Du collège au lycée : équations et fonctions

Maryvonne le Berre

IREM de Lyon

Les notions de variable, fonctions, relation sont largement implicites au collège. L'atelier proposait d'examiner, à partir de l'analyse de quelques exercices, certaines difficultés liées aux différents statuts des lettres et des égalités, et de comparer les traitements qui en sont faits par les participants.

A l'origine de la proposition, il y a d'une part un travail de recherche effectué dans le cadre de l'IREM de Lyon sur le statut des énoncés dans la classe de mathématiques [1] , d'autre part une réflexion menée au sein de la commission premier cycle sur le thème variations et fonctions, un des quatre grands thèmes retenus dans l'évaluation OCDE/PISA [2]. Citons les auteurs du "cadre d'évaluation de PISA 2003"

Le raisonnement fonctionnel, c'est-à-dire le fait de raisonner en termes de relations et à propos de relations est l'un des objectifs les plus fondamentaux de l'enseignement des mathématiques.

Cette évaluation s'adresse à la classe d'âge de 15 ans donc essentiellement en France à des élèves de troisième et seconde et cible donc des acquisitions attendues à la fin de notre enseignement obligatoire.

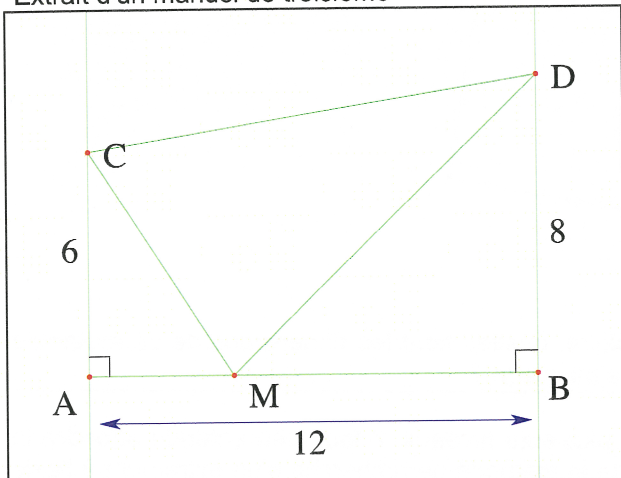
Dans un article récemment paru dans le bulletin vert de l'APMEP [3], Michèle Artigue évoque différentes approches de l'algèbre suivant les pays, entrée par les équations, comme en France, entrée par les formules, la recherche de régularités et de généralisation, dans les pays anglo-saxons, ou modélisation de situations en privilégiant variables et fonctions et l'articulation des différents modes de représentation.

Une diversification des approches au collège peut sembler souhaitable pour diverses raisons.

En particulier, dans le cadre actuel des programmes, l'introduction du calcul littéral est fortement liée aux équations et problèmes du premier degré, avec pour conséquence la prédominance du point de vue inconnue pour les lettres. En effet, dans le cadre des problèmes du premier degré, les équations peuvent être considérées comme des égalités vraies, définissant un nombre bien déterminé qu'il s'agit de calculer. Cela peut constituer un obstacle durable à la compréhension des équations et inéquations comme relations entre variables, et l'on observe à ce sujet des difficultés au lycée et même au-delà [1].

Un premier exemple

Extrait d'un manuel de troisième



Dans la figure ci-contre M est un point du segment [AB] tel que AM = x.

1° Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

2° Pour quelles valeurs de x l'aire du triangle BMD est-elle supérieure à l'aire du triangle AMC ?

1° Comment peut-on décrire la structure mathématique de ce problème ?

2° Quelles peuvent être les difficultés pour un élève en début de troisième ? en début de seconde ? (origine, traitements possibles)

3°Donneriez-vous cet exercice sous cette forme ? Sinon, quelles modifications vous semblent souhaitables ?

La question sur la structure mathématique du problème n'a pas été comprise, chacun interprétant de diverse façon les termes structure mathématique aussi bien que le mot problème. Mon intention était de faire remarquer que l'exercice demande en fait de comparer les valeurs prises par deux fonctions affines, mais que la notion de fonction y est tout à fait implicite. L'exercice est d'ailleurs posé dans le chapitre équations et inéquations.
Une observation fréquente en surveillant le brevet est que des élèves s'arrêtent à la question censée les aider : **Quelles sont les valeurs possibles pour x ?** C'est en général la première question du problème, et nombre d'élèves renoncent tout simplement à chercher le problème.
Une explication m'a été fournie en classe en proposant l'énoncé ci-dessus. Pour "déterminer les valeurs possibles pour x", la moitié des élève ont cherché à appliquer le théorème de Pythagore ou la trigonométrie. La question était comprise comme "calculer x".
x est a priori pour beaucoup d'élèves un nombre inconnu, à déterminer, défini dans la première phrase par AM = x, et non une variable.
Le guidage des élèves par des consignes destinées à les orienter vers une inéquation peut ainsi freiner la compréhension et l'appropriation du problème.
Il semble préférable de proposer un énoncé comme :
Dans la figure ci-contre M est un point variable du segment [AB]. Où faut-il placer M pour que l'aire du triangle BMD soit supérieure à l'aire du triangle AMC ?
Ou la variante un peu plus ouverte :
Dans la figure ci-contre M est un point variable du segment [AB]. Peut-on placer M de telle sorte que l'aire du triangle BMD soit égale à l'aire du triangle AMC ?
Les meilleurs élèves peuvent d'emblée adopter la méthode algébrique, dont ils ont alors à mettre en œuvre toutes les étapes, la question des valeurs possibles pour AM (ou BM), n'intervenant qu'au final dans la phase de retour au problème après résolution d'une équation ou inéquation. Pour les autres, une première phase de calcul numérique permet d'observer la variation des aires des deux triangles, et éventuellement de se faire une idée de la réponse. Celle-ci étant très difficile à déterminer par tâtonnement, la méthode algébrique peut de toute façon montrer son intérêt.

Deuxième exemple

Baignade surveillée

Les moniteurs d'une colonie de vacances disposent d'une corde de 45 m pour délimiter le long de la plage un endroit réservé à la baignade des enfants.

S'ils choisissent de délimiter une surface rectangulaire, quelles sont les dimensions de ce rectangle qui donneront la plus grande surface possible pour la baignade ?

L'intérêt de ce problème est qu'il peut être traité à plusieurs niveaux. Il faut bien entendu attendre la classe de première pour que les élèves disposent de la méthode de recherche d'un extremum à l'aide de la dérivée; mais c'est un problème fréquemment utilisé en seconde pour introduire la notion de fonction.

En collège, il n'y a pas de moyen de validation rigoureuse du résultat, cependant c'est une activité motivante qui permet d'établir une ou plusieurs formules et de les utiliser. On peut saisir l'occasion de représenter graphiquement une fonction non affine et d'interpréter le graphique.

Une participante a fourni une démonstration très éclairante du résultat. Si l'on complète la figure par symétrie par rapport à la ligne de la plage, on obtient un rectangle de périmètre fixé dont les dimensions sont égales à la longueur et au double de la largeur du rectangle étudié. Le maximum d'aire est donc obtenu lorsque la "longueur" de la corde est égale au double de sa "largeur".

Troisième exemple

Il s'agit d'un des exemples fournis par les auteurs de PISA pour donner une idée des items évalués.

Mathématiques, unité 3

BATTEMENTS DE CŒUR

Pour des raisons de santé, les gens devraient limiter leurs efforts, par exemple durant des activités sportives, afin de ne pas dépasser un certain rythme cardiaque.

Pendant longtemps, la relation entre la fréquence cardiaque maximum recommandée et l'âge de la personne a été décrite par la formule suivante :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 220 – âge.

Des recherches récentes ont montré que cette formule devait être légèrement modifiée. La nouvelle formule est :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 208 – (0,7 x âge).

Mathématiques, exemple 3.1

Un article de journal commente : « Une des conséquences de l'utilisation de la nouvelle formule au lieu de l'ancienne est que le nombre maximum recommandé de battements de cœur par minute diminue légèrement pour les jeunes gens et augmente légèrement pour les personnes âgées. »

À partir de quel âge la fréquence cardiaque maximum recommandée commence-t-elle à augmenter, d'après la nouvelle formule ? Montrez votre travail

Cet item a donné peu de réussites lors des essais de terrain. La formulation alambiquée de la question peut rebuter plus d'un élève ! Là encore un énoncé plus ouvert peut se révéler plus abordable. Celui qui suit a été testé dans deux classes de troisième, en introduction au chapitre redouté des fonctions affines.

Extrait du magazine "mathsport

BATTEMENTS DE CŒUR

Pour des raisons de santé, les gens devraient limiter leurs efforts, par exemple durant des activités sportives, afin de ne pas dépasser un certain rythme cardiaque.

Pendant longtemps, la relation entre la fréquence cardiaque maximum recommandée et l'âge de la personne a été décrite par la formule suivante :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 220 – âge.

Des recherches récentes ont montré que cette formule devait être légèrement modifiée. La nouvelle formule est :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 208 – (0,7 x âge).

A la suite de la parution de l'article ci-dessus, des lecteurs ont écrit à la revue pour demander des explications.

Vous devez préparer pour le prochain numéro un article de deux à quatre pages qui présente toutes les informations que l'on peut tirer de ce texte, de telle sorte que tous les lecteurs le comprennent.

Le travail en classe a occupé deux heures de travail en groupe, la rédaction finale étant à terminer à la maison. Cela peut paraître long ! Mais les élèves se sont posé beaucoup de questions sur l'origine et la pertinence des formules ...Tous ont choisi des représentations graphiques pour rendre compte de la décroissance des fonctions puis les comparer. Quelques uns seulement ont posé une équation pour préciser l'âge où les deux formules sont équivalentes. L'intérêt de l'activité, contrairement aux deux précédentes, ne réside pas dans l'utilisation du symbolisme algébrique mais dans l'interprétation des paramètres.

Conclusion

Des activités comme celles qui viennent d'être décrites prennent du temps, sans amener directement à des connaissances "institutionnalisables", mais permettent aux élèves de relier différents modes de représentation.
Les notions de variable, relation, fonction peuvent se construire au collège, sans formalisation, mais cela demande d'être attentif aux situations propices, (en particulier relations entre angles, longueurs, aires), et de laisser aux élèves un temps d'exploration suffisant. Sans pour autant négliger l'acquisition de compétences en calcul littéral, il est important que les élèves aient l'occasion d'interpréter des formules, d'observer des variations, d'effectuer de nombreux aller-retour entre le cadre numérique et le cadre algébrique.

Références

[1] Durand-Guerrier V, Le Berre M, Pontille M-C, Reynaud-Feurly J,(2000), *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques.* IREM Lyon.

[2] *PISA 2003 framework* (version française)
http://www.pisa.oecd.org/Docs/Download/PISA2003FrameworkFR.pdf

[3] *Michèle Artigue, Enseigner les mathématiques aujourd'hui, pourquoi , pour qui , comment ?,* BV n° 449, nov-déc 2003