LES RECTANGLES EMBOÎTÉS

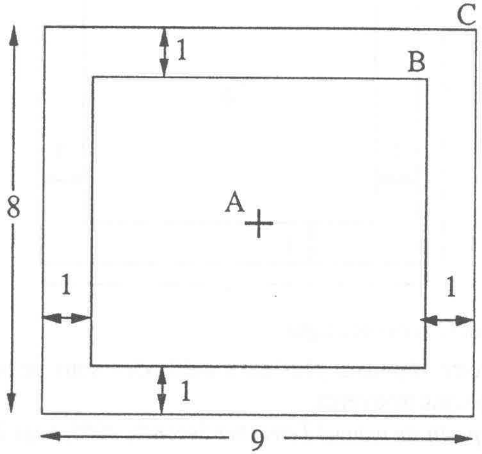
Isabelle GESLIN
Stagiaire IUFM de Rouen
(2ème année)

Objectif principal de l'activité :

Faire en sorte que les élèves rassemblent tous les outils qu'ils possèdent pour démontrer, dans un situation donnée, le non-alignement de trois points.

Le problème :

Les points A, B et C sont-ils alignés ?



Fonctionnement :

L'activité se déroule sur deux séquences. Les élèves travaillent par groupes et exposent ensuite leurs méthodes. Prévoir 1 h 30 à 2 h 30.

De multiples variantes sont envisageables quant à l'exploitation ; en particulier, un travail spécifique sur la démonstration est possible.

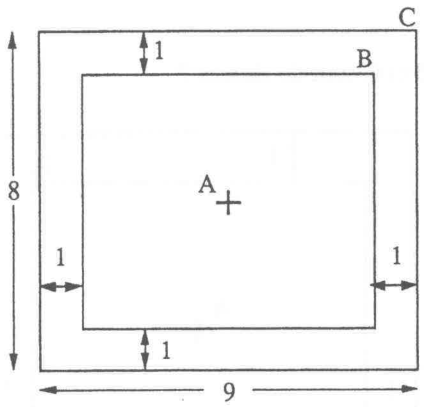
DESCRIPTION DÉTAILLÉE DE L'ACTIVITÉ

Objectif de l'activité :

- Faire émerger les différentes méthodes connues par un élève de seconde pour résoudre un problème d'alignement.
- Réinvestir des connaissances des classes de troisième et de seconde.
- Décloisonner le programme de seconde.

L'énoncé :

On considère un rectangle dont les côtés mesurent 8 et 9 cm. On construit un second rectangle à l'intérieur du premier, comme ci-dessous. A est le centre commun des deux rectangles.



Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Pour justifier votre réponse, plusieurs méthodes sont possibles. Exposez toutes celles que vous trouverez.

(Enoncé adapté à partir du manuel Terracher Seconde, 1986, page 210)

Situation dans la progression de la classe :

Cette activité peut avoir lieu à différents moments par rapport à la progression. Si l'on veut qu'un maximum de méthodes puisse être utilisées, il faut avoir traité les chapitres «Géométrie analytique» et «Homothéties».

On peut aussi envisager cette activité sans l'outil homothétie, l'exercice pouvant être repris à l'occasion de ce chapitre.

Scénario :

- La classe de seconde est réunie pour une séance de 2 heures.
- Les élèves sont répartis par groupes de 2 à 4 élèves par affinité.
- Chaque élève reçoit l'énoncé et la figure en dimension réelle photocopiés (l'alignement y est discutable).
- Pendant 5 minutes, chacun réfléchit au problème, en silence.
- Pendant 1 h 10, les élèves travaillent par groupes, recherchent des méthodes de solution. Chaque groupe rédige un compte-rendu des solutions trouvées.
- Pendant 45 minutes, successivement, 5 groupes exposent au tableau l'un solutions du problème.
- Les cinq méthodes proposées (parmi les sept possibles), recopiées sur un transparent, sont étudiées et comparées en classe entière lors de la séquence suivante.

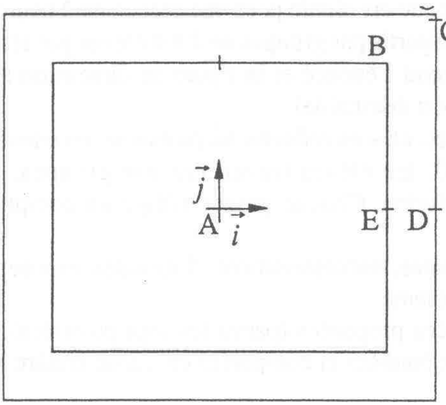
Consignes :

- Chaque groupe débat des méthodes de résolution et rédige au fur et à mesure toutes les méthodes trouvées.
- Le professeur n'intervient pas pendant la phase de recherche.

Raisons du choix de l'énoncé :

- Ce problème a l'avantage de posséder plusieurs procédures de résolution.
- Il permet
  - de réinvestir des connaissances
  - de comparer différents outils
  - d'apporter un regard transversal au programme de seconde.
- Il impose la démonstration comme outil de preuve : l'alignement ou le non alignement des 3 points étant incertain d'après la figure, pour se convaincre de l'un ou de l'autre, on doit le démontrer. On remarquera que les dimensions de la figure (8, 9, 1) ont été choisies précisément pour obtenir cette incertitude.
- Le texte est sobre, aucune indication n'est donnée. Chaque groupe doit prendre des initiatives afin de mettre en œuvre, après conjecture, les méthodes de démonstrations de son choix.
- Dans la mesure où l'on demande plusieurs méthodes, ce problème laisse une place aux élèves faibles et est ainsi adapté à l'hétérogénéité.

Procédures de résolution du problème :



1) Par la colinéarité.

Dans le repère orthonormé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3{,}5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4{,}5\\4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3{,}5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4{,}5\\4\end{pmatrix}$

$3{,}5 \times 4 - 3 \times 4{,}5 = 0{,}5 \neq 0$ donc, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B et C non alignés.

2) Par les équations de droites.

Dans le même repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ que ci-dessus, on montre que (AB) et (AC) sont non confondues.

$y = \dfrac{3}{3{,}5}x$ *et* $y = \dfrac{4}{4{,}5}x$ sont les équations réduites respectives de (AB) et (AC). Leurs coefficients directeurs étant différents $\left(\dfrac{3}{3{,}5} \neq \dfrac{4}{4{,}5}\right)$ les droites (AB) et (AC) ne sont pas confondues, et les points A, B et C ne sont pas alignés.

***3) Par comparaison des longueurs* AB + *AC* et *AC*.**

Dans le triangle ABE, appliquons le théorème de Pythagore :

$AB^2 = AE^2 + EB^2$ d'où $AB = \sqrt{21{,}25}$.

D'autre part BC = $\sqrt{2}$ et AC = $\sqrt{36{,}25}$
donc AB + BC ≈ 6,0239 et AC ≈ 6,0207.
Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

4) Par comparaison des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{DAC}$

$\tan \widehat{EAB} = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{3}{3{,}5}$ et $\tan \widehat{EAB} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{4}{4{,}5}$ or, $\dfrac{3}{3{,}5} \neq \dfrac{4}{4{,}5}$ donc

$\widehat{EAB} \neq \widehat{DAC}$ et les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Par comparaison des aires.

L'aire du triangle AEB est : $\dfrac{3{,}5 \times 3}{2} = 5{,}25 \text{ cm}^2$

L'aire du trapèze BEDC est : $\dfrac{(4 + 3) \times 1}{2} = 3{,}5 \text{ cm}^2$

Par suite, l'aire du quadrilatère ADCB est de 8,75 cm^2.

Or, l'aire du triangle ADC est : $\dfrac{4{,}5 \times 4}{2} = 9 \text{ cm}^2$.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

6) Par comparaison des longueurs DC' et DC.
Soit C' l'intersection des droites (AB) et (CD).
On sait que DC = 4.
Appliquons le théorème de Thalès au triangle AC'D pour trouver DC' :

$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DC'}{EB}$ d'où $DC' = \dfrac{3 \times 4{,}5}{3{,}5}$, or, $4 \neq \dfrac{3 \times 4{,}5}{3{,}5}$.

Les points C et C' ne sont pas confondus, et les points A, B et C ne sont pas alignés.

7) En utilisant une homothétie.

Si A, B et C étaient alignés, il existerait une homothétie de centre A qui transformerait B en C. Elle transformerait tout rectangle de centre A en un rectangle de centre A et conserverait les proportions entre longueur et largeur.

Or, les rapports des distances $\dfrac{9}{7}$ et $\dfrac{8}{6}$ sont différents. Les rectangles donnés dans la figure initiale ne peuvent être liés par un agrandissement de centre A.

Il n'existe donc pas d'homothétie de centre A qui transforme B en C.
Par suite, les points A, B et C ne peuvent être alignés.

Explicitation du choix des différentes étapes du déroulement de l'activité :

- La phase de réflexion individuelle permet à chacun de s'approprier le problème et de se faire une idée sur l'alignement des points.
- Le travail de groupe permet ensuite aux élèves de confronter leurs idées et de chercher ensemble des méthodes de résolution.
- Les productions des groupes examinées à la fin de la phase de recherche par le professeur permet à ce dernier d'envisager le passage des groupes au tableau.
- L'exposé au tableau des solutions par 5 groupes (des 5 méthodes proposées) permet de ramener le débat à la classe.

Les élèves peuvent critiquer la proposition de leurs camarades qui doivent alors se justifier.
- La non intervention du professeur pendant la phase de recherche oblige les élèves à se prendre en charge et à ne pas attendre la validation des résultats par le professeur.

Compte rendu d'une utilisation de cette activité :

Cette activité s'est déroulée dans une classe de seconde hétérogène de niveau moyen, composée de 27 élèves (le faible effectif a permis de travailler en classe entière).

Elle a été proposée juste après avoir traité le chapitre «géométrie analytique». Les «homothéties» avaient déjà été abordées mais aucun rappel de trigonométrie n'avait été fait.

Déroulement de la séance et description des productions des groupes.

Les élèves ont été motivés par la recherche.

Seul un groupe a dû être mis sur la voie par le professeur. En effet, la figure distribuée, bien que reconnue comme imprécise, était considérée comme faisant preuve de l'alignement des points. En conséquence, c'est la démonstration du non alignement qu'ils avaient trouvée qui était considérée comme erronée.

Après 1 h 15 de travail, les exposés ont été rendus au professeur. Celui-ci a pu constater que chaque groupe avait au moins trouvé la méthode qui consiste à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Deux groupes en sont restés là. Trois groupes ont abordé cinq méthodes.

La méthode qui utilise une homothétie a été abordée par peu de groupes et peu développée, le raisonnement qui consiste à définir une homothétie n'étant pas acquise dans la classe.

L'exposé des productions des élèves par eux-mêmes a permis à chacun d'avoir une vue sur les cinq méthodes proposées et d'insister sur la rédaction de ces démonstrations. On trouvera en annexe 1 quelques-unes de celles-ci.

Analyse des écarts entre ce qu'ont fait les élèves et ce qui était attendu.

Les élèves ont eu beaucoup d'idées d'outils, mais ils ont eu tendance à ne pas accorder d'importance à la rigueur des démonstrations et à la rédaction, leur but étant de trouver le plus de méthodes possible. Il serait donc nécessaire d'insister sur l'importance de la rigueur de leur production.

Capitalisation par les professeur du travail de production des élèves.

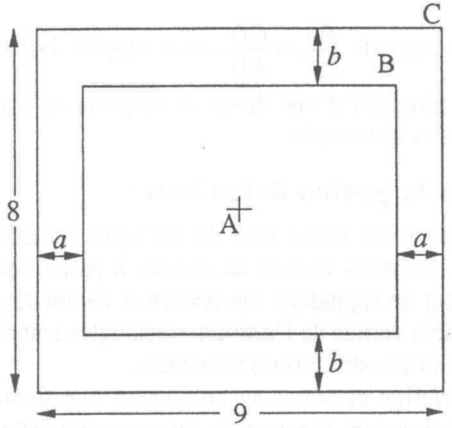
La capitalisation a consisté en un bilan des outils connus en classe de seconde et utilisés pour résoudre un problème d'alignement.
Un rappel des connaissances nécessaires à l'utilisation de l'homothétie a été fait.
Après avoir remarqué que les méthodes de comparaison des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{DAC}$ et des droites (AB) et (AC) se ramenaient à la comparaison des deux mêmes rapports $\frac{EB}{AE}$ et $\frac{CD}{AD}$, on a rappelé la corrélation existant entre coefficient directeur d'une droite et tangente de l'angle formé entre l'axe des abscisses et cette droite.

Variantes pour la gestion de la classe :

Ce problème peut être utilisé avec de multiples variantes quant à la gestion de la classe. Diverses formes de travail, à partir des productions des groupes, permettent de capitaliser les savoirs et les méthodes et fournissent aux élèves des traces écrites de l'activité «rectangles emboîtés». La capitalisation peut prendre l'une des formes suivantes :

- Chaque élève **rédige** et remet au professeur une démonstration par la méthode qui lui convient le mieux, à choisir parmi celles que son groupe n'avait pas envisagé.
- Dans le cadre d'un enseignement structuré autour de l'**enseignement de méthodes**, chaque élève complète une fiche «comment démontrer que 3 points sont alignés».

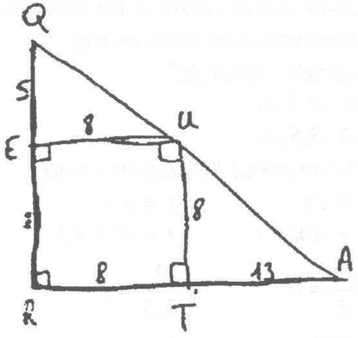
- A partir des démarches proposées par les différents groupes, l'enseignant construit un **devoir** à la maison. L'élève peut ainsi s'approprier chaque démarche. L'énoncé extrêmement **fermé**, proposé en annexe 2, a ainsi été construit pour une classe de seconde où de nombreux élèves étaient en grande difficulté.
- La restitution de ce problème peut aussi conduire à un travail sur la démonstration. On peut demander à chaque groupe d'étudier un **plan de raisonnement** pour chacune des démarches étudiées, et à chaque élève de rédiger chacun de ceux-ci. On trouvera à l'annexe 3 des exemples de productions d'élèves mettant en évidence le type de difficultés que rencontrent certains élèves dans ce genre de travail.
- Dans une classe concluant majoritairement à l'alignement des trois points et proposant plusieurs «démonstrations» de l'alignement dans chacun des groupes, le travail peut porter sur la recherche du type d'erreurs de raisonnement à partir d'une **typographie d'erreurs** proposée par le professeur. (voir annexe 4).
- Ce travail sur les différentes méthodes peut ainsi être relayé par la rédaction d'un **devoir** qui propose le même énoncé à partir de **2 carrés** ayant même centre et des côtés respectivement parallèles de 8 cm et 6 cm.
- Signalons encore un prolongement possible par cette **nouvelle question** qui interroge chacun des méthodes et souligne la pertinence de l'outil «homothétie».



On considère 2 rectangles ayant même centre, des côtés respectivement parallèles, et des mesures comme indiquées sur la figure ci-contre.
Comment faut-il choisir a et b pour que les points A, B, C soient alignés ?
(On pourrait donner cet énoncé avec a ou b fixé...)

- Dans la même veine, nous renvoyons enfin à un problème proposé par J.F.Zuchetta à paraître dans le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P.

Le dessin ci-contre est un dessin à main levée.
Les dimensions sont données en cm.
Que peut-on dire des points Q, U, A ?
J'ai trouvé 3 méthodes. Qui dit mieux ?

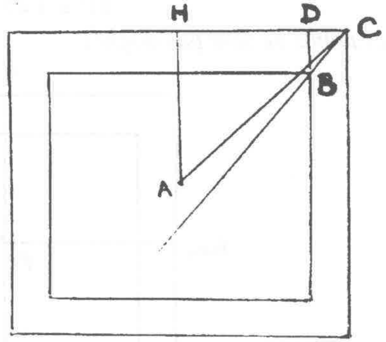


Toutes ces variantes dans la gestion de classe élaborées pour capitaliser le travail de groupes, soulignent la marge de manœuvre que possède l'enseignant pour proposer un enseignement qui lui soit personnel et qui prenne en compte le public auquel il s'adresse.

Annexe 1 :
Quelques productions de groupes

Exemple 1 .

On utilise la trigonométrie.



$\widehat{BCD} = 45°$

$tg\ \widehat{ACH} = \frac{AH}{HC} = \frac{4}{4{,}5}$ *donc* 41°.63

Donc les points ne sont pas alignés.

Exemple 2.

Avec les équations

Est-ce que le centre et les coins sont aligné ?

Démonstration selon un axe :

Calculer AB et AC

AC (4.5;4)

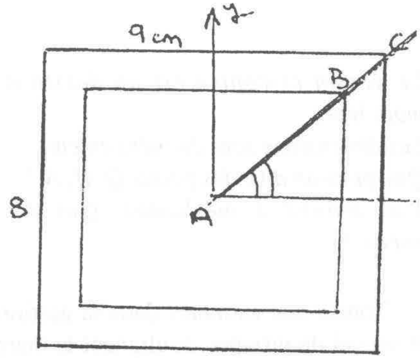
AB (3.5;3)

Si l'on prend l'équation $y = ax$.

$y = ax$	$y = a'x$
$4 = a \times 4.5$	$3 = a' \times 3.5$
$\frac{4}{4.5} = a$	$\frac{3}{3.5} = a'$
$0.888... = a$	$0.8571428... = a'$

Conclusion :

Ils ne sont pas alignés.



Exemple 3.

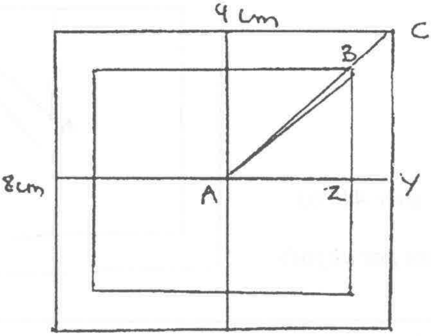
Résolution du problème par Pythagore.

$AY^2 + CY^2 = AC^2$	$AZ^2 + BZ^2 = AB^2$
$20.25 + 16 = AC^2$	$12.25 + 9 = AB^2$
$36.25 = AC^2$	$21.25 = AB^2$
$AC = 6.02$	$AB = 4.6$

S'ils étaient aligés $BC = AC - AB$

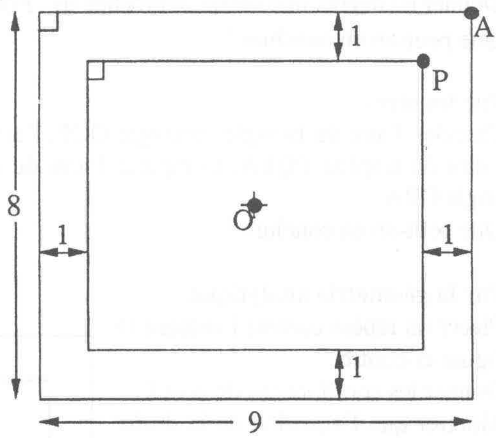
$BC = 1.42$

Les points ne sont pas alignés.



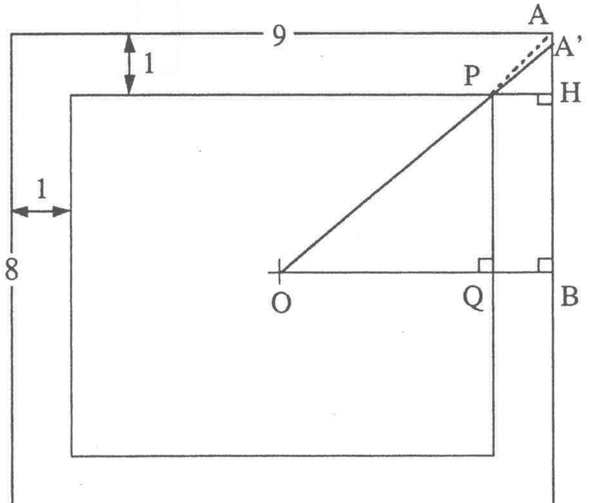
Annexe 2 :
Devoir fermé en reprise du problème ouvert.

On considère la figure ci-contre.
On cherche à montrer que les points O, P, A ne sont pas alignés.



Voici plusieurs démonstrations possibles :

Par le théorème de Thalès.
Appelons A' l'intersection de (OP) et (AB), comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer A'B.
Comparer A'B et AB.
Que peut-on conclure ?



Par le théorème de Pythagore.
Appelons H le pied de la perpendiculaire issue de P sur (AB), comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer OP, OA et AP.

Comparer OP + PA et OA. Que peut-on en conclure ?

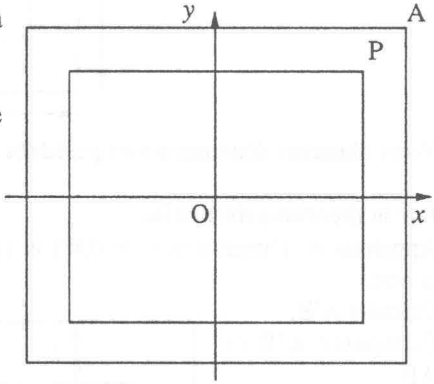
Par la trigonométrie.

Calculer $\tan \widehat{POQ}$ et $\tan \widehat{AOB}$.

Donner en degrés une valeur approchée de $\widehat{POQ}$ et $\widehat{AOB}$ à 10^{-1} près.
Que peut-on en conclure ?

Par les aires.
Calculer l'aire du triangle rectangle OQP, l'aire du triangle rectangle OAB, l'aire du trapèze PQBA. Comparer l'aire du quadrilatère OBAP et du triangle OBA.
Que peut-on en conclure ?

Par la géométrie analytique.
Placer un repère comme l'indique la figure ci-contre.
Donner les coordonnées de A et P.
Montrer que l'équation de la droite (AP) est $y = x - \frac{1}{2}$.
Que peut-on en conclure ?

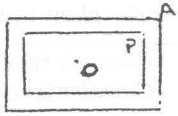


Annexe 3 :
Plans de raisonnement.

Le travail demandé aux élèves.

Pour chacune des méthodes de démonstration proposées par la classe, vous faites le plan de raisonnement qui permet de conclure sur l'alignement. Attention, chaque étape du raisonnement doit correspondre à une activité qui vous est bien connue.

Exemple : Plan de raisonnement utilisant les équations de droites.
- Placer le repère en O.
- Donner les coordonnées de A et P.
- Ecrire l'équation de (AP), droite passant par deux points de coordonnées connues.
- Chercher si O est un point de la droite (AP).
- Conclure :
  * Si O n'est pas sur cette droite, les points O, A, P ne sont pas alignés.
  * Si O est sur cette droite, les points O, A, P sont alignés.

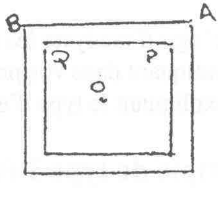


Consigne :
1) Vous travaillez les plans de raisonnement par groupe. Lorsque vous vous êtes mis d'accord sur un plan de raisonnement, vous pouvez voir avec le professeur s'il convient.
2) Vous rédigerez chez vous, des plans de raisonnement pour chacune des méthodes que la classe a trouvées.

Exemples de productions d'élèves.(erronés, intéressants à retravailler).

Un plan de raisonnement intéressant à étudier quant à l'ordre des étapes à effectuer.

- Placer les points Q et B
- Calcul de OP par $OP^2 = PQ^2 + OQ^2$
- Puis le calcul de OA par $OA^2 = OB^2 + AB^2$.
- Chercher si OP + PA = OA.
- Calcul de AP par $AP^2 = AH^2 + PH^2$.
- H = la hauteur du triangle.
- Conclure
- Si OA est différent de OP + AP donc les points O, P et A ne sont pas alignés.
- Si OA est égal à OP + OA donc les points O, P et A sont alignés



Un plan de raisonnement conduisant à travailler avec l'élève, sur les éléments essentiels à l'articulation d'un raisonnement.

- Placer le repère en O
- Ecrire la formule de phytagore
$OQ^2 + QP^2 = OP^2$.
- Chercher si $OP + PA = OA$
- Conclure - Si OAP sont alignés
- Si OPA ne sont pas alignés.

Un plan de raisonnement soulignant les difficultés de certains élèves à proposer des plans ayant une cohérence.

- Placer le repère en O
- Calculer les droites (OP), (OA), et (OP)
- chercher si le triangle OAP est rectangle
- En conclure que le triangle est rectangle (OA) et (OP).

Annexe 4 :
Typologie d'erreurs.

Voici certains **types d'erreurs de démonstration :**

1. Se contenter de **voir** sur la figure. (ceci se repère par les mots clefs : «on constate que», «on voit que», «on mesure» ...)
2. **Ne pas justifier** une étape.
3. Utiliser **ce que l'on veut démontrer.**
4. **Inventer** des théorèmes ou des propriétés qui nous arrangent.
5. **Mal appliquer** une connaissance.

Il va s'agir d'analyser les erreurs contenues dans vos démonstrations :
- en indiquant dans vos productions, à quel moment apparaissent vos erreurs.
- en expliquant le type d'erreur faite.

Exemple de type 1 étudié collectivement :

«Avec les triangles rectangles je trouve que les points A, B et C ne sont pas alignés car les angles de C ne sont pas les mêmes pour les points vers B et C.»

Scénario :

- Le professeur répartit les démonstrations élaborées au cours du travail de groupe, de sorte que chacun travaille sur une démonstration proposée par son propre groupe.
- Il donne aux élèves les **consignes** suivantes :

  Faire un travail individuel

  Coller le texte de la démonstration que le professeur vous a remis sur une feuille.

  En faire la critique.

  Remettre une production écrite dans 15 minutes.
- Le professeur corrige lui-même ces «copies».
- Il pointe quelques erreurs comme «erreurs de référence». Il s'y référera à chaque occasion possible au cours de l'année.

Exemples de type 3 :

«Tout rectangle inscrit a le même centre mais n'a pas les mêmes diagonales donc les points A, B et C ne sont ***pas alignés*** *car ils ne sont pas sur la même diagonale».*

«Comme il y a réduction du rectangle (1 cm de chaque côté), et leur centre est confondu, alors on peut dire que les diagonales sont superposées, alors les points A, B et C sont sur la même droite, donc ***alignés.****»*

Exemple de type 5 :

«Pour démontrer que A, B, et C sont alignés, démontrons que $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires donc il faut démontrer qu'il existe un réel k tel que* $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Utilisons le théorème de Pythagore pour connaître les mesures de AC et AB.

$AC^2 = CD^2 + DA^2 = 36{,}25$ $\qquad AB^2 = 21{,}25$

$AC = \sqrt{36{,}25} \approx 6$ $\qquad AB = \sqrt{21{,}25} \approx 4{,}6$

$k = \|\overrightarrow{AC}\| : \|\overrightarrow{AB}\| = 1{,}3$ *donc* $\overrightarrow{AC} = 1{,}3\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires, donc A, B, C sont alignés».*

Notes personnelles