L'HISTOIRE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET LE NON STANDARD
Contribution au débat

M. Zerner
Université de Nice
et équipe REHSEIS

A deux mille ans de distance, Marx fait écho à Euclide : "Il n'y a pas de route royale pour la science et ceux-là seulement ont chance d'arriver à ses sommets lumineux qui ne craignent pas de se fatiguer à gravir ses sentiers escarpés." Certes, il faut éviter de faire compliqué quand on peut faire simple et nous savons que cela aussi est difficile. Mais lorsqu'on présente une nouvelle méthode capable de rendre simple l'enseignement des mathématiques, et particulièrement de l'analyse où les difficultés semblent bien se concentrer, il y a lieu de se méfier. Au demeurant, chat échaudé craint l'eau froide ; je suis un des nombreux enseignants qui ont cru que les "mathématiques modernes" permettraient un exposé simplifié, beaucoup plus naturel etc, et un enseignement s'appuyant sur l'activité des élèves. Je sais que cette affirmation paraît aujourd'hui difficile à croire. Mais que celui qui en doute lise des bulletins de l'A.P.M. des années 60 ou quelques autres écrits de l'époque. Or je ne crois pas qu'il soit plus facile de maîtriser les ensembles externes et internes que de se former une idée raisonnable de ce qu'est un compact. Le progrès vers un raisonnement logique sûr sur l'infini, ou au moins le non borné, se poursuit à travers toute la très longue histoire des mathématiques et on ne peut pas imaginer un procédé qui permette à chaque individu de se l'approprier sans peine.

De toute façon, les choses sont, comme d'habitude, ce qu'elles sont. Le plus urgent est que chaque certifié ait une bonne compréhension de l'analyse d'une variable réelle et ce n'est pas toujours le cas. Ceci doit bien se faire dans le cadre standard, en tout cas tant que l'enseignement du non standard ne sera pas rodé et qu'on ne disposera pas d'assez d'enseignants qui le connaissent. Une bonne expérience serait de mettre un minimum de non standard au programme de l'agrégation (je serais partisan de laisser aux candidats le choix entre l'exposé par les ultraproduits et celui par les axiomes IST).

Tout cela dit de façon assez abrupte pour fixer ma position, j'espère contribuer à clarifier le débat en résumant à grands traits l'histoire des infinitésimaux dans l'enseignement. Je me limiterai à la France depuis le début du XIXème siècle.

Mais d'abord une précision Je parlerai des infinitésimaux tels qu'ils étaient compris à chaque période concernée. Ils n'ont pas grand chose à voir avec le non standard. Traiter, comme cela se voit trop souvent, l'histoire des infinitésimaux comme une sorte de préhistoire du non standard, c'est faire injure à l'oeuvre de Robinson. Son apport est d'avoir montré qu'on pouvait faire un traitement des infinitésimaux (pas seulement comme quantité tendant vers zéro) dans le cadre de toute la puissance et la rigueur de l'analyse moderne. Et ce cadre fait toute la différence.

Deux manuels dominent le XIXème siècle : Lacroix (1802) et Boucharlat (1813). Au mépris de la chronologie, je commence par le deuxième qui déclare dans sa préface que les trois méthodes en compétition pour l'exposé du calcul intégral, la méthodes des limites, les infiniment petits et la méthode algébrique de Lagrange sont équivalentes et "n'en forment au fond qu'une". Il refuse donc de choisir mais son livre a une tonalité nettement lagrangienne avec une préférence pour les développements en séries entières mal distingués des développements limités. Les infiniment petits y jouent un rôle très effacé. (Le lecteur qui aurait le sérieux de vérifier ce que je dis est invité à se méfier des éditions tardives ; à partir de 1881 le livre a été dopé en infiniment petits par Laurent). Quant à Lacroix, il emploie la méthode des limites et rejette les infiniment petits qui ne sont mentionnés que dans quelques notes en bas de page où il indique le point de vue de Leibniz.

Vient Cauchy. Il donne un contenu technique aux notions de limite et de fonction continue et fonde son exposition dessus. Ses cours paraissent dans les années 1820 et semblent avoir été très peu lus. Les *leçons de calcul différentiel et de calcul intégral rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. Augustin Louis Cauchy* du chanoine Moigno (1840) commence comme du Boucharlat en plus confus.

En 1847 paraît la deuxième édition du cours de Polytechnique de Duhamel (la première reste pour moi un mystère). Il y construit une nouvelle exposition du calcul différentiel et intégral entièrement basée sur les infiniment petits désormais définis comme quantités variables qui ont zéro pour limite. Elle allait être suivie par tous les cours des facultés des sciences et de Polytechnique, à l'exception du très spécial *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* de Méray (1872), jusque vers la fin des années 1880. Plusieurs cours se réfèrent explicitement à Cauchy.

La fin des années 1880, c'est l'époque où apparaît et s'impose en France l'exposition basée sur les travaux de l'école de Weierstrass, celle qu'on emploie encore aujourd'hui. Les cours les plus importants qui emploient cette méthode sont celui de Jordan à partir de sa deuxième édition (1893) à cause de son apport scientifique et celui de Goursat (1902) parce qu'il domine l'enseignement jusque vers 1950. Mais les infinitésimaux ne disparaissent pas pour autant. Devenus sans utilité dans l'exposé des bases de l'analyse, ils sont couramment employés dans les chapitres, nombreux et importants, qui traitent de la géométrie différentielle.

En résumé, les infinitésimaux ne sont absents que pendant une très brève période qui commence quelque part dans les années 1960. Le drame, c'est qu'à part les pionniers (Luxembourg, Reeb ...) les adeptes du non standard ont été formés pendant cette période. Outre la fâcheuse publication de contre vérités historiques (les infinitésimaux auraient disparu de l'enseignement à la suite de l'oeuvre de Cauchy !) cela les amène à ne pas comprendre la puissance de l'analyse classique quand elle est accompagnée d'une bonne intuition des ordres de grandeur. Comment former cette intuition est le problème central qui dépasse de loin le cadre de ces quelques notes. J'espère au moins qu'elles peuvent aider à éviter que ce problème ne soit déplacé.