Résolution de problèmes du collège au lycée

Marie Claire Combes et Mireille Sauter

IREM Montpellier

Depuis 3 ans l'IREM de Montpellier a mis en place, dans son Académie, pour accompagner les enseignants de Mathématiques dans leur pratique des TICE, une formation appelée **SFODEM** (Suivi de Formation à Distance des Enseignants de Mathématiques). Ce dispositif utilise, sur Internet, la plateforme Pleiad, qui offre aux formateurs et aux stagiaires les services d'une messagerie, d'un chat et d'un forum.

Dans le cadre du SFODEM, notre groupe de recherche propose une formation intitulée « **Résolution collaborative à distance de problèmes ouverts** » à l'intention d'enseignants de collèges et de lycées.

Dans cet atelier nous présentons :

- les objectifs de la formation et le cadre théorique de nos travaux ;
- l'organisation de la formation ;
- un exemple de problème traité dans les classes : le problème des monnaies
 - la genèse de son énoncé
 - les travaux de recherche des élèves, suite à une analyse a priori de ce problème par les participants de l'atelier.

A - Les objectifs de la formation et le cadre théorique de nos travaux

Cette formation poursuit deux objectifs qui sont d'une part de permettre l'évolution des pratiques des enseignants autour de la résolution de problèmes ouverts et d'autre part de mettre en réseau plusieurs classes de l'Académie afin d'instaurer un travail collaboratif à distance.

Ces pratiques enseignantes reposent sur la résolution de problèmes dans le but de placer l'élève dans la situation la plus caractéristique de l'activité mathématique, c'est à dire affronter un problème, se trouver dans la situation d'un chercheur. Pour apprendre, l'élève doit se poser des questions, oser prendre des initiatives, manifester ses doutes, confronter ses idées à celles des autres.

Permettre l'élève d'expérimenter une véritable démarche scientifique est le but essentiel, partagé par les pratiques suivantes :

- les problèmes ouverts de l'IREM de Lyon¹,
- le débat scientifique développé par Marc Legrand² à l'IREM de Grenoble
- les narrations de recherche³ élaborées à l'IREM de Montpellier.

Dans le cadre de notre formation, nous présentons ces différentes pratiques, leurs spécificités et leurs complémentarités. Pour les mettre en œuvre, nous proposons de véritables problèmes ouverts de recherche, et non des problèmes fermés, déguisés où la réponse est unique et imposée. Les énoncés sont courts, attractifs et compréhensibles par tous ; d'un contenu intuitif assez immédiat, leur formulation reste volontiers imprécise, cependant suffisamment simple, pour susciter la curiosité dans des domaines abordables par tous. Toutes fois leur complexité nécessite des échanges, une recherche en groupe et un travail collaboratif pour arriver à des résultats satisfaisants.

La durée de la recherche est nécessairement assez longue, étalée sur plusieurs semaines avec des moments de synthèse et de relance gérés par les tuteurs ou les enseignants.

¹ IREM de Lyon Problèmes ouverts et situation problèmes.

² LEGRAND M. Débat scientifique en cours de mathématiques Repères IREM n° 10

³ IREM de Montpellier Les Narrations de recherche de l'école primaire au lycée Brochure APMEP n°151

Le démarrage est relativement aisé, mais les énoncés nécessitent un débat entre les chercheurs pour fixer des choix. Il peut être nécessaire de :

- définir les objets sur lesquels on travaille ;
- réaliser des premières modélisations suivant les choix adoptés ;
- s'interroger sur les résultats attendus : « Qu'est ce qu'une solution, une réponse satisfaisante ? ».

Une fois ces choix adoptés par tous, ces problèmes offrent un démarrage aisé, il n'y a pas de blocage. Une phase expérimentale (géométrique, numérique) est accessible à tous, les premières recherches sont riches de résultats variés.

L'évolution des recherches peut être très imprévisible, car ces problèmes sont évolutifs, « vivants », ils nécessitent des échanges entre pairs. Cette communication des divers résultats permet d'avancer, de relancer, de remotiver les recherches. Il peut y avoir une remise en cause des choix initiaux, une redéfinition des objets et des « bonnes réponses ». De nouvelles modélisations peuvent être proposées, et le problème explorera de nouvelles pistes en entraînant l'étude de problèmes annexes ou de variantes.

De fait, la recherche n'est jamais terminée ; le problème peut rester ouvert, c'est à dire n'être jamais résolu ou bien avoir d'autres prolongements.

Voici deux exemples de problèmes proposés dans les classes :

Le problème de la chèvre

Un berger souhaite construire un enclos pour sa chèvre. Pour cela, il dispose de :

- une barrière de longueur 5m, deux barrières de longueur 4m, et une barrière de longueur 3m
- un mur rectiligne de grande longueur, contre lequel il peut construire son enclos.

Que lui conseillez-vous ?

Le problème du quadrillage

Sur un quadrillage donné, combien peut-on dessiner de triangles qui ont comme sommets les nœuds du quadrillage ?

Pourquoi un travail collaboratif et la mise en réseau de plusieurs classes ?

Si le but premier est d'abord de faire des mathématiques, il s'agit également d'arriver collectivement à une solution ; c'est sur ce point que nous allons insister.

Le problème initialement posé est a priori trop difficile pour être résolu seul ou trop riche pour qu'une seule personne puisse en envisager toutes les possibilités. L'intérêt de travailler à plusieurs est alors de mettre en commun les différents points forts de chacun des chercheurs, il se crée une dynamique et une émulation de groupe, les relances mutuelles entre pairs permettent de résoudre ce problème trop difficile.

Le fait de devoir communiquer ses idées ou ses questions, est un des points fondamentaux de ce travail. Nous supposons que cette communication nécessaire permet de clarifier ses propres idées de manière différente que lors d'un travail individuel plus classique. Si l'on ne comprend pas quelque chose, il faut arriver à poser des questions aux autres, et le simple fait de devoir expliciter ces questions permet souvent d'avancer dans sa compréhension (on se rend mieux compte de ce qui pose problème). Si l'on a une idée, le fait de devoir la présenter aux autres permet en général de la clarifier, de l'affiner, finalement de mieux la comprendre (et parfois de s'apercevoir rapidement qu'elle ne fonctionne pas). Enfin, il peut arriver qu'un ou plusieurs chercheurs arrivent, au cours de leur recherche individuelle, à avancer très significativement dans la résolution du problème posé, voire à le résoudre. Leur mission est alors, dans le cadre du travail collaboratif, d'arriver à faire passer leurs idées à tous les membres du groupe. **L'objectif fondamental est que la solution proposée soit**

validée par l'ensemble des chercheurs. Le fait de devoir faire **coopter** ses idées par l'ensemble du groupe présente un grand intérêt mathématique pour celui qui pense avoir trouvé quelque chose : outre le fait qu'il s'agit effectivement du moyen de validation des résultats de la communauté mathématique, cela force souvent à clarifier les idées, les modifier, les simplifier (pour mieux les faire accepter) et donc à retravailler son raisonnement ; cela amène également à envisager de nouvelles questions, des cas particuliers, des généralisations ou des variantes du problème et donc à améliorer sa compréhension du problème.

Un objectif essentiel de notre formation est donc de créer une communauté de recherche et de savoirs pour résoudre un problème ouvert, afin de montrer la complémentarité et l'enrichissement de la mise en commun de toutes les connaissances.

Cette communauté étant géographiquement dispersée, l'échange des recherches par Internet motive une amélioration de la qualité des travaux destinés à être communiqués aux autres, qualité dans la présentation, la lisibilité, la clarté des explications.

En résumé nous pouvons citer un extrait du rapport PISA qui présente une réflexion sur la culture mathématique où nous retrouvons les idées directrices de nos travaux :

« Au cœur même de la notion de culture mathématique se trouve la capacité de poser, de formuler et de résoudre des problèmes.....les élèves devraient non seulement être à même de résoudre des problèmes, mais aussi de se les poser. »

Nous retrouvons ces objectifs à travers les projets de programmes au collège, où il est question d'organiser des « séquences d'investigations » et dans les nouvelles orientations du baccalauréat avec des « exercices avec prises d'initiatives »

B - Organisation de la formation

Pour créer cette communauté de recherche et favoriser une bonne communication, nous avons mis en place successivement deux dispositifs ; car nous pensons qu'il faut vivre soi-même ce travail collaboratif autour d'un problème ouvert pour le mettre ensuite en œuvre avec des élèves.

Avant tout travail avec les classes, nous organisons sur une durée de trois semaines la recherche d'un problème ouvert entre enseignants. Les stagiaires vivent ainsi par anticipation la situation de leurs élèves face à une véritable démarche scientifique. Ils comprennent la nécessité de l'élaboration d'un contrat pour organiser la communication et l'obligation de définir des critères concernant les documents à communiquer aux autres participants.

Puis nous constituons des groupes de quatre ou cinq classes de niveaux scolaires différents autour de la recherche d'un problème ouvert.

Dans ce travail collaboratif les rôles des formateurs et des stagiaires se trouvent modifiés par rapport à des stages de formation classique.

Les formateurs, un universitaire et trois enseignants en collège, doivent :

- Organiser le travail sur l'année par un calendrier très précis (dates des présentiels, période de recherche des classes, dates des chats...);
- constituer les groupes de recherche (stagiaires ou classes) ;
- accompagner les stagiaires et les inciter au travail collaboratif en réagissant rapidement aux nouvelles pistes qu'ils proposent, en les encourageant à communiquer le fruit de leur recherche, sans attendre un produit fini ;
- améliorer les conditions de la communication entre stagiaires et entre tuteurs et stagiaires, les aider à mettre leurs travaux sur la plate-forme Pleiad
- être les garants de la mémoire du travail commun élaboré autour du problème (gestion du forum sur la plateforme)

Les trois enseignants de collège ont un double rôle puisqu'ils sont d'une part tuteurs d'un groupe de stagiaires et d'autre part stagiaires eux-mêmes car ils participent avec l'une de leur classe à la recherche du problème

Parmi les formateurs, le rôle de l'universitaire est essentiel car c'est lui qui propose le problème, dont il présentera des prolongements et des solutions partielles. N'ayant pas la responsabilité d'une classe impliquée dans la recherche, il a un regard extérieur et une vue globale des travaux, ce qui lui permet de faire des bilans et des relances à tous, de réguler les recherches de l'ensemble des participants

Les stagiaires sont des enseignants de collège ou lycée, une vingtaine cette année.

Tout d'abord, l'expérimentation menée, montre que les stagiaires doivent avoir un équipement informatique personnel pour réussir à participer à ce travail.

Ils s'engagent à travers une charte à se connecter régulièrement sur la plate-forme Pleiad, à résoudre des problèmes ouverts avec d'autres enseignants et à organiser avec l'une de leurs classes un travail collaboratif avec d'autres classes, sur la résolution de problèmes ouverts.

Par ce fait, les stagiaires impliqués dans ce nouveau type de formation se trouvent confrontés à de nouvelles contraintes :

- harmoniser leur progression du travail en classe avec celle des autres stagiaires ;
- respecter les calendriers décidés en présentiel ;
- s'obliger à lire les courriels régulièrement ;
- traiter l'information dans le délai imparti ;
- envoyer régulièrement les synthèses des recherches afin de collaborer au travail commun.

La recherche dans les classes se déroule selon le calendrier suivant :

- 1° semaine : recherche et envoi des questions
- 2° semaine : recherches sur les questions des autres classes et envoi des réponses

En fin de semaine, relance de l'universitaire

- 3° et 4° semaine : poursuite des recherches et des échanges à la fin de chaque semaine
- Clôture du problème

C - Le problème des monnaies

C – 1 La genèse de l'énoncé

Suivant l'organisation habituelle de la formation nous avons présenté aux stagiaires, lors du premier présentiel, un problème de recherche dont l'énoncé était :

Quel est le plus grand nombre qui ne peut pas être atteint comme somme de 7 et de 13 ?

Suite à l'intérêt porté par les stagiaires à ce problème, nous avons décidé de tester un problème analogue auprès des élèves. Se posaient alors l'élaboration d'un habillage plus attractif et le choix des nombres à proposer.

Lors d'un travail de réflexion sur le rapport PISA⁴, nous avons découvert que l'un des tests proposés aux élèves avait beaucoup de points communs avec la situation étudiée par les enseignants lors de notre rencontre.

Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie (ou un système de timbres) qui utiliserait exclusivement les valeurs 3 et 5 ? Plus spécifiquement, quels montants pourrait-on obtenir ainsi ? S'il s'avérait possible, un tel système serait-il souhaitable ?

En apportant une légère variante, nous avons choisi un habillage identique en prenant comme valeurs 9 et 11, car dans l'optique du premier énoncé ces nombres permettent de rendre le problème

⁴ Rapport PISA <http://www.pisa.oecd.org/>

plus intéressant que 3 et 5 du rapport PISA, nous avons donc proposé à la réflexion des classes, l'énoncé suivant :

Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie où il n'existerait que des pièces de valeur 9 et 11 ?

Nous pensons que les élèves suivraient une démarche analogue à celle des adultes mais cet habillage concret du problème a entraîné les élèves dans des voies que nous n'envisagions pas, cet énoncé leur a permis d'étudier des pistes très variées.

Avant de présenter les travaux de recherche des élèves, nous avons demandé aux participants de l'atelier de réfléchir aux questions suivantes :

- quelles sont les premières questions que les élèves vont se poser sur cet énoncé ? Comment vont-ils les traiter ?
- quels sont les différents problèmes qu'ils vont essayer de résoudre ? Quelles pistes, quelles stratégies vont-ils suivre ?

Après un débat entre les participants de l'atelier, nous avons présenté le déroulement des recherches du problème par les élèves.

C – 2 Recherche du problème par les élèves

Les différents problèmes testés ces trois dernières années font apparaître des régularités quant à l'activité mathématique menée par les différentes classes. Des phases caractéristiques se succèdent.

Lors de la première séance de recherche, les élèves s'approprient l'énoncé et posent aux autres classes une liste de questions du type suivant :

*Est-ce que ce sont des francs ou des euros ?
Est-ce qu'il y a un lien avec les euros ?
Est-ce que c'est aussi pareil dans d'autres pays, ou seulement en France ?
Serait-il possible d'utiliser des centimes ?
Y a t il d'autres moyens de paiement ? (Chèques, carte bleue)
Les marchands n'en profiteront-ils pas pour augmenter les prix ?*

Extrait d'échange de travaux

Ces questions peuvent paraître annexes et secondaire au problème mais elles constituent une première approche essentielle pour les élèves. Cette étape ne doit pas être occultée, car ce questionnement, s'il n'est pas discuté puis évacué par des choix judicieux, peut parasiter très longtemps la recherche de certains élèves. Une fois l'habillage du problème dépassé, les élèves « entrent dans les mathématiques » et abordent une seconde étape :

*Quelle unité choisir ?
Comment rendre la monnaie ?
Peut-on faire tous les nombres avec 9 et 11 ? En rendant la monnaie ? Sans rendre la monnaie ?
Quel est le nombre minimum de pièces ?
Peut-on changer 9 et 11 ?
Peut-on trouver tous les nombres ?
Y a t il plusieurs façons de faire 19 ?
Peut-on trouver 1 ?*

Extrait de travaux d'élèves

Se pose alors le choix des problèmes qu'ils décident de résoudre :

*Peut-on trouver tous les nombres ?
Y a t il plusieurs façons de faire 19 ?
Peut-on trouver 1 ?*

Extrait de travaux d'élèves

On voit que le problème a évolué par rapport à l'idée initiale que nous nous en faisons. En décidant de rendre la monnaie les élèves ont travaillé sur des combinaisons linéaires de 9 et de 11 à coefficients entiers relatifs alors qu'initialement nous pensions les faire travailler uniquement avec des coefficients entiers naturels.

Les classes réparties par groupe de trois se sont donc appropriées le problème en choisissant leur propre problématique, les échanges ont été fructueux, archivés sur le Forum de la plateforme Pleiad. Comme les années précédentes, une relance faite par l'enseignant chercheur a été nécessaire pour recentrer les recherches. (Voir annexe).

Synthèse des notions mathématiques abordées

Ce bilan est indispensable pour les enseignants qui engagent leurs élèves pendant 5 ou 6 heures dans ces recherches car ils prennent conscience du travail accompli. En plus d'un travail sur la démarche scientifique (conjectures, contre exemple...) suivant leur niveau, les élèves ont réinvesti des notions déjà abordées, ont acquis des connaissances qu'ils pourront approfondir ou bien ils ont approché et fréquenté de futurs concepts, qu'ils étudieront dans leur scolarité.

En voici quelques exemples :

- en découvrant l'importance du nombre 1 qui permet d'atteindre tous les autres nombres, le lien entre l'algorithme d'Euclide et l'égalité de Bézout peut être établi.

Comment obtenir 1 si on choisit des pièces de valeurs 31 et 33 :

$$\begin{aligned}33 - 31 &= 2 \\2 \times 15 &= 30 \\31 - 30 &= 1 \\31 - ((33 - 31) \times 15) &= 1 \\31 - (33 \times 15 - 31 \times 15) &= 1 \\31 - 33 \times 15 + 31 \times 15 &= 1 \\31 \times 16 - 33 \times 15 &= 1\end{aligned}$$

Extrait de travaux d'élèves

- l'étude des valeurs 9 et 11 puis d'autres valeurs, a permis un travail sur les nombres premiers entre eux et le PGCD.

Nous faisons plusieurs conjectures, dites nous ce que vous en pensez et aidez nous à les démontrer :

- en prenant des nombres premiers entre eux, on trouve 1 donc toutes les valeurs
- le problème n'est pas possible avec des nombres dont le PGCD est supérieur à 1 car on ne trouve pas 1 donc toutes les sommes ne sont pas possibles
- si les deux nombres ne sont pas premiers entre eux leur plus petit diviseur commun sera la plus petite monnaie que l'on peut atteindre en les soustrayant ou en les additionnant

Extrait de travaux d'élèves

- pour démontrer des conjectures envoyées par les autres classes les élèves ont utilisé des écritures littérales, travaillant sur la parité, la distributivité.

$2n \times 2m$:

$2n \times 2m$ n'est pas égal à $n \times m$ nous avons trouvé un contre-exemple avec $n = 2$ et $m = 4$

$2n \times 2m$ n'est pas égal à $n \times m$ nous avons trouvé un contre-exemple avec $n = 2$ et $m = 4$

On pense que $2n \times 2m = 4nm$

$(2n + 1) \times (2m + 1)$:

Certains pensent que c'est égal à $2mn + 2n + 2m + 1$

D'autres ont trouvé que c'est égal à $4mn + 2n + 2m + 1$

Extrait de travaux d'élèves quatrième

Conclusion

Faute de temps, dans cet atelier, nous n'avons pas décrit en totalité l'organisation du travail en classe ni la communication sur la Plateforme Pleiad, ni toutes les pistes suivies par les élèves, mais il nous a paru plus intéressant de nous pencher sur la genèse de ce problème et le schéma directeur des recherches effectuées par les élèves.

La conduite de ces problèmes ouverts doit permettre aux élèves une liberté d'appropriation qui peut engager l'enseignant dans des voies qu'il n'avait pas prévues mais une analyse a posteriori montre toujours la richesse du travail mathématique effectué par les élèves. Les capacités de nos élèves à réfléchir, anticiper et conduire une véritable activité scientifique sont souvent mésestimées.

Le rôle du professeur est très différent de celui qu'il peut avoir dans des activités plus classiques. Un stagiaire s'est défini comme : « Coordonnateur " candide " et " grand séquenceur " allant de groupes en groupes pour mettre en confiance les uns et interpeller les autres. Bref, animer sans (trop) dévoiler mais surtout en essayant de créer un autre état d'esprit (celui plus scientifique du chercheur) dans la pratique des mathématiques. »

Bibliographie

Bulletin APMEP n° 455 Cinq classes au pays de 9 et 11

Brochure APMEP - IREM de Montpellier n° 151 Les Narrations de recherche de l'école primaire au lycée

D.Guin, M. Joab, L. Trouche (2003) SFODEM bilan de la phase expérimentale CDROM, IREM de Montpellier

D.Guin, L. Trouche (2004) Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques. Repères IREM n° 55

Annexe Relance (13-12-2003)

«Ce qui a été fait.

Le problème : il s'agit donc de déterminer toutes les sommes possibles si on est autorisé à rendre la monnaie. Beaucoup d'entre vous ont trouvé que dans ce problème **n'importe quelle somme peut être réalisée.**

Des questions. Vous avez posé de nombreuses questions. Observez que certaines d'entre elles, mêmes si elles pourraient être importantes d'un point de vue pratique, n'ont aucune influence sur le problème mathématique. Par exemple : s'agit-il de francs ou d'euros ? Ou encore : peut-on utiliser des billets au lieu des pièces ? Quelle que soit la réponse, le problème mathématique restera exactement le même ! Ou encore : s'agit-il d'euros ou de centimes d'euros ? Il est évident que s'il s'agit de 9 et 11 euros, on ne pourra jamais obtenir des centimes, et donc la question est forcément de savoir quelles sommes en euros on peut obtenir. S'il s'agit de centimes d'euros, la question est de savoir quelles sommes en centimes d'euros on peut obtenir, et le problème est exactement le même ! Pouvez-vous trouver d'autres questions posées qui sont de la même nature ?

D'autres questions pourraient avoir un intérêt mathématique, mais posées ainsi elles sont trop vagues pour pouvoir être traitées mathématiquement. Par exemple : un tel système serait-il pratique ? Observez que ce sont des questions d'un type différent des précédentes. Pouvez-vous vous trouver d'autres questions posées qui sont de la même nature, c'est-à-dire qui ne sont pas du domaine des mathématiques (quel que soit leur intérêt) ?

- **Ce que vous pourriez faire.** Certains d'entre vous ont eu l'idée de prendre d'autres nombres que 9 et 11. Voilà une idée intéressante. Qu'est-ce qui change si on prend 5 et 10 (au lieu de 9 et 11) ? Ou bien si l'on prend 8 et 12 ? Ou bien 13 et 15 ?

Pouvez-vous donner un résultat général : comment choisir deux nombres pour pouvoir payer toutes les sommes possibles ?