou 4* une solution au problème, cette recherche devant aboutir à la production d'une affiche (*) sur laquelle ils devront présenter le résultat de leur recherche. Pour faciliter la lecture des affiches par tous les élèves, le

(*) ou tout autre support écrit qui peut être lu par tous les élèves de la classe, comme les transparents, par exemple.

professeur peut décider d'en harmoniser la présentation, en préparant des affiches sur lesquelles sont amorcées une ou deux phrases que les élèves devront compléter comme par exemple

Nous pensons que le point M

Pour arriver à cette réponse, nous avons

Le professeur, après avoir donné les consignes de travail le plus souvent écrites au tableau, précise qu'il n'interviendra pas sur la méthode, ni sur les notions mathématiques à utiliser, ni pour dire si les solutions proposées par chaque groupe sont justes ou fausses. Il précise que c'est l'ensemble de la classe qui aura à se prononcer à partir du contenu des affiches.

Deuxième partie (1h à 2h): débat sur les productions des groupes. Le professeur ayant choisi l'ordre dans lequel les affiches seront débattues il présente la première à la classe. Chaque groupe en prend connaissance et se prononce sur la validité de la solution produite et (ou) de la démarche utilisée en produisant des arguments pour étayer son acceptation ou son refus de la solution présentée. Suit un débat entre les élèves de la classe sur les arguments écrits au tableau par le professeur. Ce débat est une phase délicate de l'activité. Pour qu'il fonctionne de manière satisfaisante, le professeur doit en fixer les règles précises de fonctionnement et veiller à leur respect. Avant de passer à une autre affiche, le professeur fait constater à la classe les accords et les désaccords restants.

Troisième partie(30 min.): le professeur énonce la connaissance mathématique nouvelle utilisée et (ou) utile pour la résolution du problème, fait le point sur le vrai et le faux à propos des affiches, etc. Cette phase de capitalisation du travail des élèves dépend naturellement de leur production mathématique pendant la recherche, et des arguments produits pendant la phase de débat.

Que vont faire les élèves ? (analyse a priori)

Ils vont faire des figures avec différentes position du point M sur [AB] et calculer l'aire correspondante du quadrilatère MNPQ en mesurant des lon-

guez sur la figure. Cela va les conduire à faire des conjectures (M au milieu de [AB] ou N au milieu de [BC] etc.) qui vont être réfutées par d'autres calculs d'aires. Ils vont s'apercevoir que le tâtonnement est long et n'aboutit pas ce qui va inciter certains à chercher une méthode plus conforme à l'idée qu'ils se font des "mathématiques" ce qui va les amener à exprimer l'aire de MNPQ en fonction du choix de $x = AM$. L'introduction de $x = AM$ est parfois amenée par ceux qui veulent utiliser leur calculatrice programmable pour automatiser le calcul de l'aire. La calculatrice graphique peut permettre à certains de faire la bonne conjecture mais pas de la prouver? (Dans ce cas, au cours de la phase de capitalisation, le professeur peut aborder le problème de la calculatrice comme aide à la conjecture, comme outil de preuve!!!). On peut prévoir aussi que certaines solutions vont se présenter sous la forme d'un encadrement ou bien d'une valeur approchée de la solution exacte. Si c'est le cas le professeur peut, dans la phase de capitalisation, faire une mise au point sur solution exacte et solution approchée. Si, au cours de la recherche, l'ensemble des groupes d'élèves de la classe en reste à des calculs d'aires à la main sans liens entre eux, le professeur peut organiser une mise en commun des calculs réalisés par chacun des groupes. Cela peut faire apparaître la procédure répétitive des calculs. Il est probable que cela fera surgir chez certains élèves l'idée d'utiliser une expression fonctionnelle.

Compte rendu d'une utilisation de cette situation dans une classe de seconde.

La classe est une seconde IES d'un lycée technique de Lyon. L'effectif est de 33 élèves. Les élèves n'ont pas encore abordé les fonctions ni sous forme de cours ni sous forme d'activités. Cette activité a eu lieu au mois de janvier.

La première phase s'est effectuée en demi-classe et a duré 1h30, les phases 2 et 3 en classe entière.

La consigne donnée par le professeur au début de l'activité: «Je vais vous distribuer l'énoncé et ce que je vais vous demander c'est un **travail individuel** d'une dizaine de minutes pour prendre connaissance de l'énoncé. Ensuite vous passerez à un **travail en groupe**. Ce travail en groupe devra se terminer par la rédaction d'une affiche. Je vous dirais au début du travail en groupe comment vous devrez présenter l'affiche. Vous pourrez poser des questions mais je resterais muet.»

Au bout des 10 minutes, le professeur reprend la parole: «Est-ce qu'il y a des questions sur l'énoncé proprement dit? Maintenant vous allez travailler

en groupe et essayer de résoudre ce problème et ce que je vous demanderai ce sera de préparer une affiche et ce sera la fin du travail. Vous aurez à compléter deux phrases : la première c'est : « nous pensons que le point M... » et vous direz où vous pensez qu'il faut placer le point M et la deuxième c'est : « Pour arriver à cette réponse nous avons... ». Vous avez fait des tas de choses : à vous d'expliquer ce que vous avez fait, la méthode, et chaque groupe essaye de trouver ce qu'il y a de mieux et prendra la méthode la meilleure pour la rédaction de l'affiche. »

Voici quelques exemples d'affiches produites par les élèves :

Affiche 4

nous pensons que le point M...se trouve à 2,9 cm de A
Pour arriver à cette réponse, nous avons...calculé plusieurs longueurs 2,8 ; 2,9 c'est le meilleur;

Aire du parallélogramme MNPO

pour $AM = 3$ $12,5 \text{ cm}^2$

pour $AM = 2,8$ $12,28 \text{ cm}^2$ $2,8 < AM < 2,9$

pour $AM = 2,9$ $12,37 \text{ cm}^2$

Affiche 6

Nous pensons que le point M... est trouvé à partir du calcul:

$(L/2 + 1/2)/2 = 2,625$ $AM = BN = CP = BQ = 2,625$

pour arriver à cette réponse, nous avons....

aire du rectangle : $6,5 \times 4 = 26 \text{ cm}^2$

aire du triangle AMQ : $(2,625 \times 1,375)/2 = 1,804 \text{ cm}^2$

aire du triangle MBN : $(3,875 \times 2,625)/2 = 5,085 \text{ cm}^2$

les aires des triangles AMQ et NCP sont égales, car ils sont symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales ainsi que MBN et PDQ. Les triangles sont opposés 2 à 2;

On a $2(1,804 + 5,085) = 13,778 \text{ cm}^2$

l'Aire du quadrilatère MNPQ: aire du rectangle - aire des triangles

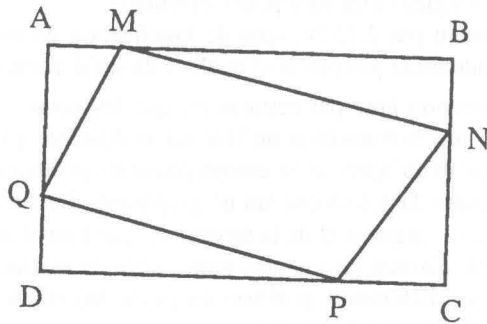
$26 - 13,778 \sim 12,22 \text{ cm}$

Affiche 7

Nous pensons que le point M... se situe à 2,617 cm de A pour arriver à cette réponse, nous avons....calculé l'équation de l'aire du quadrilatère par rapport à la longueur de AM(x)
 éq : $26 - (10,5x - 2x^2)$

Affiche 8

Nous pensons que le point M... se place soit au milieu de [AB], soit à 2 cm de A représentant le milieu de [BC].
 pour arriver à cette réponse, nous avons....



hypothèse :

$0 \leq x \leq 4$ N et Q ne sortant pas de leur côté initial de 4 cms de long.

$$y = A_{ABCD} - [x(4-x) + x(6,5-x)]$$

$$y = A_{ABCD} - 10,5x + 2x^2$$

On sait que dans un carré (propriété des milieux), le carré formé par les points des milieux du carré initial donne un carré d'1 demi fois plus petite que l'initial (c'est le plus petit carré que l'on peut obtenir.). Comme x est compris entre 0 et 4 les milieux de $[AB] = 3,25$ et de $[BC] = 2$ peuvent donner les quadrilatères les plus petits.

Le débat

Il a eu lieu en classe entière (31 élèves). Le professeur place au tableau l'affiche n°4. Il demande aux élèves d'en prendre connaissance de façon à ce qu'ils puissent donner leur avis sur **la réponse** donnée (est-elle juste ou non) et sur **la méthode** décrite pour l'obtenir. Ensuite il précise qu'une discussion aura lieu sur ces deux points. Les élèves qui le souhaitent donnent leur avis et le groupe auteur des explications supplémentaires ou des contre arguments. Ensuite on passe à une deuxième affiche et ainsi de suite... Elles ont été présentées dans l'ordre où elles figurent dans ce texte.

Ce qui ressort de la discussion sur chaque affiche.

Affiche n°4 : les critiques faites sont pour l'essentiel :

«pourquoi ça ne serait pas 2,75 ?», «pas de justification du mot calculé» et «on donne un encadrement pas précis». Un élève dit qu'il a trouvé mieux.

Affiche n°6 : l'objection faite par certains est que les auteurs ne disent pas comment ils ont trouvé la formule et qu'il serait souhaitable qu'ils le fassent. Les auteurs expliquent qu'après avoir essayé plusieurs positions de M et calculé les aires correspondantes ils ont fait un graphique... Puis ils ont eu l'idée de la médiatrice de la longueur et de la largeur et "par hasard on a divisé par deux et ça a marché. Ensuite on a essayé toute sortes de mesures (il s'agit de calculs d'aires pour différentes position du point M) et on a trouvé que c'était le meilleur $(L/2+1/2)/2$ ". Un élève remarque : "ils ne pourront pas me convaincre qu'ils ont trouvé la formule au hasard". Un autre dit qu'il faut expliquer le pourquoi de la formule. La réponse du groupe auteur est le défi de trouver une aire plus petite.

Affiche 7 : «Comment vous avez trouvé ?»; «d'où sort l'équation, le 10,5 ?» «Les deux dernières affiches ne donnent pas le même résultat ?»; «Je préfère avoir une méthode même si elle n'arrive pas au résultat plutôt qu'une formule parachutée.» Le groupe auteur explique qu'après avoir établi la formule ils ont utilisé une calculatrice graphique pour obtenir la valeur approchée.

La phase de capitalisation

Au cours de cette phase le professeur a mis en relief différents types d'affiches correspondants à différents niveaux d'abstractions et différentes qualités de réponses :

→ le fait de savoir que la réponse AM est telle que $2 < AM < 3$ apporte des informations même si intellectuellement on se sent privé d'une réponse plus

Affiche 4

nous pensons que le point M...se trouve à 2,9 cm de A
Pour arriver à cette réponse, nous avons....calculé plusieurs longueurs 2,8 ; 2,9 c'est le meilleur;

Aire du parallélogramme MNPO

pour AM = 3 12,5 cm²

pour AM = 2,8 12,28 cm² $2,8 < AM < 2,9$

pour AM = 2,9 12,37 cm²

Affiche 6

Nous pensons que le point M... est trouvé à partir du calcul:

$(L/2 + l/2)/2 = 2,625$ AM = BN = CP = BQ = 2,625

pour arriver à cette réponse, nous avons....

aire du rectangle : $6,5 \times 4 = 26$ cm²

aire du triangle AMQ : $(2,625 \times 1,375)/2 = 1,804$ cm²

aire du triangle MBN : $(3,875 \times 2,625)/2 = 5,085$ cm²

les aires des triangles AMQ et NCP sont égales, car ils sont symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales ainsi que MBN et PDQ. Les triangles sont opposés 2 à 2;

On a $2(1,804 + 5,085) = 13,778$ cm²

l'Aire du quadrilatère MNPQ: aire du rectangle - aire des triangles
 $26 - 13,778 = 12,22$ cm

Affiche 7

Nous pensons que le point M... se situe à 2,617 cm de A

pour arriver à cette réponse, nous avons....calculé l'équation de l'aire du quadrilatère par rapport à la longueur de AM(x)

eq : $26 - (10,5x - 2x^2)$

précise (démarche par dichotomie). Comment rationaliser une telle démarche afin de conduire, en ciblant, vers le résultat ? On ne peut pas vérifier à l'aide d'exemples, si une assertion est vraie.

→ d'autre part, on peut, en ayant découvert la bonne mesure pour AM, vérifier que cette solution est la bonne. Là, si on vérifie, on est aussi intellectuellement non satisfait car cette réponse est liée à un certain facteur chance qui dépend de l'analyse faite du problème, de la culture mathématique que l'on possède ou des approches pragmatiques que l'on a faites de ce problème. Les élèves découvrent une valeur mais ne peuvent pas la légitimer mathématiquement comme le ferait la forme canonique. Pour être sûr que l'aire obtenue est la bonne en étant la plus petite (en admettant que l'on connaisse sa valeur), il ne reste plus qu'à comparer des nombres.

→ dans ces deux cas, nous avons trouvé une solution. Mais y a-t-il une seule valeur qui répond à la question ? Pour répondre à cette question la démarche graphique donne l'allure "régulière" d'une courbe et permet de lever un doute en utilisant implicitement un argument de continuité.

Le professeur a alors montré comment mathématiquement on peut découvrir la bonne valeur de AM à l'aide du calcul donnant l'aire en fonction de $x = AM$ en présentant la forme canonique qui en résulte et qui met en évidence la valeur du minimum cherchée. Il a aussi montré l'intérêt de la formule algébrique pour effectuer les calculs répétitifs (aspect fonctionnel), pour organiser les résultats sous forme d'un tableau de valeurs ou pour représenter graphiquement ces valeurs. Enfin il a mis en relief le fait que ce problème posé dans un cadre géométrique se traduit sous la forme d'un problème algébrique et que la résolution du second équivaut à la résolution du premier.