

Lentilles minces

Gérard Armengaud et Jean- Marie Sainsot

IREM de Limoges

Au départ un petit problème pratique que tout le monde a résolu (ou tenté de résoudre) : où le photographe doit-il se placer pour que son sujet tienne tout entier sur sa photo ?

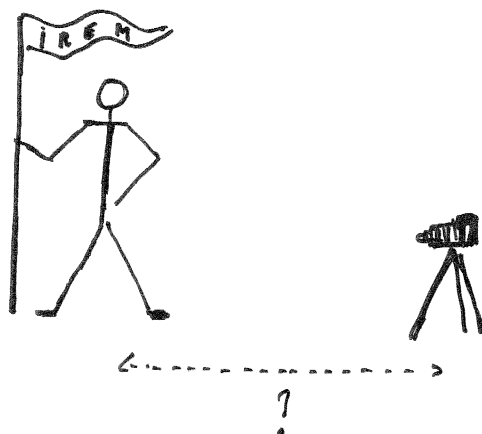
Procédons par étapes :

- *tout d'abord mise en place d'un modèle physique,*
- *puis sa simulation avec Cabri,*
- *enfin, pour en savoir plus, l'étude d'un modèle mathématique.*

Cette démarche peut être proposée aux élèves de 1^{ère} S.

I - Un problème (...c'était beau la photographie)

Quelle distance minimum doit séparer un personnage, tenant un drapeau de 2,4 m de haut, d'un appareil de photo 24 × 36, dont l'objectif a une focale fixe de 50 mm, pour que l'image « entre » sur la pellicule ?



Tout photographe amateur sait bien évidemment résoudre pratiquement le problème en se déplaçant.

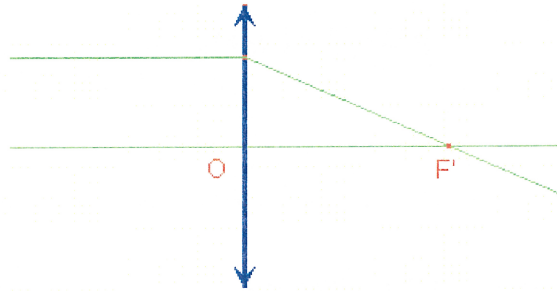
L'étude suivante n'est donc pas la recherche d'une solution, mais sa motivation est de l'ordre du « comment ça marche ? ».

II - Un modèle physique

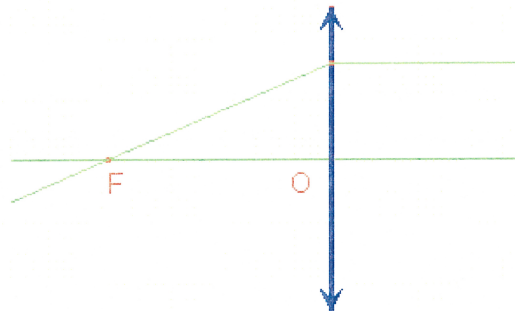
Il est obtenu en assimilant l'objectif de l'appareil photo à une **lentille mince convergente**.

On rappelle que pour une telle lentille :

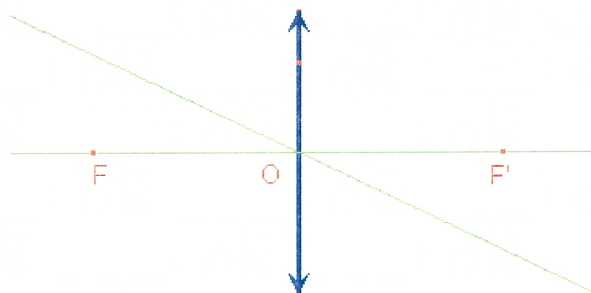
- tout rayon entrant, parallèle à l'axe optique, passe par le foyer image F' ;



- tout rayon entrant, passant par le foyer objet F , ressort parallèle à l'axe optique ;



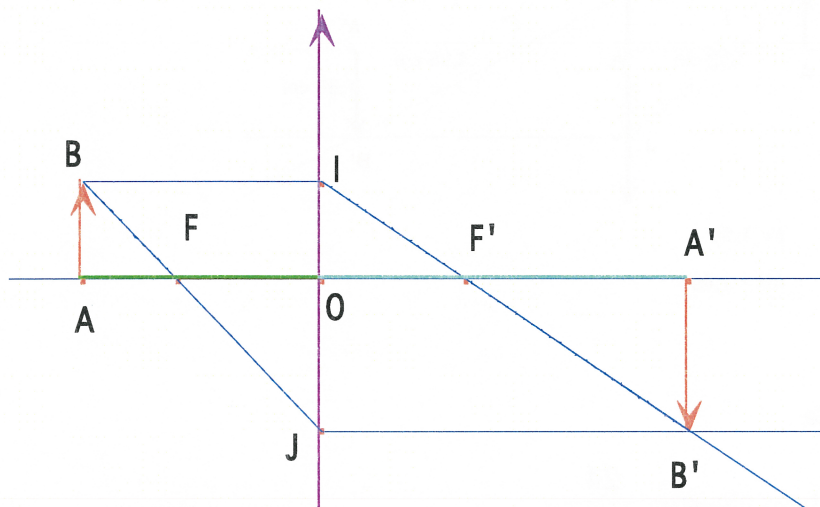
- tout rayon passant par le centre O n'est pas dévié.



III - Une simulation du modèle physique

Dans le cadre de l'enseignement de Sciences Physiques, on peut bien sûr étudier expérimentalement le modèle physique.

On peut aussi en faire une simulation avec un logiciel de géométrie dynamique (nos avons utilisé Cabri II).



[AB] est l'objet, [A'B'] est l'image.

Le point A est mobile sur l'axe de la lentille.

Il est évident que les longueurs AO et A'B' varient en sens inverse.

On s'aperçoit que si la simulation permet de bien appréhender le fonctionnement du modèle, elle ne permet pas de résoudre « graphiquement » le problème posé.

Ceci pour une question d'échelle : les distances « côté objet » sont de l'ordre du mètre et de l'ordre du centimètre « côté image ».

On peut donc justifier ainsi la nécessité de l'étude d'un modèle mathématique.

IV - Un modèle mathématique

1. Expression du grandissement en fonction de la distance objet-lentille

Dans la figure qui suit, x désigne la distance OA entre la lentille et l'objet.

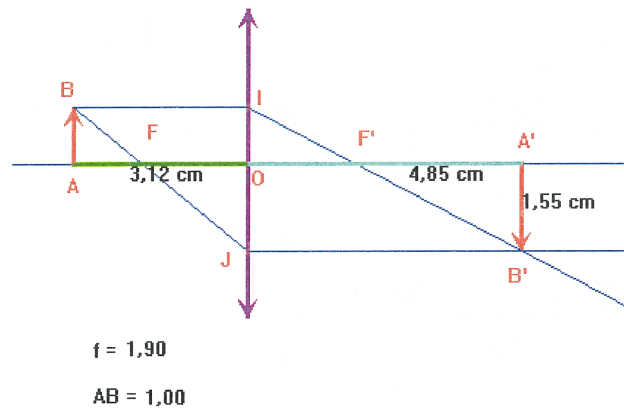
$y = g(x)$ désigne le grandissement arithmétique $\frac{A'B'}{AB}$.

Les triangles FOJ et FAB sont homothétiques, donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{x - f}$, donc

$y = g(x) = \frac{f}{x - f}$; d'où $y(x - f) = f$, ou encore $xy - fy - f = 0$.

Remarque : pour $f = 3$ on a $xy - 3y - 3 = 0$.

$$g(x) = 1,55 \text{ cm}$$



2. Retour à l'exemple

Le grandissement ne doit pas dépasser $\frac{24}{2400}$.

Il faut donc résoudre l'inéquation $g(x) < \frac{1}{100}$, qui donne $x > 5050$.

Le personnage avec le drapeau doit se tenir à au moins 5,05 mètres de l'appareil photo.

3. Sens de variation de la fonction g sur $[f; +\infty[$

Si $0 < f < x_1 < x_2$ alors $x_1 - f < x_2 - f$, donc $\frac{1}{x_2 - f} < \frac{1}{x_1 - f}$, donc $g(x_1) < g(x_2)$.

La fonction g est décroissante sur $[f ; +\infty[$.

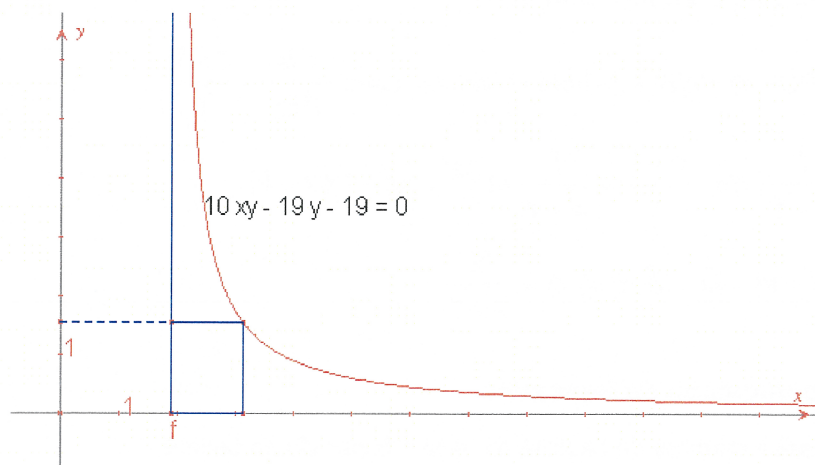
Ce résultat est concordant avec l'observation faite à l'aide de la figure « Cabri ». Remarquons que Cabri nous permet d'obtenir une représentation graphique des variations de f en fonction de x , sans qu'il soit nécessaire de connaître une expression de f en fonction de x .

4. Limites de g

On a $g(x) = \frac{f}{x-f}$.

Quand x tend vers $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0^+ .

Quand x tend vers f , $g(x)$ tend vers $+\infty$.



5. Influence du changement de focale

Ici x est fixé et la variable est f : $g(f) = \frac{f}{x-f}$.

a) $g'(f) = \frac{x}{(x-f)^2}$. On a donc $g'(f)$ positif, la fonction g est croissante.

Quand la focale augmente le grandissement arithmétique augmente aussi, ce qui est confirmé par l'expérience et par l'animation faisant varier f sur la figure « cabri ».

b) Soient f_1 et f_2 deux focales différentes : $g_1 = \frac{f_1}{x-f_1}$ et $g_2 = \frac{f_2}{x-f_2}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{f_2}$.

Pour un objet éloigné, le grandissement est donc pratiquement proportionnel à la focale.

V - Et pourquoi pas un autre problème ?

1. Le problème de la mise au point

Quelle distance doit séparer un objectif de focale 50 mm de la pellicule, pour que la photo d'un personnage situé à 3 m, puis à 1 m de l'appareil soit nette ?

Pour résoudre ce problème il est intéressant d'établir l'expression de la distance d , lentille-image, en fonction de la distance x , lentille-objet.

2. Expression de d en fonction de x

Les triangles $F'OI'$ et $F'A'B'$ sont homothétiques, donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{d-f}{f}$.

Or $\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{x-f}$, d'où $\frac{d-f}{f} = \frac{f}{x-f}$ et $f^2 = (d-f)(x-f)$.

On a donc $dx - fd - fx = 0$, d'où $d = \frac{fx}{x-f}$.

3. Loi de conjugaison de Descartes

En divisant chaque membre de l'égalité $dx = fd + fx$ par xfd on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{d}$$

4. Retour à l'exemple

Si $x = 3$ m, on a $d = \frac{50 \times 3000}{3000 - 50} = 50,85$ mm.

Si $x = 1$ m, on a $d = \frac{50 \times 1000}{1000 - 50} = 52,63$ mm.

Dans la pratique de la prise de vue photographique, pour passer de la mise au point sur un sujet à 3 m, à la mise au point sur un sujet à 1 m, il suffit de déplacer l'objectif de $52,63 - 50,85 = 1,8$ mm environ vers la pellicule.

5. Lien entre grandissement et distance objet-lentille

En comparant les expressions de $g(x)$ et de $d(x)$ on trouve : $g = \frac{d}{x} = \frac{A'B'}{AB}$.

Remarque : les triangles OAB et $OA'B'$ sont homothétiques. Les points B , O et B' sont donc alignés. Le troisième « axiome » des lentilles minces (tout rayon passant par le centre optique n'est pas dévié) est surabondant.

6. Mais où commence donc l'infini ?

Quelle est la distance minimale qui doit séparer l'objet de la lentille de focale 50 mm pour que l'image soit pratiquement dans le plan frontal ?

Cette distance doit pratiquement être égale à la distance focale de la lentille. S'il est exigé, par exemple que d soit égale à f à 0,2 mm près, il faut résoudre l'inéquation $d - f < 0,2$.

Ce qui donne $\frac{fx}{x-f} - f < 0,2$ d'où $\frac{x-f}{f^2} > 5$ et $x > 12550$.

Quand l'objet est à au moins 12,55 m de la lentille l'image est pratiquement dans le plan focale (à moins de 0,2 mm).

En photographie, on dit parfois qu'avec un objectif de focale 50 mm, « l'infini commence à 12 m ».

Pour une focale de 30 mm on obtient une distance de 4,53 m.

On peut remarquer que les appareils de photo bon marché ont des objectifs dont les focales sont de l'ordre de 30 mm, ce qui évite pratiquement d'avoir à effectuer la mise au point.