BULLETIN INTER-IREM - SECOND CYCLE

MATHS EN SECONDE :

Enoncés et Scénarios

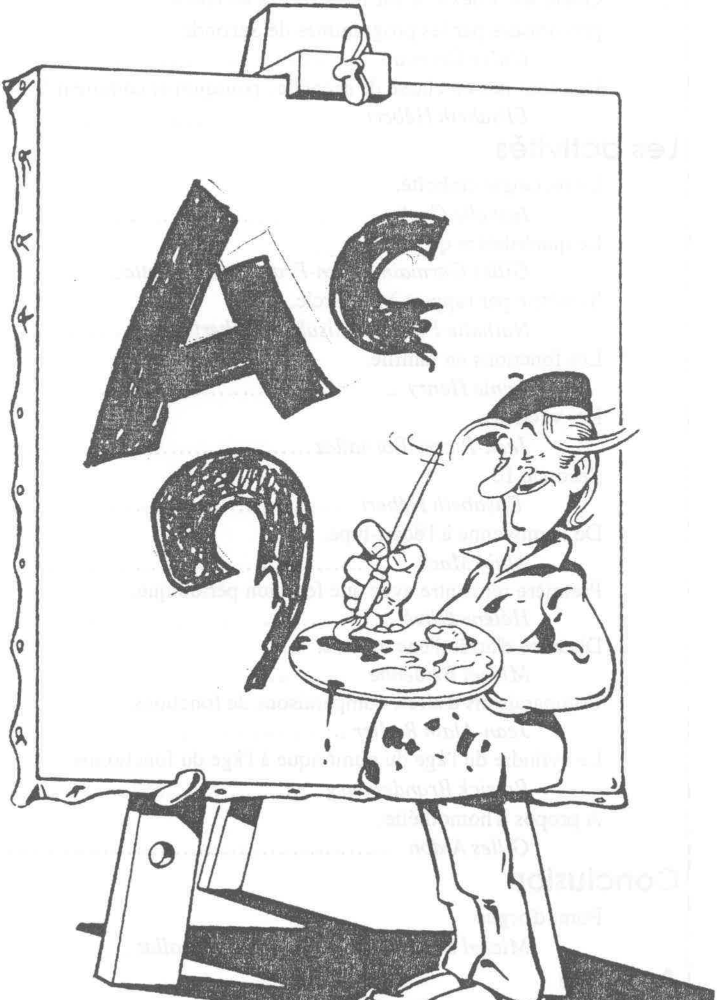
Le travail de production de cette brochure a été coordonné durant les années 90-93 par Michel BRIDENNE, Jean-Pierre FORNALLAZ, Gilles GERMAIN et Elisabeth HÉBERT au sein d'un sous-groupe de la commission Inter-IREM «Objectifs et niveaux d'approfondissement».

Ils espèrent que cette publication, par la forme qu'ils ont choisi de lui donner, sera un nouveau moyen de communication entre les enseignants sur les situations d'enseignement.

Les sus-cités remercient les collègues qui ont bien voulu relire cette brochure, particulièrement Robert NOIRFALISE directeur de l'IREM de Clermont-Ferrand qui a fait de nombreuses remarques critiques et donné de précieux conseils.

La composition a été réalisée par Jean Barbier.

SOMMAIRE



AVANT - PROPOS

7 - Activités et modules

Michel BRIDENNE

ACTIVITÉS ET MODULES.

Michel BRIDENNE
IREM de Dijon

Le moment où nous achevons la mise au point de cette brochure coïncide avec la première année de mise en place des modules en seconde et on peut se demander comment situer «des activités en seconde» par rapport à une structure nouvelle comme celle engendrée par les modules.

C'est une évidence : il appartient à chacun d'intégrer l'espace créé par les modules à sa propre stratégie d'enseignement, suivant les contraintes locales.

Rien n'empêche pourtant de faire quelques suggestions. Nous en ferons deux.

La première va de soi !

Aux collègues n'ayant pu travailler par «activités» en classe, faute de temps, ou pour cause d'effectifs trop lourds, ou d'une trop grande hétérogénéité, on peut suggérer d'employer l'espace modulaire pour utiliser telle ou telle activité telle que décrite dans cette publication. Les élèves peuvent alors être répartis en groupes inégaux et adaptés aux rythmes individuels ou au type d'activité retenue, donc plus facile à «gérer».

La deuxième consiste à élaborer des séquences de modules en réponse aux difficultés repérées lors de la mise en œuvre de certaines de ces activités.

En effet, telles qu'elles sont présentées, les activités de cette publication sont accompagnées d'analyses ayant sous-tendu leur élaboration, laissant supposer des difficultés «attendues» : nous pensons que ces analyses préalables peuvent libérer un peu plus l'attention du professeur lors de la mise en œuvre au profit d'une amélioration de l'écoute et de l'observation des élèves en train de faire des mathématiques.

L'enseignant a alors la possibilité de recueillir certaines conceptions ou représentations de ses élèves révélatrices de difficultés conceptuelles, ou heuristiques, sur les problèmes étudiés, et plus largement aussi, de repérer des moments ou des phases, de l'activité, sources de difficultés.

Ces diagnostic étant faits, ces éléments peut conduire à l'élaboration et à l'utilisation de séquences particulières, directement liées à des difficultés localisées, en modulant les effectifs des groupes concernés. D'où cette seconde suggestion.

Bonne lecture à tous !

dessin de Claude TISSERON

INTRODUCTION

Quelques réflexions
sur les activités en classe préconisées par les programmes de seconde

Gilles Germain

Les programmes de seconde (¹) de lycée demandent aux enseignants de privilégier l'activité des élèves en classe non seulement pendant les travaux dirigés mais aussi en classe entière. En effet on peut lire dans la rubrique organisation de l'enseignement de ces programmes, au chapitre 4 intitulé "Objectifs et fonctions des différents types d'activités" que l'un des objectifs essentiels de l'organisation du travail de la classe est

"d'entraîner les élèves à l'activité scientifique et de promouvoir l'acquisition de méthodes: la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexions et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de synthèse....... Dans cette perspective, la résolution de problèmes et l'étude de situations occupent une part importante du temps de travail allant bien au delà de l'horaire de travaux dirigés en effectif réduit."

Dans l'exposé des motifs qui ont conduit à ces nouveaux programmes on peut lire: "On a voulu insister sur l'importance du travail personnel des élèves tant au lycée qu'à la maison et sur le rôle formateur des **activités de résolution de problèmes**".

(1) BO n° 20 - 17 mai 1990 (Programmes de Seconde)

Qu'est-ce que l'activité scientifique (ou mathématique) ?

Une définition en est donnée dans le chapitre I du programme intitulé «formation scientifique» :
«Formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ne sont que des moments différents d'une même **activité mathématique**».

Qu'est-ce qu'une activité de résolution de problème?

Les programmes ne le précisent pas.S'il s'agit d'une activité de résolution de problème en classe, nous pensons qu'elle se comprend de la façon suivante : **un problème(1) est posé par le professeur aux élèves. Leur travail consiste à chercher et produire une solution à ce problème seul ou à plusieurs, sans intervention du maître sur le contenu ou les méthodes.**

Quoiqu'il en soit trois grands types d'objectifs peuvent être poursuivis par ce type d'activité de classe :
-faire fonctionner les connaissances des élèves (leurs connaissances anciennes, celles qu'ils savent plus ou moins bien utiliser) **à leur initiative** pour une meilleure maîtrise, pour un approfondissement de celles-ci ou pour faire surgir les conceptions erronées qu'ils en ont et leur permettre d'accéder à la conception de ces connaissances visée par le professeur.
-introduire de nouvelles connaissances en leur donnant du sens (2) en particulier par le questionnement que la situation doit provoquer chez l'élève ("Pour un esprit scientifique toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique "d'après Bachelard dans «La formation de l'esprit scientifique»)
-faire pratiquer aux élèves une démarche mathématique dans le sens de l'activité scientifique présentée dans les programmes et rappelée ci-dessus(3).

---

(1) Par exemple de type ouvert au sens du problème ouvert de l'IREM de Lyon. En particulier, à la simple lecture de l'énoncé, un algorithme de résolution ne s'impose pas à l'élève, ni les connaissances qui vont lui servir.

(2) Un exemple d'activité de résolution de problème poursuivant ce type d'objectif et la situation problème de Régine Douady (voir cahier de didactique des mathématiques n°3, IREM de Paris 7.

(3) Un exemple d'une activité de résolution de problème en classe poursuivant ce type d'objectif est «la pratique du problème ouvert» de l'IREM de Lyon, présentée dans le livre « problème ouvert et situation problème».

Un des points commun des auteurs de cette publication est de penser que les activités de résolution de problème en classe sont difficiles à construire et à gérer. Leur fabrication peut être facilitée si elle se fait au cours d'un travail d'équipe ou si elle s'appuie sur des descriptions d'activités déjà construites, expérimentées et analysées par d'autres. Il manque actuellement de documents à la disposition des enseignants et présentant de telles descriptions . Cette brochure a pour ambition de palier en partie ce manque. L'objectif des auteurs de cette brochure est un objectif de communication:

Pour nous, la communication d'une activité de résolution de problème en classe est constituée :

* d'un objectif principal d'apprentissage clairement énoncé,
* d'un problème à poser aux élèves,
* de la description de la gestion de la classe (le scénario),
* d'une analyse de la pertinence du choix du problème et du scénario par rapport à l 'objectif poursuivi.

Les situations d'activité de résolution de problème présentées ici ne sont pas **des modèles à reproduire.** C'est à chacun de se les approprier et de les adapter à son style, à sa personnalité ainsi qu'à ses élèves. Cependant, les caractéristiques suivantes, communes à ces situations, nous semblent indispensables à conserver :

- Les élèves ont à résoudre un problème pour lequel la connaissance visée à de l'intérêt en tant qu'outil de résolution.

- L'activité de recherche d'une solution se fait en classe en s'appuyant sur les ressources du travail en groupe des élèves et à pour objectif la production de conjectures (solutions plausibles au problème) .

- Les élèves ont un moyen de valider ou d'invalider les solutions qu'ils produisent et (ou) les méthodes qu'ils utilisent .

- Un débat de validation des conjectures produites ou de confrontation des méthodes utilisées est organisé entre les élèves de la classe. Au cours de ce débat ils ont à se prononcer (en argumentant) sur l'acceptation ou le refus de ces conjectures et (ou) sur les méthodes de résolution qu'ils trouvent les plus pertinentes.

- L'activité se termine par une phase de capitalisation du travail effectué. Le professeur signale les connaissances à retenir sous leur forme socialement reconnue et fait un bilan des différentes méthodes de résolution utilisées par les élèves .

Certaines des situations présentées dans ce livre ont été construites en essayant de respecter le plus possible ces caractéristiques. Elles les respectent avec plus ou moins de succès. Pour la plupart d'entre elles, elles sont le fruit d'un travail d'équipe et ont toutes été expérimentées au moins une fois. Un compte rendu de leur utilisation et une analyse a posteriori accompagnent leur présentation.

Il faut noter qu'un certain nombre de points font encore l'objet de débats entre nous comme :

➡ Le degré et la nature de l'ouverture de l'énoncé du problème.

➡ L'opportunité et le bien fondé de la non intervention du professeur sur les connaissances, sur les méthodes employées et sur le vrai et le faux.

➡ Le contenu de la phase de capitalisation: doit-il porter uniquement sur les connaissances ou aussi sur les diverses stratégies employées par les élèves ?

Pour permettre à certains collègues de mieux voir comment peut se dérouler de telles séquences nous envisageons de fabriquer des bandes vidéo présentant des extraits de chacune des phases de ce type d'activité .

DES ACTIVITÉS EN SECONDE

POURQUOI ET COMMENT ?

Elisabeth HÉBERT

Groupe Didactique - IREM de Rouen

«Il s'agit donc aujourd'hui de réfléchir au "cocktail " d'éléments indispensables que l'enseignant, le médiateur, pourra proposer à chaque "apprenant" pour interférer avec son système de pensée et lui permettre son dépassement» (GIORDAN) (1)

Palette ou cocktail ... ? Enseignement ou apprentissage ...? Activités ou gammes ...? C'est par la diversité des images, des points de vue et des pratiques que se crée l'harmonie. Dans la diversité des pratiques enseignantes, les activités jouent un rôle particulier. Qu'il soit bien entendu qu'elles ne peuvent être la seule composante de notre enseignement.

C'est à partir d'un travail de groupe mené dans plusieurs classes de seconde à l'IREM de Rouen depuis plusieurs années, que je me propose d'étudier les caractéristiques d'un travail par activités. Je formulerai ici des idées issues d'une réflexion collective, ce qui justifie le «nous» utilisé dans la suite du texte.

(1)André GIORDAN : *Vers une modélisation didactique d'apprentissage allostérique. Obstacles et conflits* - 1989.

PREMIERE PARTIE

L'APPRENTISSAGE PAR ACTIVITES

Qu'est-ce qu'une activité dans le contexte présent ?

Donner une définition est un peu illusoire mais ce vocable porte tant de confusion qu'il nous parait opportun d'en tracer le contour. Nous dirons, pour notre part et dans le contexte du présent article, qu'une activité est l'occasion pour l'élève de mettre en œuvre des connaissances antérieures et de produire, avec celles-ci, une connaissance mathématique nouvelle, par une démarche qui ne soit ni une reproduction conformément à un modèle, ni le produit direct d'un questionnement directif.

Il est donc clair qu'il ne s'agit pas :

- d'exercices d'entraînement en conformité à un modèle, de type «gammes» (résolution d'équations, construction de sommes vectorielles,...),
- d'exercices de contrôle conçus pour s'assurer de l'acquisition des savoirs étudiés,
- de problèmes guidés qui se font par l'exécution d'une série de consignes énoncées préalablement, sans mener pour autant à une compréhension globale de la situation proposée (type examen I), a), 1°) .).

Mais la frontière de ce qui est nommé «activité» ne peut être précise. Un exercice d'application permettant de mettre en œuvre un savoir mathématique récent, ou un exemple d'approche d'un nouveau savoir peuvent être ou ne pas être des activités. A partir d'un même support mathématique, les différentes gestions de classe impulsées par les enseignants vont mener les élèves à des comportements intellectuels radicalement différents : les savoirs et rapports au savoir qui se mettent alors en place diffèrent.

Travailler par activités n'est pas un choix pédagogiquement neutre. Ce choix renvoie à nos représentations de l'apprentissage, des mathématiques, de la fonction enseignante ou encore à nos représentations de la formation de l'individu. Celles-ci ne sont pas indépendantes les unes des autres. Ainsi les analyses de Giordan (voir l'article en annexe) sur l'apprentissage, auxquelles nous adhérons globalement, renvoient à ces diverses représentations.

Remarquons que le travail collectif, qui a mené à cet article, est le fruit d'une longue maturation. L'évolution parallèle des représentations de chacun des membres de notre groupe de travail rouennais sur les activités en seconde s'est faite, sur la base de composantes éthiques (suivant la terminologie de

Marc Legrand)(2) proches, par intégration progressive des analyses des didacticiens qui ont lors de notre séminaire local de didactique contribué à notre formation.

Travailler par activités : un défi.

Notre travail par activités prend donc appui sur un cadre théorique impulsé par les didacticiens. Mais sa justification profonde tient à un certain nombre de **constats** réalisés dans nos propres classes dès que nous évaluons l'apprentissage d'élèves qui n'apparaissent pas «prédestinés» à la terminale C. Parmi ces constats, nous retiendrons que pour l'élève «ordinaire» :

- L'écoute du professeur de mathématique ne garantit aucun ancrage dans ses structures de pensée. Le message lui reste extérieur : il glisse ...
- La lecture de propos mathématiques se heurte à des problèmes de compréhension : mots et symboles sont entourés de confusion, l'ensemble s'articule dans un flou considérable.
- L'exécution d'exercices réalisés dans la docilité permet un savoir-faire mémorisé dans le court terme, qui disparaît rapidement. Ce nouveau savoir est plaqué à l'ancien, il ne se trouve pas articulé au réseau de connaissances antérieures.

Rendre l'élève acteur de l'apprentissage nous est apparu comme une nécessité. L'acteur, à l'opposé du figurant d'une pièce de théâtre, est celui qui, dans un cadre donné, a une marge de manœuvre quant à son expression : il donne vie au texte et au contexte. Etre acteur en cours de mathématiques, c'est donner vie au savoir, c'est pouvoir choisir, pouvoir imaginer, pouvoir faire, pouvoir conjecturer, pouvoir valider ... En étant acteur, l'élève fait sien le savoir proposé.

Mais attention, **«être actif»** et **«être acteur»** sont deux comportements qui ne nous semblent pas pouvoir être confondus ; l'énorme ambiguïté sur la terminologie utilisée dans les manuels de seconde réside dans cette confusion. Ceux-ci dénomment «activités» tout travail demandant à l'élève d'être actif. **Rendre l'élève actif**, c'est faire en sorte qu'il se trouve concerné par ce qui se passe. Mais selon le contrat implicite ordinaire, c'est le professeur qui «mène le jeu» ; le bon élève peut être en symbiose avec l'enseignant mais ceci ne le rend pas pour autant «acteur», au sens précisé ci-dessus.

Un travail par activités, dans la mesure où il laisse une véritable autonomie à l'élève, va se heurter à de nombreux **obstacles**, plus ou moins importants selon les élèves. Précisons ceux-ci :

(2) Marc LEGRAND : *Le regard scientifique*. Journées APMEP LYON 1992- in PLOT n°61.

- Il fait appel à des connaissances antérieures mal stabilisées, celles-ci peuvent se tordre, se déformer, voire se modifier et perdre leur sens premier pour répondre au besoin présent.
- Une activité longue impose de multiples articulations ; or l'élève en difficulté a un fonctionnement en «patchwork», il travaille sur des îlots de cohérence qu'il n'articule pas.
- La production d'une démarche personnalisée s'appuie sur trois composantes intellectuelles non nécessairement acquises : le fonctionnement de la **logique** mathématique, l'**anticipation** d'une démarche possible, le **contrôle** de ce qui est produit.

Pour tenir compte des élèves en difficulté, l'enseignant a tendance à proposer des exercices brefs et ciblés ; les raisons d'un tel choix ne manquent pas : il permet à l'élève de travailler sur des îlots de cohérence, il stabilise les connaissances utilisées et évite une dérive vers le non-sens, il permet à l'élève d'aboutir à un résultat. Mais une telle forme de travail ne peut suffire puisqu'elle n'agit pas sur la complexité des savoirs en jeu, ni sur leurs interrelations.

Nous avons, pour notre part, pris acte des difficultés propres au travail par activités et essayé, à partir de quelques situations soigneusement choisies et d'une gestion de classe adaptée, de relever le défi d'une possible évolution des structures de pensée de nos élèves et de leurs conceptions des objets mathématiques.

Y sommes-nous parvenus ? Un travail d'évaluation de cette évolution pose un problème méthodologiques énorme. Disons simplement que, l'année s'écoulant, les élèves ont acquis plus d'aisance et d'autonomie, leur représentation des mathématiques s'est manifestement trouvée modifiée. Ils «ont aimé» travailler par activités. «Le plaisir engendré par un travail de la pensée qui est affirmation positive de soi et maîtrise culturelle du monde» n'est-il pas suffisant pour valider l'activité mathématique comme le pense B.Charlot (3) ? Disons, quant à nous, que c'est du moins une condition première pour la validation de celle-ci.

La fonction des activités.

«Mon prof, il fait des exercices avant le cours». Cette récrimination d'élève souvent entendue peut nous sembler bien primaire, mais elle marque la rupture avec le cours magistral. L'enseignant, quant à lui, parlera d'activités préparatoires et d'activités de réinvestissement.

(3) B.Charlot : *La validation des concepts et de l'activité mathématique*. Dossier GREM-GFEN. (1985/1986).

Les **activités préparatoires** présentées dans la plupart des manuels scolaires ont bien souvent comme fonction de pointer ou constater un résultat à établir. Il s'agira par exemple de compléter un tableau de nombres et de constater que $|x + y| < |x| + |y|$; on prendra alors appui sur cette constatation pour énoncer et donner du sens à la formule générale. Le travail demandé ne montre pas pour autant à l'élève les «vraies raisons» de ce qu'on veut lui apprendre. Pour la plupart de ces activités, l'élève n'est pas acteur du savoir, mais l'exécutant d'une tâche préétablie. Il est tout simplement actif, ce n'est pas à ce type d'activités que nous nous intéressons ici.

Les **activités de réinvestissement**, ainsi nommées dans les manuels, ont un contour extrêmement flou suivant les contextes. En fait, toute activité s'appuie sur un savoir antérieur et est donc réinvestissement de celui-ci. L'expression «activité de réinvestissement» vise en général à faire fonctionner et stabiliser des savoirs nouvellement établis. Par économie de temps, celles-ci sont souvent données en travail à la maison.

Mais regardons de plus près ce que comportent ces dénominations. Une activité préparatoire entend être **préalable à l'apprentissage** d'un concept et une activité de réinvestissement **postérieure à l'apprentissage** de l'un d'eux.

Ce que nous nommons «apprentissage» signifie ici que l'enseignant a transmis une information censée être mémorisée, elle ne suppose rien sur l'apprentissage. Ce que nous nommons «concept» sous-entend que ce dont nous parlons aux élèves peut se définir, être précisé. Mais, est-ce toujours possible ? Pensez, par exemple, au concept de «fonction» ! En réalité, il n'y a ni avant, ni après, il y a surtout un «pendant» : l'apprentissage se joue sur la durée.

Est-ce alors étonnant que nous ne parvenions pas à trouver l'activité de rêve, qui, une fois pour toutes (et en peut de temps, bien sûr) ferait en sorte que l'élève sache ? Il nous faut sortir de ce rêve d'efficacité immédiate, mais a contrario, il nous faut reconnaître que toute activité puisse avoir un impact sur plusieurs aspects des connaissances et structures de pensée.

Les activité présentées dans cette brochure ne seront pas classifiées dans ces deux catégories, nous soulignerons plutôt la fonction essentielle de certaines d'entre elles :

➡ **Des activités «pour actualiser».**

Il s'agit de faire resurgir des connaissances antérieures, de les réactiver pour permettre de reformuler les savoirs et les rendre plus aisément mobilisables au cours d'autres activités. L'activité *«seconde 10»* a cette fonction, elle actualise les savoirs étudiés au collège sur les aires, le sens des équations, les valeurs exactes et approchées. L'activité *«vecteurs»* conduit à reformuler les savoirs nécessaires à la progression dans ce domaine.

➟ **Des activités «pour provoquer».**

Il s'agit avec de telles activités, de modifier les conceptions des élèves en leur présentant une situation qui provoque une remise en cause de la conception antérieure. *«La symétrie par rapport au cercle»* vise à modifier les conceptions des propriétés de conservation des transformations.

➟ **Des activités «pour découvrir».**

L'activité «idéale» vise à faire découvrir à l'élève une connaissance nouvelle, qui soit la réponse la plus pertinente au problème qui lui est posé. Ces activités sont difficiles à élaborer; il s'agit en effet de permettre à l'élève d'accéder en un temps réduit, à une connaissance qui souvent a germé sur plusieurs siècles. Pour exemple, l'activité *«de la moyenne à l'écart-type»* a pour fonction de faire émerger un nouveau calcul qui conduise à l'écart-type.

➟ **Des activités «pour décloisonner».**

La fonction de certaines activités peut être de permettre aux élèves de prendre du recul sur les différents outils que le programme de seconde met à leur disposition. L'activité *«Les rectangles emboîtés»* permet aux élèves de pointer les différentes méthodes qui prouvent le non-alignement de trois points.

Ce ne sont là que quelques exemples des multiples fonctions que peuvent avoir les activités, étant entendu qu'une même activité peut cumuler plusieurs fonctions : établir une situation de référence pour un chapitre donné, permettre une réflexion concernant les méthodes de démonstration, donner l'occasion de réinvestir des comportements de modélisation ...

Des activités donc, aux fonctions inépuisables, pour des acteurs aux jeux infinis, et qui offrent à l'enseignant d'innombrables options quant à la gestion de la classe. C'est cette variété de choix que nous chercherons à préciser maintenant.

DEUXIÈME PARTIE

DES VARIABLES POUR GÉRER LES ACTIVITÉS

Le premier composant d'une activité est évidemment la «substance» mathématique sur laquelle elle est construite : nous parlerons du **support mathématique**. Celui-ci est un aménagement artificiel de l'environnement mathématique de l'élève, mis en place pour provoquer son activité.

Un support mathématique suffisamment riche peut donner lieu à des activités aux fonctions différentes, il suffit de faire varier la gestion de la classe de façon adaptée. La confrontation des pratiques variées, auprès de publics différents nous a menés à repérer les multiples **variables** qui sont à notre disposition pour construire une activité : la place dans la progression, l'ouverture de l'énoncé, les valeurs affectées aux variables mathématiques, la formulation des consignes, l'attribution d'une note, la répartition des phases, la part d'intervention du professeur, le travail individuel ou de groupe, le support matériel des productions demandées, la forme de restitution adoptée, le type de capitalisation retenue.

La place dans la progression.

Il va de soi qu'à partir d'un même support mathématique, on peut construire des activités totalement différentes ; il suffit que change le moment de son étude dans la progression de la classe.

De nombreuses activités proposées en seconde visent à mettre en place les diverses facettes du concept de fonction. Le même support peut mener l'enseignant à introduire le concept de fonction, à explorer la notion de variation, à stabiliser un savoir-faire ... Il en est ainsi pour la recherche du rectangle d'aire maximum inscrit dans un triangle, activité intitulée *«un maximum pour le promoteur»* et présentée en annexe de l'activité *«seconde 10»*. Quant à l'activité *«les comparaisons d'aires»*, elle peut être utilisée, suivant le niveau de la classe auquel l'enseignant s'adresse, soit comme matériel permettant les premières remarques sur les représentations graphiques de fonctions, soit comme l'occasion d'interroger des courbes en articulant les cadres graphiques et algébriques.

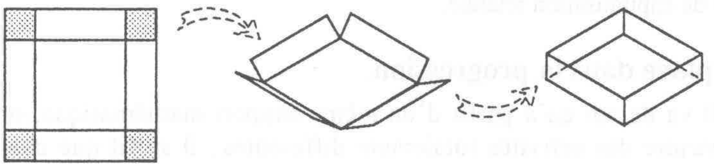
L’ouverture de l’énoncé.

Un énoncé est toujours plus ou moins ouvert. L’ouverture d’un énoncé est la marque de l’autonomie laissée à l’élève. Le degré d’ouverture est parallèle à la quantité d’informations donnée à l’élève pour le guider, informations qui peuvent soit être des indications concernant la méthode à utiliser, soit porter sur la formulation de la réponse qu’il convient de donner au problème. En cas d’absence de cette dernière, l’élève est amené à faire des conjectures.

L’énoncé d’une activité est d’ordinaire relativement ouvert, puisqu’il doit permettre une certaine autonomie de l’élève. En ouvrant ou en fermant l’énoncé fourni par un même support, le travail de l’élève change de nature.

Faut-il ouvrir ou fermer un énoncé ? Cette question ne peut trouver de réponse en dehors des objectifs que l’on se donne et du type de gestion de classe que l’on retient. Considérons par exemple l’énoncé dit de *«la boîte»* ou *«du cendrier»*, dont il existe plusieurs versions dans les brochures IREM et les manuels :

Dans une plaque carrée de 10 cm de longueur, on découpe à chacun de ses coins quatre carrés identiques puis l’on plie pour obtenir une boîte ouverte suivant le schéma suivant.



Quel doit être le côté de chacune des découpes, si l’on veut obtenir une boîte de volume maximal ?

Sur un support mathématique riche, on formule ici une question ouverte en ce sens qu' elle n’induit nullement par quelles étapes l’élève doit passer pour y répondre. Or, celles-ci sont nombreuses et la modélisation algébrique est loin d’être immédiate. Une telle forme d’énoncé peut être pertinente pour un travail de groupe: ce dernier signifie clairement aux élèves la nécessité d’investir dans un travail de recherche et leur permet d’explorer diverses pistes qui s’enrichissent les unes les autres. Par contre, cet énoncé ne peut être à retenir sous cette forme, par exemple, comme un exercice ordinaire à chercher à la maison; seuls de très rares élèves investiront le problème, il ne faudra pas s’en étonner. Il conviendrait dans ce cas d’élaborer un énoncé aux questions fermées. Pour un même support mathématique, le degré d’ouverture d’un énoncé est donc une variable à la disposition de l’enseignant.

L'enseignant peut aussi proposer, pour un même support, une **succession** d'énoncés aux degrés d'ouvertures différents.

Par exemple, l'activité *«rectangles emboîtés»* telle que présentée dans cette brochure, joue sur la diversité des méthodes de démonstration proposées par les élèves. Elle peut naturellement être suivie d'un devoir à énoncé fermé construit à partir des propositions des différents groupes et permettant à tous de s'approprier les méthodes envisagées.

A l'opposé, un devoir traité par un énoncé fermé sur le support du *«carré qui pivote dans un carré»*, peut être repris avec un énoncé totalement ouvert : «Et si la figure pivotait dans un rectangle ?». Ce réinvestissement en énoncé ouvert impose à l'élève de prendre du recul sur le travail antérieurement demandé avec l'énoncé fermé.

Les valeurs affectées aux variables mathématiques.

Les variables mathématiques sont familières aux enseignants de mathématiques. L'influence des valeurs retenues est aisément repérable dans l'activité de *«la boîte»*. Pour un côté initial de longueur c, le maximum est obtenu pour $x = c/ 6$. Si l'on veut conclure ce problème de maximum par une recherche graphique approfondie, et qui plus est, par une solution de nature algébrique, il sera beaucoup plus judicieux de choisir par exemple $c = 10$ que $c = 6$. En effet, $c = 10$ mène à une véritable recherche du maximum 5/3 puisque les valeurs 1,6 ou 1,66 ne sont pas totalement satisfaisantes, alors qu'avec $c = 6$, l'élève parvient rapidement à la certitude que 1 convient.

Les variables numériques sont les plus familières mais ce ne sont pas les seules qui soient à la disposition de l'enseignant. L'activité *«la symétrie par rapport à un cercle»* donne un exemple d'activité dont les variables ne sont pas numériques. La position de droites à transformer par rapport au centre du cercle de référence est une variable déterminante suivant que l'on souhaite ou non mener une réflexion sur l'image très problématique de ce centre.

La formulation des consignes.

Puisqu'il y a, dans un travail par activités d'infinies variantes quant à la gestion de classe, il est essentiel que l'élève soit clairement informé sur ce que l'on attend de lui. Exception faite des classes particulièrement attentives, les consignes sont données par écrit aux élèves.

Certaines consignes précisent certains aspects du **contrat** en vigueur dans la classe pour la ou les séances réservées à l'activité : travail individuel ou collectif, délais, support matériel de la production du groupe, ... éventuellement le type d'interventions du professeur, la forme de l'évaluation ...

D'autres consignes décrivent le travail à effectuer à partir du support mathématique proposé. Elles sont souvent intégrées à l'énoncé du problème. La formulation de ce type de consignes est toujours extrêmement délicat et nécessite un travail fin d'analyse a priori. Ainsi, ans l'activité *«seconde 10»*, il suffira de donner comme contrainte «les caractères doivent avoir une certaine homogénéité» plutôt que «les caractères doivent respecter les arrondis» pour modifier le degré des équations qui interviennent.

Prudence donc, nous avons observé bien des fois, qu'il suffisait de bien peu de choses au niveau des consignes pour mettre en échec l'activité prévue !

L'attribution d'une note.

«Madame, est-ce que c'est noté ?» Question éternelle qui, suivant les jours, nous fera sourire ou nous horripilera. Nous n'analyserons pas les racines profondes du rapport des élèves à la note ici, mais prendrons acte qu'il y a là un élément non négligeable dans l'investissement de ceux-ci sur l'activité proposée.

Nous avons donc, dans les classes «récalcitrantes», pris appui sur cette importance de la note pour valoriser les différents aspects du contrat mis en place. A notre surprise, le fait que la note attribuée ne soit pas exclusivement élaborée à partir des seuls éléments de savoir mathématique n'a jamais été source de conflits avec les élèves.

Parfaitement conscients des effets pervers que produit le système de notation actuel dans le rapport de l'élève au savoir, nous veillons à minimiser progressivement l'importance accordée à la note et ce, en tenant compte de la vitesse d'adaptation de chaque classe au contrats propres au travail par activités. Parvenir à une évaluation globale non notée au moment de la restitution nous semble en effet plus conforme à l'objectif d'autonomie que poursuit le travail par activités.

La répartition des phases

On pourra observer à partir des activités présentées dans cette brochure que les phases classiques : recherche, restitution, validation, capitalisation, exploitation peuvent être plus ou moins développées, voire même absentes ou encore démultipliées.

En effet, gérer le temps est une préoccupation à laquelle on ne peut échapper en situation d'enseignement. Il sera par exemple possible par un soutien sur d'éventuels obstacles secondaires d'économiser du temps et ainsi d'en libérer pour mieux remplir la fonction essentielle attribuée à l'activité.

Donnons en pour exemple l'activité *«un maximum pour le promoteur»* qui revient à chercher la position d'un rectangle d'aire maximale inscriptible dans un triangle. Une gestion de classe possible est de proposer trois phases de recherche distinctes, chacune suivie d'une restitution :
- La première assure la dévolution du problème, le problème du professeur devenant, par ce temps, celui de l'élève. «Par de simples observations, constructions et réflexions sur la figure, peut-on dire pour quelle position du point P l'aire du rectangle est maximale ?»
- La deuxième, sous la forme d'un questionnement comportant de multiples indications, permet de déterminer l'expression algébrique de l'aire du rectangle.
- La troisième pose à nouveau, par un énoncé totalement ouvert, la question de l'aire maximale.

On peut donc, au cours d'une même activité, faire se succéder, pour la phase de recherche, des phases à énoncé ouvert et d'autres à énoncé fermé. Mais un tel fonctionnement nécessite un travail précis d'analyse a priori lié aux objectifs. De plus, le contrat qui gère chacune des phases doit être clairement perçu par les élèves.

La part d'intervention du professeur.

Dans un travail par activités, le rôle du professeur comme détenteur du savoir,, va se trouver plus ou moins gommé. Suivant l'activité, l'enseignant peut soit se taire totalement, doit intervenir ponctuellement, uniquement sur un ou des points clairement précisés aux élèves. Ce nouveau rôle rompt avec le contrat ordinaire. Il est à la fois difficile à tenir pour l'enseignant habitué à révéler son savoir face à tout obstacle, et difficile à accepter pour les élèves habitués à attendre la révélation.

Si interventions auprès des élèves il y a, elles doivent être ciblées, c'est-à-dire ne répondre qu'à certaines préoccupations. Elles peuvent porter sur un aspect secondaire, par exemple sur les difficultés liées aux racines carrées dans l'activité *«comparaison d'aires»*. Mais au moment opportun, des aides individualisées permettant aux élèves de franchir l'obstacle essentiel visé par l'activité peuvent aussi avoir lieu. L'enseignant sera alors très attentif à ce que ses interventions ne court-circuitent pas la confrontation essentielle de l'élève à l'obstacle, ce qui s'impose par exemple, dans le passage d'une «démarche à tâtons» à la démarche algébrique pour l'activité *«seconde 10»*.

L'enseignant a aussi la possibilité de choisir des moments judicieux, en particulier lorsque la démarche s'essouffle pour proposer à l'ensemble des élèves des **bilans intermédiaires** de recherche. Ceux-ci mèneront certains élèves à un regard nouveau et les inciteront à reprendre leur recherche avec un autre point de vue.

La demande d'un bilan intermédiaire peut aussi être pertinente lorsque le travail s'étend sur plusieurs séances. Il est établi à la fin d'une séance, il s'adresse au professeur et il n'est pas indispensable qu'il soit communiqué à toute la classe. Il permet à chaque groupe de retrouver son unité, de mesurer le chemin parcouru et à parcourir, et éventuellement sert à fixer à chacun la recherche à effectuer en dehors des «cours».

Le professeur assure en toutes circonstances la **régulation de la dynamique** de classe escomptée, en particulier, il veille lors d'un travail de groupe à ce que chacun soit investi dans le travail proposé. Certaines interventions pourront de ce fait porter sur les comportements, en dehors de tout savoir mathématique.

Le travail de groupe et le travail individuel.

Le travail en petits groupes constitués de 3 ou 4 élèves est le levier de nombreuses activités. Il est fondamental lorsque l'on veut prendre appui sur des différences de conceptions ou de démarches, ou sur une complémentarité lors de calculs et figures multiples, ou encore si l'on veut augmenter la chance de faire émerger une idée nouvelle. Le groupe est un lieu de communication, il impose la formulation des idées et la confrontation de celles-ci, il opère un véritable contrôle sur les productions des élèves qui le constituent.

Mais la mise en place d'un travail de groupe peut être lourd : salle petite, effectifs surchargés, tables peu mobiles, élèves agités. Est-il vraiment indispensable ? Peut-on se contenter de regroupements plus informels ? Un travail spontané avec le voisinage immédiat ne peut produire les mêmes effets qu'un travail en groupes structurés ; il faut donc bien mesurer, en fonction de l'objectif assigné à l'activité, le bénéfice à adopter un fonctionnement par groupes.

Le travail de groupes peut même pour certaines phases d'une activité être néfaste, un travail en binômes ou individuel peut lui être préférable. Ici encore, une analyse a priori s'impose. Ainsi l'émergence de ce que pourrait être *une symétrie par rapport à un cercle* gagne à être menée par une réflexion collective. Par contre, la construction de l'image d'une figure donnée par une symétrie par rapport à un cercle est un travail d'exécution typiquement individuel. Toutefois, le travail à plusieurs peut être conçu comme la «sommation» de productions individuelles si des figures différentes sont données au départ.

Des temps individuels, en l'absence de toute communication, ont un rôle essentiel dans de nombreuses activités. D'une part, sous l'aspect gestion de la mémoire : en début d'activité pour rappeler un savoir antérieurement acquis ou, en fin d'activité pour charger en mémoire les savoirs nouvellement rencontrés. D'autre part, ce temps individuel est essentiel pour que chaque élève s'approprie l'énoncé. Laisser le temps à chaque élève, quelque soit son niveau ou son rythme, de «se brancher» sur le problème et d'envisager une piste de réponse personnelle est indispensable si l'on veut s'assurer de l'appropriation du problème par l'élève et espérer une confrontation de points de vue différents.

Le support matériel des productions de groupes.

La production commune à tous ses membres est un élément incontournable du travail de groupe. La production commune impose une confrontation des points de vue et oblige à une synthèse des recherches effectuées. Par ailleurs, celle-ci permet au groupe de manifester son identité.

Cependant l'exigence d'une production commune pose le problème de l'absence de trace individuelle sur le «cahier» de l'élève. Nous cherchons actuellement des solutions à ce problème.

Les productions des différents groupes peuvent s'effectuer sur divers supports : prendre la forme d'affiches, de transparents ou de copies. La forme retenue est en lien direct avec le type de restitution envisagée, chacune ayant sa spécificité.

Différentes formes de restitution.

Quelque soit le support adopté, la restitution veille à valoriser les productions de chacun des groupes. L'enseignant sélectionne les résultats à exploiter et leur ordre de présentation. Il «orchestre» la mise en commun et dynamise les éventuels débats. Son rôle est alors celui d'un animateur.

En tenant compte du support imposé pour la production des groupes, certaines formes de restitution sont à notre disposition.

➡ **L'exposé oral au tableau.**

Il a l'avantage d'être matériellement peu exigeant : un tableau, des traces écrites du travail de chaque groupe. Mais celui-ci n'est pas adapté à toute classe et toute activité. Il nécessite que les élèves s'expriment aisément et s'écoutent avec intérêt et que les résultats mathématiques ne soient pas trop fastidieux à écrire. Par exemple dans une classe au profil S, l'activité *«seconde...»* ainsi restituée aura été intéressante par l'interaction entre les exposants et la classe.

➠ **Le commentaire d'affiches.**

Cette forme de restitution est particulièrement adaptée à un faible effectif: les élèves peuvent lire tous ensemble ce qui est écrit sur une même affiche et par là même les réactions peuvent être coordonnées, la lecture consécutive de quatre ou cinq affiches reste tout à fait supportable. La gestion devient beaucoup plus lourde pour un effectif ordinaire de classe entière. L'énorme avantage de cette forme de restitution est de permettre une étude comparative des diverses productions puisque toutes peuvent être consultées en permanence. De plus, par simple affichage, il est possible de revenir aux productions des élèves sur plusieurs séquences d'enseignement.

➠ **La présentation de transparents.**

Elle convient parfaitement à une restitution en effectif lourd ; mais en fonction de l'ordre de présentation envisagée, une sélection préalable des productions doit être faite. Pour une recherche donnant lieu à peu de traces écrites, les transparents peuvent avoir été élaborés directement par les élèves. Si celles-ci sont plus complexes, à partir des copies, l'enseignant photocopie lui-même sur transparents les éléments exploitables.

➠ **La fiche de parcours.**

La fiche de parcours est construite par l'enseignant à partir des copies rendues par les divers groupes. Par une succession de questions précises, elle permet à l'ensemble des élèves de travailler sur les diverses pistes explorées pendant la recherche. Elle a l'avantage de permettre un travail approfondi et d'être gérable dans les classes turbulentes où les restitutions orales sont difficiles. En revanche, elle nécessite un gros travail d'élaboration de la part du professeur et peut engendrer un certain désintérêt chez les élèves peu habitués à un travail approfondi. L'activité *«seconde 10»* propose cette forme de restitution.

Le type de capitalisation retenue.

Cette phase est essentielle si l'on veut que le travail effectué au cours de l'activité mène à une avancée globale de la classe en fournissant des savoirs ou savoir-faire, ultérieurement exploitables. Il s'agit donc d'enrichir le patrimoine mathématique commun.

La nature de l'activité donne lieu à des formes de capitalisation différentes:

➠ **L'institutionnalisation.**

L'activité *«de la moyenne à l'écart-type»* conduit à définir sous forme de «cours» un nouveau savoir en statistiques. L'activité *«vecteurs»* invite à reformuler les savoirs énoncés en troisième. Le savoir mathématique alors en jeu n'est plus celui de l'élève mais est présenté comme celui de l'institution : on dit classiquement, qu'il a été institutionnalisé.

➠ **La fiche individuelle de «bilan mathématique».**

Cette fiche est centrée sur les **mathématiques pratiquées** au cours de l'activité.

L'activité *«seconde 10»* permet à l'élève de travailler sur le rôle des équations et l'utilisation des valeurs exactes et approchées ; une institutionnalisation ne peut donc convenir. On proposera plutôt à l'élève un temps pour centrer son attention sur les savoir-faire qu'il a lui-même utilisé au cours de l'activité. Les questions auxquelles il doit répondre sur une fiche individuelle, l'oblige à faire ce travail et laisse une trace personnelle du savoir-faire acquis.

➠ **La rédaction d'une «copie» personnelle.**

L'activité des *«rectangles emboîtés»* propose de multiples gestions de classe prenant cette forme dans la perspective de capitaliser la recherche et la mise en commun effectuées. Ce peut être la rédaction de la solution la plus satisfaisante pour chacun, ou la rédaction de celles que son groupe de recherche n'avait pas envisagées. Le travail de capitalisation peut aussi prendre la forme d'un «devoir» : reprise de l'ensemble des solutions soit en réponse aux questions fermées posées par le professeur, soit, pour un autre public, en supposant une légère modification de la situation mathématique de départ.

➠ **Le questionnaire «pratique des mathématiques».**

Un tel questionnaire permet aux élèves de réfléchir sur **leur pratique des mathématiques** au cours de l'activité.

Parce qu'il y a souvent rupture avec ce que sont les pratiques antérieures des élèves en cours de mathématiques, prendre le temps d'interroger les élèves sur «leur vécu» durant telle ou telle activité, nous paraît tout à fait bénéfique. Ce temps permet aux élèves de libérer sereinement les tensions qui ont pu s'accumuler au cours de l'activité et incite l'enseignant à adapter sa **gestion de classe** lors d'activités ultérieures.

Par ailleurs, la reconnaissance d'une autre forme de travail est déterminante pour l'évolution des **représentations** qu'ont les élèves de mathématiques ... et par suite, de leurs compétences.

➠ **La synthèse en termes de méthodes.**

Certaines activité comme *«les rectangles emboîtés»* se prêtent particulièrement à une capitalisation en termes de méthodes à retenir, dans le cas présent pour prouver ou infirmer l'alignement de trois points.

Plus difficile à mettre en œuvre, un temps de réflexion, qui oblige l'élève à repérer son fonctionnement intellectuel propre au cours de l'activité, peut être riche quand il est mis en relation avec un **enseignement de méthodes**. Ce type de travail rejoint ce qui peut être proposé à l'occasion de narrations de recherche (en particulier, voir à ce sujet les productions de l'IREM de Montpellier).

Tout un travail de capitalisation, tant dans les registres mathématiques que **méta**mathématiques (au sens de A.Robert(4)) est donc possible. Il se trouve bien évidemment renforcé par un temps d'exploitation directe de l'activité ou par de nouvelles activités de réinvestissement ... aux possibilités de gestion de classe infinies.

Conclusion.

Souhaitons que ces activités permettent aux élèves de devenir «acteurs» du cours de mathématiques et que par cette connivence les mathématiques prennent sens pour quelques élèves de plus.

Pour une trentaine d'entre eux, j'ai forgé et disséqué quelques activités.

Avec Céline, Jamela et Tony, je me suis réjouis.

Pour Djamel, Christophe et Carlos, il nous reste encore beaucoup à faire...

Rouen, au terme d'une année scolaire, juillet 1992.

(4) Aline ROBERT : *Cahier DIDIREN* n°4, juin 1989.

LES ACTIVITÉS

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Notes personnelles

LES RECTANGLES EMBOÎTÉS

Isabelle GESLIN
Stagiaire IUFM de Rouen
(2ème année)

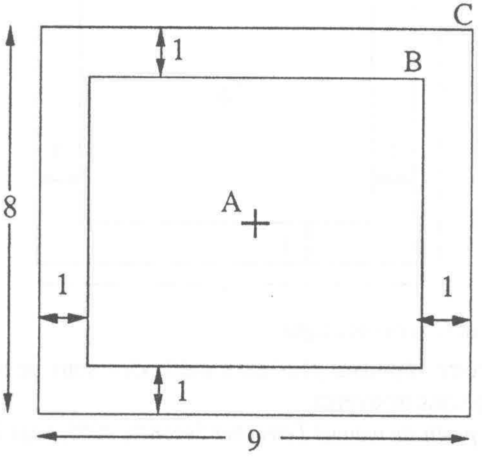
1

Objectif principal de l'activité :

Faire en sorte que les élèves rassemblent tous les outils qu'ils possèdent pour démontrer, dans un situation donnée, le non-alignement de trois points.

Le problème :

Les points A, B et C sont-ils alignés ?



Fonctionnement :

L'activité se déroule sur deux séquences. Les élèves travaillent par groupes et exposent ensuite leurs méthodes. Prévoir 1 h 30 à 2 h 30.

De multiples variantes sont envisageables quant à l'exploitation ; en particulier, un travail spécifique sur la démonstration est possible.

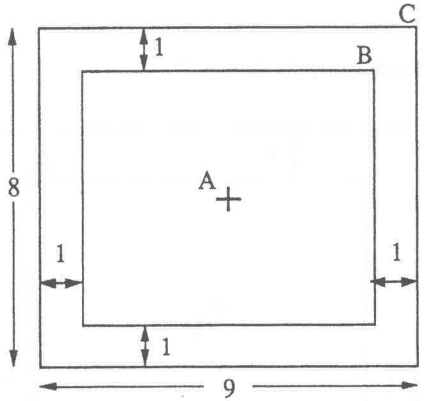
DESCRIPTION DÉTAILLÉE DE L'ACTIVITÉ

Objectif de l'activité :

- Faire émerger les différentes méthodes connues par un élève de seconde pour résoudre un problème d'alignement.
- Réinvestir des connaissances des classes de troisième et de seconde.
- Décloisonner le programme de seconde.

L'énoncé :

On considère un rectangle dont les côtés mesurent 8 et 9 cm. On construit un second rectangle à l'intérieur du premier, comme ci-dessous. A est le centre commun des deux rectangles.



Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Pour justifier votre réponse, plusieurs méthodes sont possibles. Exposez toutes celles que vous trouverez.

(Enoncé adapté à partir du manuel Terracher Seconde, 1986, page 210)

Situation dans la progression de la classe :

Cette activité peut avoir lieu à différents moments par rapport à la progression. Si l'on veut qu'un maximum de méthodes puisse être utilisées, il faut avoir traité les chapitres «Géométrie analytique» et «Homothéties».

On peut aussi envisager cette activité sans l'outil homothétie, l'exercice pouvant être repris à l'occasion de ce chapitre.

Scénario :

- La classe de seconde est réunie pour une séance de 2 heures.
- Les élèves sont répartis par groupes de 2 à 4 élèves par affinité.
- Chaque élève reçoit l'énoncé et la figure en dimension réelle photocopiés (l'alignement y est discutable).
- Pendant 5 minutes, chacun réfléchit au problème, en silence.
- Pendant 1 h 10, les élèves travaillent par groupes, recherchent des méthodes de solution. Chaque groupe rédige un compte-rendu des solutions trouvées.
- Pendant 45 minutes, successivement, 5 groupes exposent au tableau l'un solutions du problème.
- Les cinq méthodes proposées (parmi les sept possibles), recopiées sur un transparent, sont étudiées et comparées en classe entière lors de la séquence suivante.

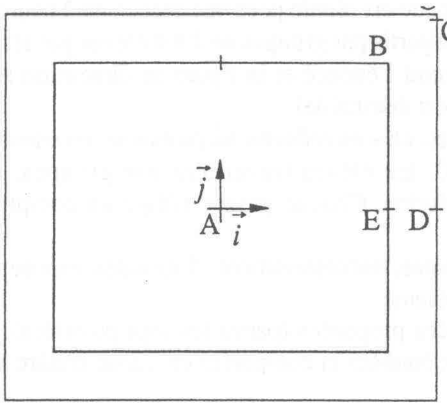
Consignes :

- Chaque groupe débat des méthodes de résolution et rédige au fur et à mesure toutes les méthodes trouvées.
- Le professeur n'intervient pas pendant la phase de recherche.

Raisons du choix de l'énoncé :

- Ce problème a l'avantage de posséder plusieurs procédures de résolution.
- Il permet
    - de réinvestir des connaissances
    - de comparer différents outils
    - d'apporter un regard transversal au programme de seconde.
- Il impose la démonstration comme outil de preuve : l'alignement ou le non alignement des 3 points étant incertain d'après la figure, pour se convaincre de l'un ou de l'autre, on doit le démontrer. On remarquera que les dimensions de la figure (8, 9, 1) ont été choisies précisément pour obtenir cette incertitude.
- Le texte est sobre, aucune indication n'est donnée. Chaque groupe doit prendre des initiatives afin de mettre en œuvre, après conjecture, les méthodes de démonstrations de son choix.
- Dans la mesure où l'on demande plusieurs méthodes, ce problème laisse une place aux élèves faibles et est ainsi adapté à l'hétérogénéité.

Procédures de résolution du problème :



1) Par la colinéarité.

Dans le repère orthonormé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3,5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4,5\\4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3,5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4,5\\4\end{pmatrix}$

$3,5 \times 4 - 3 \times 4,5 = 0,5 \neq 0$ donc, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B et C non alignés.

2) Par les équations de droites.

Dans le même repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ que ci-dessus, on montre que (AB) et (AC) sont non confondues.

$y = \frac{3}{3,5}x$ *et* $y = \frac{4}{4,5}x$ sont les équations réduites respectives de (AB) et (AC). Leurs coefficients directeurs étant différents $\left(\frac{3}{3,5} \neq \frac{4}{4,5}\right)$ les droites (AB) et (AC) ne sont pas confondues, et les points A, B et C ne sont pas alignés.

***3) Par comparaison des longueurs* AB + *AC* et *AC*.**

Dans le triangle ABE, appliquons le théorème de Pythagore :

$AB^2 = AE^2 + EB^2$ d'où $AB = \sqrt{21,25}$.

D'autre part BC = $\sqrt{2}$ et AC = $\sqrt{36,25}$
donc AB + BC ≈ 6,0239 et AC ≈ 6,0207.
Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

4) Par comparaison des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{DAC}$

$\tan \widehat{EAB} = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{3}{3,5}$ et $\tan \widehat{EAB} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{4}{4,5}$ or, $\dfrac{3}{3,5} \neq \dfrac{4}{4,5}$ donc

$\widehat{EAB} \neq \widehat{DAC}$ et les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Par comparaison des aires.

L'aire du triangle AEB est : $\dfrac{3,5 \times 3}{2} = 5,25 \text{ cm}^2$

L'aire du trapèze BEDC est : $\dfrac{(4 + 3) \times 1}{2} = 3,5 \text{ cm}^2$

Par suite, l'aire du quadrilatère ADCB est de 8,75 cm^2.

Or, l'aire du triangle ADC est : $\dfrac{4,5 \times 4}{2} = 9 \text{ cm}^2$.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

6) Par comparaison des longueurs DC' et DC.

Soit C' l'intersection des droites (AB) et (CD).
On sait que DC = 4.
Appliquons le théorème de Thalès au triangle AC'D pour trouver DC' :

$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DC'}{EB}$ d'où $DC' = \dfrac{3 \times 4,5}{3,5}$, or, $4 \neq \dfrac{3 \times 4,5}{3,5}$.

Les points C et C' ne sont pas confondus, et les points A, B et C ne sont pas alignés.

7) En utilisant une homothétie.

Si A, B et C étaient alignés, il existerait une homothétie de centre A qui transformerait B en C. Elle transformerait tout rectangle de centre A en un rectangle de centre A et conserverait les proportions entre longueur et largeur.

Or, les rapports des distances $\dfrac{9}{7}$ et $\dfrac{8}{6}$ sont différents. Les rectangles donnés dans la figure initiale ne peuvent être liés par un agrandissement de centre A.

Il n'existe donc pas d'homothétie de centre A qui transforme B en C.
Par suite, les points A, B et C ne peuvent être alignés.

Explicitation du choix des différentes étapes du déroulement de l'activité :

- La phase de réflexion individuelle permet à chacun de s'approprier le problème et de se faire une idée sur l'alignement des points.
- Le travail de groupe permet ensuite aux élèves de confronter leurs idées et de chercher ensemble des méthodes de résolution.
- Les productions des groupes examinées à la fin de la phase de recherche par le professeur permet à ce dernier d'envisager le passage des groupes au tableau.
- L'exposé au tableau des solutions par 5 groupes (des 5 méthodes proposées) permet de ramener le débat à la classe.

Les élèves peuvent critiquer la proposition de leurs camarades qui doivent alors se justifier.

- La non intervention du professeur pendant la phase de recherche oblige les élèves à se prendre en charge et à ne pas attendre la validation des résultats par le professeur.

Compte rendu d'une utilisation de cette activité :

Cette activité s'est déroulée dans une classe de seconde hétérogène de niveau moyen, composée de 27 élèves (le faible effectif a permis de travailler en classe entière).

Elle a été proposée juste après avoir traité le chapitre «géométrie analytique». Les «homothéties» avaient déjà été abordées mais aucun rappel de trigonométrie n'avait été fait.

Déroulement de la séance et description des productions des groupes.

Les élèves ont été motivés par la recherche.

Seul un groupe a dû être mis sur la voie par le professeur. En effet, la figure distribuée, bien que reconnue comme imprécise, était considérée comme faisant preuve de l'alignement des points. En conséquence, c'est la démonstration du non alignement qu'ils avaient trouvée qui était considérée comme erronée.

Après 1 h 15 de travail, les exposés ont été rendus au professeur. Celui-ci a pu constater que chaque groupe avait au moins trouvé la méthode qui consiste à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Deux groupes en sont restés là. Trois groupes ont abordé cinq méthodes.

La méthode qui utilise une homothétie a été abordée par peu de groupes et peu développée, le raisonnement qui consiste à définir une homothétie n'étant pas acquise dans la classe.

L'exposé des productions des élèves par eux-mêmes a permis à chacun d'avoir une vue sur les cinq méthodes proposées et d'insister sur la rédaction de ces démonstrations. On trouvera en annexe 1 quelques-unes de celles-ci.

Analyse des écarts entre ce qu'ont fait les élèves et ce qui était attendu.

Les élèves ont eu beaucoup d'idées d'outils, mais ils ont eu tendance à ne pas accorder d'importance à la rigueur des démonstrations et à la rédaction, leur but étant de trouver le plus de méthodes possible. Il serait donc nécessaire d'insister sur l'importance de la rigueur de leur production.

Capitalisation par les professeur du travail de production des élèves.

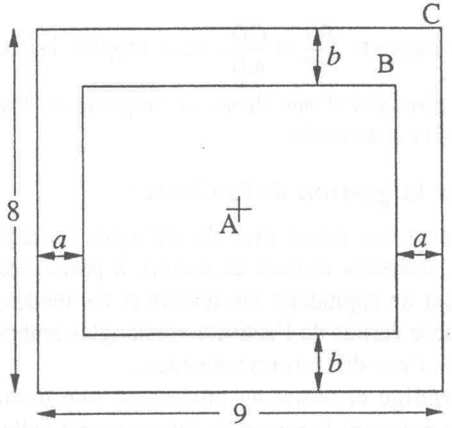
La capitalisation a consisté en un bilan des outils connus en classe de seconde et utilisés pour résoudre un problème d'alignement.
Un rappel des connaissances nécessaires à l'utilisation de l'homothétie a été fait.
Après avoir remarqué que les méthodes de comparaison des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{DAC}$ et des droites (AB) et (AC) se ramenaient à la comparaison des deux mêmes rapports $\frac{EB}{AE}$ et $\frac{CD}{AD}$, on a rappelé la corrélation existant entre coefficient directeur d'une droite et tangente de l'angle formé entre l'axe des abscisses et cette droite.

Variantes pour la gestion de la classe :

Ce problème peut être utilisé avec de multiples variantes quant à la gestion de la classe. Diverses formes de travail, à partir des productions des groupes, permettent de capitaliser les savoirs et les méthodes et fournissent aux élèves des traces écrites de l'activité «rectangles emboîtés». La capitalisation peut prendre l'une des formes suivantes :

- Chaque élève **rédige** et remet au professeur une démonstration par la méthode qui lui convient le mieux, à choisir parmi celles que son groupe n'avait pas envisagé.
- Dans le cadre d'un enseignement structuré autour de l'**enseignement de méthodes**, chaque élève complète une fiche «comment démontrer que 3 points sont alignés».

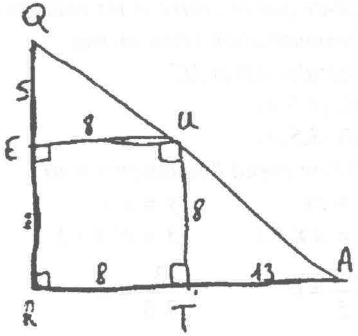
- A partir des démarches proposées par les différents groupes, l'enseignant construit un **devoir** à la maison. L'élève peut ainsi s'approprier chaque démarche. L'énoncé extrêmement **fermé**, proposé en annexe 2, a ainsi été construit pour une classe de seconde où de nombreux élèves étaient en grande difficulté.
- La restitution de ce problème peut aussi conduire à un travail sur la démonstration. On peut demander à chaque groupe d'étudier un **plan de raisonnement** pour chacune des démarches étudiées, et à chaque élève de rédiger chacun de ceux-ci. On trouvera à l'annexe 3 des exemples de productions d'élèves mettant en évidence le type de difficultés que rencontrent certains élèves dans ce genre de travail.
- Dans une classe concluant majoritairement à l'alignement des trois points et proposant plusieurs «démonstrations» de l'alignement dans chacun des groupes, le travail peut porter sur la recherche du type d'erreurs de raisonnement à partir d'une **typographie d'erreurs** proposée par le professeur. (voir annexe 4).
- Ce travail sur les différentes méthodes peut ainsi être relayé par la rédaction d'un **devoir** qui propose le même énoncé à partir de **2 carrés** ayant même centre et des côtés respectivement parallèles de 8 cm et 6 cm.
- Signalons encore un prolongement possible par cette **nouvelle question** qui interroge chacun des méthodes et souligne la pertinence de l'outil «homothétie».



On considère 2 rectangles ayant même centre, des côtés respectivement parallèles, et des mesures comme indiquées sur la figure ci-contre.
Comment faut-il choisir a et b pour que les points A, B, C soient alignés ?
(On pourrait donner cet énoncé avec a ou b fixé...)

- Dans la même veine, nous renvoyons enfin à un problème proposé par J.F.Zuchetta à paraître dans le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P.

Le dessin ci-contre est un dessin à main levée.
Les dimensions sont données en cm.
Que peut-on dire des points Q, U, A ?
J'ai trouvé 3 méthodes. Qui dit mieux ?

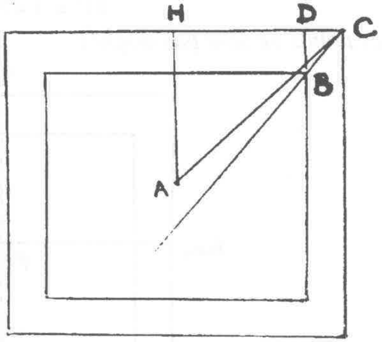


Toutes ces variantes dans la gestion de classe élaborées pour capitaliser le travail de groupes, soulignent la marge de manœuvre que possède l'enseignant pour proposer un enseignement qui lui soit personnel et qui prenne en compte le public auquel il s'adresse.

Annexe 1 :
Quelques productions de groupes

Exemple 1 .

On utilise la trigonométrie.



$\widehat{BCD} = 45°$

$tg\ \widehat{ACH} = \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{4}{4,5}$ *donc* 41°.63

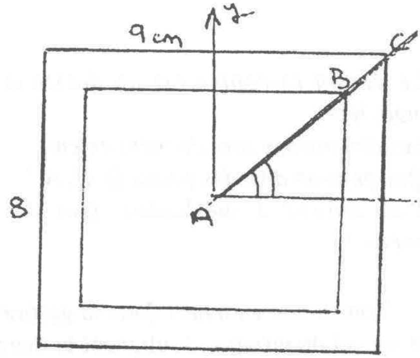
Donc les points ne sont pas alignés.

Exemple 2.

Avec les équations
Est-ce que le centre et les coins sont aligné ?
Démonstration selon un axe :
Calculer AB et AC
AC (4.5;4)
AB (3.5;3)
Si l'on prend l'équation y = ax.

$y = ax$	$y = a'x$
$4 = a \times 4.5$	$3 = a' \times 3.5$
$\frac{4}{4.5} = a$	$\frac{3}{3.5} = a'$
$0.888\ldots = a$	$0.8571428\ldots = a'$

Conclusion :
Ils ne sont pas alignés.



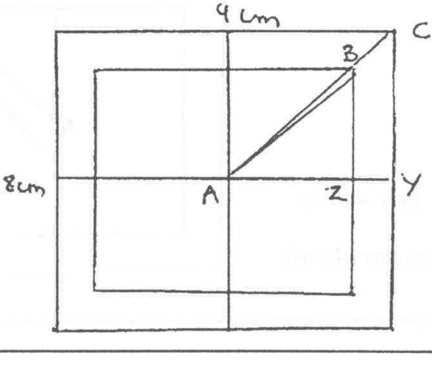
Exemple 3.

Résolution du problème par Pythagore.

$AY^2 + CY^2 = AC^2$	$AZ^2 + BZ^2 = AB^2$
$20.25 + 16 = AC^2$	$12.25 + 9 = AB^2$
$36.25 = AC^2$	$21.25 = AB^2$
$AC = 6.02$	$AB = 4.6$

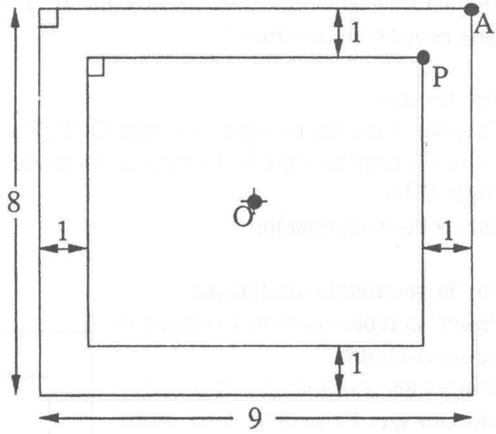
S'ils étaient aligés $BC = AC - AB$
$BC = 1.42$

Les points ne sont pas alignés.



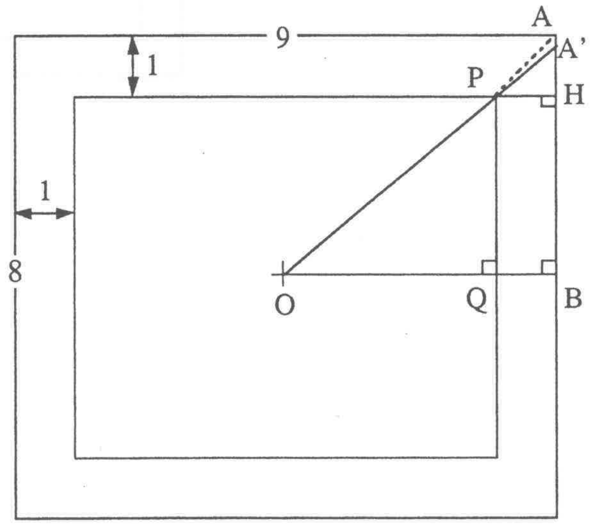
Annexe 2 :
Devoir fermé en reprise du problème ouvert.

On considère la figure ci-contre.
On cherche à montrer que les points O, P, A ne sont pas alignés.



Voici plusieurs démonstrations possibles :

Par le théorème de Thalès.
Appelons A' l'intersection de (OP) et (AB), comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer A'B.
Comparer A'B et AB.
Que peut-on conclure ?



Par le théorème de Pythagore.
Appelons H le pied de la perpendiculaire issue de P sur (AB), comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer OP, OA et AP.

Comparer OP + PA et OA. Que peut-on en conclure ?

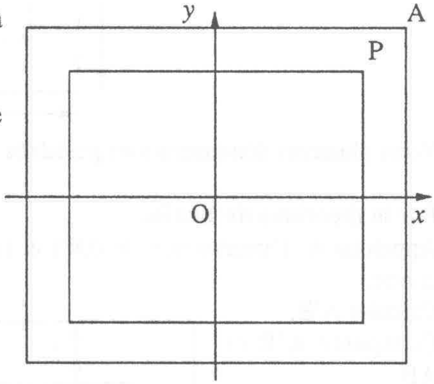
Par la trigonométrie.

Calculer $\tan \widehat{POQ}$ et $\tan \widehat{AOB}$.

Donner en degrés une valeur approchée de $\widehat{POQ}$ et $\widehat{AOB}$ à 10^{-1} près.
Que peut-on en conclure ?

Par les aires.
Calculer l'aire du triangle rectangle OQP, l'aire du triangle rectangle OAB, l'aire du trapèze PQBA. Comparer l'aire du quadrilatère OBAP et du triangle OBA.
Que peut-on en conclure ?

Par la géométrie analytique.
Placer un repère comme l'indique la figure ci-contre.
Donner les coordonnées de A et P.
Montrer que l'équation de la droite (AP) est $y = x - \dfrac{1}{2}$.
Que peut-on en conclure ?

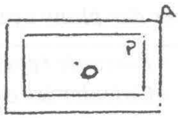


Annexe 3 :
Plans de raisonnement.

Le travail demandé aux élèves.

Pour chacune des méthodes de démonstration proposées par la classe, vous faites le plan de raisonnement qui permet de conclure sur l'alignement. Attention, chaque étape du raisonnement doit correspondre à une activité qui vous est bien connue.

Exemple : Plan de raisonnement utilisant les équations de droites.
- Placer le repère en O.
- Donner les coordonnées de A et P.
- Ecrire l'équation de (AP), droite passant par deux points de coordonnées connues.
- Chercher si O est un point de la droite (AP).
- Conclure :
  ✱ Si O n'est pas sur cette droite, les points O, A, P ne sont pas alignés.
  ✱ Si O est sur cette droite, les points O, A, P sont alignés.

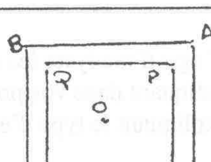


Consigne :
1) Vous travaillez les plans de raisonnement par groupe. Lorsque vous vous êtes mis d'accord sur un plan de raisonnement, vous pouvez voir avec le professeur s'il convient.
2) Vous rédigerez chez vous, des plans de raisonnement pour chacune des méthodes que la classe a trouvées.

Exemples de productions d'élèves.(erronés, intéressants à retravailler).

Un plan de raisonnement intéressant à étudier quant à l'ordre des étapes à effectuer.

- Placer les points Q et B
- Calcul de OP par $OP^2 = PQ^2 + OQ^2$
- Puis le calcul de OA par $OA^2 = OB^2 + AB^2$.
- Chercher si OP + PA = OA.
- Calcul de AP par $AP^2 = AH^2 + PH^2$.
- H = la hauteur du triangle.
- Conclure
- Si OA est différent de OP + AP donc les points O, P et A ne sont pas alignés.
- Si OA est égal à OP + OA donc les points O, P et A sont alignés



Un plan de raisonnement conduisant à travailler avec l'élève, sur les éléments essentiels à l'articulation d'un raisonnement.

- Placer le repère en O
- Ecrire la formule de phytagore
$OQ^2 + QP^2 = OP^2$.
- Chercher si $OP + PA = OA$
- Conclure - Si OAP sont alignés
- Si OPA ne sont pas alignés.

Un plan de raisonnement soulignant les difficultés de certains élèves à proposer des plans ayant une cohérence.

- Placer le repère en O
- Calculer les droites (OP), (OA), et (OP)
- chercher si le triangle OAP est rectangle
- En conclure que le triangle est rectangle (OA) et (OP).

Annexe 4 :
Typologie d'erreurs.

Voici certains **types d'erreurs de démonstration :**

1. Se contenter de **voir** sur la figure. (ceci se repère par les mots clefs : «on constate que», «on voit que», «on mesure» ...)
2. **Ne pas justifier** une étape.
3. Utiliser **ce que l'on veut démontrer.**
4. **Inventer** des théorèmes ou des propriétés qui nous arrangent.
5. **Mal appliquer** une connaissance.

Il va s'agir d'analyser les erreurs contenues dans vos démonstrations :
- en indiquant dans vos productions, à quel moment apparaissent vos erreurs.
- en expliquant le type d'erreur faite.

Exemple de type 1 étudié collectivement :

«Avec les triangles rectangles je trouve que les points A, B et C ne sont pas alignés car les angles de C ne sont pas les mêmes pour les points vers B et C.»

Scénario :

- Le professeur répartit les démonstrations élaborées au cours du travail de groupe, de sorte que chacun travaille sur une démonstration proposée par son propre groupe.
- Il donne aux élèves les **consignes** suivantes :

  Faire un travail individuel

  Coller le texte de la démonstration que le professeur vous a remis sur une feuille.

  En faire la critique.

  Remettre une production écrite dans 15 minutes.
- Le professeur corrige lui-même ces «copies».
- Il pointe quelques erreurs comme «erreurs de référence». Il s'y référera à chaque occasion possible au cours de l'année.

Exemples de type 3 :

«Tout rectangle inscrit a le même centre mais n'a pas les mêmes diagonales donc les points A, B et C ne sont ***pas alignés*** *car ils ne sont pas sur la même diagonale».*

«Comme il y a réduction du rectangle (1 cm de chaque côté), et leur centre est confondu, alors on peut dire que les diagonales sont superposées, alors les points A, B et C sont sur la même droite, donc ***alignés.****»*

Exemple de type 5 :

«Pour démontrer que A, B, et C sont alignés, démontrons que $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires donc il faut démontrer qu'il existe un réel k tel que* $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Utilisons le théorème de Pythagore pour connaître les mesures de AC et AB.

$AC^2 = CD^2 + DA^2 = 36{,}25$ $\quad$ $AB^2 = 21{,}25$

$AC = \sqrt{36{,}25} \approx 6$ $\quad$ $AB = \sqrt{21{,}25} \approx 4{,}6$

$k = \|\overrightarrow{AC}\| : \|\overrightarrow{AB}\| = 1{,}3$ *donc* $\overrightarrow{AC} = 1{,}3\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires, donc A, B, C sont alignés».*

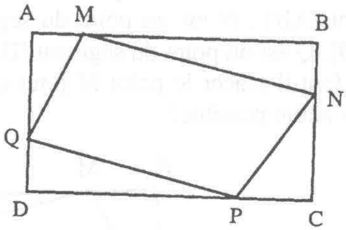
Notes personnelles

LE QUADRILATÈRE QUI TOURNE

Gilles GERMAIN - Jean-François ZUCCHETTA
Groupe Lycée
IREM de LYON

Énoncé du problème :

Où faut-il placer le point M sur le segment [AB] pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible ?



Objectif principal :

Permettre aux élèves de percevoir que la notion de fonction sous l'aspect algébrique est un outil qui a de l'intérêt (qui est indispensable) pour la résolution du problème posé.

Situation dans la progression :

Cette activité est proposée avant tout travail explicite sur la notion de fonction en seconde.

Capitalisation possible :

Notion de fonction sous forme algébrique, différents types de représentations d'une fonction (tableau de valeurs, formule algébrique , graphique), utilisation de l'outil fonction pour l'étude d'un phénomène continu.

Scénario:

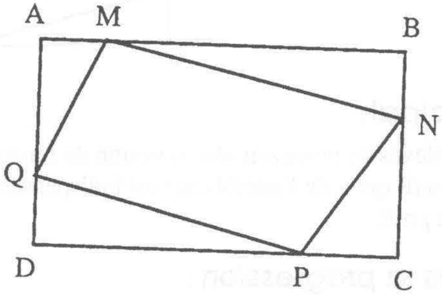
Un temps de recherche et de production en groupe de solution sur un support matériel (1h30)
Un temps de débat entre les élèves sur les productions des groupes (1h)
Un temps de capitalisation du travail des élèves (1h)
Prolongements éventuels.

LE QUADRILATÈRE QUI TOURNE

L'objectif de cette activité est d'introduire l'outil fonction sous sa forme algébrique comme moyen de résolution nécessaire d'un problème que les élèves ont à résoudre. Cet outil prenant du sens pour l'élève comme moyen de résolution de ce problème .

L'énoncé du problème :

ABCD est un rectangle. AB=6,5 cm; BC=4 cm. M est un point du segment [AB] , N est un point du segment [BC] , P est un point du segment [CD], Q est un point du segment [DA]. De plus on a AM = BN = CP = DQ. Où faut-il placer le point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible?



Pourquoi cet énoncé ?

Il s'agit de l'étude d'un phénomène continu. La réponse «évidente» après quelques minutes de recherches «M au milieu de [AB]» n'est pas la solution et elle peut être réfutée par les élèves (certains auront trouvé des aires plus petites) sans l'intervention du professeur. Tous les élèves peuvent progresser dans la recherche de la solution en choisissant par exemple diverses positions de M sur [AB] et en calculant l'aire du quadrilatère. Certains d'entre eux peuvent même obtenir par encadrement une valeur approchée. Cependant, la résolution complète de ce problème nécessite l'outil visé, c'est à dire, l'outil fonction sous sa forme algébrique (ici c'est une fonction polynôme du second degré): il permet d'être efficace pour effectuer des calculs répétitifs d'aire des quadrilatères en phase de recherche d'une réponse(conjecture) et pour prouver existence et la valeur du minimum. Les dimensions du rectangle ont été choisies pour que la bonne réponse AM=(AB+BC)/4 ne soit pas un nombre entier ni un nombre décimal simple(ici 2,625 mais on peut faire plus compliqué !) et donc ne puisse être choisi comme conjecture pour cette raison ou trouvée rapidement par tâtonnement.

Les différentes procédures de résolution (du professeur).

Il ne semble pas qu'il y ait de solution purement géométrique , c'est-à-dire, de solution qui ne nécessite pas l'introduction d'une variable. L'étude d'une fonction algébrique du second degré est un outil efficace de résolution. Si on choisit x = AM comme variable, le calcul de l'aire du quadrilatère MNPQ par différence entre l'aire du rectangle et la somme des aires des 4 triangles rectangles extérieurs aboutit à l'expression

$$A(x)=2x^2-10{,}5x+26$$

Pour trouver le minimum de cette fonction sur l'intervalle [0,4] on peut:

- utiliser la dérivée de $A(x)$, $A'(x)=4x-10{,}5$ ce qui donne $x=2{,}625$ et la valeur de l'aire minimum est égale à 12,218 75.
- mettre le trinôme sous la forme canonique:

  $$A(x)=2(x-2{,}625)^2+97{,}75/8$$

  Cette somme de 2 termes positifs étant la plus petite possible quand $x=2{,}625$.
- Si on a fait la bonne conjecture $x=2{,}625$ alors on peut montrer que $A(x)\geq A(2{,}625)$ en résolvant l'inéquation $A(x)-A(2{,}625)\geq 0$ qui, après un calcul algébrique élémentaire, se met sous la forme $2(x-2{,}625)^2\geq 0$, ce qui rend sa résolution évidente.

Remarque : Nous pensons que les deux dernières méthodes sont accessibles à des élèves de seconde: s'ils ne peuvent les trouver eux-mêmes(ce qui sera le cas pour la plupart d'entre-eux), nous pensons qu' ils peuvent en saisir le sens et l'intérêt pour ce problème après l'avoir cherché. Ce problème peut se transformer pour des élèves de première ou de terminale en remplaçant les mesures de la longueur et de la largeur du rectangle par L et l .

Scénario prévu

Première partie (1h30): après 5 à 10 minutes de ***réflexion individuelle*** pour permettre à chaque élève de rentrer dans le problème, les élèves cherchent en ***groupe de 3 ou 4*** une solution au problème, cette recherche devant aboutir à la production d'une affiche (*)sur laquelle ils devront présenter le résultat de leur recherche. Pour faciliter la lecture des affiches par tous les élèves, le

(*) ou tout autre support écrit qui peut être lu par tous les élèves de la classe, comme les transparents, par exemple.

professeur peut décider d'en harmoniser la présentation, en préparant des affiches sur lesquelles sont amorcées une ou deux phrases que les élèves devront compléter comme par exemple

> Nous pensons que le point M ....
> ....
> ....
> Pour arriver à cette réponse, nous avons ....
> ....
> ....

Le professeur, après avoir donné les consignes de travail le plus souvent écrites au tableau, précise qu'il n'interviendra pas sur la méthode, ni sur les notions mathématiques à utiliser, ni pour dire si les solutions proposées par chaque groupe sont justes ou fausses. Il précise que c'est l'ensemble de la classe qui aura à se prononcer à partir du contenu des affiches.

Deuxième partie (1h à 2h) : débat sur les productions des groupes. Le professeur ayant choisi l'ordre dans lequel les affiches seront débattues il présente la première à la classe. Chaque groupe en prend connaissance et se prononce sur la validité de la solution produite et (ou) de la démarche utilisée en produisant des arguments pour étayer son acceptation ou son refus de la solution présentée. Suit un débat entre les élèves de la classe sur les arguments écrits au tableau par le professeur. Ce débat est une phase délicate de l'activité. Pour qu'il fonctionne de manière satisfaisante, le professeur doit en fixer les règles précises de fonctionnement et veiller à leur respect. Avant de passer à une autre affiche, le professeur fait constater à la classe les accords et les désaccords restants.

Troisième partie(30 min.) : le professeur énonce la connaissance mathématique nouvelle utilisée et (ou) utile pour la résolution du problème, fait le point sur le vrai et le faux à propos des affiches, etc. Cette phase de capitalisation du travail des élèves dépend naturellement de leur production mathématique pendant la recherche, et des arguments produits pendant la phase de débat.

Que vont faire les élèves ? (analyse a priori)

Ils vont faire des figures avec différentes position du point M sur [AB] et calculer l'aire correspondante du quadrilatère MNPQ en mesurant des longueurs sur la figure. Cela va les conduire à faire des conjectures (M au milieu de [AB] ou N au milieu de [BC] etc.) qui vont être réfutées par d'autres calculs d'aires. Ils vont s'apercevoir que le tâtonnement est long et n'aboutit pas ce qui va inciter certainà chercher une méthode plus conforme à l'idée qu'ils se font des "mathématiques" ce qui va les amener à exprimer l'aire de MNPQ en fonction du choix de x = AM. L'introduction de x = AM est parfois amenée par ceux qui veulent utiliser leur calculatrice programmable pour automatiser le calcul de l'aire . La calculatrice graphique peut permettre à certains de faire la bonne conjecture mais pas de la prouver?(Dans ce cas, au cours de la phase de capitalisation, le professeur peut aborder le problème de la calculatrice comme aide à la conjecture, comme outil de preuve!!!). On peut prévoir aussi que certaines solutions vont se présenter sous la forme d'un encadrement ou bien d'une valeur approchée de la solution exacte. Si c'est le cas le professeur peut, dans la phase de capitalisation, faire une mise au point sur solution exacte et solution approchée. Si, au cours de la recherche, l'ensemble des groupes d'élèves de la classe en reste à des calculs d'aires à la main sans liens entre eux, le professeur peut organiser une mise en commun des calculs réalisés par chacun des groupes . Cela peut faire apparaître la procédure répétitive des calculs. Il est probable que cela fera surgir chez certains élèves l'idée d'utiliser une expression fonctionnelle.

Compte rendu d'une utilisation de cette situation dans une classe de seconde.

La classe est une seconde IES d'un lycée technique de Lyon. L'effectif est de 33 élèves . Les élèves n'ont pas encore abordée les fonctions ni sous forme de cours ni sous forme d'activités. Cette activité a eu lieu au mois de janvier.

La première phase s'est effectuée en demi-classe et a duré 1h30, les phases 2 et 3 en classe entière.

La consigne donnée par le professeur au début de l'activité: «Je vais vous distribuer l'énoncé et ce que je vais vous demander c'est un ***travail individuel*** d'une dizaine de minutes pour prendre connaissance de l'énoncé. Ensuite vous passerez à un ***travail en groupe***. Ce travail en groupe devra se terminer par la rédaction d'une affiche. Je vous dirais au début du travail en groupe comment vous devrez présenter l'affiche. Vous pourrez poser des question mais je resterais muet.»

Au bout des 10 minutes, le professeur reprend la parole :«Est-ce qu'il y a des questions sur l'énoncé proprement dit? Maintenant vous allez travailler en groupe et essayer de résoudre ce problème et ce que je vous demanderai ce sera de préparer une affiche et ce sera la fin du travail. Vous aurez à compléter deux phrases: la première c'est: «nous pensons que le point M...» et vous direz où vous pensez qu'il faut placer le point M et la deuxième c'est : «Pour arriver à cette réponse nous avons...». Vous avez fait des tas de choses: à vous d'expliquer ce que vous avez fait, la méthode, et chaque groupe essaye de trouver ce qu'il y a de mieux et prendra la méthode la meilleure pour la rédaction de l'affiche.»

Voici quelques exemples d'affiches produites par les élèves:

Affiche 4

nous pensons que le point M...se touve à 2,9 cm de A
Pour arriver à cette réponse, nous avons....calculé plusieurs longueurs 2,8 ;2,9 c'est le meilleur;

<u>Aire du parallélogramme MNPQ</u>

pour AM = 3 ......12,5 cm^2

pour AM = 2,8 ......12,28 cm^2 ...... $2,8 < AM < 2,9$

pour AM = 2,9 ......12,37 cm^2

Affiche 6

Nous pensons que le point M... est touvé à partir du calcul: $(L/2 + l/2)/2 = 2,625$ AM = BN = CP = BQ = 2,625

pour arriver à cette réponse, nous avons....

aire du rectangle: 6,5 x 4=26 cm^2

aire du triangle AMQ: (2,625 x 1,375)/2 = 1,804 cm^2

aire du triangle MBN: (3,875 x 2,625)/2 = 5,085 cm^2

les aires des triangles AMQ et NCP sont égales, car ils sont symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales ainsi que MBN et PDQ. Les triangles sont opposés 2 à 2;

On a 2(1,804+5,085)=13,778 cm^2

l'Aire du quadrilatère MNPQ: aire du rectangle-aire des triangles

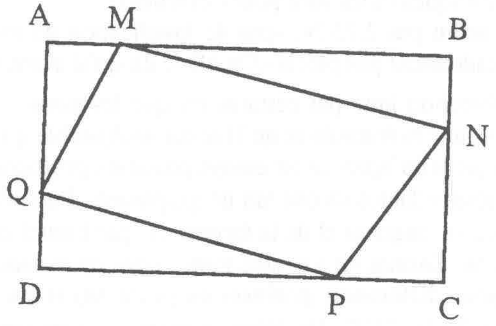
26-13,778~12,22 cm

Affiche 7

Nous pensons que le point M... se situe à 2,617 cm de A
pour arriver à cette réponse, nous avons....calculé l'équation de l'aire du quadrilatère par rapport à la longueur de AM(x)
éq : $26-(10{,}5x-2x^2)$

Affiche 8

Nous pensons que le point M... se place soit au milieu de [AB], soit à 2 cm de A représentant le milieu de [BC].
pour arriver à cette réponse, nous avons....



hypothèse :
$0 \leq x \leq 4$ N et Q ne sortant pas de leur côté initial de 4 cms de long.
$y = A_{ABCD} - [x(4-x) + x(6{,}5-x)]$

$y = A_{ABCD} - 10{,}5x + 2x^2$

On sait que dans un carré (propriété des milieux), le carré formé par les points des milieux du carré initial donne un carré d'1 demi fois plus petite que l'initial (c'est le plus petit carré que l'on peut obtenir.). Comme x est compris entre 0 et 4 les milieux de [AB] = 3,25 et de [BC] = 2 peuvent donner les quadrilatères les plus petits.

Le débat

Il a eu lieu en classe entière (31 élèves). Le professeur place au tableau l'affiche n°4. Il demande aux élèves d'en prendre connaissance de façon à ce qu'ils puissent donner leur avis sur ***la réponse*** donnée (est-elle juste ou non) et sur ***la méthode*** décrite pour l'obtenir. Ensuite il précise qu'une discussion aura lieu sur ces deux points. Les élèves qui le souhaitent donnent leur avis et le groupe auteur des explications supplémentaires ou des contre arguments. Ensuite on passe à une deuxième affiche et ainsi de suite... Elles ont été présentées dans l'ordre où elles figurent dans ce texte.

Ce qui ressort de la discussion sur chaque affiche.

Affiche n°4 : les critiques faites sont pour l'essentiel :
«pourquoi ça ne serait pas 2,75 ?», «pas de justification du mot calculé» et «on donne un encadrement pas précis».Un élève dit qu'il a trouvé mieux.

Affiche n°6 : l'objection faite par certains est que les auteurs ne disent pas comment ils ont trouvé la formule et qu'il serait souhaitable qu'ils le fassent. Les auteurs expliquent qu'après avoir essayé plusieurs positions de M et calculé les aires correspondantes ils ont fait un graphique...Puis ils ont eu l'idée de la médiatrice de la longueur et de la largeur et "par hasard on a divisé par deux et ça a marché. Ensuite on a essayé toute sortes de mesures (il s'agit de calculs d'aires pour différentes position du point M) et on a trouvé que c'était le meilleur (L/2+l/2)/2". Un élève remarque:"ils ne pourront pas me convaincre qu'ils ont trouvé la formule au hasard". Un autre dit qu'il faut expliquer le pourquoi de la formule. La réponse du groupe auteur est le défi de trouver une aire plus petite.

Affiche 7 : «Comment vous avez trouvé ?» ; «d'où sort l'équation, le 10,5 ?» «Les deux dernières affiches ne donnent pas le même résultat ?» ;«Je préfère avoir une méthode même si elle n'arrive pas au résultat plutôt qu'une formule parachutée.» Le groupe auteur explique qu'après avoir établit la formule ils ont utilisé une calculatrice graphique pour obtenir la valeur approchée.

La phase de capitalisation

Au cours de cette phase le professeur a mis en relief différents types d'affiches correspondants à différents niveaux d'abstractions et différentes qualités de réponses :

→ le fait de savoir que la réponse AM est telle que $2 < AM < 3$ apporte des informations même si intellectuellement on se sent privé d'une réponse plus

Affiche 4

nous pensons que le point M...se touve à 2,9 cm de A
Pour arriver à cette réponse, nous avons....calculé plusieurs longueurs 2,8 ;2,9 c'est le meilleur;

<u>Aire du parallélogramme MNPQ</u>

pour AM = 3 ......12,5 cm^2

pour AM = 2,8 ......12,28 cm^2...... 2,8 < AM < 2,9

pour AM = 2,9 ......12,37 cm^2

Affiche 6

Nous pensons que le point M... est touvé à partir du calcul: (L/2 + l/2)/2 = 2,625 AM = BN = CP = BQ = 2,625
pour arriver à cette réponse, nous avons....
aire du rectangle : 6,5 x 4=26 cm^2
aire du triangle AMQ : (2,625 x 1,375)/2 = 1,804 cm^2
aire du triangle MBN: (3,875 x 2,625)/2 = 5,085 cm^2

les aires des triangles AMQ et NCP sont égales, car ils sont symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales ainsi que MBN et PDQ. Les triangles sont opposés 2 à 2;
On a 2(1,804+5,085)=13,778 cm^2

l'Aire du quadrilatère MNPQ: aire du rectangle-aire des triangles
26-13,778~12,22 cm

Affiche 7

Nous pensons que le point M... se situe à 2,617 cm de A
pour arriver à cette réponse, nous avons....calculé l'équation de l'aire du quadrilatère par rapport à la longueur de AM(x)
éq : $26-(10{,}5x-2x^2)$

précise (démarche par dichotomie). Comment rationaliser une telle démarche afin de conduire, en ciblant, vers le résultat? On ne peut pas vérifier à l'aide d'exemples, si une assertion est vraie.

→ d'autre part, on peut, en ayant découvert la bonne mesure pour AM, vérifier que cette solution est la bonne. Là, si on vérifie, on est aussi intellectuellement non satisfait car cette réponse est liée à un certain facteur chance qui dépend de l'analyse faite du problème, de la culture mathématique que l'on possède ou des approches pragmatiques que l'on a faites de ce problème. les élèves découvrent une valeur mais ne peuvent pas la légitimer mathématiquement comme le ferait la forme canonique. Pour être sûr que l'aire obtenue est la bonne en étant la plus petite (en admettant que l'on connaisse sa valeur), il ne reste plus qu'à comparer des nombres.

→ dans ces deux cas, nous avons trouvé une solution. Mais y a-t-il une seule valeur qui répond à la question?. Pour répondre à cette question la démarche graphique donne l'allure "régulière" d'une courbe et permet de lever un doute en utilisant implicitement un argument de continuité.

Le professeur a alors montré comment mathématiquement on peut découvrir la bonne valeur de AM à l'aide du calcul donnant l'aire en fonction de x= AM en présentant la forme canonique qui en résulte et qui met en évidence la valeur du minimum cherchée. Il a aussi montré l'intérêt de la formule algébrique pour effectuer les calculs répétitifs (aspect fonctionnel), pour organiser les résultats sous forme d'un tableau de valeurs ou pour représenter graphiquement ces valeurs. Enfin il a mis en relief le fait que ce problème posé dans un cadre géométrique se traduit sous la forme d'un problème algébrique et que la résolution du second équivaut à la résolution du premier.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN CERCLE

Nathalie PASCAL - Elisabeth HEBERT
IREM de Rouen

3

Objectifs :

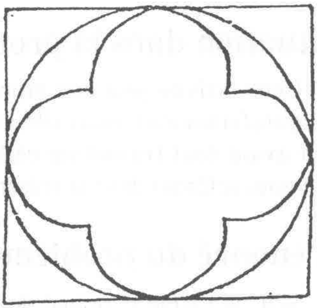
- Modifier les conceptions des élèves sur les propriétés de conservation des transformations.
- Donner du sens aux expressions :
    - Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle.
    - Points invariants, ensemble de points globalement invariants.
- Faire découvrir l'existence de courbes autres que droites et cercles.

Travail demandé :

Représenter le symétrique de quelques figures par rapport à un cercle.

Un exemple de production obtenue :

Image d'un carré.



Scénario : (environ 2 heures).

- Découverte : mise en place de la symétrie par rapport à un cercle par une recherche collective.
- Construction de quelques figures à transformer (les premières identiques pour tous, les suivantes différentes selon les élèves).
- Observation des diverses figures produites.
- Enoncé des propriétés et de l'invariance en lien avec les transformations usuelles.

Symétrie par rapport à un cercle.

Objectifs :

Chacun sait que les élèves accordent peu de poids aux propriétés de conservation qu'ils énoncent sur les transformations et, en conséquence, à leurs éventuelles démonstrations. Il nous est apparu que si l'on voulait que les élèves saisissent la force de cet outil, et par suite, en viennent à l'utiliser pour résoudre un problème ; il fallait leur proposer une transformation qui soit une activité de référence de la «fantaisie» (non conservation) de certaines transformations. Au cœur de cette fantaisie, des propriétés surprenantes apparaissent, les figures à transformer visent à repérer certaines d'entre elles.

Le travail mène donc à un temps de capitalisation portant sur :
- Image d'une droite, d'un segmentn d'un cercle.
- Points invariants, ensemble de points globalement invariants.
- Existence de courbes autres que droites et cercles.

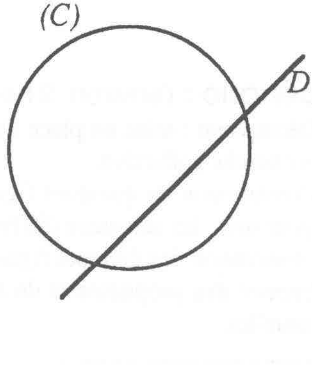
Situation dans la progression :

Cette activité peut être proposée à tout moment par rapport au cours sur les transformations, mais elle nous semble particulièrement pertinente à étudier **avant tout travail** sur celles-ci. C'est à cette place dans la progression que nous référons dans la présente analyse.

L'énoncé du problème posé :

Soit un cercle C donné de centre O. Déterminer par le dessin, les symétriques par rapport au cercle C des quelques figures qui vous sont proposées. Par exemple, on pourra chercher l'image d'une droite D par rapport à C.

En déduire quelques caractéristiques de cette transformation.
(Les diverses figures étudiées sont présentées par la suite).



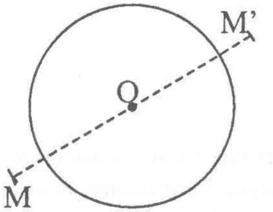
Etrange anamorphose :

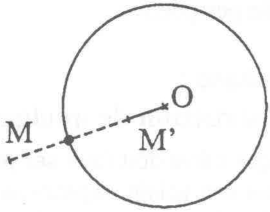
La symétrie que nous avons baptisée «symétrie par rapport à un cercle» est une anamorphose qui se rapproche sensiblement de l'anamorphose cylindrique, cette étrange transformation qui donne d'un objet son image dans un miroir cylindrique. Nous renvoyons le lecteur pour plus d'information à l'article du *PLOT* d'octobre 1987, qui, lui-même propose une bibliographe. Nous invitons aussi le lecteur à découvrir cette transformation avec l'outil informatique, en étudiant l'évolution de certaines images en fonction des variations des figures initiales (voir annexe 1).

Le scénario :

1ère phase : Découverte de la symétrie par rapport à un cercle. (10 minutes).

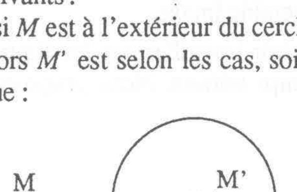
Il s'agit de faire transférer les savoir-faire portant sur la symétrie par rapport à une droite à la symétrie par rapport à un cercle.
Choisissons un point M extérieur au cercle et tel que $OM < 2R$
Les élèves, naturellement, proposent de prendre pour image de M, soit M' à l'intérieur du cercle, soit M' à l'extérieur du cercle :

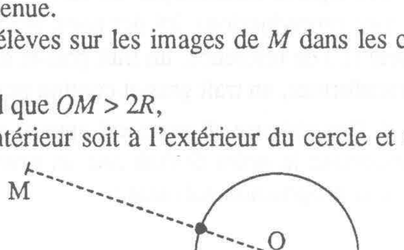




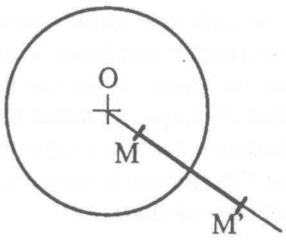
On fera remarquer aux élèves que cette deuxième position revient à étudier la symétrie par rapport au point O, ce qui est ici de peu d'intérêt. C'est la première proposition qui est donc retenue.

On se mettra d'accord avec les élèves sur les images de M dans les cas suivants :
- si M est à l'extérieur du cercle et tel que $OM > 2R$,
alors M' est selon les cas, soit à l'intérieur soit à l'extérieur du cercle et tel que :





- si M est à l'intérieur du cercle, alors M' est à l'extérieur du cercle et tel que :



Attention, le **centre** O du cercle pose un problème délicat : l'image de O n'est pas un point mais le cercle de rayon $2R$ et réciproquement. On ne peut donc, en toute rigueur, parler de transformation sans restriction des ensembles du plan. Travailler sur cette difficulté fait perdre au problème sa simplicité initiale et perturbe inutilement les élèves par rapport aux objectifs assignés à cette activité.

Par contre, **définir** une véritable transformation peut être un objectif en Première S ; la *«Feuille à problèmes» n° 45* publiée par l'IREM de Lyon relate d'ailleurs une activité sur la symétrie par rapport à un cercle construite dans cette perspective.

2ème phase :
La construction de quelques figures.

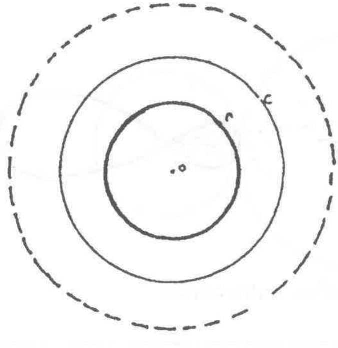
Chaque élève doit faire **ses propres** constructions : il n'y a aucun intérêt à regarder son voisin «agiter» sa règle et son crayon ! Par contre, la **comparaison** des figures images obtenues avec d'autres élèves étudiant la même situation est riche d'enseignement pour les élèves.

Les figures étudiées par les élèves jouent sur les couleurs pour la lisibilité. Les reproductions ici données, utilisent un trait continu et fin pour le cercle *(C)* de référence, un trait gras et discontinu pour l'ensemble des points à transformer, un trait gras et continu pour l'ensemble image.

A l'expérience, il nous est apparu que vouloir travailler sur les figures comportant le point O était ans un premier temps néfaste. Nous proposons donc la progression suivante.

1) Images de deux figures, communes à tous les élèves.

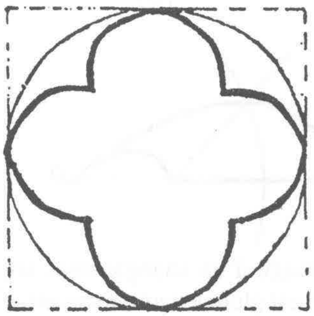
Image d'un cercle concentrique à (C).



Objectifs :

- permettre à chaque élève de s'approprier la «transformation» établie collectivement. Il retrouve un résultat facile à établir et bien connu : l'image d'un cercle est un cercle ! Voilà qui est sécurisant !
- permettre à l'enseignant de s'assurer que chacun a bien compris ce dont il s'agit. En particulier la confusion entre le cercle *(C)* et le cercle à transformer *(Γ)* peut être levée à cette occasion.

Image d'un carré exinscrit à (C).



Objectifs :

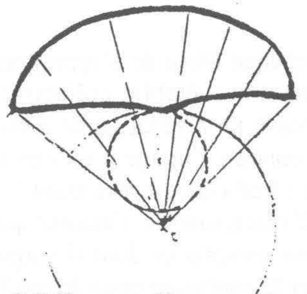
- mettre en échec les conceptions de l'image d'un segment.
- proposer à tous une situation se prêtant aisément à ce questionnement : puisque le milieu des côtés du carré sont invariants et que les images des sommets sont intérieurs au cercle, l'image d'un segment ne peut être un segment !
- obtenir un objet «séduisant» !
- permettre à l'enseignant quelques mises au point, éventuellement collectives, sur le travail demandé.

Trouver la figure image peut être, pour certains élèves, très délicat. Nous étudions ci-après les obstacles et procédures employées par certains d'entre eux.

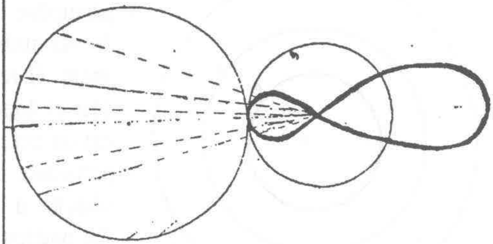
2) Images de figures différentes selon les groupes.

Pour les élèves parvenant à la construction de la figure image précédente, on répartira en binômes ou trinômes les différentes figures. Attention, de petites variations dans les positions des cercles, droites, peuvent faire perdre à la figure image tout son «charme».

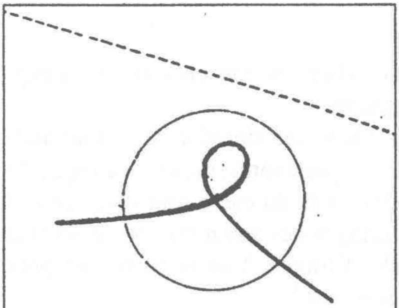
L'objectif est de **faire émerger les propriétés** de cette transformation en diversifiant les situations étudiées. Après plusieurs expérimentations, nous avons retenu les situations s uivantes :



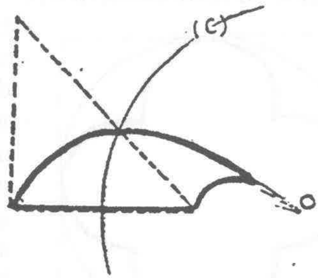
* L'image d'un cercle



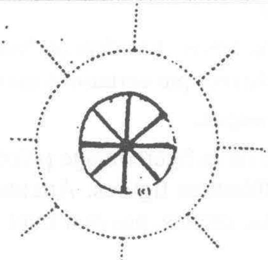
* L'image d'un autre cercle



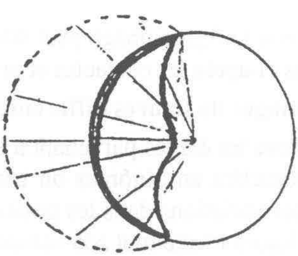
* L'image d'une droite



* L'image d'un triangle dont un côté est globalement invariant



* L'image d'un «soleil» qui se ramène en O ! (interviennent ici 3 cercles concentriques de rayons R, $2R$, $3R$)



* L'image d'un croissant formé de deux demi-cercles dont l'un est invariant

3ème phase : Restitution.

Il s'agit, pour l'ensemble des élèves, de prendre conscience des diverses figures obtenues et de les aider à pointer, à partir de ces figures, les propriétés que l'on souhaite fixer.

Si le travail se fait en classe entière, l'utilisation de transparents devient nécessaire. Il est en particulier possible de faire ajouter les étranges figures obtenue sur des transparents photocopiés comportant les figures initiales. En demi-classe, il est possible de rassembler tous les élèves autour du bureau du professeur ou de tables pour observer et commenter les figures produites.

Des photocopies compmortant en réduction les diverses figures obtenues sont distribuées ultérieurement. Elles assurent la trace écrite de l'activité ou mieux, servent de "gommettes" lors du temps de capitalisation.

4ème phase : Capitalisation.

Les propriétés observées avec une symétrie par rapport à un cercle, concernant l'image d'une droite, l'image d'un segment, l'image d'un cercle, l'ensemble des points invariants, les ensembles de points globalement invariants, sont comparées aux propriétés similaires pour les transformations usuelles.

L'annexe 4 propose la fiche distribuée aux élèves afin de mettre en place les propriétés des transformations usuelles. La présence d'«intrus», à savoir l'homothétie et la similitude aiguise la curiosité des élèves, et annonce le temps de synthèse. Celui-ci se fait à partie de la fiche donnée à l'annexe 5, elle est brièvement commentée par le professeur, les élèves illustrent par les "gommettes" adéquates les propriétés énoncées.

Obstacles et procédures utilisées : étude de cas.

Les obstacles que rencontrent les élèves pour la construction des figures, semblent liés aux conceptions que ceux-ci ont des transformations et des objets géométriques. Pour quelques rares élèves ce travail ne pose que le problème de la précision du tracé ; pour la plupart, des obstacles résistent. Nous relatons en annexe, brièvement et partiellement les errances de quelques élèves pour lesquels les difficultés se situent à des niveaux différents.

Pour l'un des binômes, il s'agit de transformer le triangle ABC inscrit dans le cercle. Initialement, l'image d'un triangle n'est pas perçue comme un unique objet mathématique, il y a donc plusieurs triangles-images. La transformation n'est pas perçue comme agissant sur une «globalité», l'aspect ponctuel est privilégié.

Au fur et à mesure que la recherche se déroule, les élèves accordent plus de place à la globalité de la figure. Ils privilégient certains points qui semblent tenir en eux-mêmes toute l'information. L'avancée se fait à petits pas, certaines informations valides se trouvant oubliées dans la prise en compte de nouvelles. Face à la complexité du problème, les élèves abandonnent leur recherche.

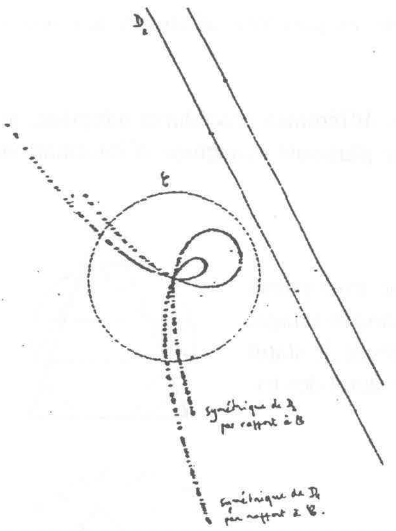
Pour le deuxième binôme, dont nous relatons la démarche, il s'agit de transformer un carré exinscrit au cercle. Les deux élèves de ce binôme ont compris ce que comporte l'idée de transformation d'une figure : la figure comporte quatre axes de symétrie, ce qu'ils exploitent d'emblée. L'obstacle auquel ils se heurtent est lié à leur certitude que l'image d'un segment ne peut être autre chose qu'un segment ou arc de cercle. Ils s'interdisent par la même la recherche d'une solution point par point. Ils engagent de multiples solutions toutes insatisfaisantes jusqu'à l'intervention de l'enseignant qui propose - et donc autorise - l'utilisation d'autres images que celles de droites et cercles.

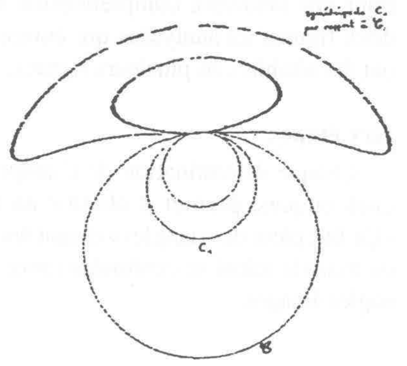
Conclusion.

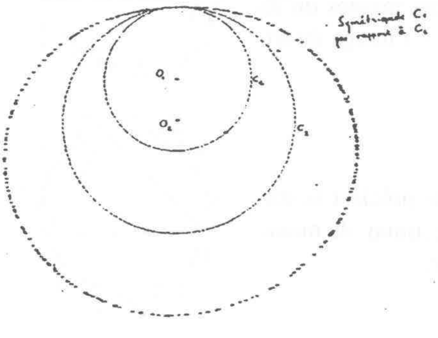
Pour certains élèves, cette activité est un «jeu d'enfants», pour d'autres, un véritable «casse-tête». Une telle activité déroute et passionne. Les élèves la rejettent ou «l'adorent». Elle ne laisse indifférents ni les élèves, ni les enseignants.

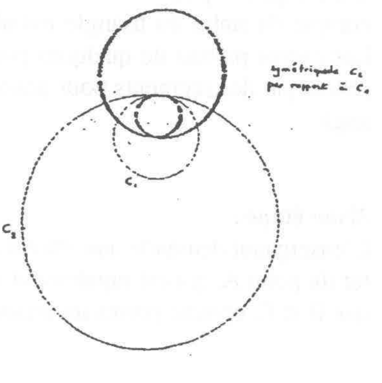
Annexe 1 :
Etude de quelques familles de figures.

Ces couples de figures C_1 et C_2 et de leurs images C'_1 et C'_2 par rapport au cercle ont été construites en utilisant soit le logiciel *«CABRI-GEOMETRE»*, soit le logiciel *«GEOPLAN»* (CREEM, Diffusion CRDP de Poitiers). Il est possible, avec ce dernier d'étudier les variations des images en fonction de la position des cercles ou droites d'origine.









Annexe 2 :

Etude de cas : Image d'un triangle inscrit.

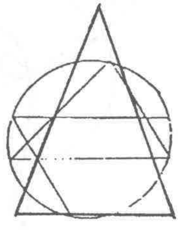
L'activité relatée ici se déroule avec un groupe extrêmement restreint envisageant une première S. Le groupe est constitué de 4 binômes. L'enseignant intervient à quelques rares occasions auprès des binômes pour relan-

cer la recherche. Il lui est donc possible, en parallèle, d'assurer une observation relativement précise.

Pour une meilleure compréhension des différentes procédures adoptées, les deux figures ici analysées qui comporte plusieurs «couches» d'informations ont été rétablies en plusieurs figures.

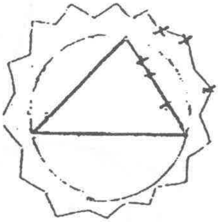
1ère étape :

Chaque détermination de l'image de trois points quelconques, permet d'obtenir un triangle-image. «Ça fait plein de triangles» disent les élèves, le statut du triangle initial se confondant avec le statut des triangles-images.



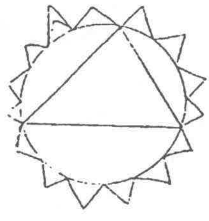
2ème étape :

L'enseignant, pour aider à une meilleure prise en compte du statut du triangle initial, colorie celui-ci. Les élèves partent de quelques points images qu'ils relient par des segments pour générer l'image du triangle.



3ème étape :

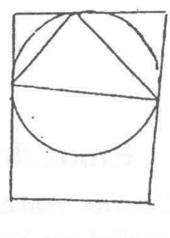
L'enseignant demande aux élèves de préciser le statut du point A, qui est rapidement reconnu, de même que B et C, comme points invariants.



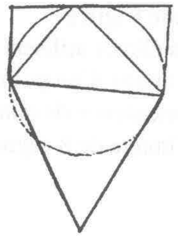
4ème étape :

L'enseignant interroge les élèves sur l'origine des points placés sur le cercle. Il tente alors de faire émerger les connaissances antérieures sur les images d'une figure, mais n'obtient que des souvenirs extrêmement parcellaires et confus.

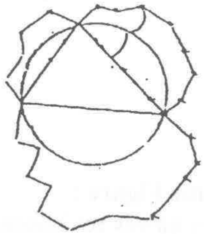
Les élèves construisent alors une nouvelle figure et proposent une nouvelle piste : «L'image du triangle pourrait être un rectangle».



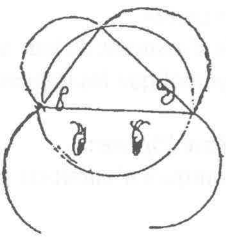
5ème étape :
Puisque chacun des côtés devrait pouvoir se transformer en un rectangle, ils proposent une modification de leur figure.



6ème étape :
Cette dernière proposition est reprise par la recherche de l'image de quelques points.



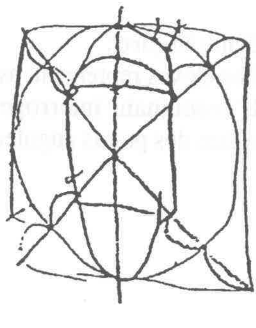
7ème étape :
Les élèves sont alors amenés à constater que «ça fait presque des cercles». Ils cherchent alors à construire ceux ci ... En vain .Puis abandonnent cette recherche «sui leur prend la tête».



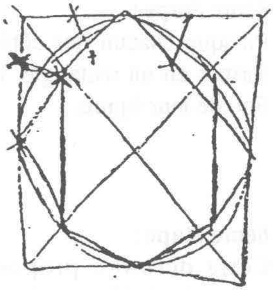
Annexe 3 :
Etude de cas : L'image du carré exinscrit

1ère Figure :
Les élèves utilisent :
- les images des sommets par définition de la transformation,
- l'image d'un carré est un carré de côtés parallèles.

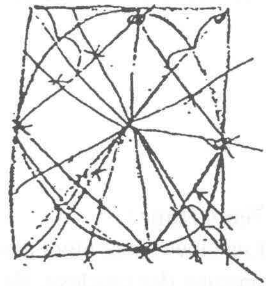
Puis ils adjoignent:
- l'existence de 2 points invariants,
- si l'image n'est pas un segment, ce ne peut être qu'un arc de cercle.



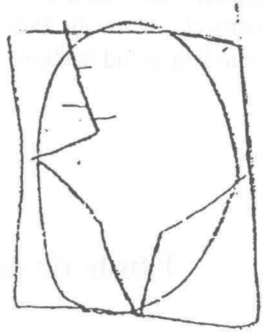
2ème Figure :
Les élèves utilisent ici :
- l'image d'un point quelconque,
- l'existence de quatre points invariants,
- l'image de 8 segments.



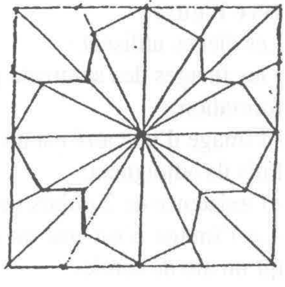
3ème Figure :
Les élèves reviennent ici à «l'image d'un carré est un carré».
Ils s'assurent de leur solution en plaçant de manière symbolique les images de nombreux points.



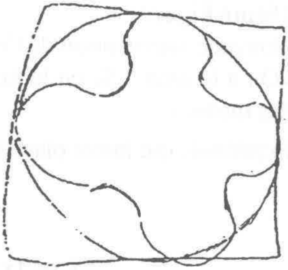
4ème Figure :
Pourquoi n'aurait-on pas quelque chose du genre ...



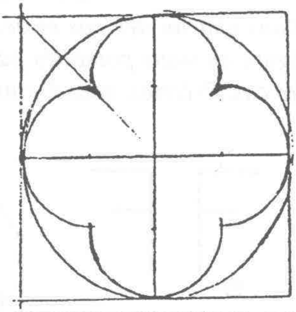
5ème Figure :
Les élèves reprennent avec soin leur recherche.
L'enseignant interroge les élèves sur la raison d'être des points anguleux.



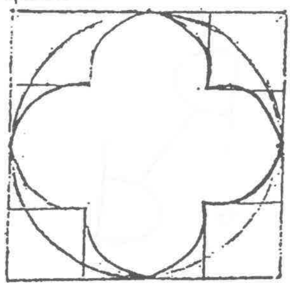
6ème Figure :
Puisque les points anguleux n'ont pas de raison d'être, la solution est d'utiliser plusieurs arcs de cercle suivant une figure du type:



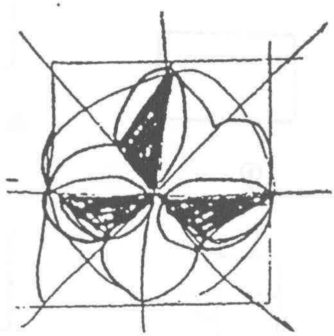
7ème Figure :
Les élèves établissent une figure soignée formée d'arcs de cercle centrés au milieu du rayon du cercle initial. Mais, désespoir ! ... les mesures prouvent que cette proposition n'est pas satisfaisante pour les images des sommets du carré.



8ème Figure :
Les élèves reprennent l'étude de cette précision par la construction de l'image point par point? Puis cherchent à trouver les centres des arcs de cercles qui la constituent. Evidemment, cette recherche est vaine.



9ème Figure :
L'enseignant intervient : «Pourquoi ne pourrait-on pas obtenir des courbes qui soient autre chose que des portions de cercle ?»
Nouvelle piste : «Puisque ce ne sont pas des demi-cercles, ce sont des droites ... donc des triangles.»



10ème Figure ...

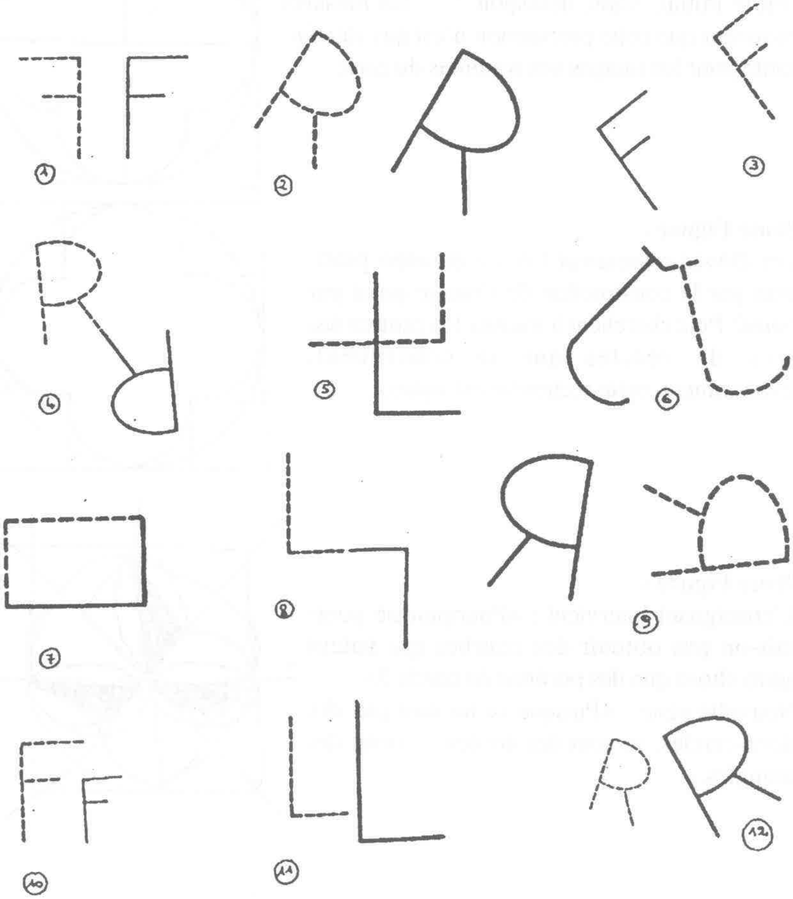
Nouvelle intervention de l'enseignant : «Cela peut être autre chose ...»

«On a le droit ? Si on le fait à main levée, ce n'est plus précis, ce n'est plus des maths.»

Inquiétude qui laisse place à l'étonnement, puis à l'émerveillement !

ANNEXE 4 :
Les transformations usuelles.

Dans chacun des cas ci-dessous, la figure en trait plein est l'image de la figure en traits pointillés par une transformation inconnue, différente selon les cas. Précisez, quand vous le savez la transformation dont il s'agit.



ANNEXE 5 :

Fiche de synthèse

Tout le vocabulaire utilisé est volontairement flou (et d'ailleurs discutable). Il s'agit de donner aux élèves du recul sur le monde des transformations. Les élèves placent les «gommettes» correspondant aux propriétés énoncées.

La diversité des transformations

• Il existe des transformations qui conservent les «formes» et les dimensions.

Exemples : ***les symétries centrales*** ***Les réflexions***
Les translations ***Les rotations.***

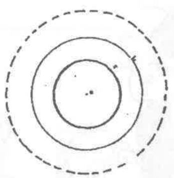
• Il existe des transformations qui conservent les «formes» mais pas les dimensions.

Exemples : ***Les homothéties*** ***Les similitudes***

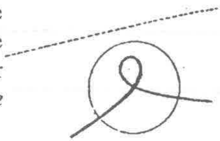
•Il existe des transformations qui ne coservent même pas les «formes» !

Exemple : ***Les symétries par rapport à un cercle.***

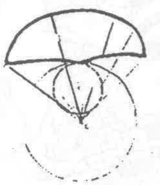
- L'image d'un cercle de centre O *est un cercle de centre O.*



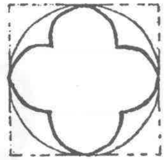
- L'image d'une droite, qui ne passe pas par O, *n'est pas une droite.*



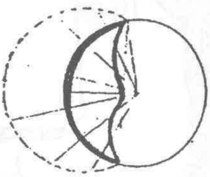
- L'image d'un cercle, de centre autre que O *n'est pas un cercle.*



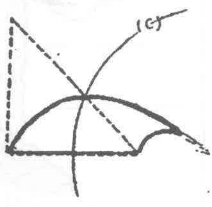
- L'image d'un segment dans la plupart des cas, *n'est pas un segment.*



- L'image de tout point M du cercle C est le point M lui-même :
On dit que C est un cercle *invariant* pour la symétrie par rapport au cercle C.



- Soit [AB] un segment tel que son milieu I appartient à C, la droite (AB) passe par O et O n'appartient pas à [AB]. Tout point M de ce segment a pour image un point M' de ce segment.
On dit que [AB] est *globalement invariant* pour la symétrie par rapport au cercle C.



Notes personnelles

FONCTIONS EN FAMILLE

Annie HENRY

IREM de Besançon

LE CONTEXTE :

Dans l'apprentissage sur les fonctions, cette activité suit un «test de pré-acquis» et la discussion-mises au point qu'il entraîne à propos des conceptions spontanées des élèves.

OBJECTIFS DE L'ACTIVITÉ :

Construction du *concept de «fonction»*, familiarisation avec les conventions de «représentation graphique» d'une fonction, travail sur les propriétés intéressantes que vérifient certaines fonctions.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Travail sur documents constitués d'une vingtaine de «courbes» présentées comme étant des «représentations graphiques de fonctions». Pour la plupart d'entre elles, on donne également au moins un autre mode de génération que le mode graphique.

L'activité se déroule en trois phases :

- La première consiste en une demande de *formulation* par les élèves du processus qui les conduit *des «formules» des fonctions à leurs «courbes».* Elle permet aux élèves de s'approprier les conventions de «représentation graphique» d'une fonction.
- La deuxième est une phase de *classement* de ces fonctions par familles suivant des *critères produits par les élèves eux-mêmes.* Les diverses «propriétés» classiques sont ainsi inventées par les élèves.
- La troisième est une phase de *formulation* par les élèves des *«propriétés»* qu'ils ont décrites de façon naïve dans la phase précédente.

FONCTIONNEMENT :

Les élèves travaillent par groupes de trois et chaque groupe rédige une affiche à chaque phase, affiche qui est soumise à *la critique de la classe.*

L'enjeu immédiat, pour les é lèves est donc la nécessité de se faire comprendre des autres, donc de mener suffisamment loin l'élaboration des définitions dont la formulation leur est demandée, l'enjeu global étant bien sûr la construction de connaissances qui leur permettent d'organiser cet ensemble de fonctions apparemment si diverses.

4

FONCTIONS EN FAMILLES

Objectifs de l'activité :

- Enrichir les conceptions de la notion de fonction que se construisent les élèves après la rupture créée lors du test de «préacquis».
- Approcher le concept de fonction par différents modes de génération (puisqu'il n'est évidemment pas question en seconde de donner «la» définition d'une «fonction»).
- Faire trouver (ou retrouver) et s'approprier par les élèves les conventions de la «représentation graphique d'une fonction».
- Faire découvrir aux élèves des propriétés intéressantes que vérifient certaines fonctions et retenir le vocabulaire et les définitions reconnues par la communauté mathématique.

Place de cette activité dans le déroulement de l'apprentissage :

Cette activité «Fonctions en familles» est la deuxième partie du travail sur les fonctions, dont l'ossature est la suivante :

Première partie :

Un test de «préacquis» (Annexe 1-1 et 1-2) dont l'objectif est de faire émerger les conceptions qu'ont les élèves en seconde avant tout apprentissage sur les fonctions.

Les réponses sont riches et intéressantes, celles des élèves de deux classes sont résumées dans l'annexe 1-3 et quelques exemples de réponse sont cités dans l'annexe 1-4 : la lecture du graphique est bien acquise par tous, mais, en ce qui concerne le concept lui-même (cerné par les questions 4 et 6), il n'est réellement approprié par aucun élève, même si plusieurs idées sont présentes.

Grossièrement, ces idées se partagent (y compris se mélangeant dans la tête de chaque élève), entre :

→ Pour qu'il y ait fonction, il faut une relation de causalité (points 1 et 2) ; celle-ci est niée ou affirmée sous la forme $d = vt$.

→ Un phénomène fonction d'un autre lui est proportionnel, ou une idée analogue (si le circuit était rectiligne ...) (points 3, 4 et 5).

→ Il faut une dépendance «régulière» (croissance sous la forme «plus ..., plus ...» ou constance).

On peut aussi remarquer que la réponse fournie (oui ou non) n'a pratiquement pas de lien avec l'argument présenté. Le même argument conduit suivant les élèves à deux réponses opposées. L'analyse des réponses des élèves souligne l'importance de montrer la richesse nouvelle du concept que l'on veut construire : pas de causalité, pas de variations simples. Sous ces aspects, il sera ressenti comme nouveau et pourra peut-être être reconstruit après les ruptures essentielles :

→ **Une fonction, ce n'est ni** une formule, **ni** un graphique, **ni** un tableau de valeurs, **ni** un lien causal donné par des propriétés caractéristiques, **ni** une touche de la calculatrice, **c'est tout cela à la fois.**

→ Une fonction n'est pas nécessairement affine, ni croissante.

→ La seule contrainte opposée à une «correspondance» entre deux ensembles pour qu'elle soit une fonction est que chaque élément n'ait **pas plus d'une image** (ici mise au point, dans le cahier de cours, des notations et du vocabulaire utilisés).

Deuxième partie :

Activité : «Fonctions en familles», objet de cet article, suivie d'une institutionnalisation des propriétés (vocabulaire et définitions) à étudier en seconde.

Troisième partie :

Problèmes ouverts dont une résolution possible est l'utilisation de l'outil «fonction» et de l'étude de son sens de variation. Travail sur quelques situations pour reconnaître si une fonction a un lien avec la proportionnalité ou non.

Quatrième partie :

Etude des fonctions «usuelles»

Cet apprentissage est évidemment émaillé d'évaluations formatives et suivi d'une évaluation sommative.

Présentation de l'activité :

Les matériaux, les différentes phases, les consignes.

Tous les élèves reçoivent le même document (annexe) : plusieurs feuilles sur lesquelles sont présentées une vingtaine de fonctions numérotées ; toutes sont définies graphiquement et pour la plupart d'entre elles, on a donné au moins un autre mode de génération.

Pendant toute cette activité, les élèves seront installés par groupes de 3 (ou 4 si besoin) constitués par les élèves eux-mêmes qui se «choisissent». Comme cette activité se déroule en «TD», 6 ou 7 groupes se forment. Chaque élève dispose d'une calculatrice scientifique. Tous les groupes ont, à leur disposition, du papier-affiche et des marqueurs.

Première phase : «Représentation graphique d'une fonction».

Première consigne :

«Individuellement, prenez rapidement connaissance de ces fonctions, pour poser des questions en cas d'incompréhension totale des informations écrites». Il est indispensable, pour la suite de l'activité, que chaque élève lise les quelques mots accompagnant les graphiques et leur donne une signification correcte. Le contrat établi dans la classe, et respecté, veut qu'on ne se lance pas dans une activité, quelle qu'elle soit, si les données ne sont pas comprises.(20 à 30 minutes).

Deuxième consigne :

«En examinant particulièrement les fonctions n°1, n°2, n°4 et n°16, expliquez comment, connaissant la (ou les) formule(s) d'une fonction, on réalise sa représentation graphique. Travaillez d'abord individuellement suffisamment longtemps pour proposer aux camarades de votre groupe la "recette de fabrication" du graphique de n'importe quelle fonction, puis, par groupe, vous mettrez au point une formulation à proposer à toute la classe sur une affiche». (10 à 15 minutes).

Débat :

Etant donnée la grande difficulté qu'éprouvent les élèves, en général, à expliciter la relation entre l'équation d'une courbe et cette courbe, la prise en compte, puis la critique collective des diverses propositions, s'impose à ce stade de l'activité. Cette critique aboutit à une mise au point collective à la fois sur le contenu et sur la forme.

Dans le "cahier de cours", les élèves notent la formulation retenue, du genre : «Un point m est sur le graphique de la fonction f, si son ordonnée y_m est l'image de son abscisse x_m par la fonction f. Si m est sur le graphique de f, c'est que $y_m = f(x_m)$». (15 à 20 minutes).

Réinvestissement :

Calcul des coordonnées de plusieurs points des graphiques des fonctions n°5, n°8, n°9, n°11, n°17, n°18 et n°19 en vérifiant sur le dessin (travail individuel), (20 à 30 minutes).

Deuxième phase : «Classement des fonctions par familles (à partir de leurs représentations graphiques).»

Consigne :

«En observant les représentations graphiques de ces fonctions, vous trouverez sûrement des propriétés, des qualités, communes à plusieurs d'entre elles, qui vous permettront de les regrouper. Trouvez des "critères" de classement et classez ces fonctions suivant vos critères. Travaillez d'abord individuellement pendant une dizaine de minutes, puis mettez-vous d'accord, par groupes, pour communiquer, sur une feuille, vos choix de la manière suivante :

Nous rangeons ensemble les fonctions n°x, y, z ... , car ... ; nous les appellerions des fonctions ...» (20 à 40 minutes).

L'enseignant écrit ensuite au tableau tous les critères retenus (voir en annexe 3 le vocabulaire utilisé par les élèves), en regroupant ceux qui correspondent à la même propriété implicite (les élèves sont convaincus que c'est bien la même en prenant connaissance des graphiques rangés sous cette «bannière») et note, en face, le vocabulaire utilisé *en mathématiques* pour désigner cette propriété. (15 à 20 minutes).

Troisième phase :«Formulation algébrique des propriétés des fonctions».

✣ Parmi toutes ces **propriétés** «inventées» par les élèves (de 5 à 15 suivant les classes), l'enseignant extrait celles *qui nous intéressent en seconde*, explicitement inscrites dans le programme ou non (parité, périodicité, signe, et tout ce qui concerne le sens de variation), en indiquant aux élèves que les autres sont, soit étudiées plus tard (continuité, par exemple), soit non répertoriées systématiquement car moins susceptibles de servir d'outils pour résoudre des problèmes.

✣ ***Consigne :*** «Pour chacune des propriétés retenues, trouvez une définition "algébrique". Autrement dit, si une fonction vous est définie par sa (ou ses) formule(s) et que vous ne disposez pas de son graphique, comment faites-vous pour reconnaître

si elle est :	- croissante sur tel intervalle
- paire	- décroissante sur tel intervalle
- impaire	
- périodique	ou si elle
- positive sur tel intervalle	- admet un maximum
- négative sur tel intervalle	- admet un minimum.

Chaque groupe propose ses définitions sur une affiche. (30 à 45 minutes).

✣ Les définitions *critiquées* collectivement et *«mises à l'épreuve»* sur des fonctions du document dont on connaît à la fois la formule et la représentation graphique (20 à 30 minutes).

Cette phase est suivie de **l'institutionnalisation** indispensable : dans le cahier de cours, chaque élève note, pour chaque propriété son nom et sa définition (sous une ou deux formes) *en mathématiques*, mais indique entre parenthèses comment elle (ou lui), l'avait appelée.

Enjeu pour les élèves :

C'est la construction de connaissances qui leur permettront d'organiser cette foule d'informations qui leur sont proposées dans le document distribué.

Mais de façon plus immédiate, l'activité telle qu'elle est conçue, avec ses phases de formulation écrite destinée à une communication ultérieure et ses phases de critique des différentes propositions, crée l'enjeu d'être compris des autres.

Raisons du choix de cette activité :

L'idée d'une activité de «classement» est venue à la lecture de la thèse d'Odette BASSIS (*«Processus de recherche des enfants dans une démarche d'auto-socio-construction»*, 21 mai 1985, Paris 5), portant sur une démarche de classement de polygones par des élèves de l'Ecole élémentaire pour leur faire découvrir puis reconnaître puis formuler les propriétés de certains d'entre eux (en particulier tout les quadrilatères «classiques»).

Ici, ce type de démarche est particulièrement bien adapté aux objets poursuivis :

- Les élèves manipulent une grande variété de fonctions, ce qui tend à consacrer la rupture provoquée (passage obligé dans l'apprentissage).
- Cette démarche fait travailler sur toutes les propriétés à étudier.
- Elle permet que tous les élèves trouvent, écrivent quelque chose, en faisant appel à leur imagination.
- Elle permet de «raccrocher», dans l'institutionnalisation, le vocabulaire nouveau «orthodoxe» des mathématiques aux expressions familières et spontanées des élèves. Ils s'approprieront mieux ainsi les différentes propriétés et leurs énoncés.
- Elle fait travailler la capacité à concevoir indifféremment une fonction

comme «formule» ou «graphique» et prépare ainsi les résolutions dites «graphiques» d'équations et d'inéquations avec l'imprégnation du «$y = f(x)$».

Choix des documents, les différentes phases de leur gestion :

L'activité décrite est conduite, dans sa structure, depuis plusieurs années. Elle a évolué, bien sûr, en fonction des programmes et des observations de son déroulement dans différentes classes.

Mais, pour atteindre les objectifs fixés, *les bases à conserver dans son élaboration* sont :

- La grande variété de fonctions proposées.
- L'existence de trois phases :

  Les phases 2 et 3 nécessitent une bonne appropriation par les élèves de ce qu'on appelle «représentation graphique», d'où la phase 1 pour commencer la démarche.

  Les graphiques sont beaucoup plus parlants à l'imagination des élèves que les autres définitions des fonctions, d'où cette phase 2, très féconde.
- Le travail des élèves par groupes :

  Il favorise les démarches de questionnement, l'émergence des conjectures, facilite l'accession des élèves à une autonomie dans l'évaluation de leurs productions. Mais il est important cependant de respecter les plages de travail individuel pour permettre à chacun un approfondissement des idées à formuler.
- L'obligation de formuler par écrit avant le débat dans chaque groupe, ou à l'échelle de la classe :

  Les critiques collectives créent cet enjeu d'être compris des autres, qui provoque la recherche d'une formulation claire avec des références à des codes communs et entraîne nécessairement un approfondissement des idées à formuler.

Mais des *modifications* sont *possibles* par rapport à l'activité particulière décrite ici dans ses détails pour mieux la replacer dans son contexte de classe, par exemple :

- Le *choix des fonctions* est très vaste ; il suffit qu'elles donnent lieu à des classements suffisamment riches.
- Les affiches ne sont pas indispensables...un élève par groupe peut écrire au tableau dans «sa» colonne.
- On peut envisager aussi l'utilisation de calculatrices graphiques.
- En ce qui concerne le *temps*, les durées indiquées pour chaque phase sont très approximatives et varient beaucoup d'une classe à l'autre. Cette

démarche constituant une clef essentielle dans l'apprentissage du concept de fonctions, il est nécessaire de laisser aux élèves le temps de s'y construire réellement leurs connaissances.

Annexe 1-1

TEST DE PRÉACQUIS

Sur un circuit automobile de 15,3 km de long, un pilote de course procède à des essais. Sur le bord de la piste, des enregistreurs, repérés par leur distance à la ligne de départ du circuit, donnent les vitesses de passage du véhicule :

Le tableau n°1 donne les résultats enregistrés.

Un autre compteur-enregistreur situé dans la voiture donne la vitesse en fonction du kilométrage parcouru sous la forme du graphique n°2.

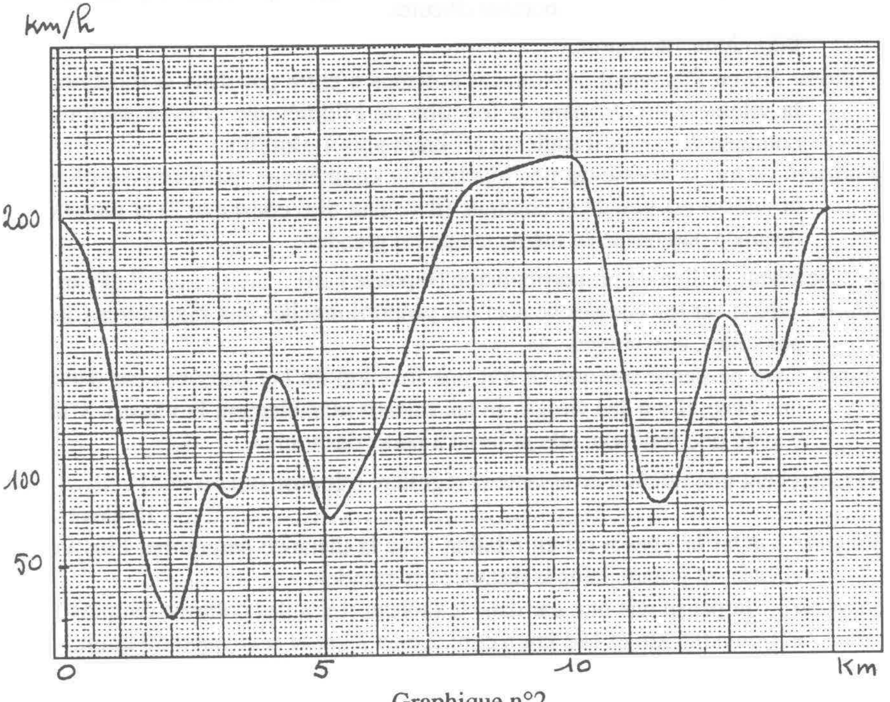
1) Deux données sont manquantes dans le tableau. Peux-tu les établir ?
2) Peux-tu porter sur le graphique les points qui représentent toutes les données du tableau ? Le tableau est-il en accord avec le graphique ?
3) Quelles ont les vitesses extrêmes ?
4) Penses-tu que la vitesse soit fonction du kilométrage parcouru ? Pourquoi ?
5) A quels endroits du circuit l'automobile roulait-elle à 150 km/h ?
6) Penses-tu que le kilométrage parcouru soit une fonction de la vitesse du véhicule ? Pourquoi ?
7) Représente sur le graphique le relevé d'un compteur de vitesse qui serait place dans une voiture roulant constamment à 50 km/h.
8) Le pilote d'essai fait plusieurs tours dans des conditions identiques de telle sorte qu'à chaque tour il passe à chaque endroit du circuit à la même vitesse.

Peut-on donner d'avance le graphique que fournira le compteur au 2ème tour, au 3ème tour, etc.?

Annexe 1-2

enregistreur n°	distance parcourue depuis la ligne de départ, en km	vitesse enregistrée en km/h
1	0,5	182
2	2	50
3	5,1	86
4	8	210
5	10	
6	13	160
7		200

Tableau n°1



Graphique n°2

Annexe 1-3

Réponse à la question : La vitesse est-elle une fonction du kilométrage parcouru ?

Nombre d'élèves : **58** ; *Réponses :* oui : **15** ; non : **32** ; ne savent pas : **11.**

0) N'a pas compris la question .... 14 élèves

1) Exige un lien causal (réponse non) ....11 élèves

«Non je ne pense pas, je pense que les vitesses ne dépendent pas de la distance parcourue»

Béatrice :«La vitesse ne peut pas être en fonction du kilométrage, c'est absurde, elle est plutôt en fonction du parcours lui-même, les lignes droites, les tournants,...»

2) Se référent au lien physique V = D/t (réponse oui ou non) .... 7 élèves

Gérald : Vitesse de l'auto = $\frac{\text{km parcourus}}{\text{nombre d'heures}}$ → donc la vitesse dépend des kilomètres parcourus.

Laurent (19 en Physique) *:* «Non, car le temps n'entre pas dans la fonction, la vitesse entrerait dans la fonction du kilométrage si nous savions combien de temps il roulerait à x km/h puis à y km/h.»

Fabrice : «Oui, la vitesse est une fonction du kilométrage parcouru car plus la vitesse est grande et continue (il voulait dire constante ?) et plus la distance parcourue en même temps est grande».

3) Cherchent un lien de proportionnalité (réponse non) .... 7 élèves

Alain : «Non car les vitesses ne sont pas proportionnelles aux kilomètres (dû aux côtes, aux virages .)».

Agnès : «Je ne pense pas que ce soit une fonction du km parcouru car dans une piste, il y a des virages ce qui ralentit sensiblement la vitesse. S'il y avait une fonction, elle se ferait à partir des tours».

4) Cherchent une relation croissante et régulière (réponse oui ou non) ....10 élèves

Virginie : «Oui la vitesse est en relation avec la distance parcourue. Plus la vitesse est grande, plus la distance est grande».

Patricia : «Je pense que non car dans le tableau il y a des contre-exemples : n°1 on a 0,5 km et 182 km/h et n° 2 on a 2 km et *seulement* 50 km/h.»

5) Font intervenir la forme du circuit (réponse oui ou non) ....9 élèves

Agnès : déjà vue en 3) ; *Béatrice :* en 1).

Régine : «Oui, car la vitesse de la voiture ralentit toujours au même endroit du circuit, donc la vitesse baisse ou augmente selon les kilomètres».

Philippe : «Non je ne pense pas que la vitesse soit une question de kilométrage parcouru mais plutôt une question de forme de la piste probablement qu'au dixième kilomètre on a une grande ligne droite de même au huitième kilomètre.

Bien sûr cela joue un peu car le moteur tourne plus ou moins vite suivant le nombre de kilomètres parcourus, mais cela ne joue pas un.grand rôle».

Annexe 1-4

Réponse à la question : Le kilométrage parcouru est-il une fonction de la vitesse ?

Nombre d'élèves : **58** ; *Réponses :* oui : **28** ; non : **20** : ne savent pas : **10**.

0) N'a pas compris la question ....20 élèves

1) Exige un lien causal (réponse oui ou non) ....9 élèves

Laurent : «Oui parce que grâce à la vitesse du véhicule, on peut parcourir des kilomètres».

Monique : «Non, il n'y a pas de rapport».

Laurence : «Non, le kilométrage ne varie qu'en fonction de la distance à parcourir».

2) Evoque la formule $D = v.t$ (réponse oui ou non) ....8 élèves

Laurent : «Non, pour que le kilométrage soit une fonction de la vitesse, il faudrait savoir combien de temps le pilote roule à 50 km/h, 200 km/h etc.

3) Cherche un lien de proportionnalité (réponse oui ou non) ....6 élèves

Corinne : «Oui le kilométrage est une fonction de la vitesse car les deux sont proportionnels».

4) Condition de monotonie (réponse oui) ....12 élèves

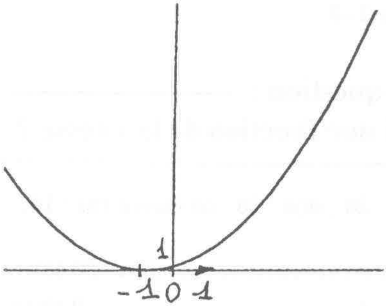
Philippe : «Oui certainement que le kilométrage parcouru à une vitesse élevée comme 200 km/h sera plus élevé qu'un kilométrage parcouru par une vitesse allant à 100 km. Cela si le nombre de tours du circuit n'est pas limité sinon cela ne jouera aucun rôle».

Agnès : «Oui car plus la vitesse est grande, plus on parcourt de kilomètres».

5) Font intervenir la forme du circuit (réponse non) ....3 élèves

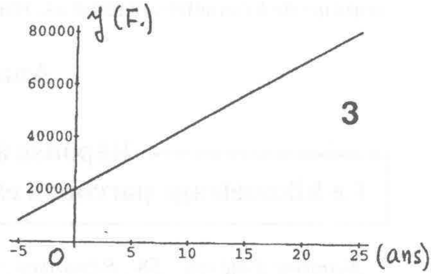
Latifa : «Non je ne pense pas parce que le circuit n'est pas rectiligne».

Danielle : «Ici non, car il y a beaucoup de virages et le véhicule perd de la vitesse avant chaque virage».



$x \mapsto (1+x)^2$

1



3

- valeur acquise par un capital de 20 000 F placé à intérêts simples pour une durée de n années au taux de $t = 0{,}12$

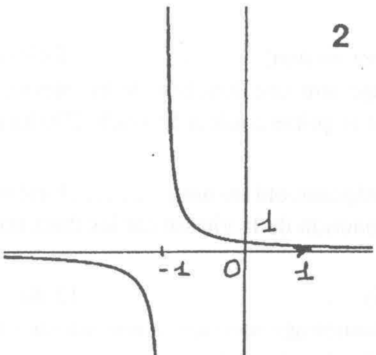
ou

- $n \mapsto 20\,000(1 + 0{,}12n)$

ou

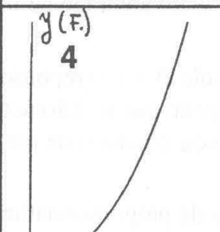
- la demi-droite dessinée ici.

2



$x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

4



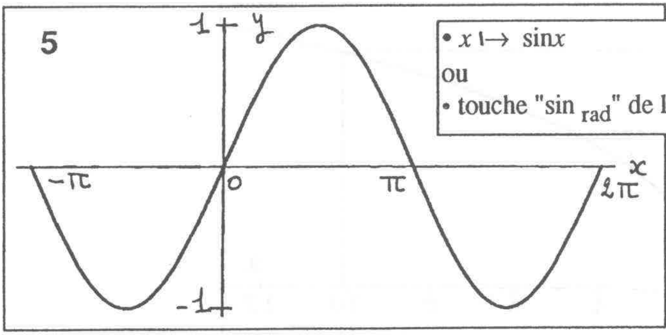
- Valeur acquise par un capital de 20 000F placé à intérêts composés pour une durée de n années au taux de $t = 0{,}12$

ou

- $n \mapsto 20\,000(1 + 0{,}12)$ *in*

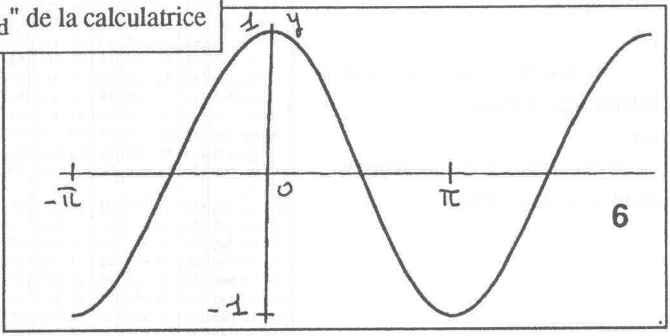
ou

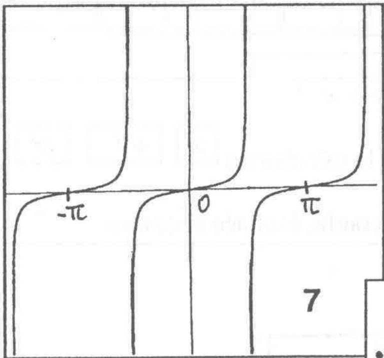
- la courbe dessinée ici.



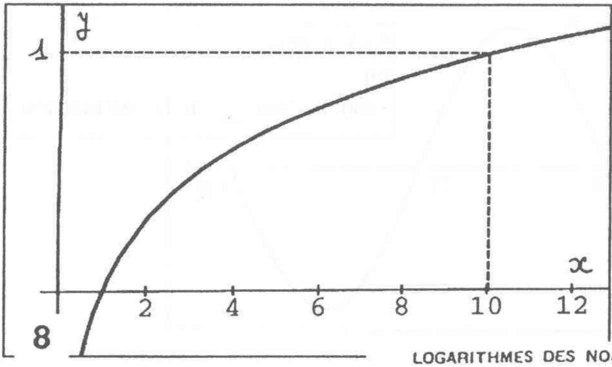
• $x \mapsto \sin x$
ou
• touche "sin $_{rad}$" de la calculatrice

• $x \mapsto \cos x$
ou
• touche "cos $_{rad}$" de la calculatrice





• $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$
ou
• touche "tan $_{rad}$" de la calculatrice



8

Exemple de fonction définie par trois procédés :

• la courbe dessinée ci-dessus

ou

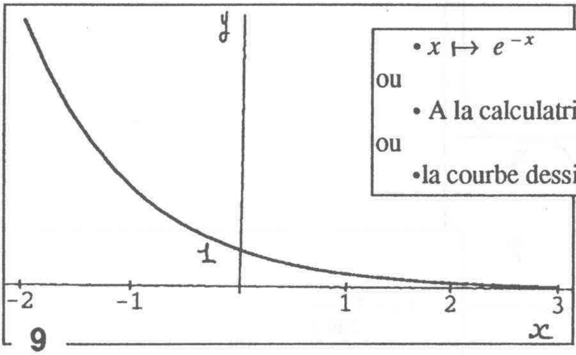
• la touche "log" d'une calculatrice scientifique

ou

• une table de logarithmes dont voici un extrait

LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 100 :

N	Log.	N	Log.	N	Log	N	Log.	N	Log.
	0,		1,		1,		1,		1,
1	00 000	21	32 222	41	61 278	61	78 533	81	90 849
2	30 103	22	34 242	42	62 325	62	79 239	82	91 381
3	47 712	23	36 173	43	63 347	63	79 934	83	91 908
4	60 206	24	38 021	44	64 345	64	80 618	84	92 428
5	69 897	25	39 794	45	65 321	65	81 291	85	92 942
6	77 815	26	41 497	46	66 276	66	81 954	86	93 450
7	84 510	27	43 136	47	67 210	67	82 607	87	93 952
8	90 309	28	44 716	48	68 124	68	83 251	88	94 448
9	95 424	29	46 240	49	69 020	69	83 885	89	94 939
10	00 000	30	47 712	50	69 897	70	84 510	90	95 424
	1,		1,		1,		1,		1,
11	04 139	31	49 136	51	70 757	71	85 126	91	95 904
12	07 918	32	50 515	52	71 600	72	85 733	92	96 379
13	11 394	33	51 851	53	72 428	73	86 332	93	96 848
14	14 613	34	53 148	54	73 239	74	86 923	94	97 313
15	17 609	35	54 407	55	74 036	75	87 506	95	97 772
16	20 412	36	55 630	56	74 819	76	88 081	96	98 227
17	23 045	37	56 820	57	75 587	77	88 649	97	98 677
18	25 527	38	57 978	58	76 343	78	89 209	98	99 123
19	27 875	39	59 106	59	77 085	79	89 763	99	99 564
20	30 103	40	60 206	60	77 815	80	90 309	100	00 000



9

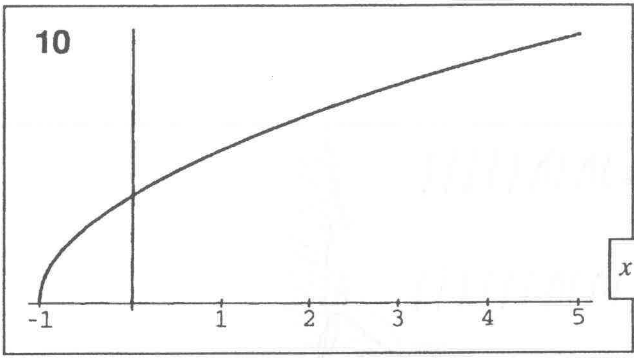
• $x \mapsto e^{-x}$

ou

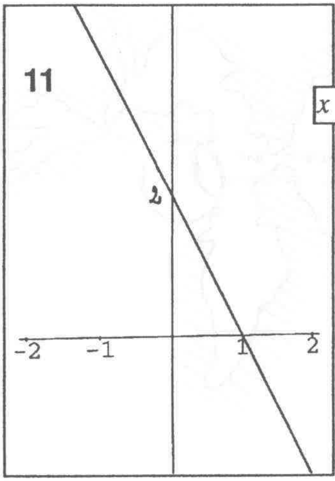
• A la calculatrice $\boxed{x}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{e^x}$

ou

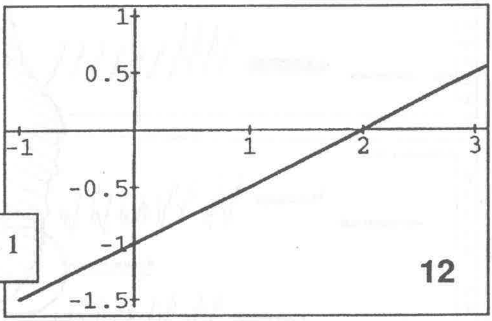
•la courbe dessinée ci-contre



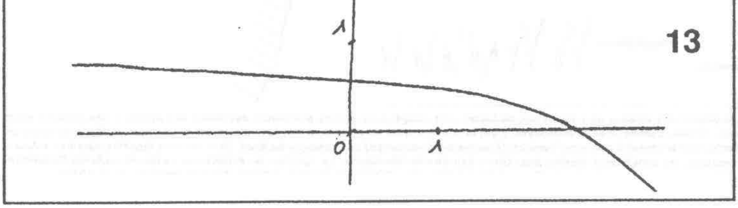
$x \mapsto \sqrt{x+1}$



$x \mapsto -2x+2$



$x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$



14

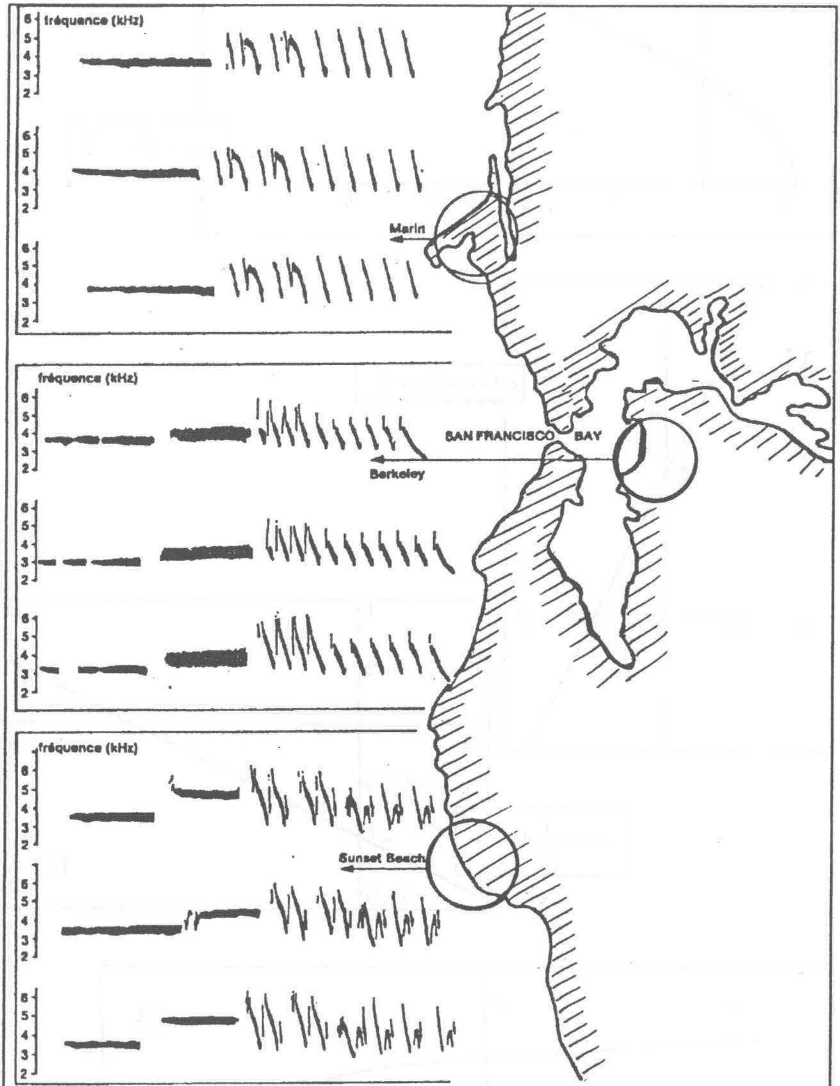
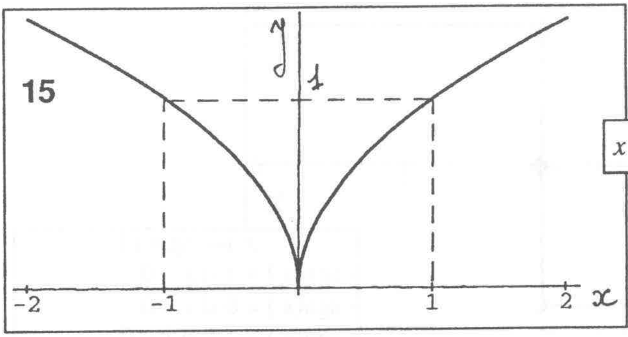
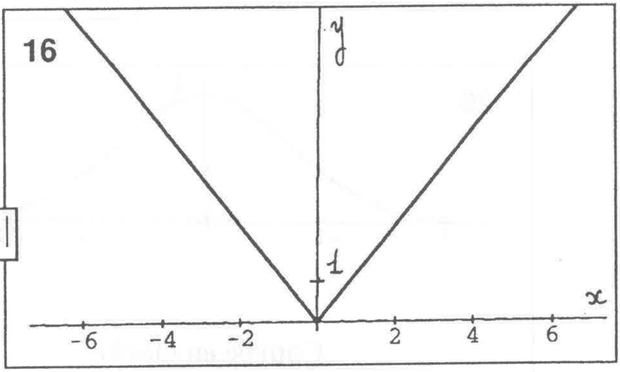


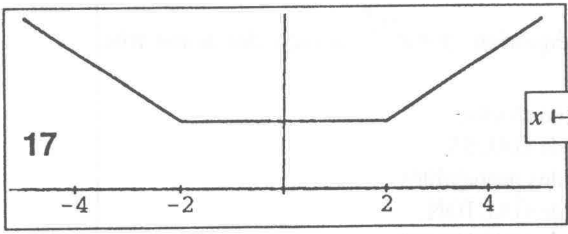
Figure 5. Chez la plupart des oiseaux on a décrit des dialectes : les congénères voisins possèdent des notes, des syllabes, des phrases voire
chants identiques. Parfois, comme chez le troglodyte, c'est la quasi-totalité du répertoire que les voisins ont en commun. P. Marler a décrit un
typique de dialecte chez le bruant à couronne blanche *(Zonotrichia leucophrys)* en Amérique du Nord. Dans les trois localités étudiées autour
baie de San Francisco, les congénères voisins possèdent des chants identiques. La fonction du dialecte ne cesse de solliciter l'attention



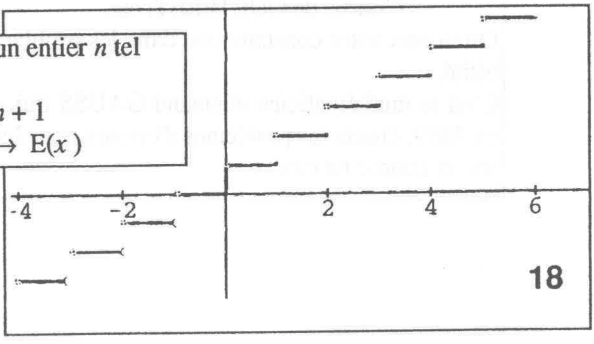
$x \mapsto \sqrt{|x|}$



$x \mapsto |x|$



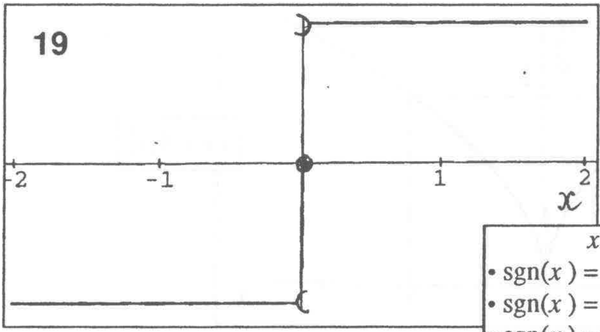
$x \mapsto |x-2| + |x+2|$



Pour tout x, il existe un entier n tel que

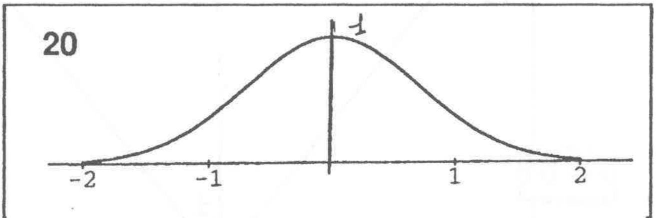
$$n \leq x < n+1$$

$n = \mathrm{E}(x)$ $\quad x \mapsto \mathrm{E}(x)$



$x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$

- $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$
- $\operatorname{sgn}(x) = 0$ si $x = 0$
- $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$



Courbe en cloche

Cette courbe d'équation $y = e^{-x^2}$ a reçu des noms très variés :

Courbe en cloche,
Courbe de GAUSS
Courbe des probabilités,
Courbe de GALTON,
Courbe de QUÉTELET, etc.

On la rencontre constamment dans les problèmes de probabilité.

C'est le mathématicien allemand GAUSS qui, en particulier en 1809, étudia les problèmes d'erreurs pour lesquels on utilise la courbe en cloche.

Annexe 3.

Langage utilisé par les élèves pour désigner les "propriétés" des fonctions dont les graphiques sont donnés. Vocabulaire relevé dans plusieurs classes.

PÉRIODICITÉ : Dessin qui revient - cyclique - plusieurs fois la même figure - à figure répétée - figures en série - périodique - lignes parallèles mais parallélisme décalé - une certaine fréquence - régulière.

CONTINUITÉ ou non : Plusieurs lignes - fonction où il y a un arrêt - fonction stoppée - points détachés les uns des autres - plusieurs représentations - valeur non définie - morceaux de courbe - points non reliés - coupures - courbe unique - courbe pleinement brisée - courbe en un seul morceau - entrecoupée - fonctions à interruption - fonctions qui ont plus d'une courbe - plusieurs courbes différentes.

PARITÉ : Centre de symétrie - symétrie par rapport à O - symétrie - Oy est axe de symétrie - courbes symétriques.

SIGNE : Valeurs >0 et <0 - "dans + et –" - ">0" - "dans +" - "dans repère positif et négatif" - droites positives - dans **R**+ - points à ordonnées positives - au-dessus de l'axe des abscisses.

PASSE PAR : Passe par O - commence par O - passe par zéro - passe par (1,1).

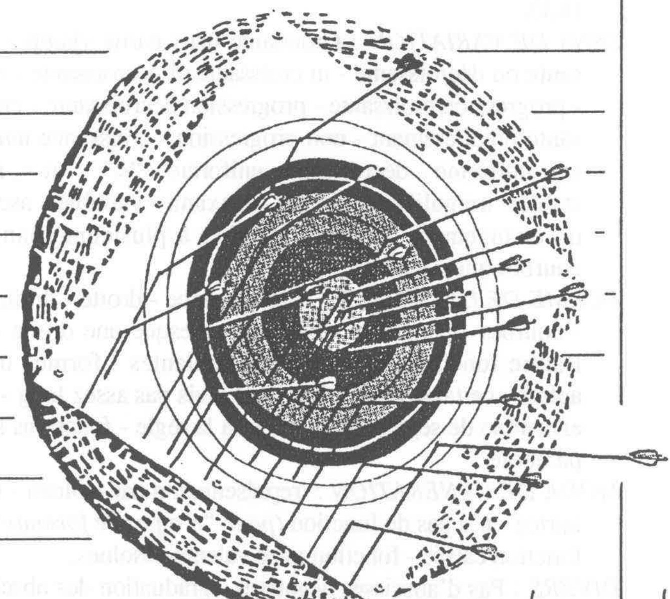
SENS DE VARIATION : Croissante dans partie visible - croissante - croissante ou décroissante - ni croissante ni décroissante - régulière croissante - progression croissante - progression décroissante - croissante et décroissante régulièrement - non progression - croissance uniforme - croissance non uniforme - décroissance uniforme - "<" - "ni <, ni >" - progression stable - irrégulière - minima - maxima - variable - ascendante - courbe à un changement de sens - courbes à plusieurs changements de sens - courbes qui montent.

FORME DE LA COURBE : Ligne courbe - droite - droite dans le graphique - courbes - paraboles - bombée - presque une droite - même forme que l'autre fonction - courbes ressemblantes - formes très différentes des autres - certaine proportionnalité mais pas assez long - normale - cloche - ensemble de segments - à tracer à la règle - fonctions sinusoïdales - demi parabole.

MODE DE GÉNÉRATION : représentation par tableau - fonction à la calculatrice - n'a pas de fonction *(pour "n'a pas de formule")* - sans nombres - fonction carrée - fonction avec valeurs absolues.

DIVERS : Pas d'abscisses négatives - graduation des abscisses en secondes - repère exprimé en temps - fonction qu'avec des x - expérience animale ou mathématique - fonction de temps.

Notes personnelles



LES VECTEURS

Jean-Pierre FORNALLAZ
IREM de Besançon

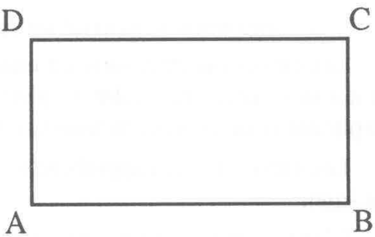
OBJECTIF DE L'ACTIVITÉ

C'est une première activité sur les vecteurs dans l'année de Seconde qui doit permettre de mettre en oeuvre les connaissances des classes de Premier cycle et de faire comprendre l'outil vecteur sous ses trois aspects : la longueur, la direction et le sens.

ENONCÉ DU PROBLÈME

Soit un rectangle ABCD. On considère un point M quelconque situé à l'intérieur du rectangle, bords compris.

On trace, passant par M, les droites (Δ) et (Δ') respectivement parallèles à (AB) et (AD). (Δ) coupe [AD] en E et [BC] en F. (Δ') coupe [AB] en G et [DC] en H.



Déterminer en justifiant l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$?

Le résultat est-il changé si l'on considère ABCD comme un parallélogramme non rectangle ?

Remarque : *ce problème s'inspire du texte d'un exercice du manuel Mathématiques 2e, Collection SPIRALE (Edition BELIN) page 64, édition 1990.*

FONCTIONNEMENT

Par un travail de groupes d'abord, suivi d'un débat ensuite, le but à atteindre est d'institutionnaliser en classe entière les acquis et d'appréhender de nouvelles connaissances au sujet des vecteurs.

L'activité se déroule sur une séquence de deux heures et demie. Ce problème relativement banal semble assez bien raviver les connaissances antérieures sur les vecteurs et faire entrer les élèves de seconde dans le cadre vectoriel.

DESCRIPTION DETAILLÉE DE L'ACTIVITÉ

Objectif de l'activité :

Il s'agit :

- de révéler les connaissances de 4ème et de 3ème.
- de révéler les conceptions (bonnes ou erronées) des élèves sur les vecteurs et la somme vectorielle
- d'asseoir les connaissances inscrites au programme de Seconde.
- de faire comprendre l'outil vecteur sous ses trois aspects : la longueur, la direction et le sens.

Situation dans la progression de la classe :

C'est une première activité sur les vecteurs dans l'année de Seconde.

Les élèves ont déjà suivi un enseignement sur l'égalité de deux vecteurs et sur la somme vectorielle. Cependant l'enseignant peut être conduit à faire expliciter la succession de translations par les élèves.

Les élèves doivent appréhender de nouvelles connaissances en Seconde à ce sujet.

L'enseignant envisage une capitalisation sous la forme d'une institutionnalisation des connaissances.

Scénario :

- La classe de seconde est en demi-classe de travaux dirigés.
- Les élèves sont répartis en groupes de trois ou quatre élèves. Ces groupes sont constitués depuis le début de l'année suivant les critères : mélange des sexes et des établissements d'origine.
- *L'enseignant distribue dans chaque groupe des feuilles comportant les mêmes figures (différentes pour chaque élève : le point M étant situé en trois endroits différents de l'intérieur du rectangle)*
- Pendant 15 minutes d'abord, les élèves travaillent seuls.
- Pendant 30 minutes, ensuite les élèves débattent dans le groupe, un élève rédigeant au fur et à mesure et au nom du groupe les idées testées.
- Pendant 45 minutes, un débat collectif s'installe au sujet des solutions proposées par les différents groupes. L'enseignant dirige le débat entre les représentants des groupes.
- L'enseignant écrit au tableau les idées qui obtiennent un consensus

entre les élèves de la classe et lui-même.

- L'heure suivante, en classe complète, l'institutionnalisation est transcrite sur le cahier des élèves.

Consigne :

- La consigne du travail personnel est de résoudre le problème.
- La consigne du travail de groupe est de rédiger sur une feuille, au fur et à mesure, toutes les idées testées et débattues par le groupe. La feuille est remise à l'enseignant pour le débat collectif.

Enjeu :

- L'enjeu est la "meilleure" solution du problème.

Raisons du choix de l'énoncé :

L'énoncé a été choisi pour permettre aux élèves de parler de vecteurs égaux et de somme vectorielle (relation de Chasles). D'où le choix d'un exercice abstrait de géométrie plutôt que le choix d'un exercice pseudo-concret de physique par exemple qui en réalité aurait obscurci la notion de vecteur par la notion de force. La notion de vecteur n'est pas née pour résoudre des problèmes mais pour simplifier et approfondir le calcul vectoriel et définir de nouvelles opérations (produit scalaire, produit vectoriel) adaptées à l'étude de phénomènes physiques.

La question posée (en termes de tanslation suivie de translation) est proposée aux élèves pour leur permettre de mettre en oeuvre les connaissances vues en 4ème et 3ème, connaissances liées directement aux vecteurs et à la somme vectorielle.

L'information est surabondante au départ (rectangle) ce qui doit permettre aux élèves de bien appréhender ce que le vecteur véhicule comme informations : longueur, sens et direction. La deuxième question renforce l'idée que seuls le parallélisme et les longueurs sont utiles dans la démonstration.

Procédures de résolution du problème :

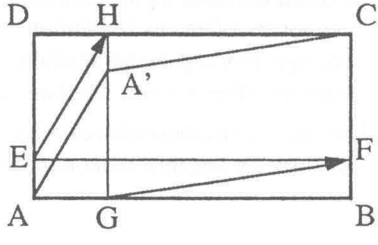


Figure support pour la résolution du problème.

Première méthode de résolution : à base de vecteurs.

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{EH}$ donc A' est sur (HG)

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'H}$

mais $\overrightarrow{A'H} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{GA'}$, alors $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{GF}$

D'où le résultat : $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AC}$

Deuxième méthode de résolution : à base de parallélogrammes.

AA'HE est un parallélogramme par définition de A', point d'intersection de (GH) et de la parallèle en A à (EH).

GA'CF est un parallélogramme parce que les segments [GA'] et [FC] sont de même longueur (différences de longueurs égales) et parallèles.

Explicitation du choix des différentes étapes du déroulement de l'activité :

-La préparation individuelle de l'activité permet à chaque élève de s'approprier l'énoncé du problème afin d'avoir une idée au moins à transmettre dans le groupe.

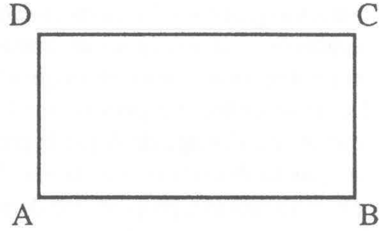
- Le travail de groupe favorise la construction du savoir par mise en commun et opposition des idées.
- Les figures différentes suggèrent que le problème ne dépend pas de la position de M dans le rectangle.
- Les groupes ont à rédiger au fur et à mesure les idées testées par le groupe. L'enseignant aura alors une production sous les yeux au moment du débat collectif et pourra intervenir dans les jours suivants auprès des membres des groupes s'il le juge nécessaire.
- Le débat collectif a plusieurs buts : permettre à des représentants de groupe d'exposer oralement la solution de leur groupe devant toute la demi-classe, échanger des arguments mathématiques déjà élaborés, retenir avec l'enseignant les idées à conserver dans la synthèse, définir la meilleure solution.
- Lors de l'institutionnalisation les élèves sont prêts à noter dans leur cahier de cours les résultats rencontrés lors de la séance collective précédente.

Compte rendu d'une utilisation de cette activité :

1) Le texte distribué aux élèves :

Soit un rectangle ABCD tel que AB = 2 AD. On considère un point M quelconque situé à l'intérieur du rectangle, bords compris.

On trace, passant par M, les droites (Δ) et (Δ') respectivement parallèles à (AB) et (AD). (Δ) coupe [AD] en E et [BC] en F. (Δ') coupe [AB] en G et [DC] en H.



Que peut-on dire de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$?

Le résultat est-il changé si l'on considère ABCD comme un parallélogramme seulement ?

2) Déroulement de cette utilisation:

- L'activité s'est déroulée dans deux demi-classes issues de deux classes différentes avec deux enseignants différents pour des raisons évidentes d'emploi du temps.
- Les classes sont formées avec le choix des options : Techniques sportives et T.S.A..
- L'observation des élèves en travail de groupes permet à l'enseignant de :
  - répondre à des questions de compréhension de l'énoncé,
  - relancer le travail dans les groupes si nécessaire,
  - reformuler des questions que se posent certains élèves,
  - rectifier la méthode utilisée si, par exemple, le vecteur n'est pas présent dans le travail du groupe.
- Les élèves étaient libres de choisir le point M.

3) Ce qui a été réalisé :

- Les élèves ont bien démarré le problème avec des vecteurs.
- Mis à part un seul groupe d'élèves qui a construit l'image de A par la première translation et l'image de A par la deuxième translation, tous les élèves ont bien construit l'image de A par les deux translations successives.
- Les élèves ont cherché à justifier le fait que le point A' est sur (GH), mais il leur est paru évident que C était l'image de A' par la deuxième translation,

soit avec la relation de Chasles, soit avec les parallélogrammes.(fiches A, C, D).

- Une bonne relation existe dans la tête des élèves entre vecteurs égaux et parallélogrammes. En revanche ils confondent vecteurs égaux et longueurs égales ou vecteurs égaux et même direction (fiche B). De plus la confusion entre direction et sens est fréquente.
- Le débat collectif a permis, sur l'insistance de l'enseignant, de démontrer que A' est l'image de A par la première translation et que C est l'image de A' par la deuxième translation. D'ailleurs, dans chaque demi-classe, un élève au moins a proposé une démonstration pour les points A' et C.
- Des remarques sur la liaison cas général et cas particulier ont été faites par des élèves.
- Ont bien été notées sur le tableau les notions de vecteur (avec longueur, sens et direction), vecteurs égaux et parallélogramme, vecteur nul, vecteur somme et relation de Chasles ainsi que la notation de la translation.

4) Analyse des écarts entre ce qu'ont fait les élèves et ce qui était attendu :

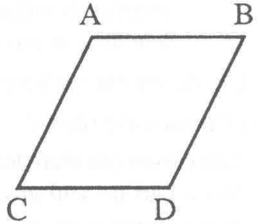
- Le manque de démonstration des affirmations a conduit à reformuler l'énoncé (Déterminer en justifiant...).
- La condition imposée au rectangle AB = 2 AD a provoqué beaucoup de cas particuliers de figures, aussi l'énoncé retenu ne comporte-t'il pas cette condition.
- Afin d'obtenir plusieurs figures différentes dans chaque groupe et de faire sentir la nécessité de démontrer, il a été retenu de distribuer des figures avec trois points déjà placés.

Capitalisation du travail : institutionnalisation

I-Egalité vectorielle

Chacune des propriétés suivantes signifie que

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et les longueurs AB et CD sont égales.
2) ABDC est un parallélogramme.
3) [AD] et [CB] ont le même milieu.
4) La translation, qui amène A en B, transforme C en D.

Remarques:

• possibilité d'un parallélogramme aplati avec 3).

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.

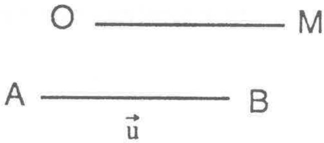
• M est le milieu de [AB] s'écrit vectoriellement : M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

• notation $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

• la norme du vecteur $\vec{u}$ est un réel positif, noté $\|\vec{u}\|$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$, si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

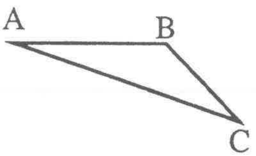
• O étant un point du plan, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que:

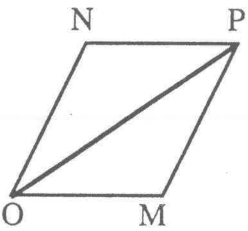
$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



II-Addition vectorielle.

1) Définition





$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ donnent $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: relation de Chasles.

$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ donnent $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP}$ tel que OMPN soit un parallélogramme

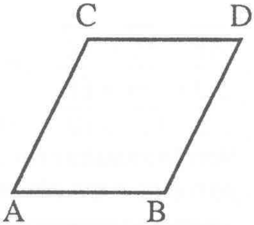
car $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP}$.

2) Propriétés • $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ • $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

• tout vecteur $\vec{u}$ admet un vecteur opposé, noté $-\vec{u}$ car $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont dits opposés

soit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

• $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{CA}$

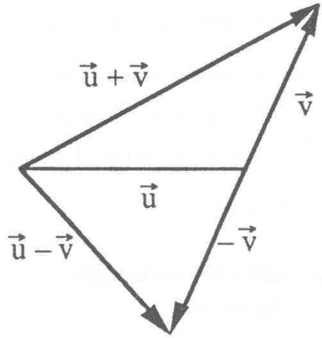


A, B, C étant trois points du plan, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

ou

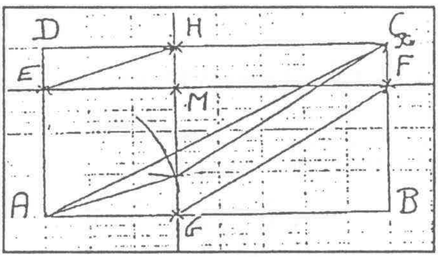
A est le symétrique de B par rapport à I.



Annexe

Travaux d'élèves :

Fiche A



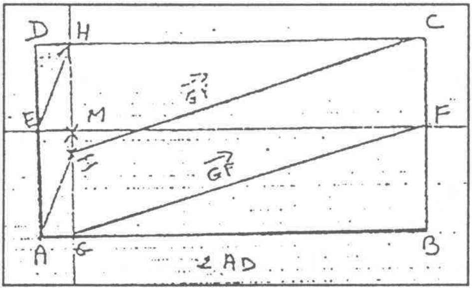
AB = 2AD
AD = 1/2 AB

$\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{EH} \overset{?}{=} \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{EH}$ *or ,* $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{GF}$ *donc* $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC}$

Non le résultat ne change pas si c'est un parallélogramme parce que les côtés sont parallèles 2 à 2.

Fiche B



Le point I se situe sur la droite Δ '

$\overrightarrow{AI} // \overrightarrow{EH}$

- *Soit [DA] // Δ '*

  I se situe sur la droite Δ '

  I est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$

  $\overrightarrow{EH} // \overrightarrow{AI}$

  $\overrightarrow{EA} // \overrightarrow{HI}$

  [EH] est de même longueur que [AI] $\rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AI}$

  [EA] est de même longueur que [HI] $\rightarrow \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HI}$

  Par hypothèse EHIA est un parallélogramme
- *Les points I et G ∈ Δ '*

  Le point F ∈ Δ et est sur le segment [BC].
  Δ ' // [CB]
  Comme [IG] est sur la droite Δ ' et que F est sur la droite (CB) alors

  [IG]ï//[CF] d'où $\overrightarrow{IG} // \overrightarrow{CF}$

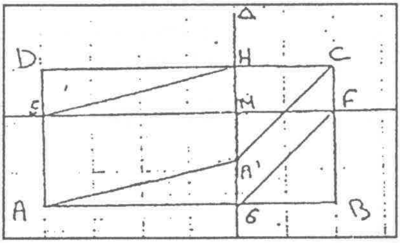
  C est l'image de la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$

  $\overrightarrow{IC} // \overrightarrow{GF}$

  $\overrightarrow{IG} // \overrightarrow{CF}$

  D'où IGFC est un parallélogramme

Fiche C



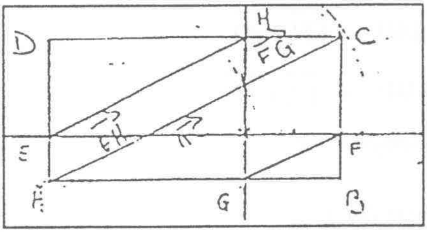
On trace l'image de A par la translation de $\overrightarrow{EH}$ *. On obtient A'.*

On trace l'image de A' par la translation de $\overrightarrow{GF}$ *. On obtient C.*

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AC}$ *selon la relation de Chasles.*

$\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC}$ *comme* $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AA'}$ *et* $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{A'C}$ *selon la définition d'un vecteur..*

Fiche D



On remarque que l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$ *suivie de la translation de vecteur* $\overrightarrow{GF}$ *est égale aux vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *c'est à dire la diagonale du rectangle ABCD. Le résultat ne change pas si l'on considère ABCD comme un parallélogramme.*

C image de A par la translation $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$

C image de A par la translation $\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$

$DH^2 + ED^2 = EH^2$
$BG^2 + FB^2 = GF^2$
$EH^2 + GF^2 = AC^2$

d'où $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$

A' image de A par la translation de $\overrightarrow{EH}$ *C image de A' par la translation de* $\overrightarrow{GF}$ *puisque deux translations doivent être suivis.*

$\vec{V} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF}$. $\vec{V}$ *est égal à la somme des 2 vecteurs* $\overrightarrow{EH}$ *et* $\overrightarrow{GF}$ *donc l'image de A est C.*

SECONDE 10

Elisabeth Hébert
Groupe didactique
IREM de Rouen

OBJECTIFS :

Cette activité vise à actualiser les connaissances suivantes :
- Choix de l'inconnue et utilité de l'équation ;
- Rôle de l'exact et de l'approché ;
- Formules d'aires et décomposition de figures.

Cette activité aide à la mise en place de la notion de fonction sous la forme algébrique

L'ÉNONCÉ :

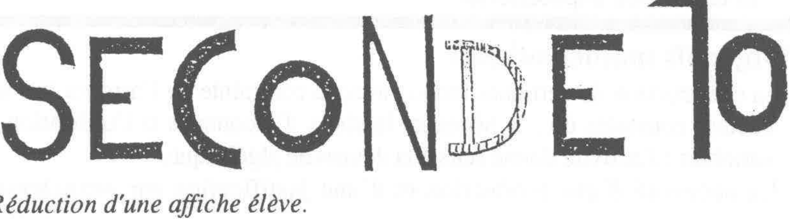
Ecrire «SECONDE 10» de sorte que l'aire de chaque caractère, lettre ou chiffre, soit de 50 cm^2.

CARACTÉRISTIQUES DE L'ACTIVITÉ :

- chaque élève peut se lancer un défi qui lui est propre ;
- travail de groupe indispensable ;
- multiplicité des démarches, des niveaux de difficultés ;
- existence d'une production matérielle.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

- Phase de recherche : 2 à 3 heures.
- Phase de restitution : 1 à 2 heures.
- Phase d'exploitation : variable.
- Phase de capitalisation : 1/2 heure.



Réduction d'une affiche élève.

L'activité ici présentée a été réalisée dans des classes aux profils différents (technique, scientifique, ...), avec des gestions de classe différentes. Une analyse détaillée comparative est publiée par l'IREM de Rouen.

Le développement et l'analyse ici exposés sont ancrés sur une classe au profil particulier : aucun élève ne suivra une Première S, beaucoup souhaitent faire une Première G, et ont un passé scolaire lourd. L'enseignant n'assure pas la totalité du programme.

L'énoncé :

Ecrire «SECONDE 10» de sorte que l'aire de chaque caractère, lettre ou chiffre, soit de 50 cm².

Avis au lecteur : avant d'aborder la lecture de ce texte, nous conseillons aux "matheux" que vous êtes de réaliser un S de son choix en respectant les arrondis !

Consignes.

L'énoncé est suivi de **consignes** qui peuvent varier suivant les classes, en particulier les contraintes concernant la forme des lettres. Pour la classe étudiée ici, les consignes sont écrites au tableau et commentées au fur et à mesure sous la forme suivante :

Travailler par groupes de 3 ou 4
Rendre le travail jeudi à 9 heures (soit 4 heures plus tard).
** Chaque groupe doit fournir :*
- Une affiche esthétique avec le résultat du travail,
- Pour chaque caractère, une explication de la démarche adoptée pour parvenir exactement à 50 cm²
** La notation prendra en compte :*
- la présentation,
- la diversité des méthodes utilisées,
- la difficulté visée, en particulier, le respect des arrondis,
- la clarté des explications.

*Objectifs mathématiques :

- La construction de certaines lettres, avec la contrainte de l'arrondi (ou une hauteur constante ou ...) nécessite le choix d'inconnues et l'utilisation de variables : l'activité donne sens à la démarche algébrique.
- La nécessité d'une production **et** d'une justification sur «exactement

50 cm²» impose une réflexion sur le choix à faire entre valeurs exactes et approchées. L'activité familiarise l'élève avec l'emploi de π et de $\sqrt{\ }$.

- L'emploi des différentes formules sur les aires (disques, parallélogram -mes ...) et la décomposition de figures est ici indispensable.

Nous savons que ces trois points sont loin d'être acquis pour la plupart des élèves qui entrent en seconde ... et qu'une seule activité ne sera pas suffisante pour les stabiliser.

Place dans la progression de la classe :

- L'activité a lieu en début d'année scolaire.
- Le travail sur les techniques de résolution d'équations est en cours : équations du premier degré ou s'y ramenant, équations du second degré sous la forme $ax^2 + b = 0$.
- Aucun travail spécifique n'a été fait sur l'exact et l'approché, ainsi que sur les aires.
- Il s'agit du premier travail de groupe et de la première activité longue.

Scénario :

Cette activité se déroule en plusieurs phases :

- Une phase de recherche et de production par groupes. Les démarches sont totalement libres dans le cadre de contraintes fixées par les consignes. Cette phase est suivie d'une évaluation du travail des groupes.
- Une phase de restitution. Elle permet à tous de prendre connaissance des productions des autres groupes et d'en faire une analyse critique. Elle est ici gérée à partir d'une fiche de parcours (voir annexe 1), mais cette phase peut aussi se gérer à partir d'exposés et débats, avec utilisation du tableau ou du rétroprojecteur.
- Une phase d'exploitation conçue pour permettre à tous de s'approprier la méthode algébrique qui s'est dégagée de la phase de restitution. Pour la classe étudiée, cette phase comporte un devoir sur la lettre D, un supplément sur la lettre S. Mais cette phase peut être gérée de toute autre manière à partir des productions des élèves.
- Une phase d'évaluation individuelle de l'apprentissage, elle se fait par un contrôle sur la lettre C.
- Une phase de capitalisation, au cours de laquelle l'enseignant cherche, à partir d'un questionnaire, à faire ressortir les acquis mathématiques et métamathématiques liés à cette activité.

Caractéristiques de l'activité :

Il s'agit d'une activité longue adaptée à un travail de groupe et à des niveaux d'élèves très variés. Pour chaque lettre, les élèves vont se lancer divers **défis** de réalisation, le niveau de difficulté est donc extrêmement variable, les démarches utilisées et savoirs mobilisés sont multiples.

L'exigence d'arrondis ne fournit aucune contrainte pour les caractères rectilignes qui sont alors simples à réaliser, mais par contre l'élève se trouve confronté aux équations du second degré dès qu'il aborde le O, le C, le S et le D.

Une production matérielle (affiches, fiches,...) incite le groupe à mener le travail **à son terme.** Cette activité même longue peut être pensée dans sa globalité : les différentes étapes de l'activité se trouvent fixées par l'objectif d'une production matérielle. L'**anticipation** de ce qui va être à faire s'opère pour tous.

Par ailleurs, la production tangible de plusieurs lettres de 50 cm^2 peut donner, par comparaison, aux élèves un moyen de **contrôle** immédiat sur la vraisemblance de leurs propositions.

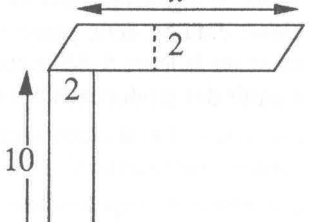
La justification d'une démarche menant à 50 cm^2 et exactement 50 cm^2 est un défi mathématique. Il appartient au contrat ordinaire de la classe de mathématiques. L'élève accepte volontiers de le relever.

Différentes procédures de résolution du problème :

Avec encore plus d'originalité que nous l'avions prévu (voir la fiche de parcours annexe 1), les élèves emploient des procédures élémentaires :

- *Par découpage à partir d'un rectangle d'aire 50 cm^2 puis recollage sous forme de lettres.*
- *Par pavage et comptage sur la base de 12 carreaux 1/2 d'aire 4 cm^2 , ou de 25 carreaux d'aire 2 cm^2 ou ...*
- *A partir du quadrillage (1/2 cm x 1/2 cm) d'une feuille, en utilisant les formules d'aires du rectangle et du triangle rectangle et en complétant par comptage.*
- *Par recherche d'une quantité inconnue du premier degré.*

Exemple :



Il y a deux types de démarches possibles :

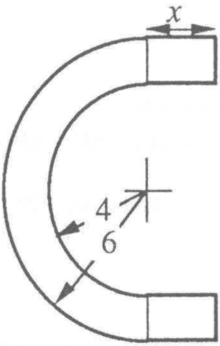
- **arithmétique :**

  aire d'un parallélogramme $(50 - 20) : 2 = 15$ cm^2

  longueur du côté du parallélogramme 7,5 car $2 \times 7{,}5 = 15$

- **algébrique :**

  $20 + 2.(2x) = 50.$



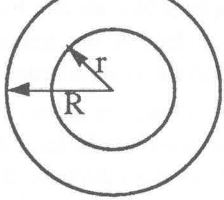
La démarche arithmétique convient parfaitement pour les caractères rectilignes mais ne peut convenir pour les caractères arrondis.

Exemple :

Dans une démarche arithmétique, l'élève calcule au fur et à mesure le résultat de l'opération $(\pi 6^2 - \pi 4^2) : 2$, le résultat exact n'est donc pas obtenu. Il écrit plus volontiers les nombres exacts avec une démarche algébrique : $\dfrac{\pi\, 6^2 - \pi\, 4^2}{2} + 2(2x) = 50$.

- *par recherche d'une quantité inconnue au second degré :*

  Beaucoup de problèmes se ramènent à $x^2 = k$.



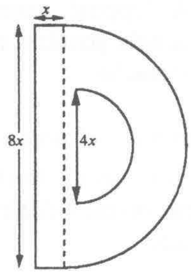
Exemple :

Construire un O tel que l'aire du grand disque soit 100 cm^2 et l'aire du petit disque soit 50 cm^2.

La recherche d'une solution «à tâtons» est possible, mais ne donne pas le résultat exact. Seule une formulation algébrique donne la réponse :

$\pi R^2 = 100$ donc $R = \sqrt{\dfrac{100}{\pi}}$

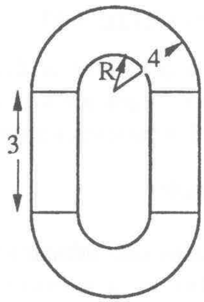
et $\pi r^2 = 50$ donc $r = \sqrt{\dfrac{50}{\pi}}$.



Mais la situation peut devenir beaucoup plus complexe et nécessiter une véritable mise en équation.
Exemple :

On a alors : $8x^2 + \frac{16\pi x - 4\pi x^2}{2} = 50$ et $x = \frac{5}{\sqrt{3\pi + 4}}$.

A signaler que certaines équations peuvent être du second degré de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$, ce qui nécessite de changer certaines exigences quant à la forme de la lettre ou de faire appel à une compétence extérieure.



Exemple :
on a alors $(\pi 4^2 - \pi R^2) + 2(3(4 - R)) = 50$

soit $-\pi R^2 - 6R + 26 - 16\pi = 0$.

Analyse des productions des élèves :

Les défis :

Pour la plupart des élèves, la hiérarchie des difficultés a été perçue confusément. Les élèves se sont attaqués d'abord aux lettres les plus simples E (parties rectilignes et nombres entiers), N (partie rectilignes mais nombres approchés liés aux fractions), O (arrondi mais familier), puis enfin C, D, S. Il y a donc eu une anticipation des procédures en jeu pour parvenir à la production de tel ou tel caractère.

Outre cet aspect global concernant l'organisation du travail, les défis que se sont lancés les élèves sont extrêmement variables. Nous pointerons ici deux types particuliers d'élèves qui ont retenu notre attention :

- Des élèves «en difficulté», qui se lancent des défis extrêmement ambitieux : l'espace de liberté les y incite mais, par absence d'anticipation, ils ne parviennent pas à cerner les défis qu'ils sont en mesure de relever.
- A l'opposé, certains élèves «en difficulté» cherchent la solution la plus simple possible, trop habitués à chuter sur les chemins de l'aventure intellectuelle.

Formules d'aires et décomposition de figures :

Le travail effectué dans ce domaine, au cours de l'activité, s'est situé à deux niveaux différents, selon les acquis antérieurs des élèves sur le concept d'aire.

Cette activité a été, pour de nombreux élèves (beaucoup plus rares dans les autres expérimentations), l'occasion d'une remise en mémoire de connaissances élémentaires et cependant fondamentales sur les aires :

- avec une procédure de découpage, certains élèves s'interrogent sur la possibilité de superposer les morceaux : a-t-on $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ lorsque $A \cap B = \varnothing$?
- avec une procédure par pavage on comptage, certains élèves retournent à la décomposition de figures en pavés unitaires (de 4 cm^2 ou 2 cm^2 ou 5 cm^2) ;
- avec une procédure qui, sur la base d'une feuille quadrillée, s'effectue par comptage et utilisation de formules d'aires élémentaires, les élèves retournent à la signification des formules d'aires.

A un niveau moins élémentaire, les élèves ont utilisé la décomposition des figures et l'outil formules d'aires ; ils recourent alors à divers formulaires (livre, agenda). Certaines figures, comme la couronne et le parallélogramme sont source de nombreuses difficultés.

Vers la démarche algébrique :

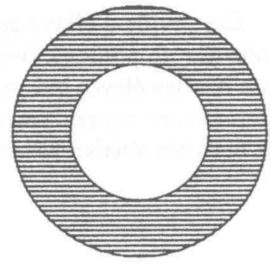
La production de caractères rectilignes se gère aisément par une démarche arithmétique, sauf peut-être pour la rédaction de la justification : il est alors plus aisé d'écrire une équation, mais peu d'élèves le perçoivent.

La construction de la lettre O a mené tous les groupes de cette classe à chercher «à tâtons» la valeur de R (et r) qui permettrait d'obtenir le mieux possible la quantité fixée, par exemple 75 cm^2 pour le grand cercle et 25 cm^2 pour le petit cercle.

Au fur et à mesure qu'un élève ou un groupe s'est lancé dans cette fastidieuse recherche à la calculatrice, le professeur est intervenu pour inciter celui-ci à écrire ce qu'il recherchait ; avec un peu d'hésitations les élèves ont écrit $\pi R^2 = 75$. Le professeur les a alors invités à mettre ceci en relation avec la résolution de l'équation $3x^2 = 7$ étudiée quelques cours auparavant. Les élèves ont alors produit des justifications du type :

Je choisi de prendre : 75 cm^2 – 25 cm^2.

Calcul du grand rayon :	*Calcul du petit rayon :*
$A = R^2 \times \pi$	
$75\ cm^2 = R^2 \times 3{,}14$	$25\ cm^2 = R^2 \times 3{,}14$
$R^2 = \dfrac{75}{3{,}14}$	$R^2 = \dfrac{25}{3{,}14}$
$R^2 = 23$	$R^2 = 7{,}9$
$R = 4{,}7$	$R = 2{,}8.$



Pour obtenir un résultat exact, l'emploi d'une équation du type $\pi R^2 = 75$. ne suffit pas ; elle doit s'accompagner d'une formulation correcte de la solution sous la forme $\sqrt{\frac{75}{\pi}}$. Il faut donc abandonner les nombres approchés pour passer aux nombres exacts. Progressivement, au cours des différentes phases, les élèves abandonnent la démarche arithmétique, convaincus de l'efficacité (rapidité et simplicité) de la démarche algébrique. Ceux pour qui le langage algébrique est uni de sens en viennent à percevoir la force de l'écriture $A(x) = 50$ pour déterminer une valeur exacte de x. Ceux-ci l'emploient alors avec aisance.

Evaluation de la démarche algébrique :

Tous les élèves parviennent-ils à s'emparer de la démarche algébrique avec autant d'aisance ?

Une analyse des procédures utilisées par les élèves lors de la phase d'évaluation sous la forme d'un contrôle sur la lettre C (voir annexe 3), donne, pour cette classe particulièrement faible, la répartition suivante :

- pour 1/4 : les élèves ne l'utilisent pas du tout, soit parce qu'ils parviennent à utiliser la démarche arithmétique avec aisance et se sufisent de valeurs approchées,ilst refusent donc toujours ce nouvel outil, soit parce qu'ils sont trop désinvestis de l'école pour fournir l'effort que demande cette activité lorsque les caractères deviennent complexes.
- pour 1/4 : les élèves tentent une utilisation de l'inconnue x mais en vain ; le langage algébrique n'est pas muni de sens. L'utilisation correcte de la démarche arithmétique, des formules d'aires, de l'exact et de l'approché ne serait-elle pas suffisante pour ce type d'élève dans un premier temps ?
- pour 1/4 : les élèves s'emparent de l'outil démarche algébrique, mais ils échouent : ensemble d'informations trop complexe, calcul avec π, $\sqrt{\ }$, divisions trop difficiles, ...
- pour 1/4 : les élèves recourent à la forme $A(x) = 50$ qu'ils traitent avec aisance ou avec des erreurs minimes.

Ces profils d'élèves se retrouvent pour toutes les expérimentations, mais dans des proportions évidemment différentes, plus réjouissantes ! Est-ce à dire que les élèves qui ne parviennent pas à utiliser l'outil «démarche algébrique» n'en ont pas perçu le sens ? Les propos que nous avons recueillis et les activités ultérieures nous laissent penser le contraire.

Analyse des différentes phases :

La phase de recherche :

La plupart des élèves se sont véritablement investis dans cette activité. Ce premier travail de groupe a très majoritairement satisfait les élèves :

Avez-vous aimé le travail de groupe ,

> «Oui, on peut prendre ses responsabilités sans avoir à demander au professeur»
>
> «Oui, l'ambiance est plus agréable. Nous pouvons nous aider entre nous. C'est plus motivant».
>
> «Oui car c'est nouveau et rare en maths. On réfléchit plus».
>
> «Oui, car on s'éclate plus.»

Cependant, vu par l'enseignant, des problèmes se sont posés pour trois des sept groupes, à savoir :

- Le manque de concentration. Une occasion rêvée pour chahuter, l'adaptation à ce nouveau contrat n'est pas immédiate.
- Le manque de suivi dans le travail : problème d'absentéisme d'une séance à l'autre (hélas non spécifique à cette activité).
- Un regroupement d'élèves dit «caractériels».

Le rôle du professeur a été, comme dans toute activité, de réguler la dynamique de la classe. Ses interventions sur le savoir en jeu se sont limitées au passage de la démarche «à tâtons» à la démarche algébrique.

Une évaluation du travail de chacun des groupes a aussitôt eu lieu. Celle-ci fut notée pour signifier à l'élève la valeur du travail scolaire fourni. L'enseignant a noté et commenté pour chaque groupe : le fonctionnement collectif, la présentation de l'affiche, la qualité mathématique, la diversité et l'originalité. L'élève a accepté volontiers la prise en compte de ces nouveaux aspects dans la note attribuée au groupe.

La phase de restitution :

Elle a comporté deux éléments :

- La réalisation d'une **affiche** par groupe. Elle insiste sur la globalité du travail de groupe, et suscite un contrôle visuel comparatif sur la «taille» des caractères.
- La **fiche de parcours.** Elle propose aux élèves un parcours organisé à travers les multiples productions des différents groupes. Elle est élaborée par le professeur pour mener chacun des élèves vers une appropriation des formules d'aires et de la démarche algébrique. Celui-ci veille, par ailleurs, à mettre en valeur au moins une des lettres de chacun des groupes. Elle est

parcourue par chaque élève, à son propre rythme, éventuellement avec la collaboration des voisins immédiats. Elle a souffert, elle aussi, de la nouveauté du contrat qu'elle exige : les cours de maths ne sont pas des lieux où l'on s'éternise en s'interrogeant sur ce qui a été produit par d'autres.

Une restitution par exposés oraux aurait-elle été préférable ? On peut en douter. Les difficultés d'écoute et d'expression rendent les échanges mathématiques extrêmement difficiles dans cette classe au profil particulier.

La phase d'exploitation :

Il s'agit de partir des défis que se sont lancés les élèves, pour mener le maximum d'entre eux à s'approprier la démarche algébrique.

Le devoir sur la lettre D (annexe 3) : chacun des problèmes envisagés dans ce devoir ne peut se trouver résolu que par une démarche algébrique du type $A(x) = 50$. La donnée du résultat exact, par exemple $x = (64 - 17\pi) : 2$, impose à l'élève d'avoir recours à cet outil, même si celui-ci lui semble bien obscur et angoissant. Une aide individuelle est proposée aux élèves qui le souhaitent.

Le super Supplément sur la lettre S : cette fiche reprend les différentes lettres S proposées par la classe, beaucoup de productions n'étant d'ailleurs pas valides. Elle est conçue comme un supplément pour les quelques élèves s'étant approprié la fiche de parcours.

La phase d'évaluation :

Un **Contrôle sur la lettre C** permet une évaluation «à chaud» des compétences des élèves. Les résultats médiocres de celui-ci ont été analysés auparavant.

La phase de capitalisation :

Quel savoir institutionnaliser au terme de cette activité ?

Rien, nous semble-t-il. Il serait vain de faire écrire aux élèves ce qu'est une équations, une valeur exacte, une valeur approchée. Seules les formules d'aires seraient institutionnalisables, mais inutilement, les élèves savent parfaitement utiliser des formulaires.

Par contre, amener les élèves à une conscience plus claire de ce qu'ils ont découvert à travers cette activité nous a semblé essentiel. Le questionnaire capitalisation porte donc sur deux aspects :
- les contenus, en particulier équations, valeurs exactes et approchées ;
- le contrat en vigueur dans la classe à l'occasion de cette activité.

1) Que pensez-vous avoir appris au cours de cette activité ?
- en mathématiques ?
- dans d'autres domaines ?
2) En quoi les équations vous ont-elles été utiles ?
3) Quand utiliser une valeur exacte ? une valeur approchée ?
4) Avez-vous été intéressé par la recherche d'un tel problème ? Pourquoi ?
5) Avez-vous aimé travailler en groupe ? Pourquoi ?
6) Que pensez-vous du travail sur fiches à partir des propositions de vos camarades ?

Les réponses des élèves nous ont permis de mieux mesurer le message effectivement reçu ; nous avons ainsi pu élaborer des activités ultérieures, en tenant compte de la réaction des élèves face au nouveau contrat.

Le réinvestissement :

Sous l'angle de la gestion de classe, la régulation du travail par activités a pu se faire, comme nous venons de le voir, à partir du questionnaire précédent.

En ce qui concerne les acquis, les élèves ont réinvesti ceux-ci dans de multiples problèmes d'aire utilisant l'écriture **en fonction de x**, mettant ainsi en place la diminution algébrique du concept de fonction. C'est cet aspect du savoir qui sera l'occasion d'une institutionnalisation.

En particulier, la série d'activités enchaînées «les exigences du promoteur» intitulées
- le terrain d'Al Khawarizmi
- la tour du promoteur
- un maximum pour le promoteur

a permis, à partir de ces acquis, d'explorer le concept de fonction dans les cadres algébriques et graphiques (voir annexe 4).

Conclusion :

L'activité «Seconde 10» a intéressé les élèves, mais au regard du temps qu'elle a nécessité, a-t-elle permis les progrès escomptés ? Partiellement, sans doute. Nous savons qu'une seule activité, même longue, ne peut venir à bout d'échecs en mathématiques de vieille date… et qu'un apprentissage de ce type, ne se stabilise qu'avec l'usage et le temps.

A travers cette activité, c'est une autre fiorme de relation aux mathématiques qui est proposée aux élèves. Par sa nouveauté et l'autonomie qu'il instaure, ce nouveau contrat séduit les élèves, mais par ses exigences d'approfondissement, il dérange ces élèves habitués à capituler face aux difficultés dans l'espoir qu'on passe rapidement à autre chose. La forme de travail ici proposée impose donc une modification du rapport au savoir de l'élève. Cette activité ne peut espérer à elle seule provoquer le changement escompté, elle devra être relayée par des activités construites dans la même perspective, tant en mathématiques que dans les autres disciplines. C'est du moins ce défit qu'a tenté de relever l'équipe pédagogique de la classe particulière qui fait l'objet du présent compte rendu. L'activité «Seconde 10» aura contribué à cette évolution.

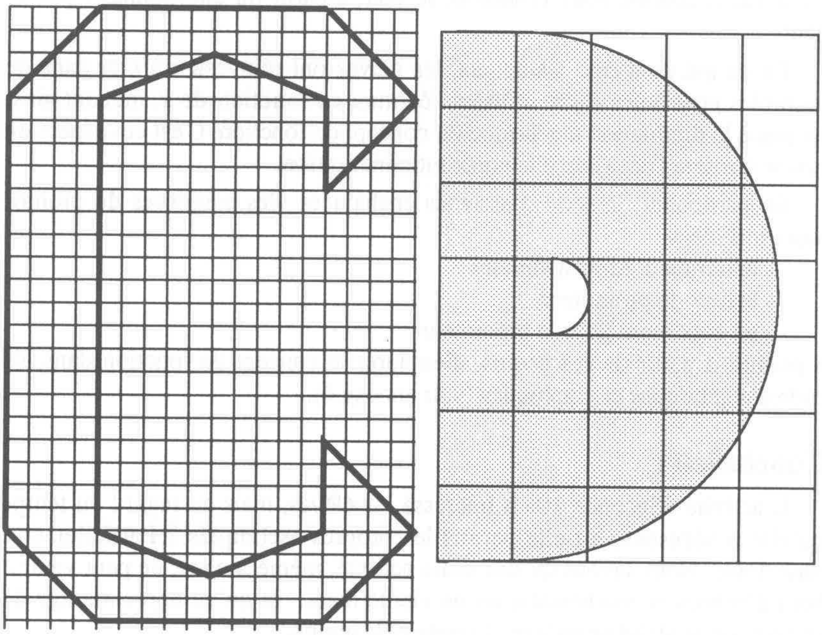
ANNEXE 1

Fiche de parcours - page 1

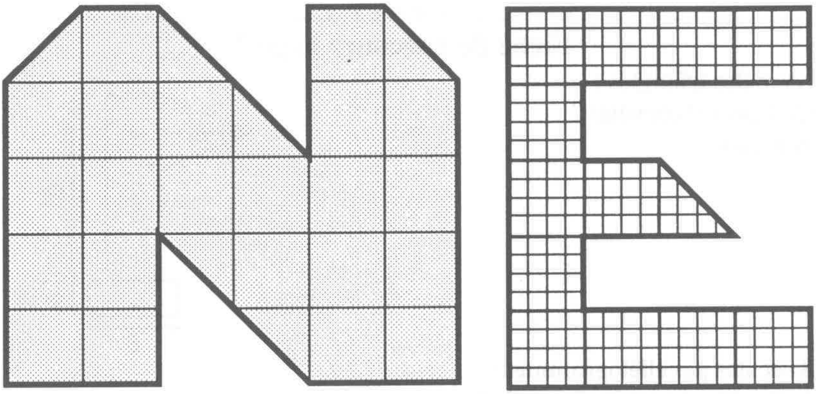
Avec des quadrillages : ces lettres sont tracées avec des carreaux de 1 cm^2, ou 2 cm^2, ou 4cm^2.

1- Quelles lettres conviennent ? Pourquoi ?

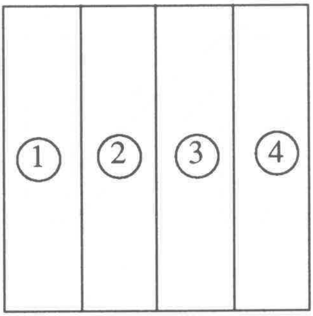
2- Que faut-il modifier pour qu'elles conviennent ?



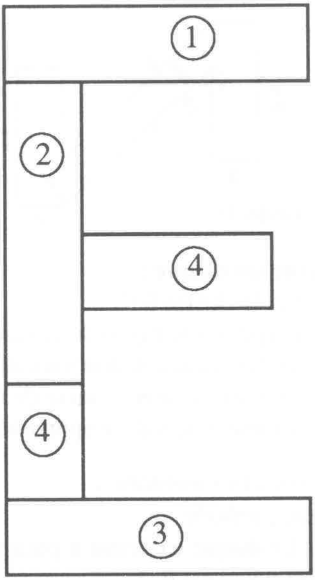
(les lettre sont données aux élèves en grandeur réelle).



Avec des bandes de papier de même largeur :
On découpe puis recolle comme un puzzle.



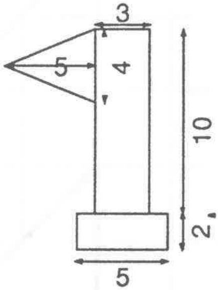
- On construit un carré de 50 cm^2 d'aire.
Quelle est :
  - la longueur exacte du côté du carré ?
  - la longueur approchée 5 10^{-1} cm près du côté du carré ?
- Avec quelle autre bande de papier aurait-on pu travailler ?



Fiche de parcours page 2

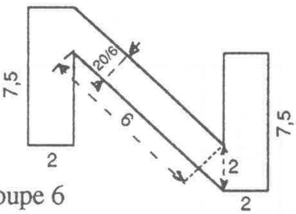
Avec des triangles :

Ce 1 peut-il convenir ?
Pourquoi ?

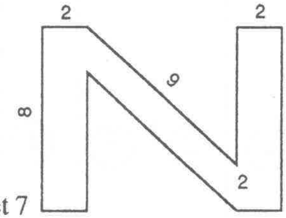


Avec des parallélogrammes :

1- Ces N peuvent-ils convenir ?
Pourquoi ?
2- Construire avec une méthode semblable un N qui convienne.



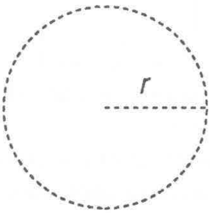
Groupe 6



Groupes 4 et 7

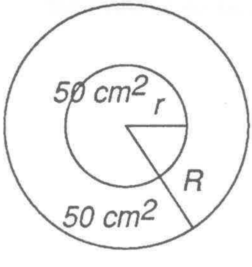
Avec un disque :

Voici le chiffre 0 !!!
On appelle *r* le rayon de ce disque.
1- Quelle équation doit vérifier *r* ?
2- Donner la valeur exacte de *r* ?
3- Donner une valeur approchée de *r* ?

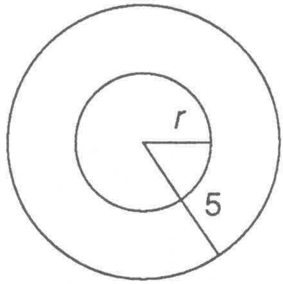


Avec une couronne :

1ère méthode :
1- Le disque extérieur a pour aire 100 cm ^{2}.
Son rayon est *R*.
Quelle équation vérifie *R* ? Trouver *R*.
2- Le disque intérieur a pour aire 50 cm ^{2}.
Son rayon est *r*.
Quelle équation vérifie *r* ? Trouver *r*.
3- *R* est le double de *r*. Est-ce normal ?
4- Construire un tel O.



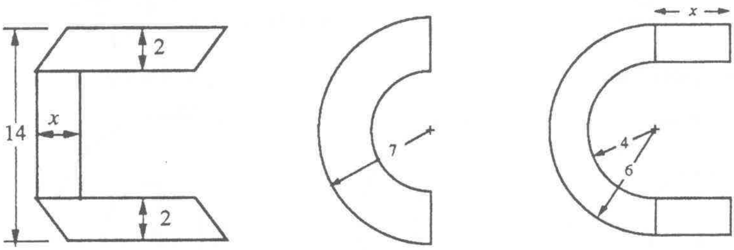
2ème méthode :
1 on choisit $R = 5$ cm pour le rayon du disque extérieur.
Quelle est l'aire exacte de ce disque ?
2- On appelle r le rayon de ce disque.
Quelle équation doit vérifier r ?
3- Donner la valeur exacte puis approchée de r.
4- Construire un tel O.



Annexe 3

Contrôle (2° partie)

Construire des lettres de 50 cm^2 satisfaisant aux exigences suivantes :

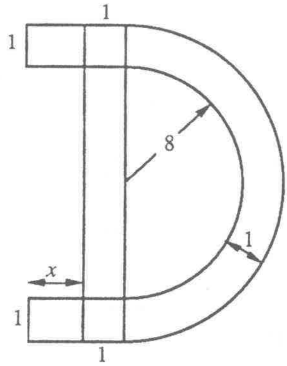


On aura soin de donner les valeurs exactes et approchées de chacune des longueurs représentées. On justifiera celle-ci.

Devoir

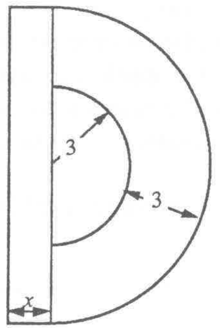
Construire des lettres de 50 cm^2 satisfaisant aux conditions imposées par les figures.
On aura soin de donner à chaque fois les justifications et équations
les valeurs exactes puis approchées.
On donnera pour chacune des possibilités la construction de D en grandeur réelle.

Première possibilité :



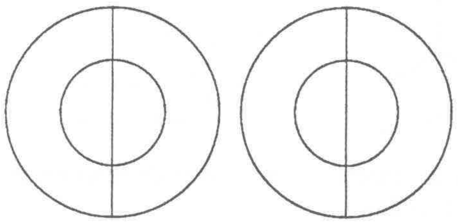
Solution : $x = \dfrac{64 - 17\pi}{4}$

Deuxième possibilité :



Solution : $x = \dfrac{100 - 27\pi}{24}$

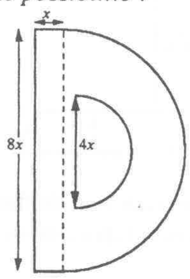
Troisième possibilité :



disque extérieur 100 cm^2
disque intérieur 50 cm^2

Solution : $x = \dfrac{5\sqrt{\pi}}{4}$

Quatrième possibilité :



Solution :

$$x = \sqrt{\frac{50}{6\pi + 8}} = \frac{5}{\sqrt{3\pi + 4}}$$

Annexe 4

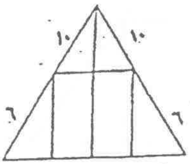
Activités enchaînées

Activité 1 : Le terrain d'Al Khwarizmi - Un problème d'arpentage (par groupes).

Phase 1 : Tracer un carré à l'intérieur d'un triangle isocèle de côtés 10, 10, 12, tel que les sommets appartiennent aux côtés du triangle. Justifier la figure.

Phase 2 : Ecrire la solution d'Al-Khawarizmi en utilisant les notations d'aujourd'hui.
Que sait-on de ce mathématicien ?

[فإن قيل]
أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع عشرة
أذرع والقاعدة اثنا عشر ذراعا في جوفها
أرض مربعة كم كل جانب من المربعة بقياس
ذلك أن تعرف عمود المثلثة وهو أن تضرب نصف القاعدة وهو ستة في مثله فيكون
ستة وثلاثين فانقصها من أحد الجانبين الأقصرين مضروبا في مثله وهو مائة
يبقى أربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو العمود وتكسيرها ثمانية وأربعون
ذراعا وهو ضربك العمود في نصف القاعدة وهو ستة فجعلنا أحد جوانب
المربعة شيئا وضربناه في مثله فصار مالا فحفظناه ثم علمنا أنه قد بقي لنا مثلثان
عن جنبتي المربعة ومثلثة فوقها فأما المثلثان اللذان على جنبتي المربعة فهما متساويان
وعمودهما واحد وهما على زاوية قائمة فتكسيرهما أن تضرب شيئا في ستة إلا
نصف شيء فيكون ستة أشياء إلا نصف مال وهو تكسير المثلثين جميعا اللتين
هما على جنبتي المربعة. فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية غير شيء
وهو العمود في نصف شيء فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال فهذا هو تكسير
المربعة وتكسير الثلاث مثلثات وهو
عشرة أشياء تعدل ثمانية وأربعين هو
تكسير المثلثة العظمى فالشيء الواحد من
ذلك أربعة أذرع وأربعة أخماس ذراع
وهو كل جانب من المربعة وهذه
صورتها.



D'après une traduction orale d'A.Djebbar lors d'un exposé :

Si on dit : une terre triangulaire ayant des côtés de 10, 10, 12 coudées, dans son ventre (à l'intérieur) une terre carrée. Quel est le côté de cette terre ?

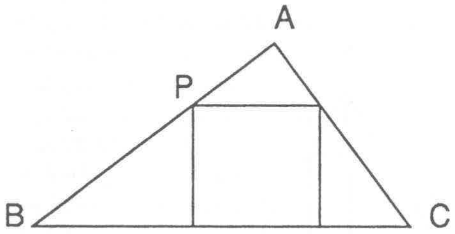
Multiplie la moitié de la base par elle-même, retranche-la de l'un des côtés les plus petits multiplié par lui-même et c'est 100, il reste 64.

Prends sa racine qui est 8, et c'est la hauteur. Et son aire est 48, et c'est le produit de la hauteur par la moitié de la base qui est 6.

Nous posons l'un des côtés de la terre carrée, une chose. Nous la multiplions par elle-même, elle devient le «capital» (mal), nous la conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les flancs du carré et un triangle au-dessus de lui. Quant aux deux triangles qui sont sur les flancs de la terre carrée, ils sont égaux et leur hauteur est la même et ils ont un angle droit. Donc leur aire s'obtient en multipliant une chose par six moins une demi chose, ce qui donne 6 choses moins une demie d'un carré : et c'est l'aire des deux triangles ensembles qui sont sur les 2 flancs de la terre carrée. Quant à l'aire du triangle supérieur, elle s'obtient en multipliant 8 moins une chose, qui est la hauteur, par la moitié d'une chose, cela donne 4 choses moins la moitié d'un carré. Ceci est l'aire de la terre carrée et des 3 triangles, et c'est 10 choses et égale à 48, qui est l'aire du grand triangle. La chose est donc 4 coudées et 4/5 et c'est chaque côté de la terre carrée et voici sa figure.

(D'après : *Découvrir les mathématiques arabes* - Irem de Rouen.)

Activité 2 : La tour du promoteur (multiples gestions possibles éventuellement en devoir avec un énoncé fermé).
Un promoteur immobilier veut construire une tour carrée sur un terrain triangulaire de 30, 40 et 50 m.
AB = 30, AC = 40, BC = 50.
Où faut-il placer le point P ?



Activité 3 : Un maximum pour le promoteur (par groupes).
Un promoteur dispose d'un terrain triangulaire de côtés 30, 40 et 50 m. Il veut construire un immeuble rectangulaire s'appuyant sur le côté de 50 m. Où mettre l'immeuble pour que celui ci ait un profit maximum ?

Pour plus de détails sur ces activités enchaînées; voir la brochure publiée par l'IREM de Rouen : *«Activités et gestion de la classe : un exemple : seconde X»*.

DE LA MOYENNE
A
L'ECART-TYPE

Alain Macé
IREM de Rouen

Objectif principal :

Amener les élèves à construire eux-mêmes l'écart-moyen.

Énoncé :

Après quelques exercices préalables pour fixer les notions d'élève régulier et de résultats homogènes :

> *Dans une classe, un professeur de mathématiques veut examiner avec soin et comparer les résultats de tous ses élèves. Ce professeur, très consciencieux, décide de mettre au point un calcul, dont le résultat serait **C**, à faire sur les notes de chacun des élèves.*
> *Le nombre **C** obtenu par le même procédé pour chacun des élèves répondrait simultanément aux deux exigences suivantes :*
> *- **C** est positif*
> *- Plus **C** est petit, plus les résultats sont **homogènes.***
> *Que proposez-vous comme calcul qui répondrait à ces deux conditions ?*

7

Déroulement de l'activité :

Après une phase préliminaire essentielle d'appropriation de la notion de résultats homogènes, les élèves, par un travail de groupe, proposent un calcul qui puisse traduire cette notion. Un débat sur la pertinence des propositions faites, conduit à écarter de nombreuses propositions et à privilégier l'écart-moyen. L'écart-type se trouve défini au cours de la phase d'institutionnalisation.

Prévoir deux séances distinctes.

DE LA MOYENNE A L'ECART-TYPE

Objectifs :

* Amener les élèves à construire eux-mêmes l'écart-moyen.
* Introduire l'écart-type.
* Réfléchir sur la signification des outils statistiques.
* Utiliser le contre-exemple et le débat.

Situation :

* *Pour ce qui est de la gestion de la classe :*

Il est souhaitable que cette activité ait lieu après avoir familiarisé les élèves à un travail de groupe avec débat et recherche de contre-exemples sur des énoncés ouverts. En effet, il s'agit d'«inventer» un nouvel objet, ce qui peut être très loin de la pratique de certains élèves habitués à être des exécutants.

* *Pour ce qui est des contenus :*

Cette activité se place :

- n'importe quand dans l'année, même si la valeur absolue n'est pas encore vue.
- après quelques séances destinées à reprendre le vocabulaire statistique, les graphiques et les calculs de moyennes. A partir de quelques exercices (donnés en annexe 1), le professeur a fait réfléchir à la signification des diverses représentations graphiques et en particulier à la signification des «bâtons» comme étant proportionnels au «poids» dont chacune des valeurs est chargée. Il a fait préciser les notions d'«élève régulier» (par rapport à l'ordre chronologique) et de «résultats homogènes» (qui font appel à la notion de dispersion sans tenir compte du temps).

* *Attention :* Dans les classes de secondes dites «faibles», cette activité doit être menée avec prudence et chaque étape parfaitement respectée.

Enoncé :(donné aux élèves en trois étapes)

I. Approche. *(construction de séries plus ou moins homogènes)*

Un professeur, après avoir étudié les notes de 2 élèves, déclare :

«Ces élèves ont exactement 9 de moyenne et l'un a des résultats beaucoup plus homogènes que l'autre».

Quelles pourraient être les notes de ces deux élèves ? (on donnera une dizaine de notes environ par élève).

II.Recherche (propositions de calcul pour C).

> Dans une classe, un professeur de mathématiques veut examiner avec soin et comparer les résultats de tous ses élèves. Ce professeur, très consciencieux, décide de mettre au point un calcul, dont le résultat serait **C**, à faire sur les notes de chacun des élèves.
>
> Le nombre **C** obtenu par le même procédé pour chacun des élèves répondrait simultanément aux deux exigences suivantes :
> - **C** est positif
> - Plus **C** est petit, plus les résultats sont **homogènes.**
>
> Que proposez-vous comme calcul qui répondrait à ces deux conditions ?

III.Validation (fait suite à la restitution).

Sans faire de représentation graphique, mais en utilisant le calcul de C qui n'a pas (encore!) été refusé, déterminer lequel de ces deux élèves a les résultats les plus homogènes :
E1 : 05.10.12.16.14.08.14.12.08 ou E2 : 10.05.11.10.12.12.17.12.10.11 ?

Scénario :

Première séance (1 heure).
Approche : construction des séries plus ou moins homogènes.

Travail individuel puis par groupes de 2 ou 4 élèves. Débat interne au groupe sur la validité des exemples proposés. Intervention du professeur si nécessaire.15 minutes dont 5 minutes en recherche individuelle.

Recherche : propositions de calculs pour C.

Travail individuel puis par groupes. Production d'un document qui sera rendu au professeur à la fin de l'heure. Aucune intervention du professeur.

Deuxième séance (1 heure).
Restitution :

Débat en classe entière : pourquoi accepter telle ou telle proposition ? Si elle a été suggérée, seule reste invalidée la somme des écarts à la moyenne.

Validation :

Le professeur propose à tous l'étude du même exemple pour «valider» la proposition d'écart-moyen.

Troisième séance (1/2 heure).
Institutionnalisation :

Le professeur établit un résumé de cours comportant : l'étendue, l'écart moyen, la variance et l'écart-type.

L'analyse présentée ci-après ne distingue pas les analyse a priori et a posteriori. Sous des formes proches, cette activité a été faite de nombreuses fois ; le scénario et l'analyse ici proposés en sont l'aboutissement.

Analyse :

L'approche :

Cette phase fait suite aux exercices (voir annexe 1) ayant permis de réfléchir à la différence entre «élève régulier» qui joue avec la relation d'ordre fixée par le temps et «résultats homogènes» où il est fait abstraction de tout ordre.

Cette phase permet à l'enseignant de s'assurer que l'idée d'homogénéité est acquise pour tous, il intervient donc si tel n'est pas le cas. De plus, elle donne aux élèves l'occasion de produire leurs propres exemples de séries de notes en réponse à des exigences données simples ; ils sont donc plus à même de produire des contre exemples par la suite.

Avant la séance suivante, le professeur regroupe les propositions des élèves, en préparant des contre-exemples. (cf. analyse).

La recherche :

Le travail de recherche ici demandé est une alternance de conjectures et de validations. Il s'agit pour l'élève, tout d'abord **d'imaginer** des réponses à un type de problème jamais rencontré. Certains élèves peuvent se trouver déroutés par ce type de travail qui fait largement appel à l'intuition. La plupart des groupes formulent des propositions, mais peu opèrent un contrôle de validation des réponses apportées.

La restitution :

Au cours d'une deuxième séance, les différentes productions, avec le nom des auteurs, sont présentées à la classe. Le professeur peut, par exemple, avoir préalablement recopié celles-ci au tableau, mais d'autres formes de restitution sont possibles. Les élèves doivent alors débattre des propositions faites. Pour l'élève, il s'agit d'arriver à une critique de son travail et de celui des autres : justification ou invalidation.

Les différentes propositions sont, suivant la classe concernée :

* L'étendue.
* Le pourcentage de note non autour de la moyenne (non comprises entre $x - 1$ et $x + 1$).

* Le rapport entre le nombre de notes supérieures à la moyenne de l'élève et le nombre de notes inférieures à sa moyenne.
* L'addition de tous les écarts successifs entre les notes placées dans l'ordre chronologique.
* La différence entre la moyenne des notes au-dessus de la moyenne et le moyenne de celles situées en-dessous (ou de même par rapport à 10).
* L'addition de tous les écarts positifs de chaque note à 10, ou à la moyenne.

...

Dans cette phase de restitution-débat, il est important que la validation vienne des autres élèves et non du professeur. Celui-ci n'est là que pour diriger les interventions et éviter les débordements possibles. Il faut donc prévoir pour les propositions qui ne sont pas immédiatement rejetables, des temps de recherche sur la validité des solutions proposées.

Cependant, si pour une proposition, les élèves ne trouvent pas de contre-exemples (voir ceux cités en annexe 2), le professeur amorce le débat en donnant à réfléchir sur des séries de notes judicieusement choisies. Il est donc très vivement conseillé à l'enseignant d'avoir préalablement prévu ses propres contre-exemples pour ne pas alourdir cette phase.

La «validation» :

Le proposition de la moyenne des écarts à la moyenne ne peut être invalidée. Le calcul fait sur chacune des séries de notes E1/E2 a force de validation pour beaucoup d'élèves. Cependant les questions suivantes doivent apparaître :

«Est-on sûr que cela convient dans tous les cas ?»

«N'y aurait-il pas une autre possibilité ?»

Le résultat est sujet à caution car il n'est pas issu d'une démonstration : la validation repose en effet uniquement sur l'absence de contre-exemples. Ici, nous aboutissons en fait à une définition de ce terme. C'est donc l'enseignant qui affirme autoritairement que l'objet construit répond bien aux contraintes de départ dans tous les cas. Toutefois, il peut être intéressant de signaler aux élèves que la démarche scientifique adoptée ici est différente de celle qui est habituelle, à savoir *validation = démonstration*.

L'institutionnalisation :

La communauté scientifique appelle l'objet découvert, ou proposé par l'enseignant, «l'écart-moyen», mais il existe une autre possibilité très voisine : l'écart-type. La justification proposée pour l'écart-type, à savoir prendre la racine carrée des écarts pour éviter les valeurs absolues, est la seule possible et naturelle pour les élèves. Elle leur convient d'ailleurs parfaitement.

Signalons que, d'un point de vue historique, ces deux paramètres de dispersion sont apparus de manière concomitante, l'écart moyen ayant eu, dans un premier temps, les faveurs de Laplace et l'écart-type, celles de Gauss (voir annexe 4).

Une fiche de synthèse tient lieu à la fois de cours et de trace de l'activité. Les calculs sont effectués par les élèves et la conclusion est élaborée collectivement. (voir annexe 3).

Certains élèves proposent de poursuivre la réflexion :
- Pourquoi n'a-t-on pas écart-type égal écart moyen ?
- A-t-on toujours l'écart-type supérieur à l'écart moyen ?
- Pourquoi ne fait-on pas le calcul en prenant la racine carrée de la somme des carrés des écarts, puis, en divisant par n.

Réinvestissement :

Cette activité d'introduction de l'écart-type à partir des notes d'élèves se doit, bien évidemment, d'être relayé par quelques situations menant à une réflexion sur les divers caractères de position et de dispersion, en imposant un transfert par rapport à la situation initiale.

Annexe 1 : Exercices préparatoires
Élève régulier et résultats homogènes.

Exercice 1 : Comparaison des notes de trois élèves.

Trois lycéens ont eu pour notes en mathématiques l'an passé :

L_1	4	6	3	9	10	8	12	10	19	12	20	12	18
L_2	18	12	20	12	19	10	12	8	10	9	3	6	4
L_3	8	12	10	10	16	12	10	12	9	15	9	8	12

1) Représenter graphiquement les notes de chaque lycéen en fonction de l'ordre des contrôles (3 couleurs sur le même graphique)
2) Représenter par des diagrammes en bâtons les effectifs (3 diagrammes différents).
3) Calculer la moyenne de chacun de ces lycéens.
4) En utilisant chacune des informations mises en évidence par les trois questions précédentes, comparer les résultats de ces lycéens.
5) Imaginez les commentaires de l'enseignant sur les livrets scolaires de chacun.

Exercice 2 : Comparaison des notes de deux classes.

Voici les notes obtenues au même contrôle par les élèves de deux classes C_1 et C_2 :

11	12	9	15	1	18	7
6	10	7	2	14	2	15
4	7	14	13	6	17	16
13	9	15	5	10	4	5
15	7	5	9	11	14	14

7	17	8	11	12	9
0	12	10	2	8	19
7	5	11	1	9	10
3	12	8	11	13	17
12	11	15	10	12	9

1) Comparer les deux classes à l'aide des diagrammes de chaque série de notes.
2) Calculer les moyennes de chaque classe.
3) Quelle est la meilleure classe ?

Exercice 3 : Comparaison des notes de deux élèves.

Dans une classe, le professeur de mathématiques veut examiner avec soin et comparer les résultats de deux élèves. Voici leurs notes :

Élève E_1 : 13 11 10 09 09 11 08 13 11

Élève E_2 : 08 11 13 07 12 12 06 13 07 18

1) Calculer la moyenne de chacune des séries.

2) Représenter chacune de ces deux séries par un diagramme en bâtons (on placera ceux-ci l'un en dessous de l'autre).

3) Que peut-on en conclure ?

Annexe 2 :
Productions d'élèves.

Quelques propositions et corrections établies par une classe.

1

Pour trouver C, il faut faire la moyenne de tous les élèves puis enlever toutes les notes autour de la moyenne puis diviser les autres par le nombre d'élèves total.

***Correction :** FAUX, car enlever toutes les notes autour de la moyenne c'est trop vague. De plus, il ne s'agit pas d'un seul élève.*

2

On prend : la note la plus élevée – la note la plus basse.

E_1 | note la plus élevée : 14 E_2 | note la plus élevée : 16 E_1 : 14 – 09 = 06
| note la plus basse : 09 | note la plus basse : 06 E_2 : 16 – 6 = 10

Correction : *FAUX.*

On peut avoir E_1 : 14.10.13.10.14.09 et on aurait c = 6
E_2 : 06.06.16.06.06.06..06 et on aurait c = 10

Or, E_2 a des résultats plus homogènes que E_1, le calcul proposé ne convient pas.

3

c = moyenne des notes les plus fortes - moyenne des notes les plus faibles

(c'est-à-dire en dessus et en dessous de la moyenne).

Correction : *FAUX. On prend A : 13.11.13.11.13.11.13.11*
et B : 11.11.11.11.14.11.11.11.

Pour A : moyenne des notes au dessus de 12 : 13
moyenne des notes au dessous de 12 : 11, d'où l'écart c = 2.

Pour B : moyenne des notes au dessus de 11,4 : 14
moyenne des notes au dessous de 11,4 : 11. D'où l'écart c = 3.

Ceci est contraire à ce que l'on cherche car B a des notes plus homogènes que A..

4

La moyenne $\times \dfrac{\textit{la note la plus haute}}{\textit{la note la plus basse}}$

Exemple 1 : $10{,}5 \times \dfrac{14}{7} = 21$ Le résultat est petit car les notes sont homogènes (7 notes sur 14).

Exemple 2 : $11 \times \dfrac{20}{3} = 73{,}3$ Le résultat est très grand car les notes sont hétérogènes. (3 notes sur 20).

Correction : *FAUX.*

Avec E_1 : 20.19.20.20.19.02 on a m = 16,7 et c = 13,7 x (20/2) = 167.
E_2 : 08.20.03.14.10.09 on a m = 10,6 et c = 10,6 x (20/3) ≈ 71

Selon ce calcul, on aurait E_2 plus homogène que E_1. Or, nous constatons l'inverse.

5
En additionnant les écarts entre chaque note et en divisant par le nombre d'écarts, nous obtenons C.

$C = \underbrace{A \quad B}_{N} \quad C$

C1 14 11 10 09 09 10 11 07 13 11 : notes
3 1 1 0 1 1 4 6 2 = 19/9 C = 2,1

C2 08 11 13 07 12 12 06 13 07 16 : notes
3 2 6 5 0 6 7 6 9 = 35/6 C = 5

Conclusion : C est plus petit car C1 est plus homogène que C2.

Correction : FAUX car l'ordre des notes intervient dans la solution proposée. Pour un élève qui aurait les mêmes notes que C1, mais dans un autre ordre, on aurait un nombre C différent et des résultats tout aussi homogènes.
Par exemple pour 14 13 11 11 11 10 10 09 09 07
1 2 0 0 1 0 1 0 2 on a c = 8.

Annexe 3
Fiche de cours.

Les caractéristiques de dispersion.

Exemple :

Pour comparer les notes de tous les élèves d'une classe, on pourrait ...
Comment exprimer l'homogénéité des notes ?
Etude sur les notes de 2 élèves :
A : 05.10.12.16.14.08.14.12.08 B : 10.05.11.10.12.12.17.12.10.11

L'étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur du caractère étudié.

étendue 1ère série : $\boxed{\textit{11}}$ étendue 2ème série : $\boxed{\textit{12}}$

L'écart moyen.

L'écart moyen est la moyenne des écarts entre la valeur d'un caractère et la moyenne de ces valeurs.

1ère série : moyenne des valeurs $\overline{x} = 11$

valeurs A	effectifs	écarts à la moyenne	effectifs x écarts
5	*1*	*6*	*6*
8	*2*	*3*	*6*
10	*1*	*1*	*1*
12	*2*	*1*	*2*
14	*2*	*3*	*6*
16	*1*	*5*	*5*
total	*9*	XXX	*26*

écart moyen :

$\boxed{2{,}9}$

2ème série : moyenne des valeurs $\overline{x} = 11$

valeurs B	effectifs	écarts à la moyenne	effectifs x écarts
5	*1*	*6*	*6*
10	*3*	*1*	*3*
11	*2*	*0*	*0*
12	*3*	*1*	*3*
17	*1*	*6*	*6*
total	*10*	XXX	*18*

écart moyen :

$\boxed{1{,}8}$

Pour écrire la formule, il faut différencier les cas où $\overline{x} > m$ et $\overline{x} < m$, et donc utiliser la valeur absolue, outil peu pratique. Les mathématiciens définissent donc un autre calcul qui donne le même type d'information :

L'écart type.

L'écart type d'une série statistique est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne des valeurs du caractère, il est noté σ.

1ère série :

valeurs B	effectifs	écarts à la moyenne	carré des effectifs	effectifs x carrés
5	*1*	*6*	*36*	*36*
8	*2*	*3*	*9*	*18*
10	*1*	*1*	*1*	*1*
12	*2*	*1*	*1*	*2*
14	*2*	*3*	*9*	*6*
16	*1*	*5*	*25*	*5*
total	*9*	XXX	XXX	*100*

moyenne des valeurs $\bar{x}$ = *11*

moyenne des carrés des écarts : *11,1*

écart type : σ = $\boxed{2{,}9}$

2ème série :

valeurs B	effectifs	écarts à la moyenne	carré des effectifs	effectifs x carrés
5	*1*	*6*	*36*	*36*
10	*3*	*1*	*1*	*3*
11	*2*	*0*	*0*	*0*
12	*3*	*1*	*1*	*3*
17	*1*	*6*	*36*	*36*
total	*10*	XXX	XXX	*78*

moyenne des valeurs $\bar{x}$ = *11*

moyenne des carrés des écarts : *7,8*

écart type : σ = $\boxed{2{,}8}$

Conclusion de l'exemple étudié :

Les élèves A et B on la même moyenne. Les notes de l'élève B ont une étendue supérieure à celles de A, mais elles sont plus regroupées autour de la moyenne : les écarts-moyens et écarts-types de B sont moindres que ceux de A. Les résultats de B sont, en effet, plus homogènes que ceux de A.

Annexe 4

Brèves données historiques

Paramètres de position et de dispersion

L'apparition des paramètres de position et dispersion est essentiellement liée à l'**ASTRONOMIE**, la position obtenue pour un objet céleste s'établissant à partir de séries d'observations.

Pour établir ces positions, le **mode** et **«le milieu de l'intervalle défini par les valeurs extrêmes»** semblent s'être imposés naturellement dans un premier temps. La moyenne et la médiane n'étaient pas encore un choix systématique pour le grec Ptolémée.

C'est au XVI° siècle que Tycho Brahé a recours à la **moyenne arithmétique**. La **médiane** voit naître son intérêt en 1757 avec Roger-Joseph Boscovich. Au XVIII° siècle, les astronomes étudient la «distribution des erreurs» pour déterminer la position des objets célestes à partir des premiers travaux dus à Galilée en 1632.

La **variance naît** au XIX° siècle avec les moindres carrés, l'**écart-type** suit : Carl Friedrich Gauss propose en 1816, pour mesurer les variations des erreurs en astronomie, l'usage de $\varepsilon_k = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$ (x_i désignant la valeur absolue de l'écart de la i-ème observation à la moyenne arithmétique). L'écart-type ε_2 aura la préférence de Gauss aux autres mesures alors que l'écart-moyen ε_1 avait, dans un premier temps, les faveurs de Laplace. Au XIX° siècle on utilisera plusieurs mesures de dispersions apparentées à l'écart-type. Ce n'est qu'en 1893 que Carl Pearson introduit le terme de «standart deviation» noté σ.

D'après *Histoire de la Statistique*
Jean-Jacques Droesbeke et Philippe Tassi
«Que sais-je?» n° 2527, P.U.F. 1990.

PREMIERE RENCONTRE
AVEC UNE FONCTION PÉRIODIQUE

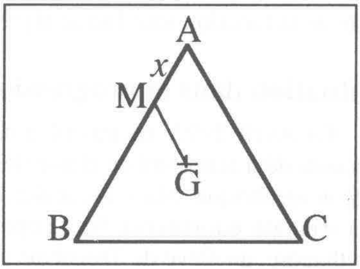
Hélène Olivé
IREM de Montpellier

Objectif par rapport à la construction des connaissances.

Découverte d'une fonction non linéaire, non monotone, définie par intervalle et de surcroît périodique.

Énoncé.

ABC est un triangle équilatéral de côté 8 cm. Pour chaque point M du contour, on désigne par x la distance (exprimée en cm) , parcourue par le point M à partir de A. Etudier le plus précisément possible les variations de la longueur GM au cours du déplacement du point M sur le contour ABC.



Situation dans la progression de la classe.

Ce travail a été proposé à des élèves de seconde qui avaient déjà rencontré en classe des fonctions autres que affines et définies de façon algébrique. Mais, les seules connaissances requises étant les symétries du triangle équilatéral, les propriétés de ses médianes et le théorème de Pythagore, un élève de troisième peut aussi bien aborder l'activité.

Capitalisation.

Croissance, décroissance, maximum, minimum, périodicité, symétries d'une courbe.

Extensions possibles.

Des variantes de ce problème ont été expérimentées dans des classes de 3ème mais peuvent être exploitées en seconde. Elles sont décrites dans une plaquette de l'IREM de Montpellier *"Proposition d'activité en classe de seconde"* ; *" Autour d'un triangle équilatéral"* (Hélène Olivé).

8

PREMIERE RENCONTRE AVEC UNE FONCTION PÉRIODIQUE

Objectif par rapport à la construction des connaissances

Il s'agit d'illustrer les phrases du programme *«exemples de modes de génération de fonctions», «description d'une situation par une fonction», «fonctions croissantes, décroissantes, parité, périodicité».* Plus précisément, cette activité est l'occasion de découverte d'une fonction non linéaire, non monotone, définie par intervalles et de surcroît périodique.

Le phénomène géométrique conduit à une représentation graphique qui ne nécessite pas, contrairement aux habitudes, l'obtention de la forme explicite de la fonction sous forme algébrique.

Situation dans la progression de la classe :

En Avril 1992, ce travail a été proposé à des élèves de Seconde qui avaient déjà rencontré en classe des fonctions autres qu'affines et définies de façon algébrique. Mais, les seules connaissances requises étant les symétries du triangle équilatéral, les propriétés de ses médianes et le théorème de Pythagore, un élève de Troisième peut aussi bien aborder l'activité.

Si l'on veut aller au-delà et chercher la forme explicite, il sera bon d'avoir déjà parlé de valeur absolue, mais ce n'est pas indispensable.

Énoncé et consignes :

Enoncé :

> *ABC est un triangle équilatéral de côté 8 cm, G son centre de gravité.*
> *Un point M se déplace sur le contour du triangle.*
> *Pour chaque position du point M, on désigne par x la distance (exprimée en cm), parcourue par le point M à partir de A.*
> *On veut étudier le plus précisément possible les variations de la longueur GM au cours du déplacement du point M sur le contour ABC.*

1°) Etude de l'énoncé

Dessine le triangle, place le point G.

- centre de gravité : à quoi penses-tu ?
  à sa position ?
  à une formule ?
- le contour du triangle ?
- la distance x : faut-il une formule pour trouver sa valeur ?
  quelle est la plus petite valeur de x ?
  quelle est la plus grande valeur de x ?
- le déplacement de M : quelle est sa position pour $x = 0$, $x = 4$, $x = 7$, $x = 12$, $x = 16$?
- le comportement de GM : tu peux *mesurer* la longueur GM ou la *calculer* ?
  penses-tu qu'elle augmente ?
  penses-tu qu'elle diminue ?
  peut-on affirmer qu'elle est toujours supérieure à 2 ?
  peut-on affirmer qu'elle est toujours inférieure à 4 ?

Peux-tu décrire le comportement de la longueur GM par un tableau ou un graphique ?

Quels mots, quels symboles te paraissent le mieux décrire les variations de GM ?

découper ici

2°) Quelques valeurs précises

Calculer GM lorsque $x = 0$ $x = 2$ $x = 3{,}5$ $x = 4$ $x = 4{,}5$ $x = 7$
$x = 8$ $x = 10$ $x = 12$ $x = 18$ $x = 24$.

As-tu des remarques à faire ? Donne sur une feuille à part le détail des calculs. Complète le tableau suivant avec le minimum de calculs.

Valeurs de x	0	2	3,5	4	4,5	7	8	11,5
GM mesuré								
GM calculé								

Valeurs de x	12	13,5	15	16	18	20	22	24
GM mesuré								
GM calculé								

découper ici

3°) Représentation graphique

Observe les trois graphiques (1), (2), (3) de l'annexe 1.
Où lit-on les valeurs de x ?
Parmi ces trois graphiques, lequel te paraît le meilleur pour représenter les variations de GM lorsque x augmente ?
Si tu rejettes certains graphiques, précise pourquoi.

4°) Fonction

Le graphique retenu est-il la représentation d'une fonction f avec GM $= f(x)$?
Précise l'ensemble de définition.
Comment vas-tu t'y prendre pour calculer $f(x)$ pour une valeur quelconque de x ?

Scénario prévu

Les élèves forment des équipes de 2 (ou 3 maximum). Chaque équipe a pour consigne de répondre par écrit aux questions posées.

Le matériel nécessaire comprend papier, règle graduée, compas, calculatrice.

9 h 00 : le professeur distribue l'énoncé accompagné seulement du paragraphe 1°) (Etude de l'énoncé).
Les élèves sont prévenus que d'autres questions suivront.

9 h 20 : Le professeur distribue le paragraphe 2°) (quelques valeurs précises).

9 h 40 : Le professeur distribue les paragraphes 3°) et 4°) et l'annexe 1 (représentations graphiques).

10 h 00 : On relève les copies. Le travail de la question 4°) est à préparer à la maison pour les élèves les plus avancés.

Analyse préalable

En plus des objectifs déjà décrits, l'énoncé comporte un certain nombre de locutions sur lesquelles l'élève va s'interroger : «le contour du triangle», «la distance parcourue par le point M», «les variations de GM».

- Les questions du paragraphe 1°) sont là pour susciter un dialogue entre l'élève et le professeur quant à la compréhension du problème posé- Le paragraphe 2°) est le temps de travail personnel, de concentration en silence, de réinvestissement des connaissances. Les résultats seront validés à partir des graphiques distribués avec les paragraphes 3°) et 4°).
- Le paragraphe 3°) (observation des graphiques) donnera à certains élèves

l'occasion de *s'exprimer oralement et «en public», d'argumenter, de justifier leurs choix.*

- Le paragraphe 4°) donne la réponse à la question 3°) et pour les plus rapides, ouvre la porte sur un problème plus difficile qui est l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Compte-rendu de l'activité dans une classe

En Avril 1992, s'agissant d'une première expérience, le professeur de la classe est assisté d'un(e) collègue qui doit noter les réactions des élèves et le temps passé sur chaque partie de l'activité (18 élèves présents).

- Au départ, après distribution de l'énoncé, les élèves sont prolixes au sujet du centre de gravité. Manifestement, ils se complaisaient dans un domaine familier, c'est sécurisant.
  Après dix minutes, le professeur estime qu'on s'est trop attardé sur ce début et invite les élèvesà aborder les questions suivantes (déplacement du point M et variations de GM).
- Il y a quelques interrogations concernant le *sens* de déplacement de M à partir de A (vers B, ou vers C ? toujours dans le même sens, ou peut-il reculer ?). Le professeur fait remarquer la nécessité d'une convention sur le sens de parcours.
- Il y a de nombreuses erreurs au sujet du nombre x («distance parcourue par le point M») : de nombreuses équipes mesurent la longueur du segment [AM].

Ces fautes sont corrigées par le(s) professeur(s) présent(s) et donc n'apparaîtront pas dans les copies d'élèves reproduites plus loin.

- Après 20 minutes, on aborde la phase «mesures et calculs». Le théorème de Pythagore ne fait pas peur et on l'utilise volontiers. Cependant, la proportionnalité reste un réflexe, et plutôt que d'observer les propriétés de symétrie, certains élèves pensent que, lorsqu'on a calculé GM pour $x = 3{,}5$, il suffit de doubler le résultat pour $x = 7$. De même pour $x = 8$, $x = 16$, $x = 24$.

Ces élèves sont accaparés par la phase calcul. Ils sont complètement déconnectés du phénomène géométrique. Ces fautes-là non plus, n'apparaîtront pas dans les copies.

- Une bonne surprise cependant : une équipe a ébauché une représentation graphique (correcte) de GM en fonction de x avant qu'elle n'ait été suggérée par le professeur (voir paragraphe 3°) et 4°)). Cette équipe a évidemment reconnu très rapidement le bon graphique sur l'annexe 1.

- A la fin de l'heure, certaines équipes en étaient encore à calculer GM pour $x = 0$, $x = 2$, $x = 3{,}5$ ... et ont terminé le travail à la maison.

Analyse a posteriori

- Le choix d'un dialogue par écrit (paragraphe 1°)) dans cette classe réputée agitée a donné satisfaction en ce sens que les élèves se sont bien approprié l'énoncé. Le professeur passant d'un groupe à l'autre, chaque élève s'est senti écouté ; plus concerné aussi, par la nécessité de rédiger une réponse.

Notons ici que la présence de deux professeurs a bien amélioré la situation.

- Pour décrire le comportement de GM en fonction de x, le professeur aurait souhaité voir plusieurs positions de M sur le même triangle. Seule une équipe l'a fait. Il attendait aussi un tableau de variations mais à l'exception de l'équipe qui décrit «en dents de scie», aucune autre n'y a pensé. C'est un peu décevant car on avait déjà élaboré en classe des tableaux de variations.

  Au contraire, la représentation du phénomène par un graphique est arrivée naturellement.

- Le calcul de GM pour des valeurs précises de x avait pour but de faire apparaître les symétries et la périodicité qui devaient alléger cette séquence, en apparence un peu longue. Dans la plupart des cas, cela s'est bien passé. La faute qui consiste à utiliser la proportionnalité était prévue; la corriger faisait partie des objectifs.

- Le calcul de $f(x)$ en fonction de x est difficile pour l'élève de Seconde.

$0 \leq x \leq 8$ $\qquad f(x) = \sqrt{|4 - x|^2 + \frac{16}{3}}$

$8 \leq x \leq 16$ $\qquad f(x) = \sqrt{|12 - x|^2 + \frac{16}{3}}$

$16 \leq x \leq 24$ $\qquad f(x) = \sqrt{|20 - x|^2 + \frac{16}{3}}$

Notons que si ces expressions sont utiles pour vérifier la périodicité, elles sont pratiquement inutilisables pour étudier algébriquement le sens de variation de la fonction f (au niveau Seconde, s'entend)

Capitalisation

Croissance, décroissance, maximum, minimum.

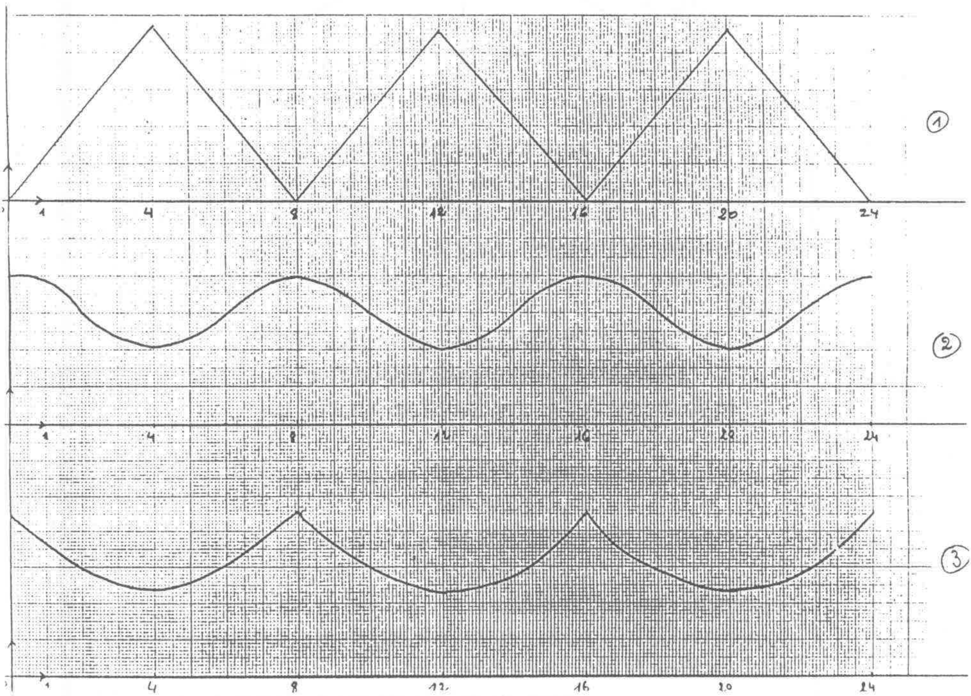
Périodicité.

Symétrie d'une courbe.

Extensions possibles

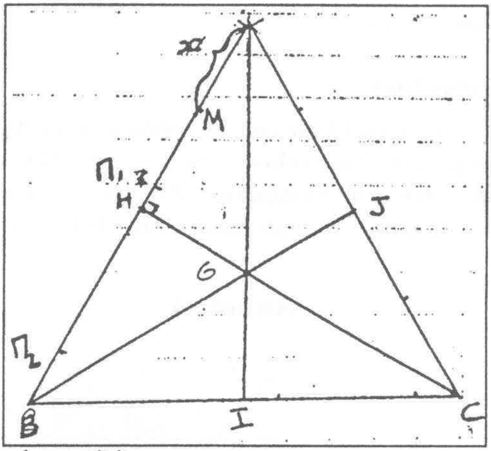
Des variantes de ce problème ont été expérimentées dans des classes de Troisième, mais peuvent être exploitées en Seconde. Elles sont décrites dans une plaquette de l'IREM de Montpellier *«Propositions d'activités en classe de Seconde».*, *«Autour d'un triangle équilatéral»* (H.Olivé).

Annexe 1



GROUPE 1 **07-04-92**

1°/ Etude de l'énoncé :



- Centre de gravité :

A quoi penses-tu ? centre d'inertie - Intersection

A sa position : 2/3 du sommet, 1/3 de la base sur les médianes.

A une formule : GA = GB = GC

- Le contour du triangle : 3 segments AC, CB, BA.

- La distance x : faut-il une formule pour trouver sa valeur ? NON.

quelle est la plus petite valeur de x : 0.

quelle est la plus grande valeur de x : 8.

- Le déplacement de M : quelles est sa position pour

x = 0 : pt A

x = 4 ; 1/2 AB

x = 7 ; 7/8 AB

x = 12 soit AB + 1/2 BC

x = 16 ; soit AB + BC ou pt C.

- Le comportement de GM

Longueur GM : penses-tu qu'elle augmente : lorsque le point M va du milieu de côté à une extremité

penses-tu qu'elle diminue : lorsque le point M va de l'extrémité du côté à son milieu

- peut-on affirmer qu'elle est toujours supérieure à 2.

GROUPE 1 - suite

Longueur de la hauteur . $4\sqrt{3}$

Longueur minimale de GM : $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}309$

oui elle est toujours supérieure à 2.
tjrs inférieure à 4.

longueur hauteur $4\sqrt{3}$

longueur maximale $\dfrac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}618$

non elle peut être supérieure à 4.

- Peus-tu décrire le comportement de la longueur GM sur un tableau ou un graphique? Oui.

- Quels mots, quels symboles te paraissent le mieux décrire les variations de GM?

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq \mathrm{GM} \leq \frac{8\sqrt{3}}{3} \qquad \mathrm{GM} \in \left[\frac{4\sqrt{3}}{3} ; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right]$$

2°/ Pour plusieurs valeurs de x , GM est la même (longueur)

$x = 0$ *GM = longueur maximale* $= \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

$x = 2$ *le point M est le milieu de H et A donc au milieu des deux valeurs* $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ *et* $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$x = 3{,}5$. *Pythagore dans le triangle rectangle* H,G,M_1

$HG^2 + HM^2 = GM^2$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 0{,}5^2 = GM^2$$

GROUPE 1 (suite)

$$GM^2 = \frac{16}{3} + 0{,}25 = \frac{16{,}75}{3}$$

$$GM = \sqrt{\frac{16{,}75}{3}} \approx 2{,}36$$

x = 4 = plus grande valeur de GM = $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

x = 4,5 = $\sqrt{\frac{16{,}75}{3}}$ *car HM = 0,5 comme pour x = 3,5.*

x = 7.

Pythagore dans le triangle rectangle H,G,M_2

$HG^2 + HM^2 = GM^2$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3^2 = GM^2$$

$$= \frac{16}{3} + 9 = \frac{43}{3}$$

$$GM = \sqrt{\frac{43}{3}}$$

x = 8 = plus grande valeur de GM = $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

x = 10 milieu BI $= \frac{6\sqrt{3}}{3}$

x = 12 milieu BC $= \frac{4\sqrt{3}}{3}$

x = 18 pt C= $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

x = 24 pt *A =* $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Terminé à $10^h 10$.

GROUPE 2

Centre de gravité :
- A l'intersection des trois médianes du triangle
- Sa position est 1/3 base et 2/3 sommet.
- La formule est : $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ *et* $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Contour :
C'est les trois segments qui constituent le triangle.
On peut le calculer, se sera le périmètre.

x :
- I n'y a pas de formule pour trouver la valeur de départ x car c'est celle que l'on donne au départ de l'exercice.
- La plus petite valeur de x est : 0.
- La plus grande est x = 24 (périmètre).

M :
si x = 0, M est confondu avec A.
si x = 4, M est le milieu de [AB]
si x = 7, M est sur [AB] et AB = 7 et MB = 1
si x = 12, M est sur [BC] et M est milieu de [BC]
si x = 16, M est confondu avec C.

GM : La longueur GM varie .

plus petite : $\dfrac{1}{3} \times \sqrt{48} = 2{,}3$

Elle sera tjrs supérieure à 2.

plus grande : $\dfrac{2}{3} \times \sqrt{48} = 4{,}6$

Elle ne sera pas toujours inférieure à 4.
** La longueur GM varie avec l'éloignement avec le milieu d'un segment du triangle. Plus M est loin du milieu d'un segment et donc il est près d'un sommet, la longueur augmente et inversement.*
Pour décrire GM on peut dire que la longueur est en dents de scie.

2°/ <u>Quelques valeurs précises.</u>

Calculer GM lorsque $x = 0$ $x=2$ $x=3,5$ $x=4$ $x=4,5$ $x=7$ $x=8$ $x=10$ $x=12$ $x=18$ $x=24$

As-tu des remarques à faire ? Donne sur une feuille à part le détail des calculs. Complète le tableau suivant, avec le minimum de calculs.

Valeurs de x	0	2	3,5	4	4,5	7	8	11,5
GM mesuré		*3,1*	*2,4*	*2,3*	*2,4*	*3,8*	*4,1*	*2,4*
GM calculé		*3,05*	*2,4*	*2,3*	*2,4*	*3,9*	*4,6*	*2,4*

Valeurs de x	12	13,5	15	16	18	20	22	24
GM mesuré	*2,3*	*2,7*	*3,8*	*4,1*	*3*	*2,3*	*3,1*	4,1
GM calculé	*2,3*	*2,7*	*3,9*	*4,6*	*3,05*	*2,3*	*3,05*	*4,6*

3°/ On lit les valeurs de x sur l'axe des abscisses.
C'est le graphique 3 qui représente les variations de GM lorsque x augmente.
Je rejette le graphique 1 car quand $x = 0$ GM = 4,6, le graphique 1 démarre de (o ; o) il n'est donc pas bon.
Je rejette également le graphique 2 car il nous montre que $x \in [2 ; 4]$ alors que dans la réalité $x \in [2,3 ; 4,6]$.
Il n'est donc pas bon.
Si l'on test sur le 3 des valeurs trouvées, il reproduit bien la réalité et le calcul.
C'est donc le bon graphique.

4°/ Pour trouver GM, il y a trois fonctions selon le côté où se trouve M. Pour calculer, nous avons employé le théorème de Pythagore et les fonctions seront :

Si M est sur [AB] $f(x) = \sqrt{2,3^2 + (8-x)^2}$

Si M est sur [BC] $f(x) = \sqrt{2,3^2 + (16-x)^2}$

Si M est sur [CA] $f(x) = \sqrt{2,3^2 + (24-x)^2}$

Si l'on considère la longueur d'un côté uniquement et que l'on prend x=20 par exemple : on fait 8 x 2 + 4 = 20.

Alors on prend la fonction $f(x) = \sqrt{2{,}3^2 + (8-x)^2}$
Par un petit calcul ces trois fonctions peuvent en fait, résulter à une seule.

<u>Calcul</u> <u>de</u> <u>GM.</u>
* *Si* $x = 4$, $x = 12$ *et* $x = 20$
Calcul d'une médiane : $8^2 = 4^2 + m^2$

$$8^2 - 4^2 = m^2$$
$$64 - 16 = m^2$$
$$\sqrt{48} = m$$

$$GM = \frac{1}{3} \times \sqrt{48} = \underline{2{,}3}$$

* *Si* $x = 8$, $x = 16$ *et* $x = 24$

$$GM = \frac{2}{3} \times \sqrt{48} = \underline{4{,}6}$$

* *Si* $x = 2$; $x = 18$ *et* $x = 22$.

$$2^2 + 2{,}3^2 = GM^2$$
$$GM \approx 3{,}05.$$

* *Si* $x = 3{,}5$; $x = 4{,}5$, $x = 11{,}5$

$$0{,}5^2 + 2{,}3^2 = GM^2$$
$$GM^2 = 2{,}35 \approx 2{,}4.$$

GROUPE 3

*1°/ * Centre de gravité G : nous pensons que le centre de gravité est l'intersection des médianes.*

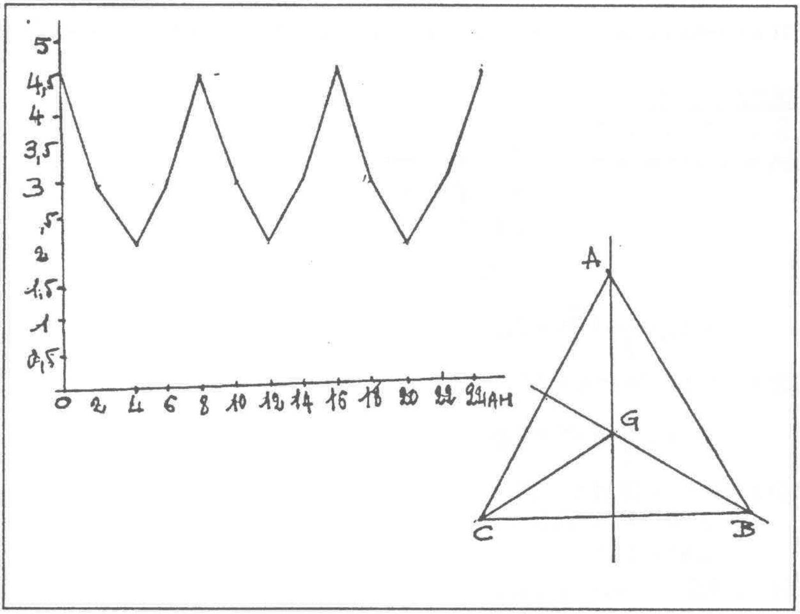
- sa position est au 2/3 du sommet à G

- La formule est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

* *Le périmètre du triangle (ou contour) est de 3 x 8 = 24 cm.*
* *La distance x n'a pas de formule précise, on la lit sur le dessin*
  - *la plus petite valeur de x est AM = 0 cm*
  - *la plus grande valeur de x est AM = 24 cm.*

*

GROUPE 3 (suite)



*   pour $x = 0$ - A est confondu à M
pour $x = 4$ - M est au milieu du segment [AB]
pour $x = 7$ M est au 8/7 de [AB]
pour $x = 12$ - M est au milieu de [BC]
pour $x = 16$ - M est sur C.

* Le comportement de GM..

- La longueur GM augmente lorsque M se rapproche d'un sommet et elle diminue lorsque M se rapproche du milieu d'un des trois côtés.
- La longueur GM est toujours supérieure à 2 car, 1/3 de la hauteur est > 2 : hauteur $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 6{,}92$

1/3 hauteur = 2,3

donc GM > 2

- La longueur GM n'est pas toujours inférieure à 4 parce que, les 2/3 de la heuteur (6,92) donnent 4,6 cm.

GROUPE 4

1°/ *Etude de l'énoncé*

- Le centre de gravité est l'intersection des 3 médianes du triangle.
- Le centre de gravité est le milieu du cercle circonscrit, du cercle inscrit pour le triangle équilatéral.

- formules :

$$EG = \frac{1}{3} EC$$

$$DG = \frac{1}{3} DB$$

$$FG = \frac{1}{3} FA$$

Les coordonnés du centre de gravité dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

- le contour du triangle est la trajectoire du point M le long des côtés [AB], [BC] et [CA] du triangle.
- quand M est sur [AB], on peut dire alors que x = AM
quand M est sur [BC], on peut dire que x = AB + BM
quand M est sur [AC], alors x = AB + BC + CM
- la plus petite valeur de x, c'est quand M est confondu avec A donc que x est nul.
- la plus grande valeur de x est le périmètre du triangle, c'est à dire 24.
- pour x = 0, M est confondu avec A
x = 4, M est au milieu de [AB], sur E
x = 7, M est à 1 cm de B
x = 12, M est au millieu de [BC], sur F
x = 16, M est confondu avec C.
- On peut mesurer la longueur GM et aussi la calculer grâce au théorème de Pythagore en travaillant dans les triangles AFB, AFC, BAD, BDC selon la position de M.
La longueur GM augmente vers les sommets A, B, C du triangle et diminue vers les milieux des segments, D, E, F.

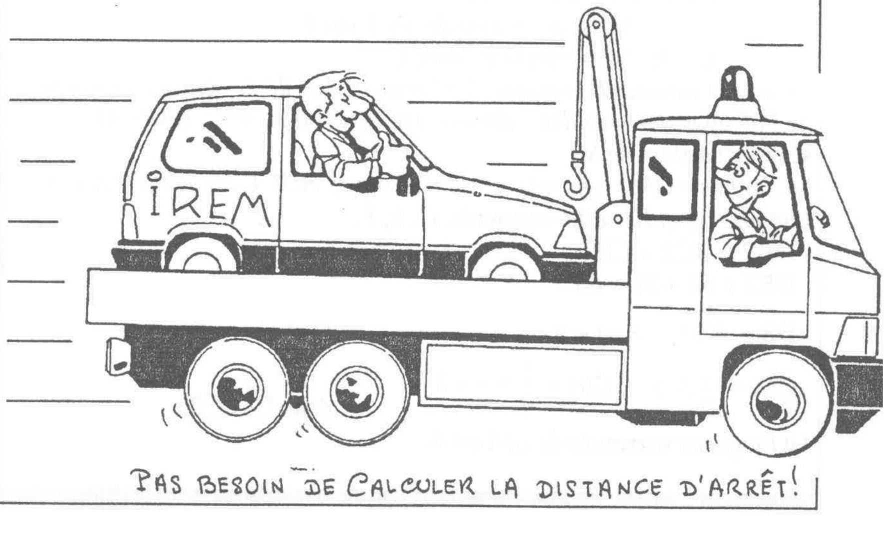
- DB 2 = BC 2 + CD 2
DB 2 = 64 + 16 = 80

$DB = \sqrt{80} = 8{,}94 \approx 9$ *D et M confondus*

$GM = \frac{1}{3} MB$; $GM = \frac{1}{3} \times 9 = 3$ *donc* $GM \geq 3$

La longueur maximale de GM est 4.

Notes personnelles



PAS BESOIN DE CALCULER LA DISTANCE D'ARRÊT!

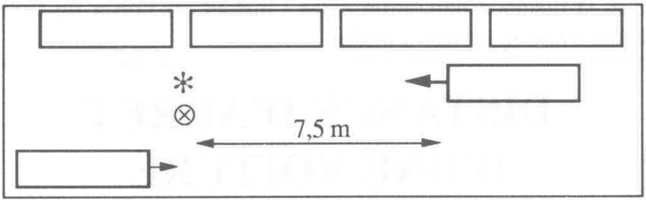
DISTANCE D'ARRET
D'UNE VOITURE

Michel Bridenne

IREM de Dijon

Problème :

Dans le schéma ci-dessous, ✻ représente un enfant, ⊗ représente un ballon et chaque rectangle représente un véhicule, les flèches indiquant le sens des mouvements.



Avec les données fournies (tableau de valeurs fourni : voir page suivante), à quelle vitesse maximale peut rouler le conducteur pour éviter l'enfant surgi à 7,5 mètres, les conditions de route et de conduite étant "normales" ? Expliquez, justifiez.

Objectif principal

Faire utiliser des aspects (graphique, tableau de valeurs) d'une fonction sans l'aide d'une formule, dans une situation à modéliser.

Situation dans la progression

Cette activité a été proposée avant toute autre activité sur les fonctions. Mais ce n'est pas une nécessité.

Capitalisation possible

Les fonctions sous les aspects graphiques et tableaux de valeurs.

Les résolutions d'inéquations.

Les fonctions comme outils de résolution d'un problème.

Scénario

Un temps de recherche par groupe (≈ 1 heure en classe), avec production d'une affiche pour chacun d'eux (≈ 1 heure en classe).

Un temps de débat (≈ 2 heures en classe).

Un temps de capitalisation (≈ 1 heure en classe).

9

Données fournies aux élèves (accompagnant le texte du problème).

Le tableau ci-dessous donne la distance de freinage en fonction de la vitesse du véhicule pour une voiture neuve par bonnes conditions.

vitesse en km/h	20	40	60	80	100	120
distance de freinage en m	3	11	25	45	70	101

Renseignements complémentaires :

1) Le temps de réaction d'un conducteur en état «normal» est de 0,6 seconde ; il est de 1,8 seconde pour un conducteur en état d'ébriété.
2) Sur une route mouillée, la distance de freinage augmente de 30%.
3) La distance d'arrêt est la distance nécessaire pour s'arrêter, c'est-à-dire la distance parcourue entre l'instant où l'on a vu l'obstacle et l'instant où la voiture s'arrête.

DISTANCE D'ARRET D'UNE VOITURE

Présentation de l'activité :

Elle aborde le contenu **fonction**. Les fonctions, en tant qu'objets d'apprentissage, n'ont pas encore été abordées, en mathématiques, à cette époque de l'année scolaire.

Il s'agit d'une **résolution de problème**. Elle a été proposée durant le mois de novembre 1990.

Mes objectifs essentiels d'enseignement étaient les suivants:
- envisager un *élargissement* des connaissances des élèves sur les ***fonctions*** (ce n'est pas une situation de proportionnalité), c'est-à-dire susciter la mobilisation et l'utilisation, dans la résolution d'un problème, de ce que les élèves connaissent des fonctions, sur l'un ou l'autre des trois aspects (tableaux numériques, graphiques, formules),
- donner du sens aux passages de l'un à l'autre, forcer à une interrogation sur les avantages et les inconvénients de chacun des aspects et faire utiliser de fait («en actes») des propriétés liées aux fonctions.

Les élèves n'arrivant pas en classe de seconde avec une «tête vide», en particulier sur les «fonctions», je voulais que leurs savoirs sur ces notions soient réinvestis et, au besoin, mis en cause (de préférence par eux-mêmes). La résolution du problème suppose le réinvestissement éventuel d'autres savoirs : repérage cartésien du plan, coordonnées d'un point dans un repère, équation cartésienne réduite d'une droite,...

Un second objectif d'enseignement concerne, sur le long terme, les argumentations : j'y reviens un peu plus loin.

Il est cependant important de souligner

- que l'énoncé même du problème laisse **l'initiative aux élèves** du choix des outils et méthodes de résolution (**j'insiste : c'est une façon d'opérationnaliser l'autonomie dont on entend tant parler...**)
- que l'énoncé ne favorise pas (c'est le moins que je puisse dire) la mise en place d'une formule de type $D = f(v)$,
- que la résolution du problème passe par une modélisation, avec toutes les interrogations sur la pertinence de cette modélisation.

Sur le déroulement en classe :

- Cette activité a été proposée à des élèves de seconde d'un lycée technique en novembre 1990.
- La classe, comprenant 35 élèves (1), était divisée en groupes de 3 ou 4 élèves.

(1) C'est au moins 11 de trop !

- Les données présentées ici sont tirées du manuel **Mathématiques 2de, Collection Terracher, page 377 et 378, édition 1986** : on peut en envisager d'autres.
- Autre intervention particulière n'était prévue (sauf explication des consignes ou des mots difficiles) avant la phase d'évaluation puis celle de synthèse.
- *(Eléments de consigne)* La résolution de ce problème était à la charge de chaque groupe, dans le sens suivant : ***les élèves avaient toute liberté dans la façon de mobiliser leurs savoirs, et d'élaborer leur stratégie.***
- *(Elément de consigne)* Chaque solution devait être présentée sous forme **d'affiche** ; ***l'affiche devant être réalisée en classe.***

Les affiches (format 98 cm sur 64 cm) étaient fournies aux élèves, ainsi que les crayons feutres adaptés (noirs et rouges).

- La durée de l'activité : (6 h. + x h, x étant le nombre d'heures hors classe).

  - explication des consignes et initialisation de la recherche *un mercredi matin* (≈ 1 h. TD)
  + recherche et échanges *hors classe* jusqu'au lundi matin suivant (≈ x heures)
  + mise en commun le lundi matin (≈ 1 heure)
  + réalisation de l'affiche en classe le mardi (≈ 1 heure).
  + évaluation - débat - le mardi (≈ 2 heures)

+ synthèse - le mercredi en TD ($\approx$ 1 h 15).

- L'évaluation de chaque solution a été faite conjointement par les groupes et l'enseignant suivant les critères concernant :
  - la mise en page, la présentation,
  - la pertinence et l'exactitude des arguments mathématiques employés,
  - l'efficacité des outils mathématiques mobilisés,
  - la justesse et la clarté des explications et justifications.

Des solutions possibles :

Ce sont des solutions «prof».

Il doit être clair qu'il s'agit aussi d'une situation de modélisation.

Dans ce qui suit, R sera la distance parcourue pendant le temps de réaction, d la distance parcourue pendant le temps de freinage, D sera la somme des deux précédentes, c'est-à-dire la distance d'arrêt, et V la vitesse.

R, d et D sont fonctions de V. Le contexte fait employer **naturellement** *la continuité et la croissance* de chacune des fonctions.

R est proportionnel à V et on a $R = \frac{1}{6000} . V$, R exprimé en km et V en km/h.

1. Utilisation d'une interpolation à partir d'un graphique approché de $D = f(v)$:

D est représenté en tenant compte de la continuité et de la croissance.

On fait ensuite une lecture graphique de V telle que $f(V) \leq 7{,}5$.

2. Utilisation d'une interpolation linéaire avec lecture graphique :

Après avoir représenté les points à disposition de $D = f(V)$, on trace le segment de droite entre les points $A(20\ ;\ \frac{19}{3})$ et $B(40\ ;\ \frac{53}{3})$ et la valeur maximale de V est l'ordonnée du point de ce segment d'abscisse 7,5 (on fait une lecture graphique).

3. Utilisation d'une interpolation linéaire,* sans *lecture graphique :

Comme pour le 2., on utilise les points A et B, et une interpolation linéaire.

La vitesse maximale est solution de l'équation : $\dfrac{\frac{53}{3} - \frac{19}{3}}{40 - 20} = \dfrac{7{,}5 - \frac{19}{3}}{x - 20}$ d'où $V \leq 22{,}05$ km/h (environ).

Dans l'annexe 2, sont présentées quelques procédures de recherche d'une relation algébrique entre D et V : ces procédures sont proposées en tant que suggestions d'une situation de modélisation pouvant être utilisée par exemple en classe de Première.

Réponses d'élèves possibles (analyse a priori) :

Du fait du travail en groupe et du temps imparti, les élèves devaient, à mon sens, réussir à trouver que $R = d + R$, et à prévoir que la vitesse se situerait entre 20 et 40 km/h, par exemple, avec un tableau comme ci-après (même si le tableau n'est pas utile dans sa totalité) :

vitesse en km/h	20	40	60	80	100	120
distance de freinage en m	3	11	25	45	70	101
distance de réaction en m	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	10	$\frac{40}{3}$	$\frac{50}{3}$	20
distance d'arrêt en m	$\frac{19}{3}$	$\frac{53}{3}$	35	$\frac{175}{3}$	$\frac{260}{3}$	121
≈	6,33	17,66	35	58,33	86,66	121

Le tableau devait montrer $20 \leq V \leq 40$.

Je pensais qu'il y aurait, pour les élèves, une interrogation sur l'utilisation de l'outil «proportionnalité» (pour le rejeter grâce au tableau des valeurs et au débat qui ne manquerait pas de s'instaurer à l'intérieur de chaque groupe), une recherche d'une formule liant «vitesse» et «distance d'arrêt» (vaine), pour aboutir :

- à une solution s'appuyant sur une représentation graphique approchée (procédure 1),
- ou à une solution de type «interpolation linéaire» (procédures 2 ou 3 ou 3'),
- ou à une solution de type «numérique» s'appuyant sur des encadrements successifs, si une relation était trouvée entre D et V (procédures de l'annexe 2).

Utilisation d'une équation de droite (procédure «interpolation linéaire 3'») :

Comme pour le 3., on utilise les points A et B pour trouver une équation de la droite passant par A et B et approximant la courbe $D = f(V)$. Ce n'est évidemment pas très différent de ce qui précède, mais peut-être plus accessible aux élèves sous cette forme.

Une équation de la droite (AB) est donnée par :

$$y - \frac{19}{3} = \frac{\frac{53}{3} - \frac{19}{3}}{40 - 20}(x - 20)$$

soit : $y = \frac{17}{30}x - 5$

(si les élèves choisissent de trouver une équation de (AB), on peut penser qu'ils utiliseront plutôt une résolution de système) d'où la vitesse maximale est solution de l'équation $7{,}5 = \frac{17}{30}x - 5$ et finalement $V \leq 22{,}05$ km/h.($\approx$)

Procédure «proportionnalité» :

Un groupe a, en fait, proposé une solution s'appuyant sur la proportionnalité entre «vitesse» et «distance d'arrêt» : $D = k.V$ (ce cas, faux, peut se produire, par exemple, si on ne regarde que V et D pour les valeurs 20 et 40 de V).

La vitesse maximale, compte-tenu de la croissance de D, est solution de :

$\frac{20}{\frac{19}{3}} = \frac{x}{7{,}5}$ donc $V \leq \frac{20 \times 7{,}5 \times 3}{19}$ ($\approx$ 23,68 km/h) ou encore, avec les valeurs approchées du tableau : $\frac{20}{6{,}33} = \frac{x}{7{,}5}$ soit $V \leq 23{,}69$ km/h.(environ)

Sur les «argumentations» :

Mes intentions (honnêtes) sur ce sujet vont dans la même direction depuis plusieurs années.

Il est évident que ce qui est visé concerne aussi le rôle et le statut des démonstrations.

Donner du sens aux démonstrations, c'est trouver des contextes où celles-ci se révèlent nécessaires et finalisées *socialement* (ici, dans la cité «classe», avec le langage propre à cette classe), ou *scientifiquement* (utiliser une propriété universelle d'une connaissance, faire atteindre l'universalité d'un savoir, ...) avec des formes de discours différentes (orale, écrite, imagée, symbolique, vernaculaire, spécialisée, académique,...), et dans les strates sociales différentes (dans la direction prof-élèves, ou inter-élèves dans un groupe, ou encore inter-élèves inter-groupes,...).

Ici, l'argumentation inter-élèves est favorisée de plusieurs façons.

Au niveau de chaque groupe, oralement et par écrit, de deux façons :

- l'une durant l'initialisation du travail (la première phase de recherche) pendant laquelle je voulais que les élèves s'approprient le problème.

- l'autre pendant la mise en commun de ce qui avait été trouvé, et pendant la rédaction de la solution sur l'affiche.

Au niveau inter-groupes au moment de l'évaluation : chaque groupe devant lire la production des autres groupes et émettre un avis circonstancié sur chaque affiche.

Remarques issues d'une observation «légère» durant la phase d'initialisation :

- Chaque groupe a réalisé un graphique.
- Dans chaque groupe, oralement, et souvent en liaison avec le graphique («vitesse» - «distance de freinage») réalisé, l'absence de proportionnalité entre vitesse et distance de freinage a été mentionnée, pour signaler l'impossibilité d'utiliser l'«outil proportionnalité».
- Beaucoup de discussions ont tourné autour de la formulation, l'explicitation du lien entre distance d'arrêt, distance de freinage et distance de «réaction».
- Beaucoup de groupes ont voulu calculer la distance de «réaction» dans la situation proposée.
- A la fin de cette phase, aucun groupe n'a cherché à construire un tableau des distances d'arrêt à l'aide des données, aucun groupe n'a cherché à construire des points de la représentation graphique de la fonction «distance d'arrêt».
- Certains groupes se sont mis à la recherche de l'expression de la distance de freinage en fonction de la vitesse (sans aboutir durant cette phase).
- Un groupe se montre réticent quant à l'intérêt mathématique du problème posé : les élèves de ce groupe sont plutôt «bons» ; il peut s'agir d'une perception de rupture du «contrat» pédagogique usuel.

Sur les contenus des affiches (voir l'annexe 1).

Que nous révèlent ces affiches en regard des attentes annoncées ?

Il semble que l'outil «fonction» soit effectivement adapté pour résoudre le problème, même si les fonctions utilisées ne sont pas explicitées suivant les canons habituels.

Les deux aspects numérique et graphique sont continuellement sollicités (**Groupe C, Groupe H**), avec des passages de l'un à l'autre.

Il y a le plus souvent la recherche d'un intervalle (**Groupe C**) sur lequel éventuellement une étude plus fine est faite (**Groupe F**).

L'interpolation linéaire, lorsqu'elle est utilisée, est rarement annoncée comme ce qui approximera la solution.

Quelques groupes ont utilisé la proportionnalité entre distance d'arrêt et vitesse, malgré ce qui avait été dit dans la phase d'initialisation (**Groupe A**, par exemple).

Même si les graphiques ne sont pas toujours nécessaire (**Groupe C**) pour la rédaction de la solution, il apparaît que son absence est souvent une gêne pour la lisibilité des textes proposés (**Groupe**).

Sur l'évaluation :

Certainement par manque d'enjeu véritable, les groupes n'ont pas cherché à analyser en profondeur les démarches proposées par les autres groupes.

De fait, les seuls éléments pris en compte par les élèves ont été : la mise en page, la présentation, la qualité explicative des phrases (surtout leur simplicité) et du cheminement, la valeur numérique donnée en bout de solution (toutes les valeurs sont d'ailleurs «proches» les unes et les autres).

Aucun groupe n'a rejeté de solution (pas même les fausses ! cf. l'affiche du **groupe A**), ce qui souligne suffisamment que les élèves ne se sont pas centrés sur une analyse mathématique des solutions. Sur 9 solutions, seules 5 pouvaient être considérées comme bonnes.

En regard de l'attente de l'enseignant lors de cette phase, c'est-à-dire dans l'attente d'un débat entre élèves pour obtenir la validation ou l'invalidation de telle solution, on peut dire que cette phase a été globalemenbt «ratée». Ce fut l'enseignant qui évalua chacune des solutions.

Le problème soumis à l'étude des élèves implique une modélisation ru réel qui, en l'occurence, s'accompagne de choix d'approximations : on ne connaît pas la courbe exacte donnant la distance d'arrêt en fonction de la vitesse du véhicule.

En dehors des réflexions à mener sur le bien fondé de situations de modélisation en classe de seconde (je pense qu'elles ont bien leur place), on peut s'interroger sur les raisons des réponses et des comportements des élèves (à cette époque).

La distance donnée (7,5 m) permet d'obtenir des réponses avoisinantes (23 km/h) quel que soit le modèle choisi par les élèves, correct ou erroné. Peut-être cette proximité de réponses ne crée-t-elle pas, chez les élèves, la nécessité d'examen des connaissance mathématiques utilisées dans les solutions. Il convient alors de voir si le changement de la distance donnée amène des réponses très différentes, et par conséquent, un aménagement qui forcerait les é lèves à analyser effectivement les modèles utilisés, à les invalider éventuellement.

Sur la capitalisation et la suite:

Elle a consisté à reprendre les solutions proposées par les groupes, à partir de remarques sur les contenus et l'argumentation présents.

On note sur les cahiers les remarques suivantes.

Il faut retenir que :

- *certains problèmes sont résolus rigoureusement avec des méthodes approchées clairement annoncées,*
- *plusieurs points de vue sont souvent valables pour résoudre un problème,*
- *la proportionnalité ne permet pas de tout résoudre,*
- *la méthode consistant à remplacer un morceau de représentation graphique d'une fonction par un morceau de droite est une méthode très utilisée en mathématiques.*

A propos des fonctions, il faut retenir que :

- *elles ne sont pas toutes représentées par des droites, et donc que toutes les fonctions ne sont pas affines,*
- *elles sont déterminées de trois façons différentes :*
  - *tableau numérique (accompagnée d'un texte),*
  - *représentation graphique,*
  - *relation algébrique entre deux variables,*
- *chacune des façons donne, en principe, les mêmes renseignements sur les propriétés des fonctions,*
- *on peut passer d'une façon à une autre pour des facilités de lecture ou d'utilisation de propriétés,*
- *il n'est pas toujours judicieux de chercher une relation algébrique.*

En plus de ce qui précède, quelques rappels peuvent être faits sur les équations de droites, sur les coefficients directeurs, sur la proportionnalité des accroissements pour les fonctions affines.

Le chapitre «fonction» n'est évidemment pas clos, et d'autres problèmes, d'autres «informations» sont venus compléter.

Pour un réinvestissement, un entraînement (mais on peut et on doit aussi penser à une certaine lassitude des élèves), voire un prolongement de l'«activité», il est possible de reprendre le texte initial et d'envisager d'autres cas d'étude :

- par exemple, route mouillée et conducteur «normal», route sèche et conducteur en état d'ébriété, route mouillée et conducteur en état d'ébriété,
- (problème) quelle serait la distance d'arrêt nécessaire pour un véhicule roulant à 130 km/h ?

ANNEXE 1
LES AFFICHES REALISEES PAR LES ELEVES

Les élèves se sont répartis en 9 groupes, nommés ici de A à I.

Les transcriptions ont essayé de respecter la mise en page des élèves (graphiques compris) et je n'ai voulu corriger ni les phrases, ni les fautes d'orthographe.

A chaque affiche correspond un encadré, deux affiches sont transcrites dans deux encadrés.

Groupe A (pas de graphique)

Traduisons les vitesses en mètres par seconde

* 20 km/h → 5,55 m/s

* 40 km/h → 11,11 m/s

Distance parcourue en 0,6 s :

* 5,55 x 0,6 = 3,33 m pour 20 km/h

* 11,11 x 0,6 = 6,66 m pour 40 km/h

Distance totale (temps de réflexion compris) :

* pour 20 km/h : 3,33 + 3 = 6,33 m

* pour 40 km/h : 6,66 + 11 = 17,66 m.

Etablissons un produit en croix :

soit v la vitesse recherchée ; on a :

$$v = \frac{20 \times 7,5}{6,33}$$

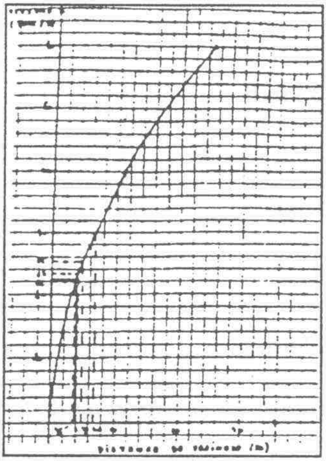
v **= 23,68 km/h.**

Remarques sur cette solution :

- elle suppose l'existence d'une proportionnalité entre «vitesse» et «distance d'arrêt»

Groupe C (le graphique est sur une feuille A4, quadrillée 5x5)

Caractéristique de la distance de freinage :



On recherche la vitesse par rapport à la distance de freinage en tenant compte du temps de réaction.

Formule pour trouver la distance parcourue pendant le temps de réaction :
Sachant que 1 km = 1000 m
et 1 h = 3600 s
et 0,6 s le temps de réaction
la formule est :

$$\textbf{vitesse} \times \frac{1000}{3600} \times \mathbf{0{,}6}$$

La distance d'arrêt est égale à la distance de freinage + le temps de réaction.

D'après le graphique :
à 30 km/h, la distance de freinage est 6,6 m

$$\text{D.A.} = \left(\left(\text{vitesse} \times \frac{1000}{3600}\right) \times 0{,}6\right) + \text{DF}$$

$$\text{D.A.} = \left(\left(30 \times \frac{1000}{3600}\right) \times 0{,}6\right) + 6{,}6$$

D.A. = 5 + 6,6
D.A. = 11,6 m
donc la vitesse recherchée est inférieure à 30 km/h.

A 25 km/h, la distance de freinage est 4,6 m.

$$\text{D.A.} = \left(\left(25 \times \frac{1000}{3600}\right) \times 0{,}6\right) + 4{,}6$$

D.A. = 4,17 + 4,6
D.A. = 8,77 m.
donc la vitesse recherchée est inférieure à 25 km/h.

A 23 km/h, la distance de freinage est 4 m.

$$\text{D.A.} = \left(\left(23 \times \frac{1000}{3600}\right) \times 0{,}6\right) + 4$$

D.A. = 3,83 + 4

D.A. = 7,83 m

donc la vitesse recherchée est inférieure à 23 km/h.

A 22 km/h, la distance de freinage est 3,6 m

$$\text{D.A.} = \left(\left(22 \times \frac{1000}{3600}\right) \times 0{,}6\right) + 3{,}6$$

D.A. = 3,66 + 3,6

D.A. = 7,26 m

donc la vitesse recherchée est supérieure à 22 km/h.

D'après les résultats obtenus, on peut en déduire un encadrement de la vitesse (V) recherchée.

$22 < v < 23$

N.B. Nous avons procéder par élimination pour trouver la vitesse pour laquelle la voiture s'arrêterait à 7,5 m.

Pour trouver une valeur plus exacte, il nous aurait fallu des appareils de mesures que nous ne possédons pas.

De plus, les compteurs kilométriques ne sont pas justes à 1 km/h près.

Remarques sur cette solution :

- *le mot «caractéristique» vient-il de l'enseignement de la physique ?*
- *c'est une procédure de type «balayage dégressif» à partir d'une valeur supérieure (30 km/h), jusqu'à l'obtention d'un encadrement «satisfaisant», et s'appuyant sur un calcul numérique pour chaque valeur retenue de la vitesse,*
- *pour le calcul, la procédure suivante est répétée (par écrit) :*
  pour une vitesse donnée, lecture sur le graphique de la distance de freinage, puis calcul de la distance de «réaction» puis calcul de la distance d'arrêt.

Groupe F (le graphique tient sur une affiche complète, la deuxième).

Le temps de réaction est de 0,6 s.

- A 0 km/h la distance d'arrêt est 0 m.
- A 20 km/h, la distance de freinage est 3 m.

La distance parcourue pendant le temps de réaction à 20 km/h est :

$$3600 \text{ s} \rightarrow 20\,000 \text{ m}$$
$$0{,}6 \text{ s} \rightarrow 3{,}33\ldots \text{ m}$$

Donc la distance d'arrêt à 20 km/h est :

$$3 + 3{,}33\ldots \approx \underline{6{,}33\ldots \text{ m.}}$$

- A 40 km/h, la distance de freinage est 11 m.

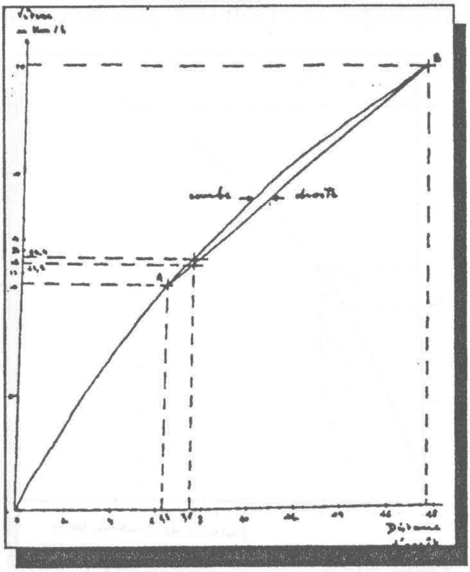
La distance parcourue pendant le temps de réaction à 40 km/h est :

$$3600 \text{ s} \rightarrow 40\,000 \text{ m}$$
$$0{,}6 \text{ s} \rightarrow 6{,}66\ldots \text{ m}$$

Donc la distance d'arrêt à 40 km/h est :

$$11 + 6{,}66\ldots \approx \underline{17{,}66\ldots \text{ m}}$$

- En représentant graphiquement avec 1 courbe et une droites ces résultats, on pourra donner une approche de la vitesse à chercher.



- Appelons le point A la distance d'arrêt à 20 km/h, B celle à 40 km/h et C celle à 0 km/h.

On joint A, B et C à l'aide d'une courbe et A, B à l'aide d'une droite.

Sur la droite, la vitesse à laquelle roule le véhicule pour s'arrêter à 7,5 m est environ 21,9 km/h.

Sur la courbe, la vitesse à laquelle roule le véhicule pour s'arrêter à 7,5 m est environ 22,4 km/h.

En faisant la moyenne des 2 vitesses $\left(\frac{21,9 + 22,4}{2} \approx 22,15\right)$,

on obtient une vitesse de

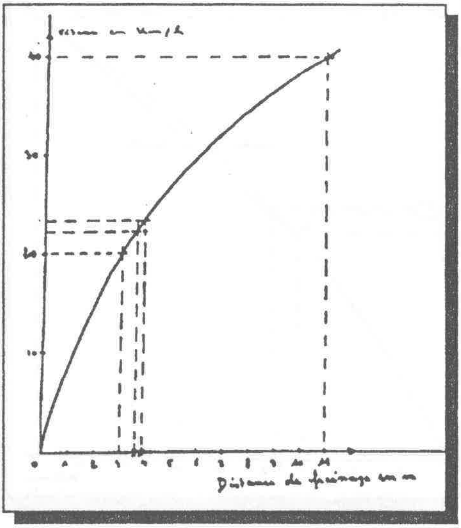
$$\boxed{22,15 \text{ km/h}}$$

Remarque sur cette solution :

- la procédure est de type «interpolation linéaire» sur un intervalle défini initialement n numériquement,

- la conclusion vient de lectures graphiques.

Groupe H (le graphique tient sur une affiche complète).



On peut déjà affirmé que les vitesses supérieures à 40 km/h ne correspondent pas.
On calcule la distance d'arrêt en allant à 20 km/h

$$20 \text{ km/h} = 20 \times \frac{1000}{3600} = \frac{200}{36} = \boxed{5{,}55 \text{ m/s}}$$

On calcule la distance de réflexion à 20 km/h

$$\frac{200}{36} \times 0{,}6 \approx 3{,}33 \text{ m}$$

$$\text{Distance d'arrêt} = 3{,}33 + 3 = \boxed{6{,}33 \text{ m}}$$

Donc le conducteur peut rouler légèrement plus vite que 20 km/h
On calcule la distance d'arrêt pour 22 km/h

$$22 \text{ km/h} = \frac{22 \times 1000}{3600} = \frac{220}{36} = \boxed{6{,}11 \text{ m/s}}$$

Distance de réflexion à 22 km/h :

$$\frac{220}{36} \times 0{,}6 = \boxed{3{,}66 \text{ m}}$$

On lit sur le graphique qu'il freine en 3,66 à 22 km/h ;
La distance d'arrêt à 22 km/h est donc

$$3{,}66 + 3{,}66 = \boxed{7{,}32 \text{ m}}$$

On calcule la distance d'arrêt à 23 km/h

$$23 \text{ km/h} = \frac{23\,000}{3600} = \frac{230}{36} = \boxed{6{,}38 \text{ m/s}}$$

On lit sur le graphique qu'il freine en $\boxed{3{,}9 \text{ m}}$ à 23 km/h.
La distance de réflexion à 23 km/h est donc

$$\frac{230}{36} \times 0{,}6 = \boxed{3{,}8 \text{m}}$$

La distance d'arrêt à 23 km/h est donc

$$3{,}8 + 3{,}9 = \boxed{7{,}7 \text{m}}$$

La vitesse de la voiture est donc comprise entre **22 et 23 km/h**.

Remarques sur cette solution :

- *la procédure est de type «encadrements successifs» obtenus par des calculs numériques et des lectures graphiques ; la conclusion est donnée sous forme d'intervalle,*
- *les calculs sont analogues à ceux faits par le groupe C, mais l'explication est moins nette, plus difficile à suivre.*

ANNEXE 2

RECHERCHE D'UNE RELATION ENTRE D ET V.

(Ceci ne relève pas explicitement de la classe de seconde)

Il s'agit plutôt ici de suggestions pouvant être utilisées en classe de Première : c'est une situation de modélisation.

Une relation entre D et V permet l'emploi de méthodes numériques d'encadrements, ou encore d'envisager la résolution algébrique d'une inéquation ou d'une équation ...

Sachant que $R = V/6$, il suffit de recherche une relation entre d et V.

Il est intéressant d'inclure le 0 : ***d est nulle pour V nulle !***

La question pourrait être : quelle fonction approxime «assez bien» la fonction $d(V)$?

1. Par l'utilisation d'un tableau de différences (ici, le pas est constant et égal à 20).

On a le tableau suivant :

0	20	40	60	80	100	120	
0	3	11	25	45	70	101	
3	8	14	20	25	31		(premières différences)
5	6	6	5	6			(secondes différences)

On peut faire l'hypothèse que les résultats de cette dernière ligne «auraient» dû être égaux : le choix de la valeur commune k peut être 6 (le plus «fréquent» parmi les valeurs, ou 5,6 (moyenne arithmétique des valeurs), ou autre chose de raisonnable.

Dans ce cas, d est un polynôme du second degré en V, $d = aV^2+bV+c$ dont le terme constant est évidemment nul, et dont le coefficient a du terme V^2 vérifie $800\,a = k$.

En prenant $k = 5{,}6$ on obtient $a = 0{,}007$; en prenant $k = 6$, on obtient $a = 0{,}0075$.

Pour déterminer le coefficient b du terme V, on peut alors supposer

qu'une des mesures réalisées est correcte.
Par exemple, d (20) = 3 : dans le cas où $a = 0{,}007$, $b = 0{,}01$. On a alors $d = 0{,}007V^2 + 0{,}01V$, et par suite, $D = \frac{7}{1000} V^2 + \frac{53}{300} V$.

2. Par résolution d'un système d'équations.

La courbe ressemble à une courbe $d = aV^2 + bV + c$. En supposant que $d(0) = 0$ et $d(20) = 3$ et $d(40) = 11$, on obtient :

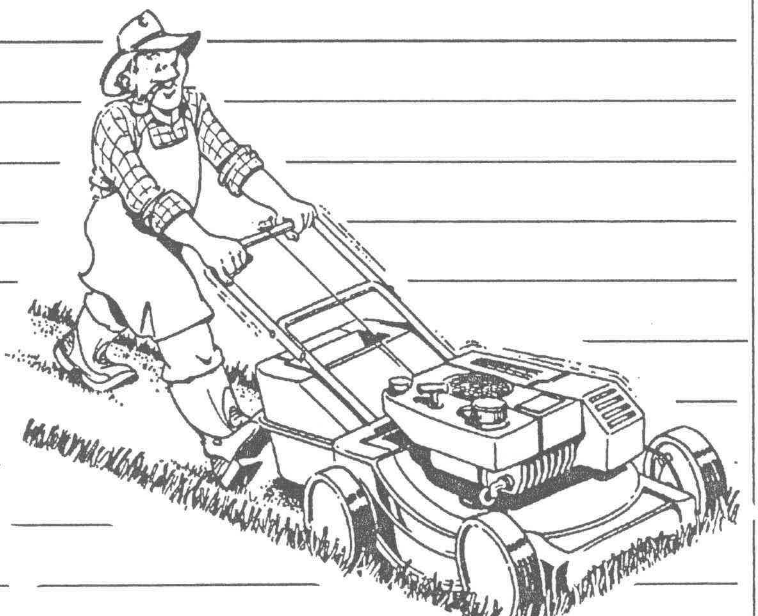
$$c = 0$$
$$400a + 20b = 3$$
$$1600a + 40b = 11,$$

d'où $a = 0{,}00625$, $b = 0{,}025$, $c = 0$, soit $d = 0{,}00625V^2 + 0{,}025V$ et donc

$$D = \frac{625}{100000} V^2 + \frac{575}{3000} V .$$

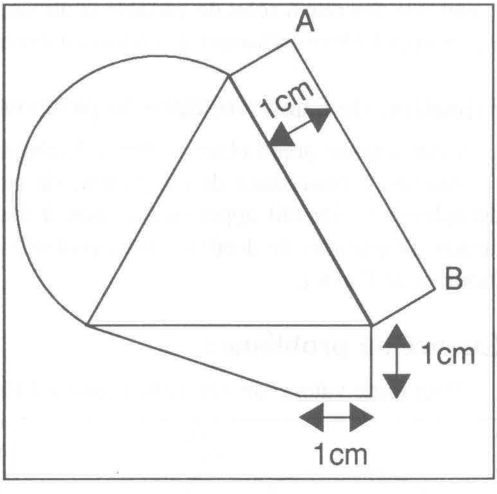
La suite est laissée au lecteur...

Notes personnelles



COMPARAISONS D'AIRES COMPARAISONS DE FONCTIONS

Jean-Alain RODIER
IREM de Clermont-Ferrand



Le problème :

Comparer, suivant les valeurs de AB, les aires respectives de ces quatre figures.

Objectif principal de l'activité :

Introduire la notion de fonction sous l'aspect comparaison de l'ordre de grandeur à l'aide de graphiques ou de résolution d'inéquations algébriques.

Situation dans la progression de la classe :

Cette activité prend place au début du chapitre sur les fonctions.

Scénario :

Un temps de recherche en groupe de la solution du problème.
Présentation par chaque groupe de sa solution.
Recherche individuelle sur la comparaison de deux des aires.
Réinvestissement du travail dans une activité de résolution de problèmes voisins.

COMPARAISONS D'AIRES COMPARAISONS DE FONCTIONS

Objectif par rapport à la construction des connaissances :

L'objectif principal de cette activité est d'introduire la notion de fonction.

Elle a pour but :
- de faire en sorte que les élèves «s'imprègnent» des notations et de la notion de variable, et en particulier, tacitement, faire passer l'élève du concept de variable discrète à celui de variable continue,
- d'amener l'élève à changer de cadre et à évoluer dans chacun d'eux.

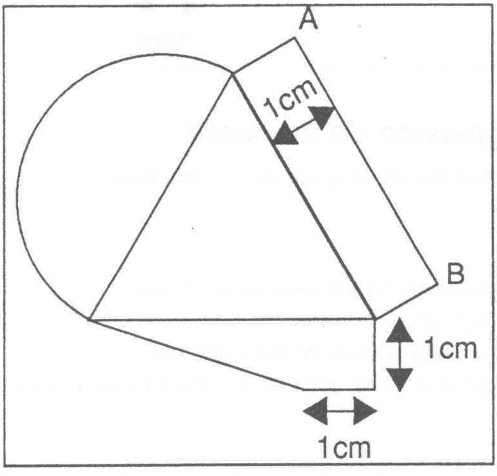
Situation de l'activité dans la progression de la classe :

Cette activité prend place au début du chapitre sur les fonctions.

Aucune connaissance du programme de seconde n'est exigible dans sont déroulement, elle fait appel uniquement à des calculs simples d'aires et la notion d'équations de droites ; aussi peut-elle être abordée à n'importe quel moment de l'année.

Enoncé du problème :

Pour toute valeur de AB, cette figure est formée d'un triangle équilatéral, d'un demi-disque, d'un rectangle dont un des côtés a pour longueur 1 cm et d'un trapèze rectangle dont 2 côtés ont pour longueur 1 cm. Comparez suivant les valeurs de AB, les aires respectives de ces quatre figures.



Le scénario :

Les élèves sont placés par groupes de quatre, et chaque groupe dispose d'une copie et d'une feuille de papier millimétré.

Première partie : 1 h 30.

Le professeur distribue l'énoncé et chaque groupe travaille pendant une heure et demie à la rédaction de la solution.
A la fin de l'heure et demie, les copies sont ramassées.

Deuxième partie : 1/2 h.

A l'heure de cours suivante, un élève de chaque groupe présente son travail au tableau.

Troisième partie : 1/2 h.

Le professeur propose de s'intéresser uniquement à la comparaison des aires de deux des figures. Chaque élève est placé en situation de recherche individuelle. A la fin de cette demi-heure, le professeur distribue la feuille de travaux dirigés présentée ci-après, le travail donné pour le prochain cours est la rédaction au brouillon des réponses aux questions posées sur cette feuille.

Quatrième partie : 1/2 heure.

Correction puis capitalisation.

Les raisons du choix de l'énoncé :

Les figures géométriques présentées dans le problème sont simples de façon à ce que tous les élèves, même les plus faibles, puissent aborder le problème.
L'énoncé donne toute liberté à l'élève au niveau du cadre de travail ; les connaissances nécessaires sont uniquement le Théorème de Pythagore et les relations dans le triangle rectangle.

Procédures de résolution du problème par le professeur :

Poser x = AB (en cm).

Noter $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ en fonction de x.

Etablir un tableau de valeurs pour les quatre fonctions f, g, h, et k, après avoir noté le caractère affine de certaines d'entre elles.

Tracer la représentation graphique de ces quatre fonctions et conclure suivant la position relative des courbes obtenues.

Analyse a priori :

Le texte, tout d'abord, demande réflexion au niveau de la phrase «comparez suivant les valeurs de AB...».

Le calcul de l'aire d'un triangle équilatéral n'est pas automatique et doit poser problème, l'expression algébrique des aires des autres figures devrait se faire plus facilement, mais attention aux erreurs de calcul.

Certains élèves ne vont pas poser x = AB et vont avoir des expressions algébriques compliquées au niveau littéral, de même pour l'introduction des notations $f(x)$, $g(x)$ ...

Pour établir les tableaux de valeurs, certains d'entre eux vont refaire systématiquement les mêmes calculs, sans passer par l'expression algébrique, d'autres vont se contenter à tort de reproduire la figure pour chaque valeur de AB, et de lire à la règle les valeurs nécessaires à leurs calculs. Au niveau de la représentation graphique, beaucoup ne comprendront pas pourquoi certains points sont alignés. (et pas d'autres).

Compte-rendu d'une utilisation :

Cette activité a été proposée en avril 1992 dans deux classes de seconde, correspondant à 18 groupes de 4 élèves (ou trois élèves pour certains).
Seulement trois groupes ont utilisé la notation x = AB. Le calcul des aires des différentes figures ne leur a pas posé beaucoup de problèmes (quelques fautes de calcul littéral au niveau du calcul de l'aire du demi-disque sont à signaler).

Au niveau du calcul des aires des différentes surfaces pour les valeurs de AB données, un seul groupe a calculé ces valeurs en recommençant chaque fois le même calcul, les autres ont remplacé AB par la valeur considérée dans les expressions littérales (un groupe s'est arrêté aux expressions littérales des aires).

En ce qui concerne les représentations graphiques, quatre groupes n'ont pas fait de représentation graphique et ont utilisé le papier millimétré pour reproduire la figure pour différentes valeurs de AB ; dans les autres groupes, le travail a été réalisé jusqu'à l'obtention de quatre courbes ; beaucoup de groupes ont obtenu 4 demi-droites, et un groupe a placé l'aire en abscisse et x en ordonnée.

Analyse mathématique :

Il serait bon, avant d'aborder cette activité, de faire quelques rappels sur les équations de droites, sur le calcul de l'aire d'un triangle, et la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral.

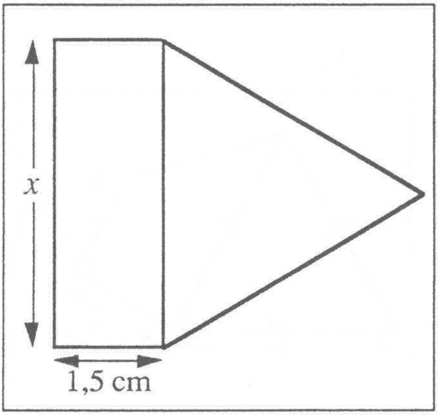
Les comparaisons d'aires proposées présentent l'avantage de ne pas être accessibles géométriquement. Les réels qui interviennent au cours de la résolution sont tous irrationnels, ceci peut permettre un travail sur l'approximation.

Capitalisation :

La capitalisation de ce travail est faite lors de la quatrième partie du scénario.

On peut envisager une capitalisation sous la forme d'un travail dirigé comme celui présenté ci-après.

Une possibilité de travail dirigé pour la troisième partie :



Pour toute valeur de x la figure est formée d'un rectangle dont un côté a pour longueur 1,5 cm et d'un triangle équilatéral :

1) Reproduire la figure ci-contre lorsque x = 0,5 cm, puis lorsque x = 7 cm. Que remarquez-vous au niveau des aires des figures obtenues ?

2) Les aires du rectangle et du triangle varient en fonction de x, notons-les respectivement $f(x)$ et $g(x)$. Calculer f (0,5) ; g (0,5) puis f (7) et g (7).

3) Exprimez $f(x)$ en fonction de x.

4) Remplir les tableaux suivants :

x	0,5	1,5	3	5	7
$f(x)$					

x	0,5	1,5	3	5	7
$g(x)$					

Que pouvez-vous conjecturer ?

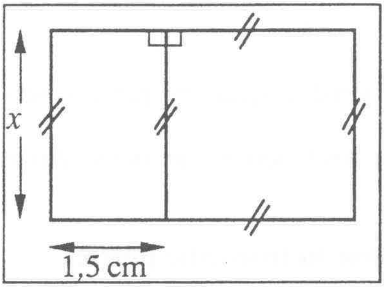
5) Dans un repère ayant pour unités 2 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée, placez les points M($x, f(x)$) et N(x , $g(x)$) pour x = 0,5 ; 1,5 ; 3 ; 5 ; 7.

En joignant les points M obtenus puis les points N, vous obtenez deux courbes. A partir de quelle valeur de x l'aire du triangle équilatéral dépasse-t-elle l'aire du rectangle ?

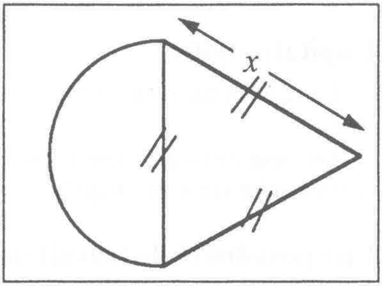
LES DIFFÉRENTES VARIANTES DU PROBLÈME

Etude comparée des aires.

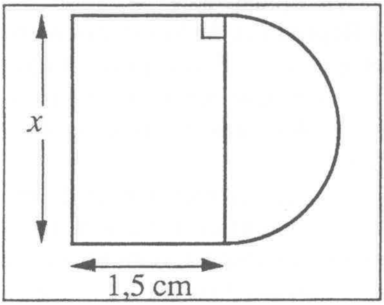
1



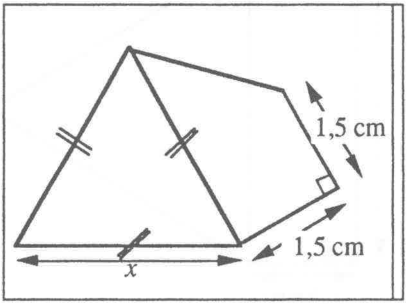
2



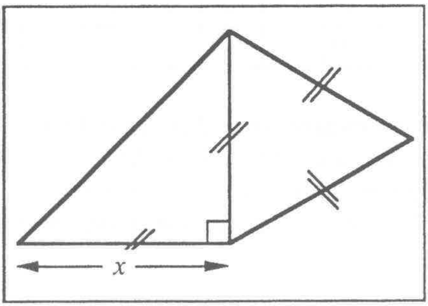
3



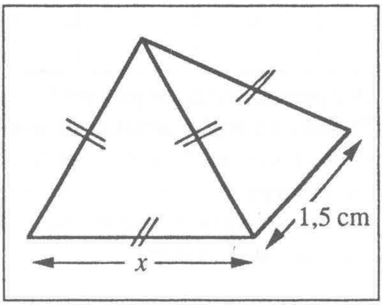
4



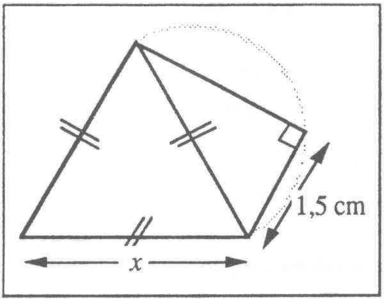
5



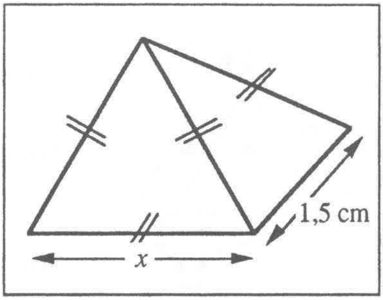
6



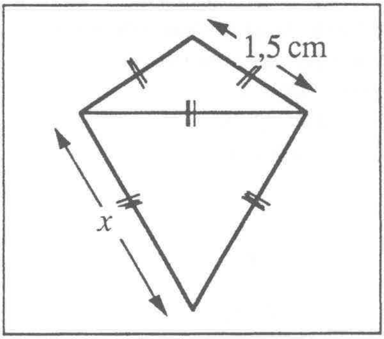
7



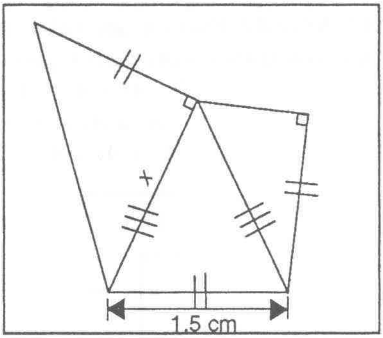
8



9



10



$f : \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2$

$f : \rightarrow \frac{x}{2}\sqrt{1{,}5^2 - \frac{x^2}{4}}$

$f : \rightarrow \frac{1{,}5\,\sqrt{x^2 - 1{,}5^2}}{2}$

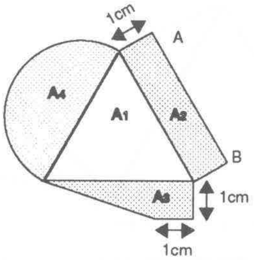
$g : \rightarrow \frac{1{,}5\,\sqrt{x^2 - 0{,}75^2}}{2}$

$h : \rightarrow \frac{1{,}5 \times x}{2}$

N.B. comportement «asymptotique» : ensembles de départ (justification géométrique).

Groupe 1

Enoncé du problème



Soit A1 l'aire du triangle équilatéral :

$$A_1 = \frac{\sqrt{3} \times AB^2}{4}$$

Soit A2 l'aire du rectangle :

$$A_2 = AB$$

Soit A3 l'aire du trapèze :

$$A_3 = \frac{AB + 1}{2}$$

Soit A4 l'aire du demi-disque :

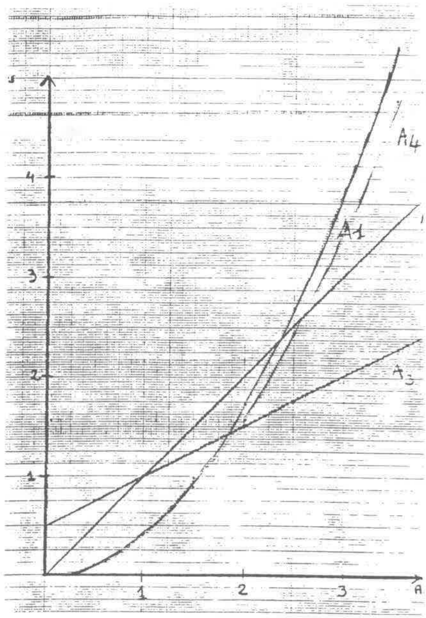
$$A_4 = \frac{\pi \times AB^2}{8}$$

A chaque valeur de AB, correspond une aire pour chacune des figures : A1, A2, A3 et A4. Pour chaque valeur de AB, à l'aide du graphique obtenu, on peut connaître l'ordre dans lequel les aires des figures sont rangées.

$$A_3 > A_2 > A_1 > A_4 \quad si\ 0 < AB < 1$$

$$A_2 > A_1 > A_3 > A_4 \quad si\ 1 < AB < 2{,}25$$

$$A_1 > A_4 > A_2 > A_3 \quad si\ 2{,}25 < AB < 3{,}5$$



Groupe 2

Pour calculer h du triangle ABH.

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

donc $AH^2 = AB^2 - (AB/2)^2$

donc $AH^2 = \dfrac{4AB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4}$

donc $AH^2 = \dfrac{3AB^2}{4}$

donc $\boxed{AH = \dfrac{\sqrt{3}AB}{2}}$

Formules des aires

le triangle : $\dfrac{B \times h}{2}$

le rectangle : $L \times h$

le demi-cercle : $\dfrac{\pi \times R^2}{2}$

le trapèze : $\dfrac{(b + B) \times h}{2}$

comparaison des différentes aires

si $AB = 5$ et $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

alors l'aire du rectangle est $5 \times 1 = 5\ cm^2$

" du triangle est $\dfrac{5 \times 5\sqrt{3}/2}{2} \approx 10{,}83\ cm^2$

" du demi-cercle $\dfrac{\pi \times 2{,}5^2}{2} \approx 9{,}82\ cm^2$

" du trapèze $\dfrac{(5 + 1) \times 1}{2} = 3\ cm^2$

donc l'aire du triangle > celle du demi-cercle > celle du rectangle > celle du trapèze

Si $AB = 0$ et $h = \dfrac{0{,}9\sqrt{3}}{2}$

alors l'aire du rectangle est $0{,}9\ cm^2$
l'aire du triangle $\approx 0{,}35\ cm^2$
l'aire du demi-cercle est $\approx 0{,}32\ cm^2$
l'aire du trapèze est $\approx 0{,}95\ cm^2$

donc l'aire du trapèze>celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle

si $AB = 1$ et $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

alors l'aire du rectangle est $= 1\ cm^2$
l'aire du triangle est $\approx 0{,}43\ cm^2$

l'aire du demi-cercle est ≈ 0,39 cm²

l'aire du trapèze est ≈ 1 cm²

<u>donc l'aire du trapèze=celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle</u>

Lorsque AB>1;

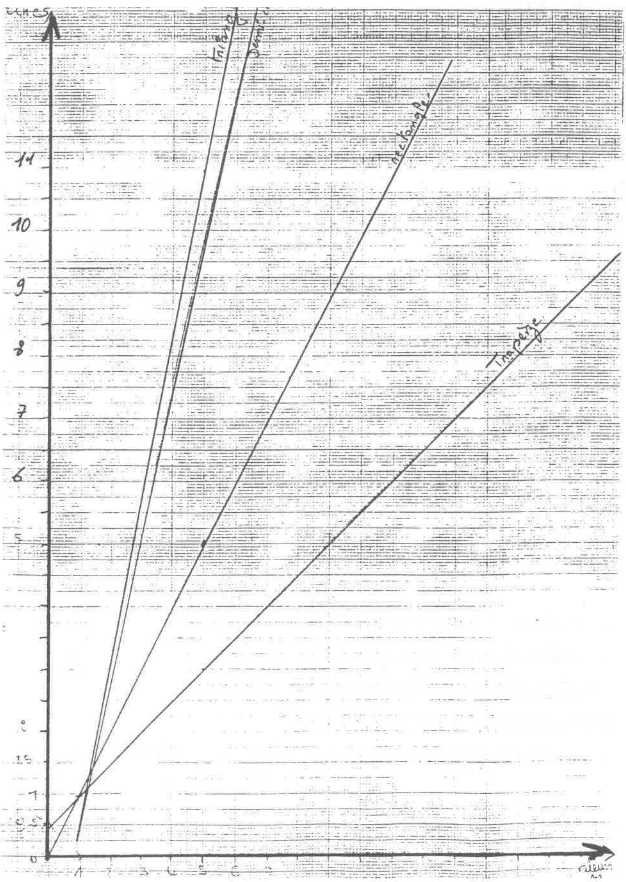
l'aire du triangle>celle du demi-cercle>celle du rectangle>celle du trapèze

Lorsque AB = 1 ;

celle du trapèze=celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle

Lorsque AB<1 ;

celle du trapèze>celle du rectangle>celle du triangle>celle du demi-cercle



Groupe 3

Rappel

<u>Aire du rectangle</u> : l x L

<u>Aire du demi-disque</u> : $\pi R^2 / 2$

<u>Aire du triangle</u> : (B x h)/2

<u>Aire du trapèze</u> : (B + b) x h /2

Nous avons pris pour chacune une valeur de AB

Gaëlle : 2 cm ; Virginie : 4 cm ; Maryline : 3 cm ; Frédérique : 6 cm.

<u>Pour Gaëlle</u> :	*Aire du rectangle :*	*2 cm²*
	Aire du triangle :	*18 cm²*
	Aire du demi-disque :	*1,57 cm² (π/2)*
	Aire du trapèze :	*1,5 cm²*
<u>Pour Virginie</u> :	*Aire du rectangle :*	*4 cm²*
	Aire du triangle :	*7,6 cm²*
	Aire du demi-disque :	*6,28 cm²*
	Aire du trapèze :	*2,5 cm²*
<u>Pour Marilyne</u> :	*Aire du rectangle :*	*3 cm²*
	Aire du triangle :	*4,05cm²*
	Aire du demi-disque :	*3,53 cm²*
	Aire du trapèze :	*2 cm²*
<u>Pour Frédérique</u>:	*Aire du rectangle :*	*6 cm²*
	Aire du triangle :	*15,6cm²*
	Aire du demi-disque :	*14,13 cm²*
	Aire du trapèze :	*3,5cm²*

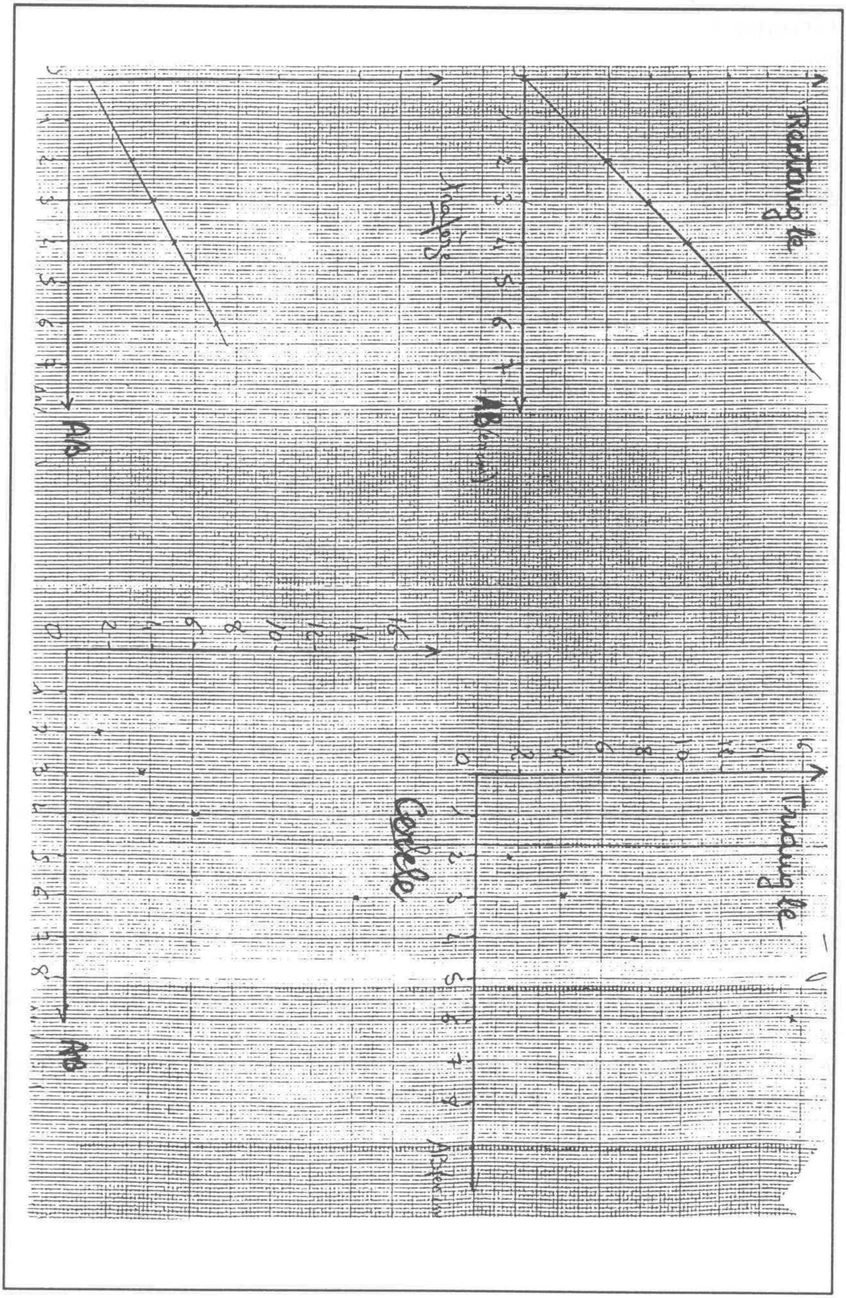
Ensuite, nous avons construit les graphiques des aires des différentes figures.

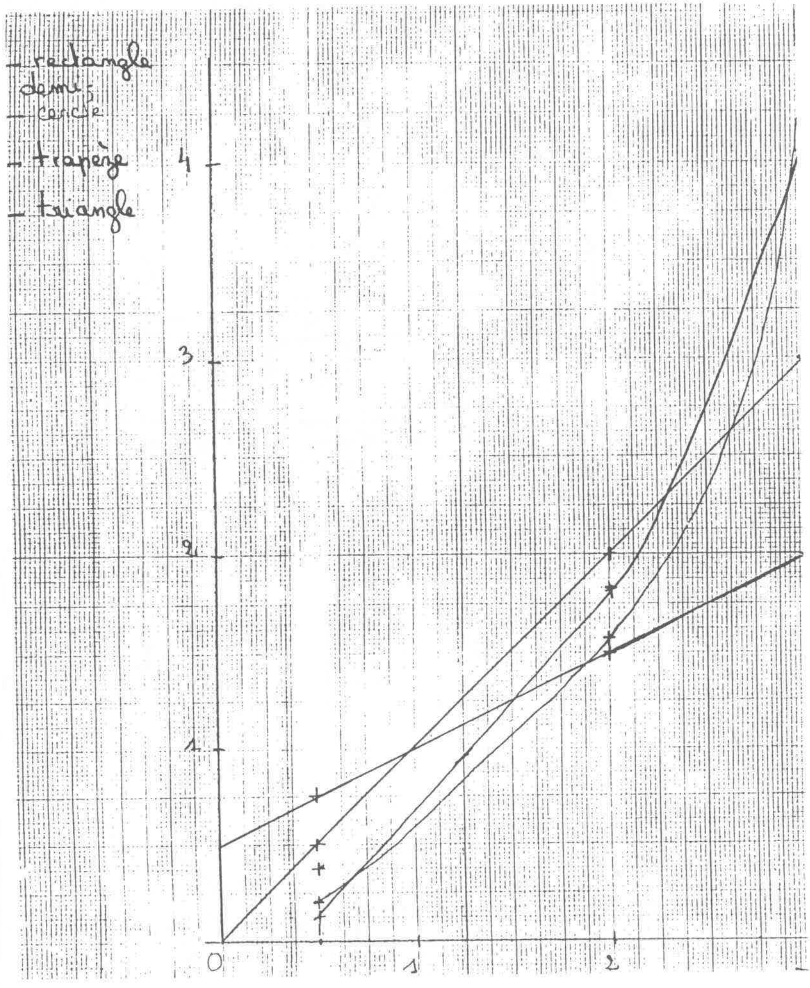
Nous avons placé en abscisse : la valeur AB et en ordonnée : les valeurs trouvées des aires.

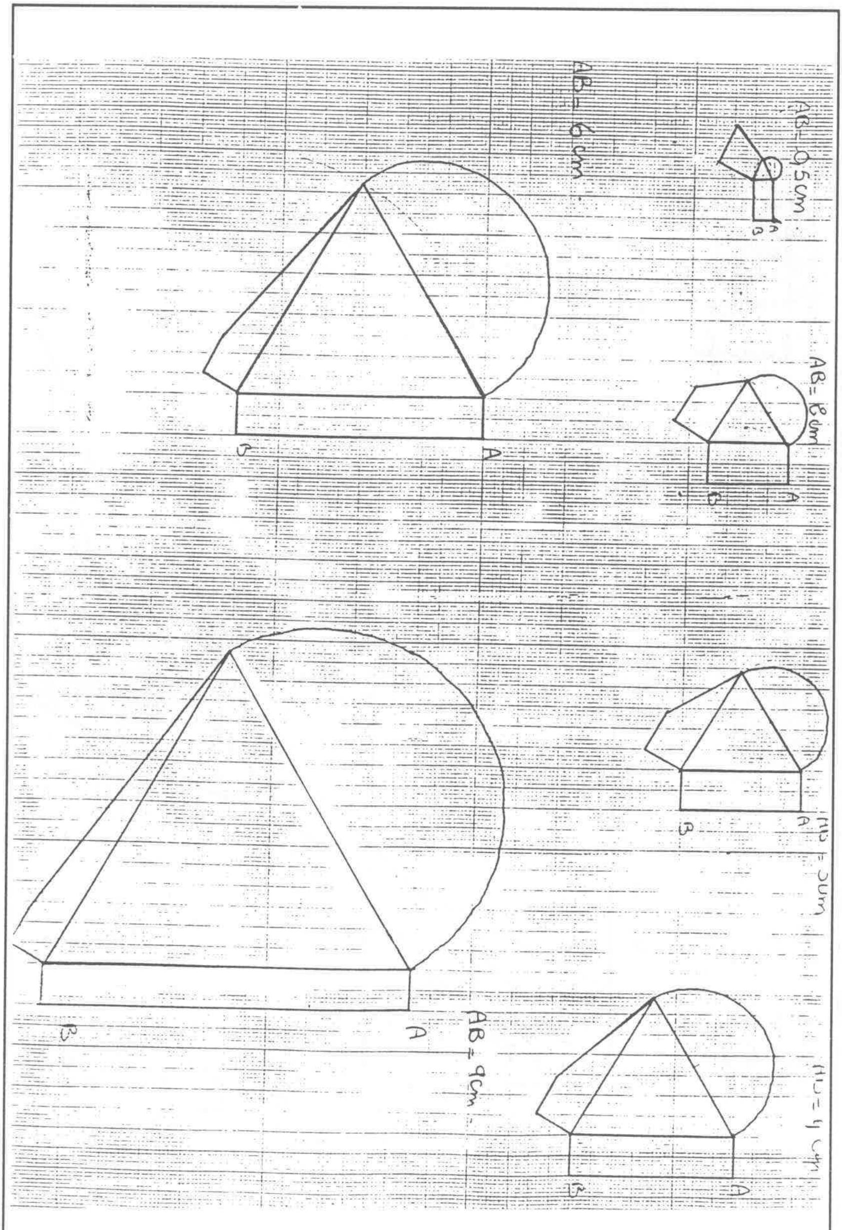
Pour le graphique des aires du rectangle, on obtient une droite à fonction linéaire.

Pour le graphique des aires du trapèze, on obtient une droite à fonction affine.

Pour les graphiques des aires du triangle et du demi-disque, on obtient deux courbes passant par le point d'origine O(0 ; 0).


Rectangle
Triangle
Cercle
AB


- rectangle
- demi-cercle
- trapèze
- triangle
4
3
2
1
0
1
2


AB = 6 cm
AB = 8 cm
AB = 9cm
A
B

Groupe 4

On recherche les aires de toutes les figures en fonction de AB.

- Aire du rectangle :

$AB \times 1 = \underline{AB}$

- Aire du triangle équilatéral :

** hauteur : H*

D'après le théorème de Pythagore

$AB^2 = H^2 + (AB/2)^2$

$AB^2 = H^2 + 1/4\ AB^2$

$H^2 = AB^2 - 1/4\ AB^2$

$$H = \sqrt{\frac{3}{4} AB^2}$$

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$

$$\text{* aire : } \frac{AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2$$

- Aire du trapèze :

$$\frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(AB+1) \times 1}{2} = \frac{(AB+1)}{2}$$

- Aire du demi-disque :

$$\frac{1}{2}(\pi r^2) = \frac{1}{2}\pi \times \frac{1}{4} AB^2$$

Comparaison des aires :

Aire du triangle = A

Aire du rectangle = A'

Aire du trapèze = A"

Aire du demi-disque = A'"

Pour AB = 1

A'" < A < A' = A"

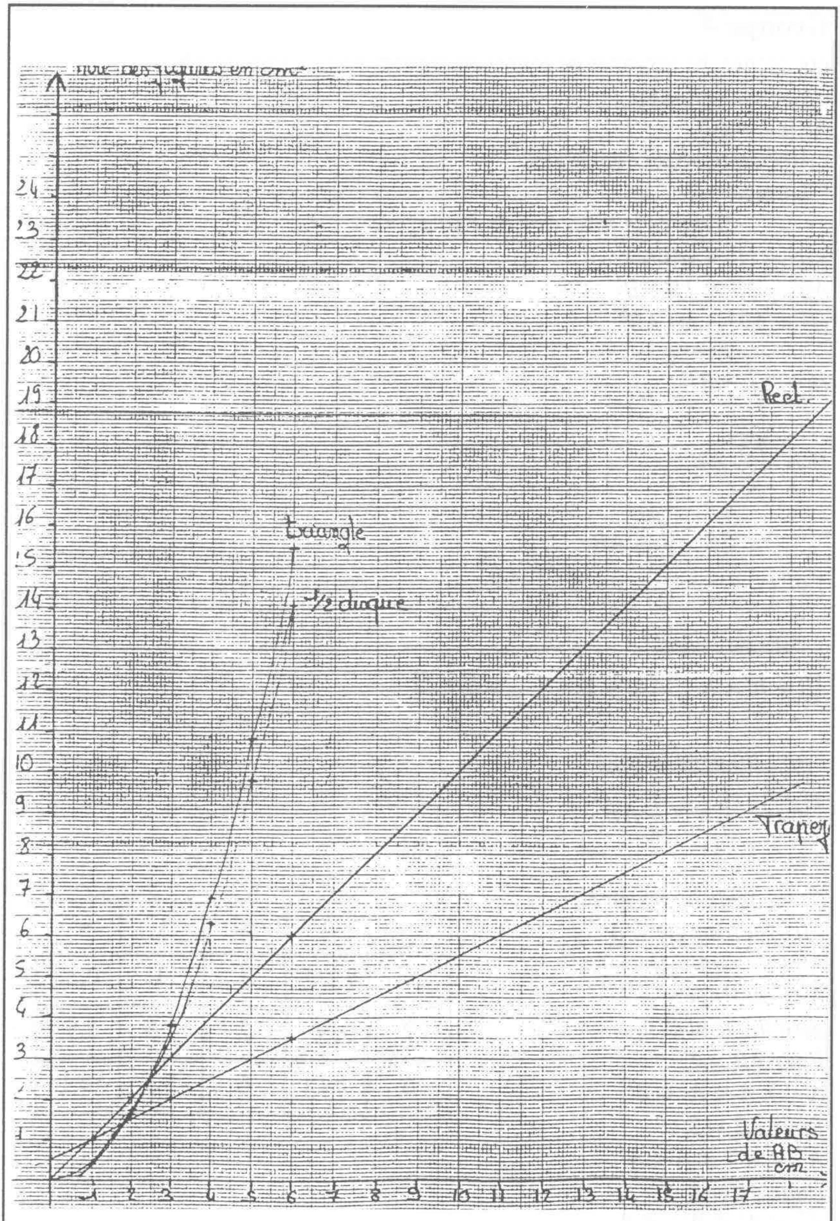
Pour AB = 2

A" < A"' < A < A'

Pour AB = 6

A" < A' < A'" < A

	A	A'	A"	A"'
1	$\sqrt{3}/2$	1	1	0,39
2	$\sqrt{3}$	2	1,5	1,57
6	$9\sqrt{3}$	6	3,5	14,14


Rect.
Triangle
1/2 disque
Trapez
Valeurs de AB cm

Groupe 5

Aire du rectangle :

$AB \times 1 = AB$

Aire du demi-disque :

$$\frac{\pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \boxed{\frac{AB^2 \times \pi}{8}}$$

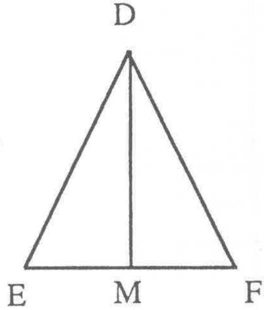
Aire du trapèze

$$\frac{(AB + 1) \times h}{2} \quad h = 1 \quad \boxed{\frac{AB + 1}{2}}$$

Aire du triangle :

Soit (DM) la hauteur issue de D.

Appliquons Pytthagore, dans le triangle DEM, rectangle en M.



donc $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + DM^2 = AB^2$

ssi $DM = \frac{AB \times \sqrt{3}}{2}$

Aire du triangle : $\frac{AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB}{2} = \boxed{\frac{AB^2 \times \sqrt{3}}{4}}$

Mise en équation de sroite

Soit $AB = x$

$y = x$ *pour le rectangle (1,1) (2,2)* ---------

$y = \frac{x + 1}{2}$ *pour le trapèze (1,1), (3,2)* ————

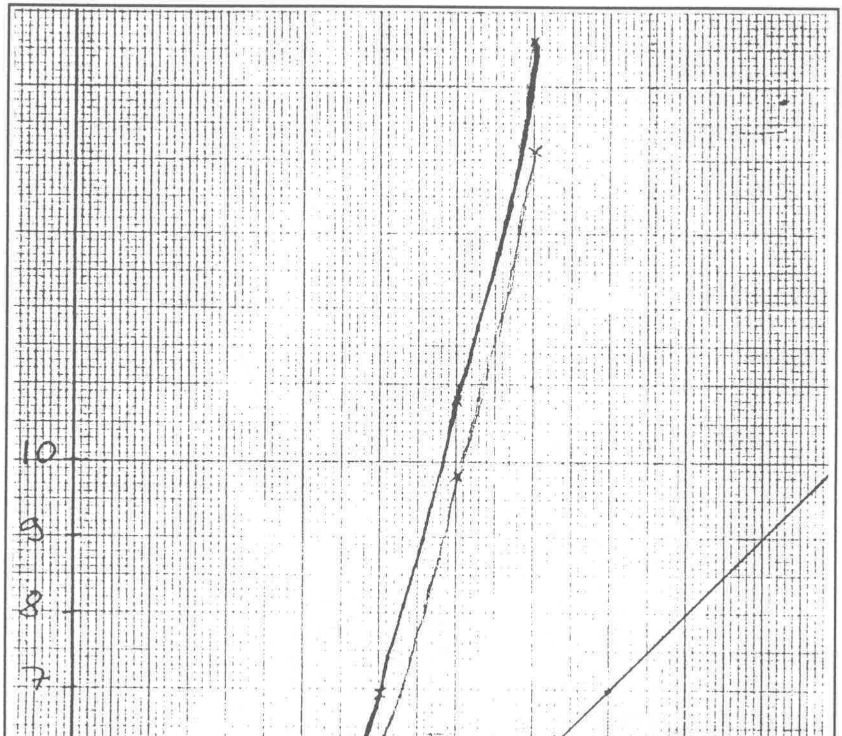
$y = \frac{x^2 + \pi}{8}$ *pour le demi-disque (1 ; 0,37) (4 ; 6,3)*

$y = \frac{x^2 + \sqrt{3}}{4}$ *pour le triangle (1 ; 0,4) (2 ; 1,7)* ....

Pour ces deux courbes, d'autres points ont été choisis.

Comparaison des aires en fonction de la valeur de AB

Chacune de ces représentations graphiques représentent l'aire de chaque figure en fonction de AB. Chaque point d'intersection représente les valeurs AB où les aures sont égales. On peut donc, en regardant le graphique comparer les aires.


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

LE CYLINDRE

de l'âge du numérique à l'âge du fonctionnel

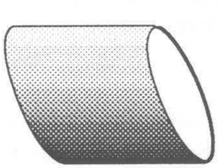
Patrick Brandebourg

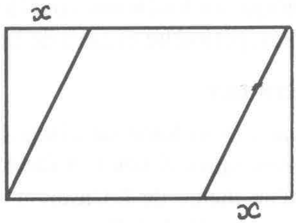
IREM de Dijon

Objectif principal :

Apprendre aux élèves à résoudre graphiquement et numériquement une équation, algébriquement une équation de type $x^2 = A$

Énoncé du problème :





Il est "construit" autour du problème suivant :

On découpe les triangles hachurés. Pour quelle valeur de x les cylindres obtenus en roulant ce patron dans un sens (amener A sur B), et dans l'autre (amener A sur C), ont-il même volume ?

Situation dans la progression :

Au début de l'année et avant toute introduction par le professeur de la notion de fonction.

Capitalisation :

- Les connaissances mises à jour (résolution algébrique, résolution numérique d'équations) sont notées sur des fiches de cours.
- La méthode utilisée peut être considérée comme suffisamment marquante pour introduire dans le comportement futur des élèves l'utilisation éventuelle d'une fonction.

Scénario :

- Temps de recherche en groupe en classe avec un temps de débat.
- Rédaction de plans et brouillons de démonstrations trouvées en classe sont à faire chez soi par les élèves, ainsi que la réalisation soignée des graphiques.
- Temps de capitalisation (1 heure).

Durée :

De 4 à 7 heures selon le degré d'autonomie laissé aux élèves.

Si la géométrie dans l'espace est le terrain d'activités spécifiques, elle fournit aussi un cadre pour la résolution de problèmes numériques. L'activité présentée dans cet article utilise divers patrons de cylindres. Les savoirs qu'elle vise sont de deux types :

- l'apprentissage de techniques mathématiques : résolution numérique et graphique d'équations ;
- l'approche d'une notion fondamentale en mathématiques : les fonctions.

Certes, ces savoirs ne sont pas entièrement nouveaux pour les élèves (ils ont, par exemple, abordé au collège fonctions linéaires et fonctions affines), mais peut-on pour autant penser que toutes les subtilités sont comprises ?

Utilisé en début d'année, ce problème suit un "chapitre" exploitant le théorème de Pythagore à des fins fonctionnelles, et, permettant le passage du numérique au fonctionnel par la mise en évidence de relations de dépendance de côtés, périmètre et aires de figures connues par les élèves.

Un énoncé

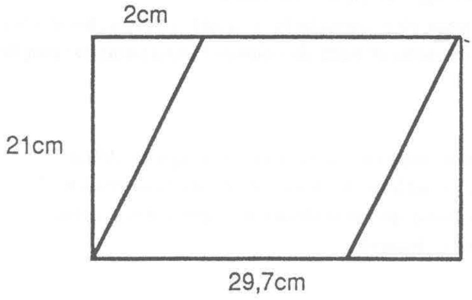
Dans le volume de cinquième de leur première collection *Faire des mathématiques* (Cedic), A.Delédicq et C.Lassave donnaient un exercice inspiré d'un thème de E.Castelnuovo et M.Barra (in *La mathématique dans la réalité* chez Cedic). Cet exercice constitue les deux premières questions de l'énoncé suivant :

Dans tout le problème, on prendra comme valeur de π le nombre 3,14. Les graphiques seront faits sur papier millimétré.

On prend une feuille de papier de format 21 x 29,7 cm.

1) On roule cette feuille de manière à obtenir un cylindre. Mais ... on peut la rouler de deux façons. Les cylindre obtenus ont-ils le même volume ?

2) On prend la même feuille et on y découpe des petits triangles selon le schéma ci-dessous puis on roule la feuille dans le sens de la longueur. Quel est le volume du solide obtenu ?



3) On reprend la même question qu'au 2) mais en ôtant 4 cm, puis 6 cm, puis 8 cm ... etc. Combien faut-il ôter pour que le volume obtenu soit égal à la moitié de celui que l'on avait au départ ? On fera une résolution graphique et une résolution algébrique.
4) On reprend la même question qu'au 2). Mais ... on peut rouler la feuille d'une autre façon. Quel est alors le volume du solide obtenu ?
5) On reprend la 4ème question en ôtant 4 cm, puis 6 cm, puis 8 cm ... etc. Existe-t-il un nombre (ou plusieurs) pour lequel les solides obtenus en roulant dans un sens puis dans l'autre ont le même volume ? Quelle est alors la forme du patron ?

Pourquoi cet énoncé ?

On peut remarquer la distance séparant l'énoncé distribué aux élèves à celui donné dans la fiche descriptive de cet article. En fait, les énoncés possibles sont au nombre de quatre, au moins :

➠ Le premier *«Parmi les parallélogrammes, quels sont ceux qui, en les roulant dans un sens ou dans un autre, font que les solides obtenus aient le même volume»* a le mérite d'être un problème bien "ouvert". Mais son traitement algébrique nécessite l'emploi de deux variables, ce qui est exclu en Seconde, et l'on pourra consulter l'énoncé IV de l'annexe 4 pour avoir quelques surprises ! On pense, peut-être à tort, que cet énoncé peut ne pas être un problème pour les élèves ; soit qu'ils sont persuadés que **tous** les parallélogrammes roulés dans un sens ou dans l'autre font que les solides ont un même volume, soit que la solution "losange" est immédiate. Il se poserait bien sûr le problème de l'unicité de cette solution, mais est-ce un problème d'élève de seconde ?

➠ Le second s'obtient à partir du premier en fixant le format du rectangle. On évite les deux variables, mais on conserve les comportements des élèves.

➠ L'énoncé donné dans la fiche descriptive, quitte à fixer le format du rectangle pour causes institutionnelles, nous semble trop induire le traitement algébrique, et, par là même, masquer l'utilisation d'une fonction et sa représentation.

➠ Cela étant dit, l'énoncé distribué aux élèves n'est pas exempt de critique. En particulier, la troisième question est là par "souci de professeur" pour résoudre des équations du type $f(x) = a$ et être exhaustif, mais elle n'apporte rien au problème posé.

Cet énoncé peut être donné aux élèves aux premières minutes de la première séance. A leur charge de **fournir une ou plusieurs solutions** sur lesquelles toute la classe s'entende. Cet accord commun à la classe tient lieu de validation de la solution trouvée à moins que le professeur n'émette un doute, mais en dernier, après que la discussion entre les élèves soit close. Le rôle du professeur est donc bien souvent de gérer les conflits socio-cognitifs entre les élèves, parfois de révéler une contradiction entre deux solutions trouvées par des démarches exactes mais différentes, parfois de relever la faiblesse d'un accord commun (en particulier sur les valeurs approchées du volume). La tâche de l'élève est, bien sûr, de trouver une solution ou de comprendre une solution sur laquelle un accord majoritaire est en train de se faire. L'enjeu sera pour lui soit de trouver une solution sur laquelle l'accord commun se fera, soit de trouver la «critique qui tue».

On peut, si l'on préfère, distiller les questions au fur et à mesure de leur résolution pour éviter l'empressement de certains élèves à résoudre ce problème chez eux et conserver des exigences de rédaction et présentation du travail achevé. En effet, les élèves ont pour consigne de rédiger individuellement la ou les solutions trouvées; la plupart du temps, ceci se fait hors du temps de classe et constitue tout ou partie des «exercices à la maison».

L'énoncé révèle des choix qu'il est important de préciser. l'«angle d'attaque» choisi ici est de fonder la résolution du problème sur la mise en évidence d'une fonction à partir d'un traitement numérique où l'idée d'algorithme est sous-jacente pour permettre le passage de l'«âge du numérique» à l'«âge du fonctionnel». Les deux premières questions fournissent le cadre du problème et permettent de faire le point sur les connaissances anciennes ou d'éliminer les difficultés éventuelles de visualisation de l'espace. Ceci fait, on peut se consacrer au véritable problème que posent les troisième et cinquième questions. On pense qu'éviter les essais pour 2, 4, 6 et 8 cm pour aller directement à une mise en équation, c'est privilégier la résolution algébrique au détriment de l'utilisation des fonctions et de leurs représentations graphiques. Mais peut-être faut-il ôter dans la question 3 la phrase *«on fera une résolution graphique et une résolution algébrique»* qui est trop inductrice de méthodes? Le danger subsistera cependant que les élèves envisagent une résolution numérique de type dichotomique.

3 - Déroulement de l'activité en classe.

Cette activité a été exploitée en classe de seconde de différentes façons:

- dans le cadre d'heures de cours, le professeur faisant face à une classe complète.
- dans le cadre d'heures de travaux dirigés où les élèves se trouvent seuls ou

en groupe (selon leur désir) face à ce problème, le professeur servant alors de caution institutionnelle à la validité des résultats trouvés.

- les heures de cours suivantes sont alors réservées à une synthèse des savoirs et des techniques et à leur illustration de façon moins ouverte.

Le temps passé sur cette activité varie de quatre à sept heures environ pour le travail en classe.

Le travail de rédaction à partir des plans de démonstration et des résultats trouvés en classe, ainsi que les graphiques, sont faits à la maison. La rédaction doit satisfaire certaines exigences de présentation : feuille partagée en deux verticalement. La partie droite contient la résolution du problème ; la partie gauche, un peu plus grande que la marge habituelle, permet de signaler les points de méthode, par exemple : résolution de l'équation $x^2 = A.$, une règle de calcul ...

Il faut remarquer que cet énoncé a été exploité avec d'autres niveaux d'approfondissement que celui de seconde, par exemple : en cinquième, en troisième et en première. Les exigences étaient alors modifiées.

4 - Résolution et commentaires de la question n°1.

«Les cylindres obtenus ont-ils le même volume ?»

A-Pourquoi cette question ?

De prime abord, cette question montre peu d'intérêt pour les élèves ? (*«Qu'est-ce qu'un problème intéressant pour les élèves ?»*). Un sondage préliminaire à la résolution a montré que 80% des élèves d'une classe répondaient OUI à cette question ; les 20% restant se partageant entre indécis et partisan du NON. On peut tirer parti du conflit créé par les résultats de ce sondage pour favoriser l'éclosion «d'un débat scientifique» dans la classe. Mais les argumentations proposées par les élèves pour convaincre leurs camarades sont rarement de type calculatoire, bien plus souvent géométrique ... et peu scientifiques ! L'accord commun de la classe ne se fera pas. Le calcul se fera souvent en désespoir de cause, et sur l'injonction du professeur. Peut-être faut-il, comme Marc Legrand *(voir bibliographie)* le propose, recommencer le vote à chaque étape de la discussion pour que les élèves se rendent compte eux-mêmes si l'argument donné par l'un des leurs atteint le but fixé.

B - Résolution quand on roule dans le sens de la longueur.

Les solutions proposées par les élèves sont de trois types, toutes fonctionnant sur un même plan. La liste ci-après n'est pas exhaustive.

Calcul du rayon du cercle de base		
$2\pi r = 29{,}7$		
$r = \dfrac{29{,}7}{2\pi}$		
	$r \approx 4{,}7$ cm	$r \approx 4{,}7$ cm
Calcul de la surface de base		
$S = \pi r^2$	$S = \pi r^2$	$S = \pi r^2$
$S = \pi \times \left(\dfrac{29{,}7}{2\pi}\right)^2$	$S = \dfrac{29{,}7^2}{4\pi}$	$S = 4{,}7^2 \times \pi$
$S = \dfrac{29{,}7^2}{4\pi}$	$S \approx 70{,}23 \text{ cm}^2$	$S \approx 69{,}36 \text{ cm}^2$
Calcul du volume du cylindre		
$V = S \times h$	$V = 70{,}23 \times 21$	$V = 69{,}36 \times 21$
$V = \dfrac{29{,}7^2 \times 21}{4\pi}$	$V \approx 1474{,}83 \text{ cm}^3$	$V \approx 1456{,}56 \text{ cm}^3$
$V \approx 1474{,}832 \text{ cm}^3$		

C - Exemples d'aides à la résolution éventuellement fournies par le professeur.

- Manipulez une feuille de format 21 x 29,7 cm et recherchez les éléments caractéristiques du cylindre.
- Que devient, pour le cylindre, la longueur de la feuille de papier ?
- Rappel de formules : aire du disque, périmètre du cercle, volume du cylindre.

D - Remarques :

- Le vocabulaire équation est cité par les élèves alors qu'il s'agit de faire des calculs. Il faut donc, en classe de seconde, amener les élèves à réfléchir sur le type de travail demandé «faire un calcul» ou «résoudre une équation» avant même la résolution.

- Les calculs menés de manière autonome par les élèves aboutissent à une grande variété de résultats du fait de la diversité des méthodes et du mode de fonctionnement de certaines calculatrices. C'est, après collection des résultats que s'engage une réflexion sur une méthode «idéale» d'approximation (qui est pour les élèves une manière d'avoir tous le même résultat) puis sur les conventions concernant les arrondis éventuels.
- Une des difficultés posée par la méthode «idéale» est l'utilisation de la lettre π. *«Avec π, on fait comme avec des lettres»* ou *«on fait en fonction de π»* sont deux remarques qu'on peut entendre.

E - Dans le sens de la largeur, roulons ...

On obtient : $V = \dfrac{21^2 \times 29{,}7}{4\pi} \approx 1\,042{,}81 \text{ cm}^3$

Aucune aide n'est fournie. On vérifie que la méthode d'approximation en fin de calculs est comprise par tous.

F - Conclusion

On peut constater l'effet de la résolution de cette question par un nouveau vote. Somme toute, une occasion de voir ou rappeler que deux solides peuvent avoir le même surface latérale sans avoir le même volume.

5 - Autour de la deuxième question.

A - Résolution :

La distance restante sur la longueur devient le périmètre du cercle.

On trouve : $V = \dfrac{27{,}7^2 \times 21}{4\pi} \approx 1282{,}889 \text{ cm}^2$

La discussion et la règle établie sur l'approximation ont été faites en résolvant la première question.

B - Aide fournie éventuellement :

- Découpez le patron dans une feuille quadrillée de format 21 x 29,7 cm.
- Roulez ! Roulez ! ...

C - Remarques

- La première étape est celle de la recherche du solide obtenu. Le résultat s'obtient soit immédiatement, soit après la manipulation du patron.
- Le professeur peut légitimer l'emploi d'un tel patron par un argument de réalité (un élève nous a rappelé le patron des rouleaux de papier WC !) et par un argument de solidité (lorsque le cylindre roule, la force de frottement ne s'exerce que sur l'un des points du joint).
- Le schéma de calcul mis en place est bien présent dans l'esprit des élèves, comme le montre la rapidité de leur résolution. Le schéma de calcul devient ainsi un algorithme.

6 - Au tour de la troisième question.

Le professeur distingue deux phases : la mise en évidence d'une relation de type fonctionnel et la résolution de l'équation. Quant aux élèves, s'ils veulent bien effectuer un ou deux calculs du type de la question 2, ils regimbent lorsqu'il faut en effectuer un troisième. Mettre en fonction de x devient le plus souvent un principe d'économie et non un moyen de résoudre la question posée.

A - Mise en fonction de x. Sa résolution.

Les élèves proposent trois types de procédures :

- le «parachutage», motivé par l'analogie avec ce qui précède, de la formule

$$V(x) = \frac{(29{,}7 - x)^2 \times 21}{4\pi}$$

- l'utilisation de la formule $V = 21 \times \frac{r^2}{4\pi}$, puis le remplacement de r par

$29{,}7 - x$.

- le plan «traditionnel»

$$P = 29{,}7 - x$$

$$P = 2\pi r \text{ donc } r = \frac{P}{2\pi} = \frac{29{,}7 - x}{2\pi}$$

$$S = \pi r^2 = \frac{(29{,}7 - x)^2}{4\pi}$$

$$V = 21 \times S = 21 \times \frac{(29{,}7 - x)^2}{4\pi}.$$

B - Aide fournie

- Faites les calculs en utilisant la lettre π.

C - Remarque sur cette première phase.

- L'appréhension du mot «fonction» que l'on espère voir naître dans l'esprit des élèves est forcément réductrice par rapport au contenu mathématique de ce mot. Il s'agit, ici, de privilégier l'axe «relation de dépendance du type : $y = f(x) \Rightarrow$ fonction $\Rightarrow$ tableau de nombres $(x\ ,\ y) \Rightarrow$ représentation graphique». Il faudra, au cours de l'année, mettre en place d'autres activités pour que les élèves puissent faire évoluer leur concept de fonction vers celui du mathématicien, mais pour le moment, aucune instuitutionnalisation n'est faite sur les fonctions. En particulier, l'étude du domaine d'astreinte n'est pas faite a priori.
- Une notion sous-jacente importante est celle de composition des fonctions, encore qu'elle ne soit envisagée que sous l'angle technique de remplacement d'une expression littérale dans une autre. Aucune définition, aucun développement sur ce sujet.

  On peut juste préciser un informe ou informel théorème : «Quand on remplace, on met des parenthèses autour de ce par quoi on remplace». Un mode d'explications (professorales) peut utiliser l'apport de l'informatique : l'algorithme 1 évident $P = 29{,}7 - x$

  $r = \dfrac{P}{2\pi}$ où r est écrit en fonction de P

  $S = \pi r^2$ où S est écrit en fonction de r

  $V = 21.S$ où V est écrit en fonction de S

  peut se réduire de manière successive en une suite d'algorithmes aboutissant à la formule recherchée.

algorithme 2	algorithme 3	algorithme 4
$r = \dfrac{29{,}7 - x}{2\pi}$		
$S = \pi r^2$	$S = \pi \times \left(\dfrac{29{,}7 - x}{2\pi}\right)^2$	
$V = 21.S$	$V = 21.S$	$S = 21 \times \pi \times \left(\dfrac{29{,}7 - x}{2\pi}\right)^2$

Cette dernière formule sera simplifiée à la demande du professeur, mais alors, bien souvent, les élèves veulent développer l'identité remarquable. Faut-il lutter contre ce désir ?
Dans l'esprit des nouveaux programmes et, considérant que le doute est une vertu scientifique, il est bon d'obliger les élèves à constater l'absence de contradictions «flagrantes». Les calculs faits précédemment pour $x = 0$ (cf. question 1) et $x = 2$ (cf. question 2) le permettent.

La deuxième phase est celle de la résolution de l'équation. A l'entrée en seconde, sans aide, les élèves ont du mal à y parvenir.

A- L'écriture de l'équation $V(x) = \frac{1}{2} V(0)$ c'est-à-dire $V(x) = 737{,}416$ ne pose aucun problème. Certains élèves manifestent contre la valeur approchée utilisée pour $V(0)$; c'est à ce moment que le professeur peut leur proposer une résolution graphique (quitte à être imprécis ...).

Le domaine d'astreinte [0 ; 29,7] est évident pour les élèves.

Le travail préparatoire à la représentation graphique faite sur papier millimétré ne doit pas être négligé sous prétexte du peu d'intérêt mathématique. Il est à mettre en place, même en seconde, avec rigueur vu l'importance accordée à ce genre de travaux dans d'autres disciplines.

La représentation graphique sera faite point par point, seule méthode possible à l'entrée en Seconde, hormis l'utilisation de calculatrices graphiques ou d'ordinateurs. Elle nécessite la recherche de l'intervalle de définition et le calcul de valeurs de $V(x)$: on propose de faire les calculs pour x entier pair de [0 ; 29,7] soit en répartissant le travail dans la classe, soit en apprenant aux élèves l'usage d'une calculatrice programmable. La recherche d'un repère adéquat à la représentation ne semble pas naturelle à moins que les nombres utilisés paraissent peu fréquentables aux élèves.

Un repère agréable est :

en abscisse : 1 cm représente 2 cm de la réalité

en ordonnée : 1 cm représente 100 cm^3 de la réalité.

Il impose une réflexion sur la «représentabilité» des valeurs approchées obtenues pour $V(x)$.

Le reste du travail se déroule sans trop de peine.

La résolution algébrique demande à être corrigée. Une méthode astucieuse consiste à utiliser le «truc» suivant :

$$V(x) = \frac{1}{2} V(0)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{21}{4\pi}(29{,}7-x)^2=\frac{1}{2}\times\frac{21}{4\pi}\times(29{,}7)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (29{,}7-x)^2=\frac{1}{2}\times 29{,}7^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (29{,}7-x)^2=\left(\frac{29{,}7}{\sqrt{2}}\right)^2$$

On trouve les deux valeurs possibles dont on calculera une valeur approchée: $x=29{,}7-\dfrac{29{,}7}{\sqrt{2}}$ ou $x=29{,}7+\dfrac{29{,}7}{\sqrt{2}}$

La seconde solution étant rejetée soit par manque de pertinence réelle (on ne peut pas construire de cylindre avec la feuille initiale), soit parce qu'elle n'appartient pas au domaine de définition. Ce phénomène est un moyen pour un professeur de légitimer l'étude du domaine d'astreinte ou de définition.

B - Remarque :

Les savoirs utilisés pour la résolution de cette question feront l'objet d'une synthèse soit tout de suite, soit en fin d'activité. Il s'agit de rédiger une fiche sur *«résolution graphique d'une équation»* du type $f(x) = a$ avec la description générale du processus et un exemple, ainsi qu'une autre fiche *«résolution algébrique d'équations»* du type $X^2 = A$.

7 - Où l'on ne résout pas la quatrième question pour se précipiter sur la cinquième.

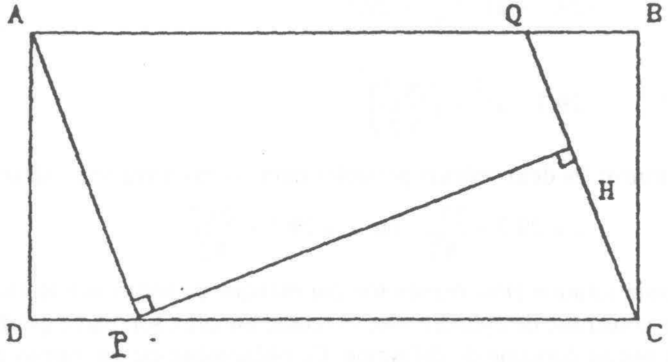
A - Aide fournie obligatoire.

Ayant lu l'énoncé entier, les élèves proposent d'intervertir l'ordre des questions, envie qu'ils légitiment d'autant mieux que, procédant par analogie avec la réponse précédente et par interversion de la longueur et de la largeur, ils disposent, selon eux, de la formule:

$$V'(x)=\frac{29{,}7}{4\pi}(21-x)^2$$

Le professeur doit intervenir rapidement et autoritairement: «Cette formule est fausse !». Il faut ensuite persuader les élèves qu'ils ne disposent pas des éléments caractéristiques du cylindre. Un moyen est de les faire manipuler le patron découpé dans une feuille quadrillée (roulant dans le sens de la longueur, le quadrillage restait perpendiculaire à la base du cylindre ; maintenant, il penche !).

En observant le patron, éventuellement en aplatissant le cylindre formé, on voit que la hauteur du cylindre est donnée par une perpendiculaire à [AP], par exemple (PH).



B - Recherche de la formule

C'est ici l'occasion de réinvestir des savoirs anciens.

En examinant l'algorithme initial, seuls périmètre du cercle de base et hauteur du cylindre sont inconnus.

Le **calcul du périmètre *AP*** ne pose aucun problème et aboutit au résultat: $AP = \sqrt{441 + x^2}$.

Le **calcul de la distance *AH*** peut être mené de diverses façons. La méthode utilisée par les élèves fait intervenir la trigonométrie. Après comparaison des angles des triangles DPA et PHC,

et en utilisant l'angle $\widehat{DPC}$, on obtient :

$$\widehat{A} = \widehat{P} ,$$

donc $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{P}$,

d'où $\dfrac{PH}{PC} = \dfrac{AD}{AP}$.

On en déduit la formule $PH = \dfrac{21\,(29{,}7 - x)}{\sqrt{441 + x^2}}$.

La formule du volume $V'(x)$ devient alors, après simplification :

$$V'(x) = \frac{21\,(29{,}7 - x)\sqrt{441 + x^2}}{4\pi}$$

Une méthode plus astucieuse permettrait d'obtenir la distance *AH* en calculant de deux façons l'aire du parallélogramme AQCP :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\,(\text{AQCP}) &= \mathcal{A}\,(\text{ABCD}) - 2\mathcal{A}\,(\text{ADP}) \\
&= 21 \times 29{,}7 - 2 \times \frac{21 \times x}{2}\,. \\
&= 21\,(29{,}7 - x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\,(\text{AQCP}) &= \text{AP} \times \text{PH} \\
&= \sqrt{441 + x^2} \times \text{PH}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi *PH* en écrivant l'égalité des résultats obtenus. Cette méthode peut faire l'objet d'un exposé du professeur.

C - Aide fournie éventuellement :

- Faites d'abord un raisonnement sur les angles des triangle DAP et PHC.
- En utilisant le fait que $\widehat{\text{DPC}}$ est un angle droit, comparez alors les angles de ces triangles.
- Comparez $\cos\widehat{\text{DAC}}$ et $\cos\widehat{\text{HPC}}$. En déduire *PH*.
- Rappel : $\cos\widehat{\text{A}} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ dans un triangle rectangle.

D - Remarques :

Les nouveaux programmes de collège ont déplacé le cosinus de la troisième à la quatrième ; de ce fait, cette notion devient un argument de démonstration bien maîtrisé par les élèves en seconde.

Réussir à obtenir cette démonstration demande du temps si les élèves travaillent de manière autonome.

E - Résolution de l'équation *V(x) = V'(x)*

L'écriture de l'équation ne pose aucun problème. On obtient :

$$\frac{21}{4\pi} \times (29{,}7 - x)^2 = \frac{21}{4\pi} \times (29{,}7 - x) \times \sqrt{441 + x^2}$$

Les élèves, effrayés par cette équation en proposent une résolution graphique. La résolution graphique de $x \to V'(x)$ sera, bien sûr, faite sur le graphique précédent; elle sera facilitée par l'utilisation d'une calculatrice éventuellement programmable.

La résolution numérique demande à être corrigée par le professeur. Au vu de l'exemple précédent, les élèves proposent de simplifier par $\frac{21}{4\pi} \times (29{,}7 - x)$. Il ne sera fait aucun obstacle. On obtient:

$$(29{,}7 - x) = \sqrt{441 + x^2}$$

d'où les élèves déduisent:

$$(29{,}7 - x)^2 = 441 + x^2$$
$$882{,}09 - 58{,}4x + x^2 = 441 + x^2$$
$$x = \frac{441{,}09}{59{,}4}$$
$$x \approx 7{,}4 \text{ cm.}$$

Le professeur doit faire remarquer que l'on obtient qu'une seule solution alors que la résolution graphique en fait apercevoir deux, dont la solution $x = 29{,}7$. Après qu'un débat se soit instauré entre les élèves et se soit appauvri faute d'arguments, les élèves mettent en doute la validité de cette solution. Le professeur intervient en remarquant que l'on peut toujours vérifier si 29,7 est une solution, puis propose une explication.

F - Remarque :

La résolution graphique ne pose aucun problème et fait l'objet d'un point de cours en fin d'activité. Sur la fiche *«Résolution graphique d'équations»*, on précise la méthode permettant de résoudre les équations du type $f(x) = g(x)$. L'exemple $x^2 = 3x - 2$ illustre cette méthode.

La résolution algébrique est difficile et doit être menée avec doigté. Elle fait l'objet d'un point de cours sur la fiche *»Résolution algébrique d'équations»* à partir d'un exemple moins compliqué.

G - Et la forme du patron ?

Si $x = 29{,}7$, la question ne se pose pas. La confection du patron permet, dans l'autre cas, de donner la réponse: un losange.

Le professeur doit imposer une vérification numérique, les élèves se satisfaisant de ce qu'ils voient, même si elle n'est faite que sur la valeur approchée $x = 7{,}4$ cm.

8 - Où la coupe ... cylindrique est pleine.

Placée en début d'année, cette activité impressionne les élèves. Elle leur permet une meilleure appréciation du travail attendu dans la classe et modifie, pour certains, leur représentation des mathématiques. Il est cependant évident que les savoirs institutionnalisés après une première utilisation n'imprègnent pas encore suffisamment les élèves ; ceci est en particulier vrai pour la notion de fonction. On propose à titre de documentation les fiche de cours (annexe 0), les exercices donnés à faire à la maison (annexe 1), des exemples de contrôles faits en classe (annexes 2 et 3) et quelques suggestions (annexe 4). Les exercices de l'annexe 1 sont très réducteurs par rapport à l'activité elle-même. Il s'agit que les élèves fassent quelques «gammes» sur les points de l'activité valant pour méthode.

ANNEXE 0
Fiches de cours

FICHE 1 : Résolution graphique d'équations.

1 - Du type *f(x) = a*.

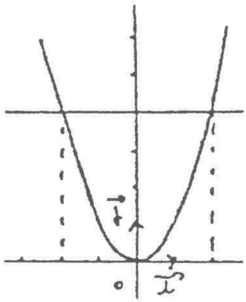
Méthode : on trace la représentation graphique de la fonction f (on dit aussi la courbe d'équation $y = f(x)$.

on trace la droite d'équation $y = a$.

on compte le nombre de points d'intersection de ces deux "courbes".

on donne l'ensemble des solutions de l'équation

- soit par une phrase en français : «les solutions de l'équation $f(x) = a$ sont ...»
- soit par $S = \{...;...;...\}$



Exemple : résolution de $x^2 = 4$

Les solutions de l'équation de l'équation $x^2 = 4$ sont : -2 et 2.

2 - Du type *f(x) = g(x)*

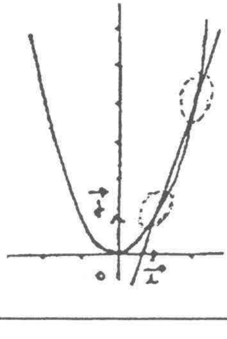
Méthode : on trace la représentation graphique de la fonction f.

on trace celle de g.

on regarde le nombre de points d'intersection des deux courbes.

on lit l'abscisse de ces points.

on donne l'ensemble des solutions de l'équation.



Exemple : résolution de $x^2 = 3x - 2$.

Les solutions de l'équation $x^2 = 3x - 2$ sont : 1 et 2.

Sur cet exemple, avec cette représentation graphique, les solutions graphiques 1 et 2 n'apparaîssent pas clairement.

Suite de la fiche 1.
Remarque importante :
Une équation étant donnée, on peut, avant d'employer la méthode précédente, la "triturer" algébriquement pour avoir des représentations de fonctions plus simples à tracer.
Exemple : pour résoudre $x^2 - 3x + 2 = 0$, il vaut mieux résoudre $x^2 = 3x - 2$.

Fiche 2 : Résolution algébrique d'équations.

1 - Du type $X^2 = A$

- On regarde le signe de A.
- Si $A < 0$ l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut être strictement négatif (pensez à $x^2 = -1$)
- Si $A = 0$, l'équation a une seule solution $X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 0$
- Si $A > 0$,...attention danger.

Il y a deux méthodes possibles :

Première méthode :

On pense	*On rédige*
A positif	$X^2 = A$
$\sqrt{A}$ existe	$X^2 = (\sqrt{A})^2$
	$X^2 - (\sqrt{A})^2 = 0$
Identité $a^2 - b^2$	$(X - \sqrt{A})(X + \sqrt{A}) = 0$
Un *produit* de facteurs est nul ...	$X - \sqrt{A} = 0$ ou $X + \sqrt{A} = 0$
	$X = \sqrt{A}$ ou $X = -\sqrt{A}$

Deuxième méthode :

On pense	*On rédige*
A positif	$X^2 = A$
$\sqrt{A}$ existe	$X^2 = (\sqrt{A})^2$
$a^2 = b^2$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$	$X = \sqrt{A}$ ou $X = -\sqrt{A}$

Pour des exemples, voir activité cylindre.

ANNEXE 1
Exercices

1 - Pour s'entraîner sur les équations

Résoudre (on dit aussi : résoudre dans **R**)

(1) $3(2-5x)+3+x-(1+2x)=5x+7$

(2) $3-7x-(1-x)=2(x+1)$

(3) $6x-(3-7x)-10(x+1)=3(x-3)-4$

(4) $12(x+1)+1{,}5x=8{,}6$

(5) $\dfrac{x-7{,}1}{3}+\dfrac{1-2{,}7x}{2}=\dfrac{7}{6}-\dfrac{1{,}2x-5}{3}$

(6) $\dfrac{21}{4\pi}(x+3)^2=\dfrac{21}{4\pi}(2x-7)^2$

(7) $(x+1)(5x-8)-(x+1)(9x-4)=(x+1)(7x-5)$

(8) Résoudre pour x compris entre -4 et 4 : $(x+5)^2=(2x-3)^2$

(9) Résoudre pour x négatif : $13x-(8x+10)=3x$.

(10) Résoudre pour x positif : $-5x-(-8x+1)=-3x$.

2 - Pour résoudre graphiquement

Résoudre l'équation

$x^2=2$ pour x compris entre -2 et 2

$x^2=-1$ pour x positif

$2x^2-5=0$ pour x compris entre -2 et 2

$3x+2=2$ pour x compris entre -2 et 4

$x^2+x-1=1$ pour x compris entre -3 et 2

$(x-1)^2=-2$ pour x compris entre -1 et 3.

3 - Pour mettre en équation

(1) Déterminer un triangle rectangle dont les côtés soient trois entiers naturels consécutifs.

(2) Trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 18.

(3) Un cylindre de 10 cm de rayon à la base contient une certaine quantité d'eau. Lorsqu'on y plonge un autre cylindre de 5 cm de rayon, le niveau de l'eau monte de deux cm. Calculer la hauteur h du cylindre immergé. Le second cylindre est entièrement sous l'eau.

4 - Pour représenter graphiquement une fonction

Tracer la représentation graphique de f quand :

(1) $f(x) = -2x + 3$ et x compris entre -2 et 3

(2) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ et x compris entre 2 et 6

(3) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ et x compris entre -2 et 3

(4) $f(x) = x^2$ et x compris entre -2 et 1

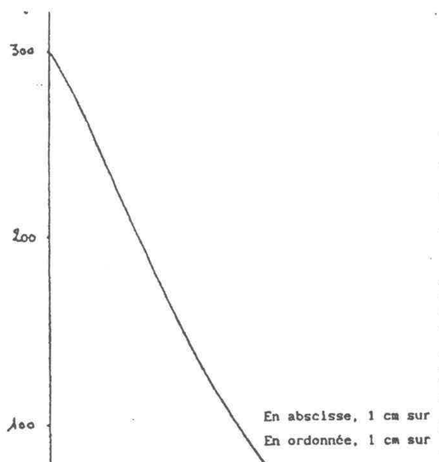
(5) $f(x) = x^2 + 1$ et x compris entre -2 et 2

(6) $f(x) = (x + 1)^2$ et x compris entre -3 et 2.

ANNEXE 2
Interrogation écrite

EXERCICE 1

Sur le dessin ci-dessous, on a représenté les points de coordonnées (x, y)



1) a) Entre quelles valeurs x varie-t-il ?

b) entre quelles valeurs y varie-t-il ?

c) Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3 ?

d) Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 100 ?

2) Les coordonnées des points de la courbe sont liés par la relation $y = 3(10 - x)^2$.

Résoudre algébriquement, pour x compris entre 3 et 7, l'équation : $3(10 - x)^2 = 100$.

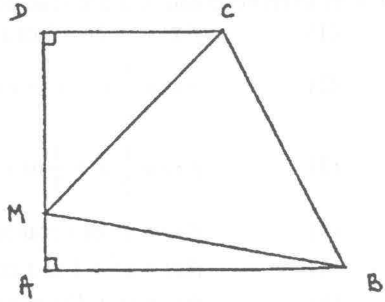
(valeur exacte, valeur approchée).

En abscisse, 1 cm sur le dessin représente 1.

En ordonnée, 1 cm sur le dessin représente 20.

EXERCICE 2

Dans la figure ci-contre, on a :
AB = 5 cm
DC = 3 cm
AD = 4 cm
x = AM avec x compris entre 0 et 4 cm.
On note :
a l'aire en cm^2 du triangle DMC
b l'aire en cm^2 du triangle ABM
c l'aire en cm^2 du triangle CBM.



1) Exprimer en fonction de x les nombres b et a.

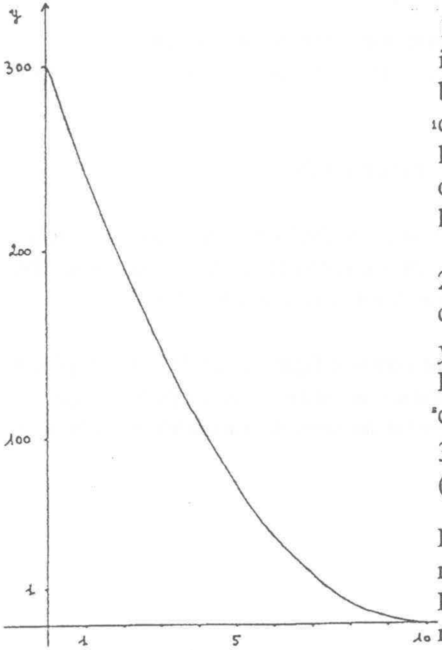
2) α) Calculer la surface du trapèze ABCD
β) Exprimer en fonction de x le nombre c

3) Pour quelles valeurs de x a-t-on :
α) $a = b$
β) $c = a + b$?

ANNEXE 3
Interrogation écrite

EXERCICE 1

Sur le dessin ci-dessous, on a représenté les points de coordonnées (x , y)



1) a) Entre quelles valeurs x varie-t-il ?

b) entre quelles valeurs y varie-t-il ?

c) Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3 ?

d) Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 100 ?

2) Les coordonnées des points de la courbe sont liés par la relation $y = 3(10 - x)^2$.
Résoudre algébriquement, pour x compris entre 3 et 7, l'équation : $3(10 - x)^2 = 100$.
(valeur exacte, valeur approchée).

En abscisse, 1 cm sur le dessin représente 1.
En ordonnée, 1 cm sur le dessin représente 20.

EXERCICE 2

On prend une feuille carrée de x cm, avec x compris entre 0 et 10. On la roule.

1) Exprimer en fonction de x le volume du cylindre obtenu noté $v(x)$.

2) Pour les valeurs entières de x comprises entre 0 et 10, calculer $V(x)$ à la précision de la machine.

3) Faire une représentation graphique de la fonction V.

4) Pour quelle valeur de x, le volume $v(x)$ est-il égal à la moitié de $V(10)$? (Résolution graphique).

ANNEXE 4
Suggestions à la discrétion des collègues

I - On prend une feuille de format 21 x 29,7 cm.
On enlève une bande $x \times 21$ et on roule pour obtenir un cylindre.
Quelle distance x faut-il ôter pour qu'en roulant dans un sens ou dans l'autre, on obtienne le même volume ?

II - Même question si on enlève une bande $x \times 29{,}7$.

III - On prend deux feuilles de format 21 x 29,7 cm. Sur l'une, on ôte une bande $21 \times x$ et sur l'autre une bande $29{,}7 \times x$. Quelle distance ôter pour obtenir le même volume pour les cylindres formés avec ces feuilles ?

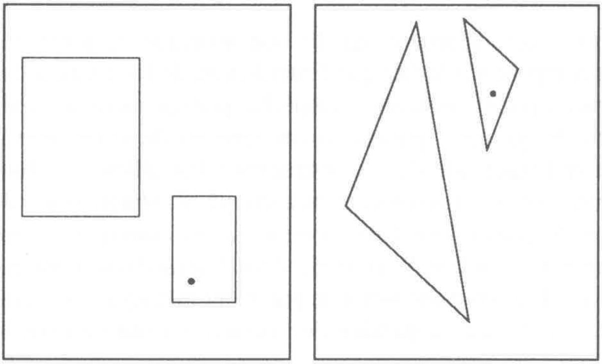
IV - On peut reprendre l'activité dont l'énoncé figure page ??? en remplaçant $21 \times 29{,}7$ par $l \times L$. On pourra raisonner en utilisant le rapport l/L que l'on notera k, et, s'intéresser particulièrement au sens de variation de la fonction volume du cylindre.

A PROPOS DE L'HOMOTHÉTIE

Gilles Aldon

IREM de Lyon

Énoncé du problème :



Dans les deux cas, la grande figure est un agrandissement de la petite. Un point a été oublié. Trouver une méthode qui permette de le replacer.

Objectif principal :

Faire découvrir les éléments caractéristiques et les propriétés élémentaires de l'homothétie en s'appuyant sur les connaissances des élèves concernant agrandissement et réduction.

Situation dans la progression :

Cette activité est proposée avant toute introduction par le professeur de la notion d'homothétie. Les autres transformations du plan au programme de seconde ont été étudiées.

Capitalisation possible :

Notion d'homothétie, homothétie-outil dans la résolution de problèmes, lien avec Thalès.

Scénario :

Un temps de recherche d'une solution en groupe (1h30)
Un temps de débat entre les élèves sur les solutions (1h)
Un temps de capitalisation du travail des élèves (1h).

Prolongement possible :

Tracer les diagonales d'un quadrilatère dont les sommets sont en dehors de la feuille (annexe 6).

A PROPOS D'HOMOTHÉTIE

Les nouveaux programmes de collège ont permis aux élèves de se familiariser avec la notion d'agrandissement/réduction. Nous nous sommes appuyés sur cette constatation pour préparer une activité d'introduction à la notion d'homothétie en seconde. Dans cet article, je me propose de rendre compte du déroulement du travail en classe en expliquant au passage les choix divers que les précédentes expérimentations (*) ont permis de faire.

A propos de l'énoncé :

Cet énoncé autorise toute approche, qu'elle soit métrique ou purement géométrique. Ce choix repose sur le fait que l'interdiction de l'utilisation des mesures (présent dans un précédent énoncé) empêche, pratiquement, les vérifications internes dans les groupes (puisque la consigne est de ne pas mesurer même pour vérifier l'exactitude d'une construction). Par ailleurs, si l'ancrage sur une situation connue est un objectif de l'activité, il est nécessaire de permettre aux élèves de puiser dans leurs connaissances antérieures pour résoudre ce problème. Cependant le triangle dont l'agrandissement est "inversé" complique l'utilisation d'une méthode purement métrique (sans l'interdire) et doit permettre de faire apparaître des méthodes n'utilisant pas le rapport de l'homothétie.

A propos des objectifs :

L'homothétie est une notion nouvelle en seconde; cependant, dans les classes antérieures, un certain nombre de notions ont été abordées préparant à son introduction. Il est donc important d'en tenir compte dans l'introduction de l'homothétie. Citons, en particulier :

- théorème de Thalès
- agrandissement-réduction
- proportionnalité
- projection et rapport de projection.

Analyse préalable : le produit attendu

Les élèves vont en général proposer une méthode de construction du point oublié qui sera juste. Le problème sera de leur faire mettre en évidence les propriétés utilisées pour faire leur construction.

La méthode la plus performante, c'est-à-dire celle qui est facilement réinvestissable dans le cas du triangle, va-t-elle être la même pour tous les élèves ?

(*) Voir la brochure *«Liaison Collège -2de»* produite par la Commission niveaux d'approfondissement et publiée par l'IREM de Lyon

Celle qui consiste à projeter orthogonalement le point marqué sur les côtés du rectangle et d'utiliser le rapport d'homothétie pour construire le point oublié sera sûrement disqualifiée, mais les autres méthodes ?

Compte rendu d'une expérimentation en classe

Première partie : travail en travaux dirigés (1/2 classe)

Enoncé : La feuille de l'annexe 1 est distribuée aux élèves.

Je note au tableau : *«Dans les deux cas, la grande figure est un agrandissement de la petite. Un point a été oublié. Trouver une méthode qui permette de le replacer.»*

Consigne : sur une feuille, chaque groupe écrira son programme de construction ; il n'est pas interdit de joindre un dessin ! Une méthode sera d'autant plus performante qu'elle pourra s'appliquer aux deux cas de figure présentés.

Cette dernière remarque rend une méthode purement calculatoire délicate à mettre en œuvre dans le deuxième cas et tend à privilégier une recherche plus géométrique.

Recherche individuelle : 10 minutes.

Cette phase permet bien sûr aux élèves de s'approprier le problème mais aussi de faire apparaître diverses méthodes. Ainsi, avant le travail en groupe, les stratégies suivantes sont apparues :

- utilisation exclusive de la règle non graduée et du compas (les effets du contrat didactique et de précédents travaux de construction se font sentir !).
- utilisation de la règle graduée et recherche d'un coefficient d'agrandissement.

Recherche en groupe : environ 1 heure.

Dans tous les groupes, cependant, la constatation de la concourance des droites formée avec les couples de points homologues a été un point fort jamais remis en question.

Dans les groupes où les deux stratégies sont apparues, un débat s'est instauré : est-il possible de donner une solution n'utilisant que les constatations sur le dessin ou faut-il nécessairement "construire" au sens mathématique du terme, sens déjà explicité dans la classe à propos d'autres problèmes ? A cet instant de la recherche de plusieurs attitudes ont vu le jour suivant les groupes :

Adopter le point de vue numérique et calculer le rapport d'agrandissement (cf. annexe 2, méthode 1).

Adopter un point de vue de construction (cf. annexe 2 méthode 2, ou annexe 3).

Par ailleurs, l'idée d'une transformation apparaît plusieurs fois dans les compte rendus des groupes (cf. annexe 4, très significative et imagée).

A ce stade de la recherche, les compte rendus ont été ramassés et le travail a repris lors du cours suivant en classe entière.

Deuxième partie : travail de synthèse en classe entière (1h.)

J'ai photocopié des compte rendus les plus significatifs (à mon sens) des travaux des élèves. (Annexe 2, 3, 4) qui ont été redistribués à la classe. Il est à noter que tous les groupes pouvaient se reconnaître dans ces compte rendus, et que, mis à part la formulation parfois plus maladroite ou confuse, l'une ou l'autre des idées exprimées dans ces pages était présents.

Après avoir lu et commenté le compte rendu n°4 à la classe, j'ai demandé aux élèves de décrire plus avant cette transformation en utilisant une fiche d'identité des transformations déjà manipulée pour les symétries, translation et rotation (cf. annexe 5).

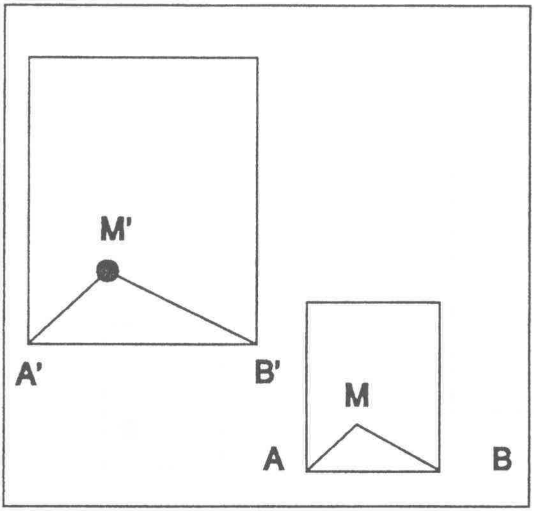
L'élaboration d'une définition de l'homothétie me paraissant à ce stade du travail difficile, j'ai fait le choix de commencer à la décrire par ses propriétés avant de la définir. Les questions de la non-conservation des distances et de la conservation de l'orientation (droite-gauche, haut-bas) ont alors été au centre de la discussion. Cependant, les éléments caractéristiques de la transformation (un point et un nombre) ont permis aux élèves de se mettre d'accord sur l'importance du rapport (puisqu'il faut l'appeler par son nom) dans ce problème.

A ce moment (fin du cours), j'ai proposé la définition vectorielle de l'homothétie, puis j'ai posé la question : pour quelles valeurs du rapport une homothétie agrandit, réduit, conserve l'orientation, la change ?

Troisième temps : 2 heures en classe entière.

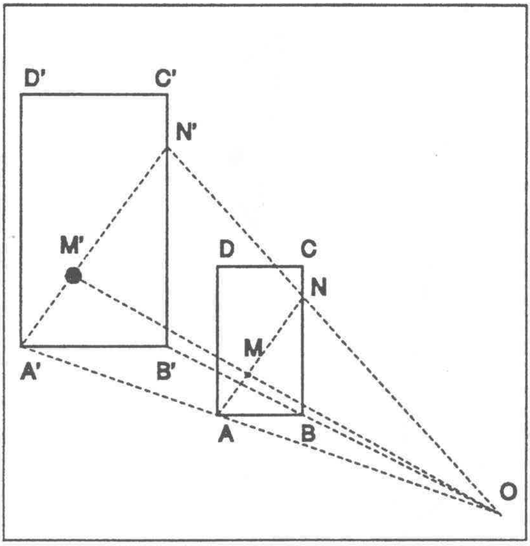
Les deux heures ont été l'occasion d'écrire un résumé des connaissances nécessaires à propos de l'homothétie, de faire des exercices d'application directe et de tracé (image d'un triangle par une homothétie de centre et de rapport donnés) et de laisser chercher le problème des diagonales. (annexe 6)

Exemple de méthode de construction du point oublié en utilisant le parallélisme d'une droite et son image.



Par A', on trace une parallèle à (AM) et par B', une parallèle à (BM). Les deux droites se coupent en M' qui est le point oublié.

Exemple de méthode utilisant le centre et la conservation de l'alignement.



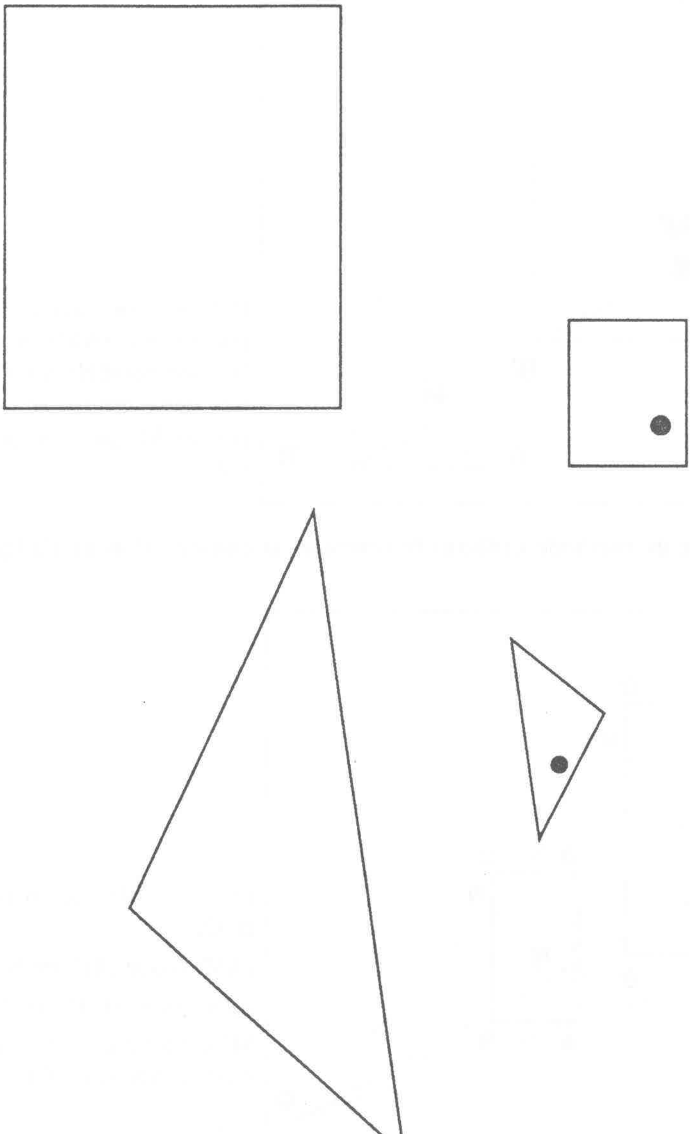
(AA') et (BB') se coupent en O.

(AM) coupe (BC) en N.

(ON) coupe (B'C') en N'.

M' est à l'intersection des droites (AN') et (OM).

ANNEXE 1 :
Les figures distribuées aux élèves



ANNEXE 2 :
Travaux d'élèves

Méthode 1

- Relier A à A', B à B', C à C' et D à D'. Les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en O..

- Le point à reproduire s'appelle E'. Tracer (EO).

- Calculer $\frac{A'O}{AO}, \frac{B'O}{BO}, \frac{C'O}{CO}, \frac{D'O}{DO}$.

On a : $\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = \frac{C'O}{CO} = \frac{D'O}{DO}$

- Mesurer EO et multiplier par $\frac{A'O}{AO}$

- E' est sur (EO) à la distance de $EO \times \frac{A'O}{AO}$ *de O.*

Méthode 2 *: le point à reproduire est E'.*

- Relier A à A' et B à B'. (AA') et (BB') se coupent en O

- Tracer (EO) et (BE). (BE) coupe (CD) en I.

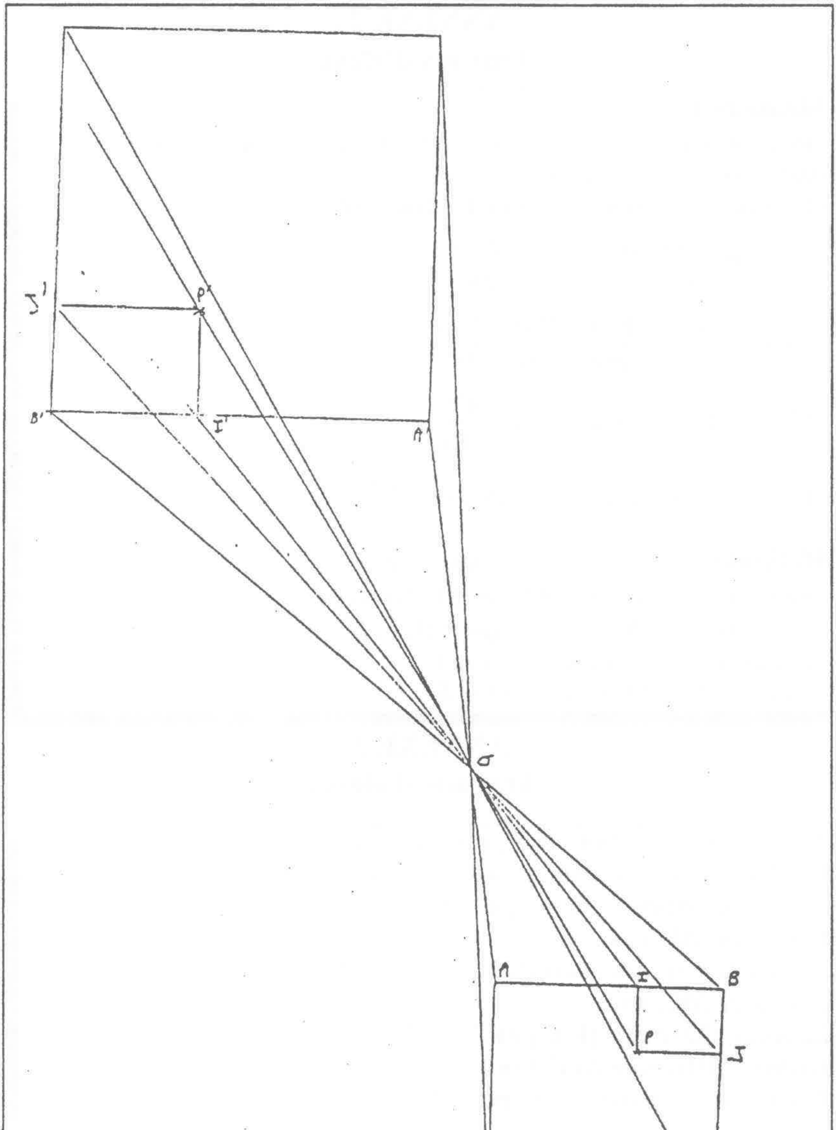
- Tracer (IO). (IO) coupe (D'C') en I'.

- Tracer (I'B'). (I'B') coupe EO en E'.

ANNEXE 3 :
Travaux d'élèves

Je trace les droites (AA') (BB') (CC') et (DD')
Ces 4 droites sont sécantes en un même point appelé O.
Je trace la perpendiculaire à [AB], issue de P.
Elle coupe [AB] en I.
Je trace la perpendiculaire à [BC], issue de P.
Elle coupe [BC] en J.
La droite (JO) coupe [B'C'] en J'.
La droite (IO) coupe [A'C'] en I'
Elle sont donc sécantes en un point P'.

Voir le dessin page suivante.


J'
P'
B'
I'
A'
O
A
I
B
P
J
D
C

ANNEXE 4 :
Travaux d'élèves

Soit un rectangle ABCD et un point O à l'intérieur de ce rectangle.
Soit A'B'C'D' l'agrandissement de ABCD.
Il faut trouver une méthode pour replacer le point oublié dans l'agrandissement.

Méthode :

On joint les points A, B, C et D respectivement aux point A', B', C' et D'. On observe que toutes ces droites se coupent en un même point (car il y a agrandissement).

A partir de cette remarque, on peut en déduire que cette transformation est une "symétrie centrale agrandissante" de centre I.

On peut donc replacer le point O' en pratiquant la "symétrie centrale agrandissante" de centre I.

Pour agrandir, il faut diviser par exemple la longueur B'I à BI. On multiplie le résultat par la longueur OI et on trouve IO'.

Nous pouvons alors placer O'..

ANNEXE 5 :

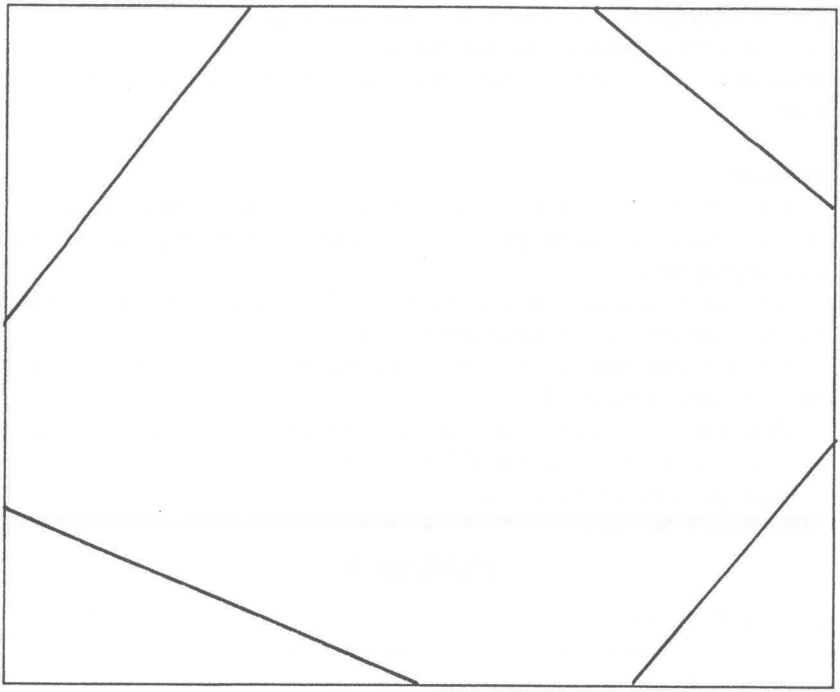
```
FICHE D'IDENTITÉ
      nom : [                          ]

Définition :

                        dessin

Image d'une droite :
Image d'un segment :
Image de trois points alignés :
Image d'un cercle :
Image d'un parallélogramme :
      Effet de la transformation sur :
le parallélisme :
les distances :
les aires :
l'orientation (gauche-droite, haut-bas):
```

ANNEXE 6
Prolongement possible :



Construire les diagonales du quadrilatère représenté sur cette feuille. Il est interdit de prolonger les côtés au-delà des limites de la feuille.

CONCLUSION

POINT D'ORGUE

Michel Bridenne (IREM de Dijon)
Jean-Pierre Fornallaz (IREM de Besançon).

Les textes généraux et les représentations de cette brochure veulent se compléter mutuellement. Ils répondent, concernant les activités de résolution de problème en classe, aux questions: que peut-on dire ? que peut-on y mettre ?

Les activités sont nombreuses dans l'enseignement des mathématiques au Collège et au Lycée. Celles présentées dans cette publication témoignent des diversités d'approche.

Chaque situation d'enseignement est, par nature, artificielle. Ici, chaque exemple insiste sur cet aspect de son aménagement, implicitement en opposition avec l'idée que tout aménagement se fait naturellement.

On peut se demander au service de qui, au service de quoi est mise cette «artificialité» ? A quoi sert-elle ?

Les points de vue mis en avant dans cette publication, et auxquels nous souscrivons, peuvent se résumer ainsi :

- les résolutions de problème en classe permettent l'élaboration de situations de classes propres à favoriser des apprentissages mathématiques,
- les activités en classe permettent l'élaboration de situations de classe propres à rendre l'élève acteur dans la construction de son savoir.

Notre propos veut pousser à (ré-)interroger les situations d'enseignement, celles de cette publication ou celles que chacun construit dans son quotidien, dans le sens de ces points de vue.

Les exemples proposés ici s'appuient sur des analyses préalables et rendent compte d'un certain vécu d'une mise en œuvre.

Ils nous semble indispensable d'affiner les analyses a posteriori, analyses à notre avis nécessaires pour constater et pour comprendre les écarts éventuels entre les attentes et la réalité perçue.

Intéressons-nous à l'élève acteur.

Rendre l'élève, en classe, acteur dans la construction de son savoir, ne relève pas du hasard.

Il ne s'agit rien moins que de trouver, de mettre en place et de mettre en œuvre des conditions forçant chaque élève, à rencontrer, en situation scolaire et dans la classe (c'est-à-dire, pas seulement en dehors de la classe), de moments longs et nombreux,

- où il est contraint de faire appel à ses propres connaissances pour aborder, pour comprendre une situation et pour élabore une stratégie de résolution, pour ce qu'elle a de mathématique,
- où il est contraint d'engager de lui-même une procédure de traitement ou de résolution,
- où il est contraint de contrôler, lui-même, traitements ou procédures, où il est amené à décider du vrai et du faux, voire du raisonnable, dans ses vérifications,
- où il est contraint de réaliser le processus de passage de connaissances valables à l'intérieur d'un problème à des connaissances réutilisables dans d'autres problèmes.

Ces points nous semblent fondamentaux : ils soulignent, à notre sens, sur quoi porte l'«artificialité» dont nous avons parlé précédemment. Ils nous invitent à examiner à l'aide de quoi et comment s'organise la dynamique d'une activité dans la classe, et à examiner les moyens que les é lèves ont en leur possession pour être acteurs dans le sens développé ci-dessus. *Ce sont là la raison et l'objet de la relecture que nous suggérons.*

La mise en route de l'activité dans la classe.

Personne n'ignore qu'il ne suffit pas de communiquer, même au prix de réponses à) quelques questions, un énoncé de problème à des élèves pour que ceux-ci s'investissent, s'intéressent au problème en tant que tel plutôt qu'à ce qu'ils imaginent des attentes de l'enseignant.

L'acquisition et la maîtrise de connaissances n'est avérée que dans l'appel et l'utilisation effectifs de ces connaissances en dehors du contexte scolaire. On peut penser, comme le fait Brousseau, que pour qu'un élève arrive à ce stade, il lui est nécessaire de travailler sur des situations mathématiques en ayant conscience de n'y engager qu'un raisonnement mathématique.

Il s'agit donc d'examiner les conditions dans lesquelles se réalise le passage du problème construit par l'enseignant, au problème que les élèves rencontrent et sur lequel, éventuellement, ils travaillent. Par là, d'examiner les moyens utilisés pour remplir ces conditions.

Le problème vu comme support d'un apprentissage ; la résolution de problèmes par les élèves.

Un énoncé de problème n'est, en soi, ni significatif du fonctionnement de connaissances données, ni représentatif de ce qu'est un «vrai» problème de mathématiques.

Il ne suffit pas qu'un énoncé de problème soit donné à des élèves pour que ceux-ci puissent mobiliser et mettre en œuvre leurs connaissances pour résoudre le problème. Et si résolution du problème il y a par les élèves, elle n'est pas plus significative, a priori, de la réalisation d'un apprentissage, que de la qualité de cet apprentissage.

L'activité doit alors réaliser, d'une part les conditions de pertinence du problème posé par rapport aux fonctionnements des connaissances voulues, d'autre part les conditions assurant une proximité suffisante entre les connaissances mises en jeu dans le problème et celles auxquelles les élèves pourront faire appel, ainsi que les conditions nécessaires à l'apprentissage visé. Pour cela, il paraît indispensable de faire une analyse préalable (analyse a priori) des acquis des élèves, de la place des connaissances mises en jeu dans la progression de la classe ainsi qu'une idée des conceptions ou représentations qu'ont les élèves de ces connaissances.

Le vrai, le faux et le vraisemblable dans la construction des connaissances.

Dans toute activité mathématique, la question de la validité (vrai ? faux ? hors sujet ?) de ce qui est fait est une question centrale.

En général, il ne suffit pas que le professeur propose une solution (ou plusieurs) pour que l'élève ait conscience de la validité ou de l'acceptabilité des procédures, des conceptions ou représentations qu'il a effectivement utilisées.

Il nous faut examiner les conditions (faites par l'enseignant) et les moyens qui permettent à l'élève de prendre en charge ce qui concerne la recherche du vrai dans ce qu'il a engagé dans son travail, dans ses procédures.

L'examen peut se faire, par exemple, sur la nature et le rôle des débats dans la classe dans cette recherche du vrai.

On peut aussi s'intéresser à la nature et au rôle des connaissances (savoir, techniques, etc....) dans l'activité. Par exemple, dans le cas de l'algèbre, pour décider du vrai et du faux, les élèves ont à **leur** disposition, différentes techniques. On peut citer :

- la double résolution (deux fois la même chose),
- ou la double résolution dans les deux sens,
- ou la résolution parallèle (deux méthodes distinctes),
- ou le recours à d'autres outils (changement de cadre),
- ou l'utilisation de propriétés mathématiques,
- ou l'utilisation du contre-exemple ...

La conclusion d'une activité de résolution de problème.

Qui peut ignorer enfin qu'il ne suffit pas, et quand c'est le cas, d'exhiber une connaissance particulière, employée à un moment donné pour que celle-ci devienne une connaissance comprise, acquise et réutilisable par l'élève ?

Il s'agit donc, dans ce cas, d'examiner les conditions et les moyens de passage d'un «outil» mathématique présent dans un problème à un savoir mathématique que l'on veut institutionnaliser.

La tâche est délicate. On peut examiner la nature, la forme et le rôle des capitalisations à la suite des activités, au su de l'institutionnalisation voulue. Mais d'autres voies sont possibles, analysant par exemple la gestion des temps, si différents (!) d'enseignement et d'apprentissage.

Forcément limité, notre propos peut être complété par la lecture d'ouvrages traitant les questions de dévolution d'une tâche, de validation d'un travail et de décontextualisation d'une notion. (Cf. par exemple ceux de G.Brousseau et C.Margolinas cités à la suite).

Nous pensons qu'il y a là des apports théoriques qui permettent d'analyser et d'expliquer certains des écarts que nous avons à peine abordés.
Ce travail d'analyse est un travail difficile (y sommes-nous réellement préparés ?), mais à notre avis indispensable et passionnant.

Bibliographie.

G.BROUSEAU, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques,* Recherche en didactique des Mathématiques, Vol.7.2, 198?

C.MARGOLINAS, *Le vrai et le faux dans la classe de mathématique,* Editions de la Pensée Sauvage, Grenoble, 1992.

ANNEXE

Apprentissages

face aux obstacles

UN NOUVEAU MODELE

ANDRE GIORDAN
Professeur
Laboratoire de didactique et épistémologie
des sciences
(L.d.e.s.)
Université de Genève

Un ensemble d'études récentes montrent que le niveau des élèves aux examens augmente à l'instar du savoir enseigné durant la scolarité. Dans la même temps des évaluations effectuées en Europe et en Amérique du Nord mettent en évidence que les notions apprises n'assurent pas de rôle intégrateur vis à vis du flux d'informations issus des médias. Elles ne permettent pas aux individus, ni de se situer dans l'environnement actuel, ni de maîtriser les transformations rapides de la vie professionnelle. Elles sont mémorisées au mieux pour réussir les épreuves scolaires hebdomadaires ou examen finaux et...oubliées ensuite. Et à l'aube du troisième millénaire, dans un contexte où des savoirs performants sont une nécessité vitale, à la fois pour des individus et pour la société.

Il nous faut donc dépasser la traditionnelle question du "niveau" des élèves, beaucoup trop limitante, et soulever les véritables défis de notre époque :
- Quels savoirs doit-on maîtriser en direction des années 2000 ?
- Comment les transmettre aux élèves pour avoir quelque chance de les rendre opérationnels ?

C'est ce deuxième aspect qui sera traité dans ce texte.

L'enseignement, d'abord un problème d'apprentissage.

Les idées en matière d'apprentissage ont rapidement évolué ces dernières années. Cela s'est effectué très discrètement, en dehors des feux médiatiques. L'influence des travaux de psychologie épistémologique ou cognitive, d'intelligence artificielle, mais surtout le développement d'une nouvelle approche: la didactique et l'épistémologie des disciplines ont joué un rôle déterminant. Un nouveau consensus tend à être avancé, il transforme entièrement les idées sur l'enseignement. Contrairement à ce que l'on pense généralement, ce n'est pas parce que l'enseignant a traité tout son programme et mené son cours avec sérieux et enthousiasme, qu'il a nécessairement fait acquérir un savoir.

On peut affirmer aujourd'hui que les concepts fondamentaux ne s'acquièrent jamais par transmission directe d'une personne "qui sait"(l'enseignant) à un élève. En effet, la pensée d'un apprenant ne se comporte nullement comme un système d'enregistrement passif? Elle ne fonctionne jamais comme une simple structure de mémorisation, capable de reconstituer un savoir linéaire, et ceci par simple addition d'éléments successifs.

De plus, l'élève n'est jamais "vierge" par rapport au savoir enseigné. Parfois il peut disposer d'idées préalables sur le sujet. En tout cas, il possède toujours un mode d'explication spécifique, une façon de raisonner qui lui est propre et qui oriente la façon dont il décode les informations fournies par l'enseignant. Dans le jargon didactique on appelle cela les conceptions.

Dès lors, l'apprentissage de tout savoir dépend de ces conceptions: et si l'enseignement n'en tient pas compte, les idées en place font obstacle. Les notions enseignées sont éludées ou déformées. au mieux, ces dernières se «plaquent» ou restent isolées à côté du savoir familier. La connaissance des conceptions permet ainsi à l'enseignant de mieux adapter l'enseignement à son public, elle l'aide pour choisir les situations didactiques les plus adéquates, compte tenu des contraintes horaires, matérielles ou en nombre d'élèves.

Mais ces mêmes travaux montrent qu'il est nécessaire d'aller encore plus avant. Car face à une situation éducative, c'est une véritable stratégie que met en oeuvre l'élève même pour ne pas comprendre. Ainsi, il apparaît que l'élève apprend à la fois «grâce à» (Gagné) «à partir de » (Ausubel) «avec» (Piaget) les savoirs fonctionnels dans la tête de ce dernier. Mais en même temps on apprend «contre» (Bachelard) une connaissance.

L'acquisition des connaissances fondamentales se situe ainsi, tout à la fois, dans le prolongement des acquis antérieurs qui fournissent le cadre de questionnement, de références et d'interprétation, et se fait, le plus souvent, par rupture avec ces acquis. Pour qu'il y ait compréhension d'un modèle nouveau ou mobilisation d'un concept par l'apprenant, l'ensemble de sa structure mentale doit être réorganisée.

Il s'agit la d'un processus éminemment interactif, fonctionnant sur un mode conflictuel. Il dépend prioritairement de l'élève, principal acteur de son apprentissage. Pour tenter de l'approfondir confortablement, nous avons été amenés à produire un nouveau modèle d'apprentissage, appelé «modèle d'apprentissage allostérique1».

Créer un environnement didactique.

La place du maître est alors à resituer : il lui faut abandonner l'idée qu'il suffit de «dire» de «donner», de «montrer» ou de «démontrer» pour que l'élève apprenne (à une exception près, celle où le système de pensée de l'élève est capable d'accepter ces données).

L'enseignant n'est plus seulement celui qui fournit l'information. Sur ce plan, il pourrait même être relayé par les moyens audiovisuels, plus efficaces et plus attractifs, si des efforts étaient réellement faits dans ce sens.

Toutefois, son rôle apparaît plus que jamais indispensable : l'appropriation de chaque parcelle de savoir est rarement spontanée. L'élève redécouvre rarement la connaissance tout seul. Or, si c'est lui seul qui peut élaborer ses connaissances, souvent par des cheminements qui lui sont propres, l'enseignant peut lui faciliter grandement la tâche en le plaçant dans des situations favorables.

Certains obstacles ne peuvent être franchis sans une somme d'apports, d'interactions formulées par le maître. Une progressivité que l'enseignant peut proposer est souvent nécessaire pour l'acquisition de certaine démarche de pensée.

Sans conteste, une mutation dans le métier est à envisager. Elle doit prendre en compte au moins trois aspects fondamentaux. La première fonction des enseignants n'est plus seulement de transmettre des données, elle est d'envisager comment transformer les idées fonctionnelles, «dans la tête» des élèves. Et cela, en créant un environnement didactique, en mettant en place un «cocktail» (situation, interventions variées, aides didactiques) facilitant les apprentissages.

Mais ses rôles les plus importants apparaissent ailleurs. Son projet ne doit plus être seulement comment faire apprendre, mais comment leur apprendre à apprendre. Ce point commence à être envisagé régulièrement, même dans les textes ministériels. Cependant, il ne suffit pas de l'avancer sur un mode lancinant pour qu'il se réalise. Un ensemble de méthodes pédagogiques doivent être produites et testées pour permettre aux élèves de prendre possession d'outils de travail.

Enfin troisième difficulté et non la moindre pour généraliser l'enseignement, comment faire pour que les élèves veuillent bien apprendre ? Il y a là un ensemble de problèmes à traiter tout aussi bien au niveau de la motivation, souvent absente, qu'à celui d'un questionnement généralement éludé. Il semble alors nécessaire non pas tant d'enseigner que de permettre aux élèves de se situer ou de leur faire comprendre l'importance , la nature et la structure des savoirs ; par exemple, que le savoir est toujours une tentative de réponse à une question ou à une situation problématique.

Maintenant comment peut-on faire concrètement quand on se trouve avec une classe ? dans ces quelques lignes, il est difficile de proposer des activités utilisables directement. Nous nous contenterons de décrire quelques paramètres significatifs.

D'abord, il est nécessaire d'induire des **déséquilibres conceptuels** pertinents. Il faut faire naître sans cesse une activité élaboratrice chez l'apprenant. Pour cela, il est utile de «perdre un peu de temps» pour le motiver par rapport aux questions à traiter (ou du moins de le faire entrer dans ces dernières). Il faut également l'aider à mettre en œuvre un certain niveau d'attitudes (curiosité, esprit critique, confiance en soi, communicabilité, etc.) et de démarches indispensables pour toute appropriation (maîtrise de l'information, problématisation, démarche expérimentale, approche systémique, modélisation, etc.).

Un certain nombre de **confrontations authentiques** sont souhaitables (confrontations élève-information, confrontations élèves-maître, suivant les cas). Elles doivent convaincre l'apprenant que ses conceptions ne sont pas adéquates par rapport au problème traité.

Cet aspect n'est jamais simple, l'enseignant a besoin de diversifier au maximum ses arguments ; en tout cas de ne jamais se limiter à un seul, présenté rapidement. Les confrontations entraînent l'apprenant à expliciter son point de vue, à prendre du recul par rapport à ses évidences; le plus souvent à diagnostiquer le problème. Elles doivent l'amener à glaner un ensemble de données nouvelles pour enrichir son expérience par rapport à la question en jeu.

Ensuite, l'apprenant doit avoir accès à **un certain formalisme**, en tant qu'aide à la réflexion. Ce formalisme, qui peut prendre des formes très diverses (symbolisme, schématisation, modélisation), doit être facilement manipulable pour organiser les nouvelles données ou servir de point d'ancrage à la nouvelle structuration du savoir.

La façon la plus économique est généralement que l'enseignant fournisse une ébauche de modèle ou de schématisation. Il doit toutefois s'entourer d'un certain nombre de précautions : ce pré-modèle doit être lisible, compréhensible, adapté à la perception du problème que s'en fait l'élève. Au préalable il est toujours souhaitable que ce dernier ait eu l'occasion de se familiariser avec leur manipulation. Eventuellement qu'il ait eu la possibilité d'en produire et d'en faire fonctionner...

Vu la durée que nécessite la maîtrise des apprentissages, il est important qu'ils fassent l'objet d'une **intégration transdisciplinaire sur des concepts fondamentaux** (énergie, matière, temps, système, information, régulation, mémoire, etc.), chaque discipline se mettant au service d'un projet commun et d'une approche par approximations successives.

Par ailleurs, il est indispensable de proposer des situations où l'apprenant pourra **mobiliser son savoir**. Il pourra ainsi constamment en tester l'opérationnalité et les limites. Au delà de cet apport direct, ces pratiques montrent à l'élève comment de nouvelles données sont plus facilement apprises lorsqu'elles fonctionnent. Elle habituent l'élève à greffer le nouveau sur l'ancien, ou au contraire à s'en débarrasser, elles l'entraînent à un va et vient entre ce qu'il connaît et ce qu'il est en train de s'approprier. L'élève apprend ainsi à activer les savions antérieurs, il peut même imaginer certaines modalités personnelles de guidage.

Enfin, il est souhaitable que l'apprenant puisse mettre en oeuvre continuellement **un savoir sur le savoir**. L'obstacle à l'apprentissage n'est pas toujours directement lié au savoir lui même mais résulte indirectement de l'image ou de l'«épistémologie intuitive» que l'apprenant possède sur la démarche ou sur les mécanismes de production des connaissances.

Une seule stratégie pour le changement : la formation des enseignants. Sur tous ces points il se dégage nettement que l'enseignant est irremplaçable : il devient l'organisateur des conditions d'apprentissage. C'est l'apprenant qui élabore, intègre mobilise...bref apprend, et cela à partir de ses structures de pensée propres. C'est l'apprenant qui doit se trouver en situation de changer ses conceptions. Mais encore faut-il qu'il se trouve en situation de le faire!

Il va sans dire qu'une telle transformation des fonctions de l'enseignant dans sa classe ne se fera pas spontanément. Une véritable formation didactique de l'enseignant s'avère indispensable. Par exemple, l'enseignant ne pourra plus préparer son cours comme avant, il devra connaître au préalable les conceptions des différents élèves et leurs obstacles potentiels à l'apprentissage, il devra envisager la matière à enseigner à travers une pratique de références, il devra avoir à sa disposition des ressources qu'il utilisera ou pas en fonction des motivations ou des difficultés rencontrées par les élèves, etc.

On pensait dans les années soixante que pour enseigner l'anglais, les mathématiques à Paul ou à Pierre il suffisait de connaître la discipline ? On pense aujourd'hui trop souvent de manière réductrice que seule la connaissance de Chloé ou d'Emilie est utile. Le modèle d'apprentissage allostérique montre que ces deux aspects sont complémentaires. L'interaction entre les caractéristiques des matières à enseigner et les processus de compréhension des élèves doit même être privilégiée.

> Nous avons été amenés à avancer terme «allostérique» comme un d'oeil ! IL provient d'un cert nombre d'analogies en relation a la sructure et le fonctionnement certaines protéines. Les anglo-sax qui se sont vivement intéressés à modèle pour ses aspects pragr tiques, ont repris ce terme et l popularisé sous ce vocable.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC Gilbert, GERMAIN Gilles, MANTE Michel, *Problèmes ouverts et situations-problèmes*, IREM de Lyon, 1988.

ARSAC Gilbert, CHAPIRON Gisèle, COLONNA Alain, GERMAIN Gilles, GUICHARD Yves, MANTE Michel, *Initiation au raisonnement déductif au collège*, PUL et IREM de Lyon, 1992.

BKOUCHE Rudolph, CHARLOT Bernard, ROUCHE Nicolas, *Faire des mathématiques : le plaisir des sens*, Paris, Colin, 1991.

BROUSSEAU Guy, *Fondements et méthodes de la didactique*, RDM 7.2, 1986, p.33-115.

CHEVALLARD Yves, *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, Petit X, 1ère partie, 5, 1984, p.51-94, 2ème partie, p.43-72, 1989.

DOUADY Régine, *Jeu de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, RDM 7.2, 1986, p.5-31.

GILLY Michel, *A propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mécanismes psycho-sociaux*, in Construction des savoirs, Obstacles et conflits, Actes du colloque international "obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif, 1989, Montréal-Ottawa, Agence d'Arc, p161-181.

GIORDAN André, *Vers un modèle didactique d'apprentissage allostérique*, Construction des savoirs, Obstacles et conflits, Actes du colloque international "obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif", 1989, Montréal-Ottawa, Agence d'Arc, p.240-257.

HEBERT Elisabeth, LAGARDE S., MACE Alain, *Activité et gestion de classe : un exemple, Seconde X*, IREM de Rouen, 1992.

LEGRAND Marc, *Rationnalité et démonstration mathématique : le rapport de la classe à une communauté scientifique*, RDM, 9.3, 1988, p.365-406.

LEGRAND Marc, *Le regard scientifique*, Conférence APMEP-Lyon, Octobre 1991. Plot n°61, 1993.

MARGOLINAS C., *Le vrai et le faux dans la classe de mathématiques*,, la pensée sauvage, 1992, Grenoble.

SUIVI SCIENTIFIQUE, Classe de 6ème, 1985-86, Bulletin Inter-IREM 1er cycle, IREM de Lyon, 1988.

SUIVI SCIENTIFIQUE, Classe de 5ème, 1986-87, Bulletin Inter-IREM 1er cycle, IREM de Lyon, 1989.

SUIVI SCIENTIFIQUE, Classe de 4ème, 1987-88, Bulletin Inter-IREM

1er Cycle, IREM DE LYON, 1988.
SUIVI SCIENTIFIQUE, Classe de 3ème, 1988-89, Bulletin Inter-IREM 1er cycle, IREM de Lyon, 1988.
BULLETIN INTER-IREM Premier Cycle - Niveaux d'approfondissement, liaison collège - seconde, 1989-90.
GROUPE "LYCEE" de l'IREM de Clermont-Ferrand, *Introduction à la notion de fonction en seconde.* Repères n°10, 1993, p.47-57.
REVUE DES IREM, Repères, n°8, juillet 1992, *Spécial activités.*

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE CHIRAT
42540 ST-JUST-LA-PENDUE
EN JUILLET 1993
DÉPÔT LÉGAL 1993 N° 8062

IMPRIMÉ EN FRANCE