Autour du baccalauréat

Jean-Pierre Ferrier

L'exposé qui suit n'a pas la prétention d'apporter une vision experte sur les arcanes de la confection des sujets du baccalauréat. Il se place *autour* du baccalauréat, parce qu'il envisage les rapports entre les exigences d'une épreuve de ce type et l'enseignement du lycée, voire du collège. Par ailleurs on ne reviendra pas sur la session 2003, se contentant de parler de la session 2004, sachant que l'épreuve ne s'est pas encore déroulée.

Par baccalauréat on entend évidemment le baccalauréat scientifique, et même principalement celui de la série S vers lequel on a l'habitude d'orienter les projecteurs. Ce qu'on dit s'applique bien sûr à d'autres bacalauréats scientifiques.

Quelques sources.

On s'est d'abord appuyé sur la production de la *commission* **"épreuves du bac en mathématiques"**, dite commission **"Attali"**.

Cette dernière a considéré le baccalauréat d'un point de vue technique. Sans grande ambition au début, se limitant à considérer des modalités (savoirs de base, réflexion, compréhension de données), elle s'est orientée ensuite vers des positions plus radicales, mais très discutables. On reviendra sur ce sujet à la fin de l'exposé.

On a aussi considéré la production du groupe **"perspectives bac"** de *l'APMEP*, lequel a travaillé plus ou moins en liaison avec la commission précédente.

Cette fois-ci l'approche est plus intéressante parce que plus globale, fondée sur les *problématiques*. Malheureusement l'idée a été insuffisamment instruite, et particulier trop peu relayée par les IREM. En même temps elle était décalée. Ainsi les exercices pourraient relever de problématiques sans que cela soit déjà le cas pour les programmes. On reviendra aussi sur le sujet plus loin.

Pour finir on a épluché les *exemples* de **"sujets zéro"** (les bien nommés) publiés à l'automne par l'*Inspection générale* de mathématiques sur le site *eduscol*.

Il y a beaucoup à apprendre et à dire de ces sujets. N'oublions pas, en effet, que l'Inspection générale a la mission de superviser le baccalauréat. Voir à ce sujet le bêtisier du bac 2004 sur le site de l'IREM de Lorraine, parmi les nouveautés.

Les contraintes

Il y a d'abord la constante **béate**[1], qui est exactement le complément à l'unité de la célèbre constante *macabre* d'André Antibi.

[1] Le contraire de macabre serait plutôt jovial mais, pour montrer qu'il n'y a pas antinomie, on reste dans le registre du monothéisme; constantes macabre et béate sont politiquement correctes.

L'opinion publique et la classe politique pourraient-elles supporter un important taux d'échec au baccalauréat qui serait dû aux mathématiques? Certainement pas. Il y a quelques années un recteur a été remercié sous ce prétexte. L'an dernier on a évité le pire en tripatouillant les notes.

Il y a aussi l'**équité** jacobine. L'opinion publique tient à ce que le baccalauréat reste une référence nationale, même si elle tolère une marge d'hypocrisie. Evidemment on pourrait le supprimer. Mais cela se traduirait par un concours d'entrée à l'université, plus précisément d'un concours pour chacune. C'est ce qu'on ne veut pas aujourd'hui.
Cette contrainte impose une épreuve de type académique et limite la place laissée à des projets. Actuellement seuls les TPE font exception.

La place du baccalauréat

D'abord c'est une **référence** de culture. C'est la culture commune des formateurs PE, des stagiaires PLC, des étudiants. Ainsi le baccalauréat touche tout, de l'école à l'université.

Par défaut il "**pilote** les pratiques d'enseignement", comme dit à juste titre la commission Attali.
Par exemple l'autorisation des calculatrices a vidé un grand nombre de questions qu'on pouvait poser auparavant. C'est ainsi qu'il est pratiquement impossible de poser une vraie question d'analyse.
Aucune solution satisfaisante ne pourra être donnée qui ne passe par l'interdiction des machines, au même titre que celle des documents ou formulaires. Cela ne signifie pas qu'il n'y ait rien d'intéressant à faire en classe avec des machines. Mais les domaines où elles auraient vraiment leur place, les questions d'ordre numérique ou algorithmique, sont curieusement délaissées dans les programmes. Par ailleurs elles s'accommodent mal d'une épreuve de type académique.

Il faut donc intégrer le baccalauréat, **en amont**, dans la réflexion sur les programmes, en pensant à l'avance aux "métiers" auxquels on voudra former les élèves. Ainsi peut-il jouer un rôle positif.
Par exemple il faudra mettre l'accent sur la richesse de la production **écrite**. C'est là dessus que nous allons réfléchir.

Le bac et la motivation

Commençons par citer une intervention récente qui montre que la motivation n'est pas automatique.
(J'aurais été) dégoûtée des mathématiques si j'avais eu en Math. Elém. les programmes actuels
dit Jacqueline Lelong-Ferrand, préparant un petit-neveu au baccalauréat S, dans une adresse du 8 mars 2003.

Donnons ensuite une piste pour orienter nos efforts.
Pour faire véritablement des mathématiques, le sujet élève doit pouvoir se placer en position d'auteur
dit Marc Legrand, dans une publication de son équipe ADIREM-INRP de juin 2003.

Certes, comme me l'a fait remarquer Guy Brousseau, Marc Legrand entend par là qu'il faut donner à l'élève l'occasion d'exprimer et de défendre un point de vue. C'est l'un des objets de son *débat scientifique*. Cependant on est ici dans les contraintes d'une épreuve académique. Autrement dit il faut prendre le mot "auteur" dans un sens voisin de celui d'auteur de roman. Mais cela ne change rien quant au fond.

En tout cas cette dernière exigence **contredit** un certain nombre de pratiques, qu'il ne faudrait pas piloter par le baccalauréat, comme on peut déjà le craindre.

Cela limite considérablement la place de la "compréhension de données", proposée par la commission Attali.

Cela exclut définitivement les **QCM**, qu'il est pourtant question d'introduire au bac 2004.

Cela exclut aussi le servive de repas **prédigérés**, où l'on dit que "la fonction f *est* dérivable", comme dans les exercices des sujets zéro.

Cela exclut surtout l'exercice pour lequel il est demandé de piocher le "bon théorème" dans une gigantesque **boîte à outils**, de même qu'on fustigeait ceux qui passaient leur temps à chercher les phrases traduites du Gaffiot.

Plus généralement cela discrédite les questions strictement **fermées**, où non seulement le résultat mais tout le cheminement et l'expression sont imposés, jusqu'à produire des réflexes pavloviens.

Cela devrait donc dissuader d'introduire des activités de "démonstration automatique" basées sur un logiciel de calcul formel, où l'on demande seulement de dérouler quelques menus, comme certains y ont peut-être déjà songé.

Mais, en même temps, cela met en garde contre les questions par trop **ouvertes**, pour lesquelles on ne peut rien construire.

En même temps le bac pourrait un rôle positif si les programmes s'y prêtaient.

Réintroduire une **question de cours** serait une bonne idée; encore faudrait-il qu'il y ait une démonstration dans le cours, et a fortiori bien sûr une démonstration assimilable, plus pleine de sens que de formalisme.

Aujourd'hui une douzaine de démonstrations sont imposées dans le programme de la série S. Cependant presque toutes sont vides. Ainsi doit-on "démontrer" le théorème des valeurs intermédiaires (avec l'unicité) pour une fonction continue strictement monotone en l'admettant (sans l'unicité) pour une fonction continue générale.

Attendre une **riche production** écrite serait excellent, même avec des objectifs très modestes; encore faudrait-il en revenir à l'essence des mathématiques, faite d'**outils** et de **méthodes**, ce que cherche à dire l'APMEP avec les problématiques.

Et que les manuels soient de vrais ouvrages de mathématiques, accessibles et imitables par les élèves.

Le baccalauréat et l'enseignement scientifique

Commençons encore par une citation, même si elle provient d'un éminent scientifique qui ne connait peut-être pas parfaitement le milieu des lycées français.

(Se séparant de la physique) les mathématiciens se sont fait haïr des lycéens

dit Vladimir Igorevitch Arnold, dans un pamphlet pour la Gazette des mathématiciens daté de 1998.

Le baccalauréat devrait à la fois traduire et forcer l'**ouverture** empathique des mathématiques au sein de la science, et non pas leur fermeture assortie de l'alibi de l'interdisciplinarité qu'on constate aujourd'hui.

Ce colloque nous a donné des exemples d'une telle ouverture. Ce fut le cas quand Daniel Perrin a cité la démonstration de la loi des aires pour un mouvement à accélération centrale avec un temps discrétisé. Ce fut aussi le cas quand Jean Dhombres a parlé de présentations anciennes, comme celle du calcul du rayon (de courbure) de la trajectoire circulaire de la lune autour de la terre, ou encore celle du dessin en perspective.

En fait on trouvera dans l'histoire de ces derniers siècles tout ce qu'il faut pour présenter les mathématiques en conformité avec la démarche scientifique, ou au sein d'une science naturelle si l'on préfère. Cela n'a rien d'étonnant. Les mathématiques enseignées au lycée n'ont pas besoin de la physique moderne pour être fondées; la géométrie (du monde physique) et la mécanique suffisent le plus souvent.

Cependant il faudra considérer, dans un tel retour aux sources, le passé non pas comme il a été mais comme il aurait pu être, faisant fi des oppositions et des interdits. Comme Jean Dhombres nous le montre avec l'enseignement de la cosmographie, on n'a pas attendu ces dernières décennies pour développer des stratégies d'enseignement assez aberrantes. D'un autre côté on va voir qu'on sait très bien perpétuer aujourd'hui les mauvaises habitudes.

Quand on se place dans un contexte expérimental, on doit s'exprimer avec les **termes du contexte**, comme on a pu l'entendre de la part de Michel Merle, informant l'ADIREM de travaux de la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, dite commission Kahane.

Il faut considérer des grandeurs dimensionnées, mettre systématiquement les **unités** avec les valeurs, penser à leur **précision** ...

Et surtout ne pas imiter ceci, qu'on trouvera parmi les sujets zéro cités.

Exercice n°14. B. Etablissement d'un courant dans une bobine.
Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys), on branche, à la date $t = 0$, un générateur de force électromotice E (exprimée en volts).
L'unité de temps est la seconde.
L'intensité du courant dans le circuit (exprimée en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée i. A la date $t = 0$ l'intensité est nulle.
Au cours de l'établissement du courant, la fonction i est solution de l'équation différentielle :

$$Li' + Ri = E$$

Valeurs numériques. Dans toute la suite on prend $R = 5$, $L = \frac{1}{2}$, $E = 3$.

1. *Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$.*
2. *Déterminer $\lim_{t \to +\infty} i(t)$.*

L'équation elle-même a été résolue dans une partie A, où en place de L, R et E on trouve les valeurs numériques du B, juste multipliées par 2 pour donner le change.

Qu'apporte B? Rien. Les valeurs sont données sans unité et R, L, i ... n'ont rien de physique. Que représente i' d'ailleurs? Curieusement on ne dit pas en quoi on exprime cette dérivée. Pourquoi dit-on que i est dérivable a priori? N'est-ce pas lié à l'équation différentielle?

La limite relevait du A. Il fallait demander en B le temps caractéristique, discuter du temps nécessaire pour atteindre la valeur limite à telle précision près.

On doit se méfier de la **prétention modélisatrice** qui consiste à mettre le monde en phase avec les mathématiques.

S'il doit y avoir modèle, même rustique, on doit justifier les choix par des considérations du domaine concerné; ce n'est guère faisable le jour du bac; si l'on veut essayer, au moins faut-il se fatiguer un peu.

Et surtout ne pas imiter ceci, qu'on trouvera aussi parmi les sujets zéro cités.

Exercice n° 18. *On sait qu'il y a des années à coccinelles et des années sans.*
On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbf{R}$).
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1 ...
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus. etc.

Commentaire. On parachute un modèle mathématique. Pour modéliser, il aurait fallu expliquer pourquoi on peut faire l'hypothèse que la population de l'année $n+1$ ne dépend que de celle de l'année n. Et pourquoi on a choisi une telle formule.

Quel est le statut du verbe admettre? Les coccinelles sont-elles informées par le concepteur du sujet de la limitation de leur nombre?

La limitation du nombre de coccinelles à 1 (million) vient de la finitude des ressources du milieu. C'est précisément à cause de cette limitation que s'est imposé le facteur $1-x$, comme pour la loi logistique. Il ne pas prendre les choses à l'envers.

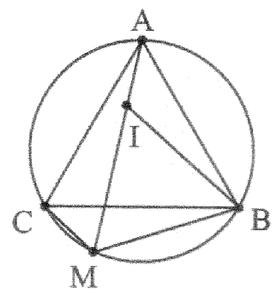
Sur ces deux sujets, Jacques Treiner porte un jugement encore plus négatif que moi. Par exemple, le fait de donner des valeurs sans unité pour des grandeurs physiques va très exactement à contresens de tout ce que les physiciens s'échinent à obtenir des élèves à longueur d'année. Est-ce cela l'interdisciplinarité, la concertation entre professeurs de disciplines différentes?

Outil contre boîte à outils

On va se pencher sur le travail du groupe de l'APMEP, lequel, comme on l'a dit, met en avant les problématiques, en prenant deux exercices de géométrie. Ces derniers sont intéressants, mais ils illustrent surtout le vide laissé par l'abandon des cas d'égalité dans l'enseignement du collège.

A ce sujet, je préfère parler d'*égalité* plutôt que d'*isométrie* pour des triangles superposables. D'abord on se situe à un moment de l'enseignement où la théorie des ensembles n'a pas encore sa place, pas plus que la théorie des groupes. Par conséquent un triangle n'est pas un ensemble de points et l'isométrie évoque plus l'égalité des côtés que l'appartenance à une même orbite sous l'action du groupe des isométries. Surtout je préfère un adjectif sans prétention comme *égal*, car je connais trop les ravages du pédantisme.

Problématique 3. *Soit M un point du petit arc BC du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC. Montrer que $MA = MB + MC$.*



On a les égalités d'angles $BCA = BMA = 60°$. On introduit I sur le segment AM de façon que le triangle BIM soit isocèle en I, donc, par une égalité d'angles inscrits, équilatéral. Le premier cas donne l'égalité des triangles BMC et BIA, d'où la relation cherchée.

"Ce petit problème sert de prétexte à l'emploi efficace de la rotation" en 2nde, 1ère, dit la fiche. En réalité la problématique sous-jacente est celle d'Euclide et l'outil la géométrie du triangle. C'est le "je peux le faire" dont parle Daniel Perrin dans son exposé. Le niveau est celui du collège.

Mais penser à I n'a rien d'évident; il faut le donner aux élèves.

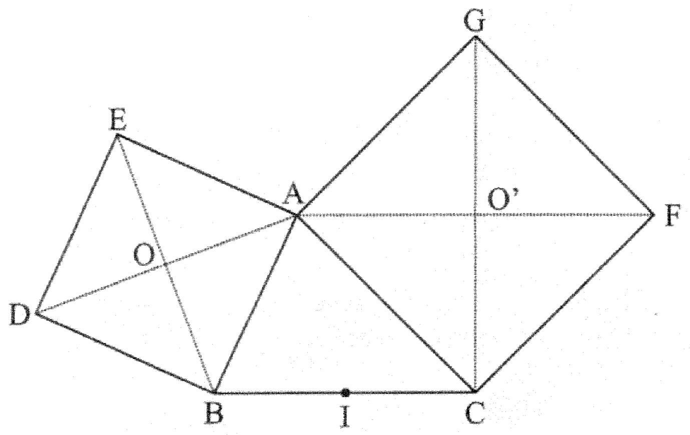
Cet exercice est éminemment scolaire mais c'est une occasion pour l'élève de jouer un rôle d'auteur à sa portée. La démonstration progresse exactement comme un calcul raisonné, avec successivement :

1) l'égalité des angles inscrits ACB et AMB, le dernier valant donc $60°$,
2) tirée de la construction, dans le triangle MIB, l'égalité à $60°$ de l'angle en B,
3) puis celle de l'angle en I, et le fait que le triangle MIB soit équilatéral,
4) et donc les égalités $BM = BI = MI$ entre côtés de ce dernier,
5) parallèlement, par différences, l'égalité des angles CBM et ABI,
6) l'égalité des triangles BCM et BAI par le second cas,
7) l'égalité $MC = IA$ entre côtés homologues qui s'en déduit,
8) la relation $MA = MB + MC$ pour finir.

Evidemment la progression se fait en prenant appui sur la figure, avec les conventions d'usage pour marquer les égalités de côtés ou d'angles.

En tout cas on est loin de la caricature qu'est l'utilisation trop fréquente de la fameuse "boite à outils", dans laquelle la démonstration se limite à un syllogisme tout en demandant un gigantesque effort de mémoire et le respect d'une expression linguistique complexe.

Problématique 4. *Sur les côtés AB, BC d'un triangle, on construit des carrés extérieurs de centres O, O'. Soit I le milieu de BC. Montrer que le triangle OIO' est isocèle rectangle en I.*



Il s'agit de "ressentir l'efficacité des transformations" en terminale. En fait la problématique est celle du programme d'Erlangen et l'outil la théorie des groupes. Par exemple : soient r, r' des quarts de tour de même sens et de centres O, O'. Quid du centre I du demi-tour $r'r$? [2] [3]

Voici pour le collège. Partant de A, B, I, on construit deux triangles rectangles isocèles en 0 de même sens, d'abord BOA à l'extérieur puis IOJ. Le premier cas donne l'égalité des triangles OBI et OAJ. Alors les segments BI et AJ sont égaux et perpendiculaires. Par suite, si l'on refait la construction précédente avec C pour B, on obtient le même point J. Alors $OIO'J$ est un carré.

Evidemment l'œil exercé voit un pinceau de similitudes. Dans le sous-espace de l'espace des transformations affines constitué par les similitudes directes (éventuellement dégénérées), on considère la droite engendrée par l'identité et la similitude transformant le carré $ABDE$ en carré $FCAG$. La similitude milieu transforme le premier carré en un carré $OIO'J$. C'est ce troisième carré, intermédiaire, qui éclaire la figure.

Cet exercice, qu'on trouve aussi, autrement résolu, dans l'exposé de Daniel Perrin, a l'avantage de se prêter à quantité de stratégies différentes. C'est un bon thème de problème à proposer en activité de recherche.

La prise d'initiative

Nous nous intéressons maintenant d'un peu plus près à la production de la commission Attali. Commençons par cette maxime tout simplement frappée au coin du bon sens.

En temps limité personne ne peut résoudre un problème d'un type nouveau, dit André Antibi, dans son ouvrage sur la constante macabre déjà cité.

Aussi faut-il rester raisonnable dans le cadre d'un examen comme le baccalauréat. Les candidats

[2] On introduit la symétrie σ d'axe OO' et on écrit $r = \sigma s$, $r' = s'\sigma$. Alors $r'r = s's$ est la symétrie dont le centre est l'intersection des axes D, D' de s, s'. Or $(D, OO') = (OO', D') = \alpha$ où α est l'angle de droites moitié de l'angle droit de r, r'.

[3] Ou on écrit $r'r = \rho^2 = \rho^{-2}$ où ρ est de même sens et de centre I. On a

$$r\rho = r'^{-1}\rho^2.\rho = r'^{-1}\rho^{-1} = (\rho r')^{-1} = \rho r'$$

de sorte que $\rho(O')$ est stable par r et $\rho(O') = O$.

n'ont pas vocation à être les otages de ceux qui voudraient faire évoluer l'enseignement dans les directions qu'ils préconisent.

Le travail de la commission invoque ainsi **les huits moments de l'activité mathématique**. *Attardons-nous un moment sur ces derniers.*

- formuler un problème : c'est oublier que les problèmes ne sortent pas de rien; voir à ce sujet les conjectures.

- conjecturer un résultat : il est préférable de réserver au mot conjecture son sens strict; c'est un acte terminal, en cas d'échec, destiné à d'autres ou à une reprise ultérieure; sinon mieux vaut parler d'affirmation comme le fait Grothendieck; il faut éviter ici aussi le mot à la mode, même s'il a en français un sens très péjoratif.

- expérimenter sur des exemples : oui, mais sur des exemples soigneusement choisis, cousus main en quelque chose; on ne regarde pas bêtement, à la manière shadock, un logiciel fournir des exemples en continu; d'ailleurs on exagère le rôle des ordinateurs dans la recherche mathématique; c'est surtout un bon prétexte pour justifier des demandes de crédits.

- bâtir une démonstration : c'est vendre la peau de l'ours; d'abord on "enquête", comme dit Philippe Lombard qui parle de zétèse; et l'on ne connaît aucune façon d'enseigner la chose.

- mettre en œuvre des outils théoriques : tous les outils mathématiques sont théoriques, même dans les situations les plus appliquées; quand à les mettre en œuvre, ce n'est pas un but en soi; il arrive d'ailleurs qu'on ait à forger ses propres outils.

- mettre en forme une solution : sans doute est-ce écrire une démonstration, tout simplement.

- contrôler les résultats obtenus : s'il s'agit de contrôler sur des exemples, rien à dire; s'il s'agit de contrôler des résultats obtenus sur un modèle avec la réalité, c'est fort intéressant mais d'une tout autre nature, et on sort là du domaine strict des mathématiques.

- évaluer leur pertinence : c'est d'abord celle des questions, des affirmations qui compte; cela dit la pertinence prime sur la véracité.

On mélange donc tout : l'activité de la communauté scientifique avec celle du mathématicien isolé, les situations théoriques et appliqués ...
D'ailleurs, pour "rendre les élèves autonomes", on leur fait acquérir des "réflexes immédiats".

Rien d'étonnant à ce que partir d'une liste de préjugés pareille ne conduise qu'à des propositions décevantes. Voyons quelques exemples.

1ère ES - Sujet 2 *(l'idée) . On considère les marches aléaloires à 5 pas sur* $\mathbf{Z}$.

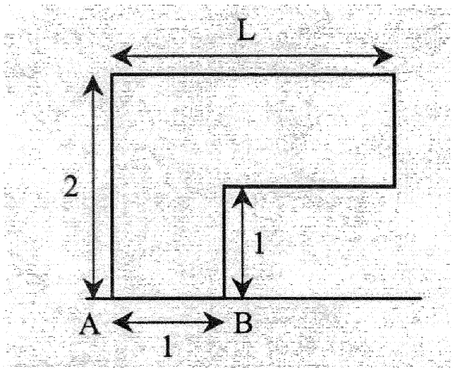
Les questions 1° a) (réaliser 30 marches à partir d'une suite aléatoire donnée) et c) (calculer la fréquence de la marche qui aboutit à 1) sont du recopiage; la question 1° b) (quelles valeurs peuvent être atteintes) est facile, parfois incomprise.

La question 2° (calcul de la probabilité sans indication) est du cours $n+1$; *personne ne l'a faite.*

Fallait-il une expérience lourde pour une idée aussi débile?

TS - Sujet 3 *(résumé).*

Une fine plaque homogène d'épaisseur constante, posée sur AB *dans un plan vertical, est en équilibre lorsque le projeté orthogonal de son centre d'inertie sur* (AB) *est situé entre* A *et* B.



On prétend se placer dans un contexte physique, ce qui nous renvoie au slogan à la mode de l'interdisciplinarité; mais

1. - on a oublié encore une fois les unités, pour faire plaisir au physicien sans doute, et l'horizontalité du plan sur lequel on pose.

2. - dans tous les cas, la plaque fine, instable, tombe; un bloc de forte épaisseur constante eût été plus réaliste; ou alors il faut expliquer comment la plaque est maintenue verticale, sans friction.

3. - on balance sans explication la condition d'équilibre alors que l'exercice ne prend de sens que si on la discute.

   Rien qu'avec la géométrie l'exercice avait un sens. Choisir un repère (sur une droite) pour travailler est un exercice à encourager. Mais pour cela il faut acquérir un "petit métier". Cela ne s'improvise pas.

   Sinon, sans critère géométrique, on détermine la valeur limite de L; c'est celle qui équilibre les moments des poids des deux rectangles en B :

$$\frac{1}{2}.2 = \frac{L-1}{2}.(L-1)$$