

DE L'ANALYSE NON STANDARD AU CALCUL INFINITESIMAL

André Deledicq - IREM de l'Université de Paris 7

PROPOS :

L'analyse non standard¹ peut-elle apporter quelque chose à l'enseignement élémentaire de l'analyse ?

Mon propos n'est pas exactement de répondre à cette question mais d'en préciser le sens ; après quoi, très classiquement, lorsque le contexte en aura été bien délimité et le sens des mots mieux établi, on s'apercevra que la réponse à la question devient quasiment triviale, modulo la réflexion, l'argumentation et les expériences que son énoncé pourra évoquer.

La difficulté essentielle tient évidemment dans l'expression "analyse non standard" et dans ce que chacun peut en connaître au regard de ce qui a été publié sur le sujet (voir la bibliographie) : ces textes entraînent en effet trop rapidement le lecteur vers des questions importantes certes, mais prématurées au regard de son accoutumance avec le sujet :

- comment s'articulent les liens non standard/non fini ?
- où donc la logique et/ou la théorie des ensembles sont-elles utiles ou nécessaires ?
- s'agit-il d'une véritable révolution culturelle sur les fondements des mathématiques ?

Mon travail a plutôt consisté à faire émerger et à expliciter le côté élémentaire et pragmatique des concepts et des techniques ; pour cela, je me suis appuyé sur :

- l'enseignement optionnel de "calcul infinitésimal" mis au point avec

¹en abrégé NSA pour "Non Standard Analysis", ou, pour les francophones : "Nouvelle et Simple Analyse".

Marc Diener en DEUG A de l'Université Paris 7 (88-89 à 90-91)² ;

- la formation continue de professeurs de mathématiques en analyse non standard à partir d'une perspective historique à l'IREM de Paris 7 (en 90-91) ;

- la mise au point, avec des professeurs de lycées, d'interventions diverses en Première S et en Terminale (de 1 heure de conférence, à 6 heures d'exposés et exercices, depuis octobre 89)³.

J'essaierai donc de répondre successivement aux questions suivantes :

§1 Comment peut-on introduire aujourd'hui l'analyse d'une manière radicalement élémentaire ?

Réponse : par l'introduction de trois ordres de grandeur principaux (le grand, l'appréciable, le petit) assortis de leurs techniques opératoires (les règles de Leibniz).

§2 Quelles sont les raisons *a priori* militant pour cette introduction ?

Réponses : *historiques, didactiques et épistémologiques.*

§3 Quels sont les obstacles classiques à cette introduction ? Peut-on proposer un modèle de mesure des grandeurs à la fois réaliste (on ne peut pas tout (s)avoir !) et raisonnablement optimiste (mais on peut en (s)avoir autant que nécessaire !) ?

Réponses : la *récurrence pragmatique*, et les principes de débordement.

² Le contenu de cet enseignement est développé dans *Le calcul infinitésimal* édité chez A. Colin (Collection U.)

³ Pour les professeurs des lycées qui voudraient effectivement parler à leur élèves le vocabulaire infinitésimal, un document est disponible à l'IREM de Paris 7 : *L'analyse, au lycée avec le vocabulaire infinitésimal* (juillet 91).

§4 Quelles sont les *raisons a posteriori* justifiant cette introduction?

Réponses : *techniques et conceptuelles.*

§5 Quels sont les *obstacles* nouveaux qui risquent alors d'apparaître ?

Réponses : au niveau des énoncés mathématiques, essentiellement un phénomène d'*interférence* ; au niveau des applications, certaines conceptions concernant le *domaine de validité du modèle abstrait d'une situation pratique.*

1 - UNE NOUVELLE ET SIMPLE ANALYSE : LE CALCUL INFINITESIMAL.

1.1. Existence d'ordres de grandeur.

Avant d'exposer les principes du (nouveau) calcul infinitésimal, précisons que nous avons choisi le cadre théorique défini par Nelson [voir la bibliographie] en 1977, redessiné et médiatisé dans un contexte élémentaire.

En particulier, l'idée qu'il est bon de garder à l'esprit pour minimiser les obstacles qui risquent de se présenter et éviter de se poser de fausses questions est la suivante :

R et N restent ce qu'ils ont toujours été !

Rien ne change, donc, et ce qui était vrai classiquement le reste en calcul infinitésimal. Ce qui est nouveau, c'est notre capacité à voir des *différences* entre des objets que les axiomes classiques voient indifférenciés : tout se passe *comme si les nombres avaient été créés en couleur*, mais que nos "sens classiques" (i.e. nos énoncés et nos techniques classiques) les percevaient en noir et blanc. C'est ce caractère daltonien qui se trouve "guéri" par notre essentiel et premier énoncé :

Axiome de différenciation des ordres de grandeur (dans N)

Il y a, dans N, deux classes d'entiers : les entiers dits *appréciables*, comprenant 0 et 1, et les entiers dits *i-grands*. Ces

deux classes, ou "ordres de grandeur", sont telles que...

- ... tout entier *i*-grand est supérieur à tout entier appréciable ;
- ... la somme de deux entiers appréciables est appréciable.

De cet axiome, et par le jeu des propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$, on déduit (la démonstration est sans difficulté) les propriétés que les mathématiciens du XVIIIème siècle utilisaient sans complexes et que tous les mathématiciens (et tous les physiciens) voudraient bien pouvoir écrire aujourd'hui sans arrière pensée parce qu'elles ne font que traduire une certaine "intuition". En particulier :

Différenciation des ordres de grandeur dans $\mathbb{R}$.

Il y a, dans $\mathbb{R}$, trois classes de réels :

- les réels *i*-grands (ceux dont la partie entière est *i*-grande en valeur absolue)
- les réels *i*-petits (0 et ceux qui sont inverses d'un *i*-grand)
- les autres, dits réels *appréciables*.

Et l'on a, par exemple :

Un réel est *i*-petit *ssi* sa valeur absolue est inférieure à tous les appréciables positifs.

Un réel est *i*-grand *ssi* sa valeur absolue est supérieure à tous les appréciables positifs.

1.2. Règles opératoires

Les tableaux suivants résument les règles que nous proposons d'appeler "règles de Leibniz", en hommage à l'inventeur du premier "calcul" sur les infinitésimaux.

nature de $x + y$	y est ip	y est app	y est lg
x est ip	ip	app	lg
x est app	app	app ou ip (?)	lg
x est lg	ip	lg	?

nature de $x \times y$	y est ip	y est app	y est lg
x est ip	ip	ip	?
x est app	ip	app	lg
x est lg	?	lg	lg

nature de x / y	y est ip	y est app	y est lg
x est ip	?	ip	ip
x est app	lg	app	ip
x est lg	lg	lg	?

Notez que le fait de ne rien pouvoir dire a priori du produit xy , lorsque x est i-petit et y i-grand, n'est ni plus ni moins gênant que le fait de ne rien pouvoir dire a priori de la somme $x+y$ lorsque x est positif et y négatif.

En fait, en calcul infinitésimal, le problème dit des "formes indéterminées" en mathématiques classiques ne semble pas du tout se poser comme un artefact mais apparaît sous la forme de "vrais" problèmes du type : "beaucoup de petites choses ... combien cela peut-il faire ?" . On pourra voir, dans *L'analyse au lycée avec le calcul infinitésimal* que nous avons fait de ce problème l'une des motivations et des situations-clefs des débuts de l'analyse.

1.3. Le vocabulaire infinitésimal

Nous terminerons cette courte liste de propriétés par quelques définitions utiles et un résumé (encadré) de quelques propositions lexicales.

Définition : Deux réels x et y sont dits *i-voisins* (en abrégé *iv*) ssi $x-y$ est un réel *i-petit*.

On note alors $x \approx y$.

Commentaire : Autour de 0, on trouve ainsi les réels *i-petits*, qui sont exactement les nombres *i-voisins* de 0.

Autour de 1, il y a les nombres *i-voisins* de 1. Autour du rationnel $16/7$, il y a les nombres *i-voisins* de $16/7$...

Ainsi, les nombres à notre échelle se groupent-ils comme des "halos" entourant certains nombres particuliers :

Il y a des nombres réels non *i-grands* qui sont, pour les nombres *i-voisins* qui les entourent, exactement ce que 0 est pour les *i-petits* qui l'entourent : ce sont les réels *standard*. Précisément, un réel standard est un réel que l'on peut définir par une propriété non infinitésimale (voir encadré).

Définitions : Lorsque le quotient a/b est *i-petit*, on dit que a est *négligeable* devant b ; on note souvent $a \ll b$.

Lorsque le quotient x/y est appréciable, on dit que x et y sont du même ordre de grandeur ; on peut dire aussi, comme Leibniz, que x et y sont *comparables*.

Lorsque le quotient u/v est *i*-voisin de 1, on dit que u et v sont *équivalents* ; on note $u \sim v$

1.4. Résumé de quelques propositions de vocabulaire pour une meilleure communication en CALCUL INFINITESIMAL.

□ Celui qui commence une phrase par "*En calcul infinitésimal...*", se place explicitement dans une théorie des nombres réels comprenant l'axiome de *différenciation des ordres de grandeur* ; il peut donc se permettre des argumentations et des démonstrations d'analyse infinitésimale" dite aussi "non standard" (mais ces deux derniers mots sont un peu "gros" en français et n'évoquent pas exactement ce qu'ils évoquent en américain.

□ Les adjectifs et noms *i-grands*, *i-petits* et *i-voisins* ont l'avantage d'être à la fois simples et courants, le "*i-*" marquant suffisamment leur appartenance au vocabulaire mathématique. Ce "*i-*" peut être développé, parlé ou interprété, selon les circonstances, en "*infiniment*" si l'on veut rappeler des références historiques, ou en "*idéalement*" si l'on préfère ne pas mêler l'infini à ces affaires.

□ Le vocabulaire minimum du calcul infinitésimal comprend aussi les quelques mots suivants :

nombre appréciable : nombre ni *i-grand*, ni *i-petit*

nombre limité : nombre *i-petit* ou appréciable

nombres équivalents : nombres dont le quotient est *i-voisin* de 1

Une *propriété infinitésimale* est une propriété ne pouvant pas s'énoncer sans recours à la différenciation des ordres de grandeur.

Une *propriété non infinitésimale* est dite aussi *classique* ou *standard*.

Plus généralement, les adjectifs *classique* ou *standard* qualifient les objets, propriétés, notions,... pouvant être définis sans référence à l'axiome de différenciation des ordres de grandeur. En particulier un réel standard est un réel pouvant être la limite d'une suite classique.

(Remarquez que les notions de "fini" et "d'infini" sont absolument non infinitésimales et donc parfaitement classiques).

□ Une propriété non-standard ne peut pas caractériser une collection méritant le nom d'*ensemble* labélisé par une théorie classique des ensembles (ZFC par exemple), sinon il existerait une propriété classique exactement équivalente à cette propriété non-standard ; cela se serait su et on aurait pu alors se passer des axiomes supplémentaires non standard tout en profitant du vocabulaire infinitésimal. Si l'on préfère, cependant, conserver le caractère naïf du mot "ensemble", on qualifiera ce type de collection d'*ensemble externe*.

2 - POURQUOI LA NSA ? (a priori)

2.1. Des raisons historiques

De "bien avant Leibniz" à "bien après Cauchy" tous les mathématiciens ont manipulé des quantités dites "infiniment" grandes ou "infiniment" petites, avec bonheur et efficacité. Cela posait bien quelques problèmes (voir "*Métaphysique du calcul infinitésimal*", Carnot, 1797) mais cela fonctionnait ; les exemples abondent :

- Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes
- 1696 - Marquis de l'Hospital (page 3).

On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre

infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entre eux, la courbure de la ligne.

- Introduction à l'Analyse Infinitésimale - Euler - Trad. Labey - 1796 (page 86).

Comme i est un nombre infiniment grand ; il s'ensuit que $(i-1)/i = 1$; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $(i - 1)/i$ approchera de l'unité ; donc si i est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction $(i - 1)/i$ égalera l'unité. Par une raison semblable :
 $(i - 2)/i = 1$; $(i - 3)/i = 1$ etc.

- Résumé des leçons (...) à l'Ecole Polytechnique (1823) - Cauchy (page 7).

Lorsque la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et définie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence $f(x+i) - f(x)$ est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit.

Mais le passage que je préfère est celui d'Euler (dans *Introduction à l'analyse infinitésimale* - 1740) où il "établit" les formules qui porteront son nom, en quelques lignes magistrales... qui seraient certainement aujourd'hui peut-être mal comprises dans un cours d'analyse classique !

$$\begin{aligned} 133. - \\ \cos n\zeta &= \frac{(\cos \zeta + \sqrt{-1} \sin \zeta)^n + (\cos \zeta - \sqrt{-1} \sin \zeta)^n}{2} \quad \& \\ \sin n\zeta &= \frac{(\cos \zeta + \sqrt{-1} \sin \zeta)^n - (\cos \zeta - \sqrt{-1} \sin \zeta)^n}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

...

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) l'arc ζ infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i , afin d'obtenir pour $i\zeta$ une valeur finie v ; nous aurons donc $n\zeta = v$, & $\zeta = \frac{v}{i}$, & par conséquent

$\sin. x = \frac{v}{i}$, & $\cos. x = 1$; ces substitutions faites donneront

$$\cos. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$
 & $\sin. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$. Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i = e^x$, e désignant la base des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour x , d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura

$$\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$
 & $\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \sin. v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \sin. v$.

2.2. Des raisons didactiques

Tous les enseignants savent les difficultés d'un enseignement classique de la notion de limite ; et chacun, à un moment ou à un autre, aura décidé d'en appeler à "l'intuition" portée par le vocabulaire infinitésimal.

Même dans des manuels (écrits), on trouve par exemple :

D'un point de vue naïf ou imagé, dire que la fonction f a pour limite zéro en zéro signifie que $f(h)$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).

Mais ce langage imagé manque de précision : en effet, que signifie par exemple "le réel $f(h)$ est proche de zéro" si l'on ne donne pas d'autre renseignement ? (Ed. Nathan - Première 1980).

En fait, bien après l'exposition devenue classique de Weierstrass (Berlin 1865), les ouvrages d'enseignement persistent longtemps à conserver les expressions "infinitement petits" et "infinitement grands" en les définissant non comme des nombres mais comme des fonctions (Voir "Sur l'analyse des traités d'analyse 1870-1914" Cahier de Didactique n° 30 - IREM de Paris - Zerner).

En fait il est intéressant de constater que les deux théorèmes fondamentaux dégagés par des didacticiens comme Duhamel au XIXème (appelés "principe de substitution des infinitement petits") sont justement, sous leur forme NSA d'aujourd'hui, les deux théorèmes qui

fondent les applications pratiques du calcul infinitésimal en particulier dans les sciences physiques. Rappelons les :

Les principes de substitution des "infinitement petits" d'après M. DUHAMEL - Eléments de calcul infinitésimal - 1860.

Théorème 1 : La limite de la somme de quantités positives infinitement petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.

Théorème 2 : La limite du rapport de deux quantités infinitement petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.

Version infinitésimale :

1. Soient deux suites finies à termes positifs ; si leurs termes sont deux à deux équivalents alors leurs sommes sont équivalentes.
2. La division et la multiplication sont compatibles avec l'équivalence des nombres.

En fait, on s'aperçoit que le calcul classique utilisant l'équivalence des fonctions admet souvent pour paraphrase le calcul infinitésimal utilisant l'équivalence des nombres... Loin d'y voir une raison pouvant borner l'intérêt du calcul infinitésimal, il faut y puiser plutôt la volonté d'aller plus loin que dans le cadre classique en direction du vocabulaire infinitésimal : Aujourd'hui, il est possible de faire un pas de plus !

En effet la manipulation de *nombres en lieu et place de fonction* est un des grands avantages techniques du calcul infinitésimal sur l'analyse weierstrassienne. De plus elle permet de donner un sens à des morceaux de phrases comme " $f(x)$ tend vers 3", ce que la *xylolangue* classique des limites ne permet pas.

En mathématiques classiques, en effet, la phrase " $f(x)$ tend vers 3

quand x tend vers l'infini" ne peut pas être cassée en deux morceaux ayant chacun leur sens : ainsi " *$f(x)$ tend vers 3*" ne signifie rien et " *x tend vers l'infini*" encore moins (en dépit de ce dont on cherche à persuader les étudiants, ne se laisse-t-on pas pourtant aller à prononcer des phrases comme "étudier f quand x tend vers l'infini").

En calcul infinitésimal, " *$f(x)$ tend vers 3*" prend le sens de " *$f(x)$ est voisin de 3*", équivalent à " *$f(x) - 3$ est i -petit*". De même " *x tend vers $+\infty$* " prend le sens de " *x est i -grand*". La phrase " *$f(x)$ est voisin de 3 quand x est i -grand*" a alors le sens que lui donne tout simplement l'assemblage syntaxiquement correct de ces deux morceaux.

On peut raisonnablement supposer qu'un élève comprend mieux une phrase dont il peut analyser séparément chaque composant, qu'une phrase (longue) qu'il n'a pas le droit de couper pour la comprendre ou la traduire. Mais l'avantage est aussi technique comme on le constate dès la mise en oeuvre de démonstrations élémentaires utilisant les règles de Leibniz.

2.3. Des raisons épistémologiques

La notion de *nombre* s'est toujours construite à partir de la *mesure des grandeurs*. De Euclide à Cantor, le modèle mathématique s'est affiné et épuré : finalement $\mathbb{R}$ avec sa structure classique semble répondre "complètement" aux attentes et aux besoins des "mesureurs" que nous sommes.

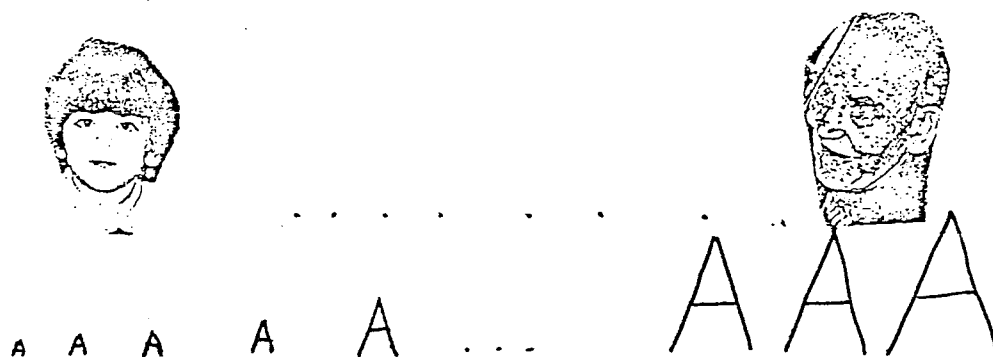
Il y a cependant, si l'on veut bien y réfléchir, au moins deux situations concrètes intéressant le domaine des nombres réels et que la structure de $\mathbb{R}$ ne traduit pourtant pas de façon satisfaisante ; ce sont :

- le changement d'*ordre de grandeur*
- la succession des *records*.

Le changement d'ordre de grandeur intervient dans les phénomènes d'évolution et provoque de sempiternelles discussions ("quand le singe devient-il un homme ?" - voir dans La Recherche n° 148) du genre suivant :

Il est manifeste qu'un bébé qui vient de naître n'est pas un adulte ; il est aussi manifeste qu'un grand-père est un adulte ; mais où se situe la frontière ?

Quand le "petit" devient il "grand" ?



On peut poser la question sous une forme plus numérique en demandant quand la hauteur des A dessinés ci-dessus devient-elle grande ?

Quelqu'un (ou quelques personnes) pourraient évidemment décider que telle hauteur est la limite entre les deux catégories : plus grand, on est "grand", plus petit, on ne l'est pas. Ce type de réponse est parfois nécessaire (légalement, la "majorité" est fixée à 18 ans ; en-dessous de 20g une lettre est timbrée à 2,30 F,...) mais ce type de réponse a le défaut d'introduire l'arbitraire. Et surtout il entre en contradiction avec une propriété sur laquelle tout le monde semble d'accord :

Lorsque des objets peuvent avoir différents ordres de grandeur, alors *si la différence entre deux objets est très petite, c'est que les deux objets sont du même ordre de grandeur.*

Plus finement, l'expérience serait heureuse de disposer d'un modèle théorique dans lequel :

Lorsque l'on passe d'un ordre de grandeur à l'autre par un certain nombre d'intermédiaires, alors c'est que le nombre d'intermédiaires est "très grand" ; autrement dit, après un nombre d'intermédiaires

"très petits" ou "appréciables", on doit rester dans le même ordre de grandeur.

Finalement, si l'on souhaite traduire de façon satisfaisante les situations d'ordres de grandeur, alors il faut affirmer l'impossibilité de donner une définition "numérique" de leurs frontières, c'est-à-dire une définition qui fasse simplement intervenir la relation d'ordre et les opérations arithmétiques usuelles.

Par contre, on doit pouvoir énoncer des propriétés relatives à certains résultats d'opérations, du genre :

Si n est "appréciable", et si e est "i-petit", alors $n+e$ est aussi "appréciable".

En fait les règles de calcul susceptibles de bien traduire ce que nous avons dans la tête au sujet des ordres de grandeur sont explicitement les règles de Leibniz.

La succession des records (mesurés par un nombre) présente une caractéristique bien réelle et pourtant contradictoire avec la structure classique de $\mathbb{R}$:

D'une part, pour tout record r , on est sûr qu'il sera un jour battu, c'est-à-dire qu'il existe un r' *significativement* plus grand ($r'-r$ n'est pas "infinitésimal"). Cependant on est aussi sûr que certains nombres ne seront pas atteints (l'ensemble des records possibles est borné !).

Ce type de situation n'est pas modélisable par l'analyse classique où l'existence d'une borne supérieure pour l'ensemble borné des records possibles oblige les progrès à devenir un jour plus petits que tout nombre fixé à l'avance ; comme dit le proverbe chinois "celui qui peut toujours faire un (vrai) pas de plus est-il vraiment sûr de pouvoir aller au bout du monde". N'est il pas réaliste et sage de répondre "non" à cette question ?

La limitation pragmatique du principe de récurrence s'impose donc à tout homme raisonnable comme le montre, paraboliquement, ci-dessous la "fable du maçon présomptueux" :

J'avais un jour un mur à bâtir, et je le voulais solide. Je demandais donc un devis à deux maçons, et discutais avec chacun de leur métier, de leurs réalisations et de leurs projets.

A chacun d'eux je tenais le discours suivant :

"Cela semble très simple de construire un mur, on pose une première rangée de briques, puis une seconde, et ainsi de suite jusqu'à la hauteur désirée. Mais y a-t-il une limite de hauteur que vous ne sauriez dépasser ?"

Le premier maçon était un français standard (rien ne lui était impossible) : "Mais je peux vous monter un mur aussi haut que vous le voulez, me dit-il. Donnez-moi une hauteur et je me fais fort de la dépasser, jusqu'à la lune si ça vous fait plaisir."

Le deuxième maçon (non standard) paraissait moins sûr de lui : "Je ne peux pas vous fixer de limite précise, car il se trouvera toujours quelqu'un pour battre un record de hauteur un jour ou l'autre. Mais il y a des hauteurs que personne n'atteindra jamais : la distance de la terre à la lune, par exemple."

Alors, à ma place, quel maçon auriez-vous choisi pour bâtir votre mur?

3 - LES OBSTACLES CLASSIQUES ET LE MODELE INFINITESIMAL

3.1. L'obstacle de la "récurrence pragmatique".

Il faut insister sur le fait que $\mathbb{R}$ reste un corps totalement ordonné archimédien où les i -grands et les i -petits sont des réels avec lesquels on calcule sans aucun état d'âme. Pour bien faire comprendre

notre choix qui n'est pas celui de Robinson ⁴ dans sa première version de l'ANS, revenons à l'argument principal qui a empêché les mathématiciens classiques de croire à la possibilité de coexistence de plusieurs ordres de grandeur :

Si un nombre ε est "très-petit", alors le calcul infinitésimal n'a d'intérêt pratique que si $\varepsilon + \varepsilon$ est aussi "très-petit". Mais alors 3ε est aussi "très-petit", et 4ε , et 5ε , et ainsi de suite..., "par récurrence", tout multiple de ε devrait donc être "très-petit".

Or ceci est en contradiction avec un énoncé dont on ne voudrait pas se passer et auquel est associé le nom d'Archimède :

Etant donné deux nombres (ε et 7 par exemple), il existe nécessairement un multiple de l'un qui dépasse l'autre ; il y a donc un entier n tel que $n\varepsilon$ soit plus grand que 7. Ce multiple ($n\varepsilon$) de ε , dépassant 7, ne sera donc pas "très-petit" ! La manière de se sortir de cette apparente contradiction paraît aujourd'hui tellement simple qu'on se demande comment on a fait pour ne pas y penser plus tôt (mais n'en est-il pas toujours ainsi ?).

Bien sûr, si ε est "très petit", 4ε , 10ε , 52ε sont aussi "très petits",... mais les multiples de ε ne sont pas TOUS "très petits". Car si l'on suppose qu'il y a des nombres "très petits" (comme ε), on doit supposer aussi qu'il y a des nombres "très grands" (par exemple son inverse $\frac{1}{\varepsilon}$). Et le facteur n dans $n\varepsilon$ peut être lui-même "très grand". Plus précisément, on doit pouvoir dire ceci :

Lorsque n n'est pas "très grand" et que ε est "très petit", $n\varepsilon$ est

⁴ quoiqu'il faille distinguer la construction que Robinson a été amené à produire pour traduire ses intuitions, de ce qu'il avait effectivement dans la tête : on peut avoir quelques raisons de penser qu'il aurait souscrit à la conception en couleurs de R s'il avait pu la théoriser immédiatement (cf. l'article d'Imré Lakatos qui a eu la chance de discuter très tôt avec Robinson, et des écrits bien antérieurs de Robinson (par exemple : 1951 colloque sur les mathématiques et l'intuitionnisme).

effectivement "très petit" !

Par contre lorsque n est "très grand" et que ε est "très petit", le produit ne peut être "très petit" ou bien ne pas l'être... Et c'est d'ailleurs cette très intéressante situation qui sera l'objet de nombreux problèmes d'analyse.

Ce qu'il faut donc mettre en cause, ce n'est pas l'énoncé d'Archimède, mais l'énoncé du principe d'induction :

Comme on l'a discuté, en effet, dans le paragraphe 2.3, le passage d'un entier à son suivant n'assure pas "en fait" (c'est le cas de le dire !) le passage à N tout entier, mais simplement le passage aux entiers non i -grands. De sorte que le "bon" énoncé du principe de récurrence en calcul infinitésimal est le suivant :

(PRP) Si une propriété est vérifiée par l'entier N_0 , et si on démontre que, vérifiée par l'entier n , elle est vérifiée par $n+1$, alors cette propriété est vérifiée par tous les entiers appréciables supérieurs à N_0 .

On va voir (comme nous l'avons énoncé dans les premières lignes du paragraphe 1.1) que cela ne change rien dans le cadre classique, puisque toute propriété classique vérifiée par tous les entiers appréciables s'étend à tous les entiers. Poincaré [dans la *Science et l'Hypothèse*] pouvait donc avec confiance affirmer la puissance de l'esprit, qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte, dès que cet acte est une fois possible.

3.2. Les principes de Cauchy et du Transfert.

Nous venons de voir comment tourner ou dissoudre l'obstacle essentiel que nos connaissances classiques avaient installé contre la coexistence des ordres de grandeur. Il s'agit bien caricaturalement ici d'un "obstacle" au sens de Bachelard et dont les caractéristiques ont été bien détaillées par Guy Brousseau [*Constructions des savoirs : obstacles et conflits* - CIRADE 1989] ; en particulier cet obstacle

reparaît sous diverses formes avec opiniâtreté. Ainsi, par exemple, c'est encore lui qui se dresse avec l'énoncé classique :

(S) "Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure "

car on "déduit" soi-disant de cet énoncé l'existence d'une borne supérieure pour les infiniment petits, d'où il est élémentaire de tirer une contradiction.

Cependant cet énoncé S n'est qu'un sous-produit de celui-ci :

(N) "Toute partie de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément",

lequel se démontre par "descente infinie" (ainsi nommé, comme on le sait, parce qu'elle ne l'est pas !), c'est-à-dire par contraposition du principe de récurrence. On retrouve bien l'argumentation du paragraphe précédent : le théorème (N) ne s'applique pas à la "partie" constituée des i-grands de $\mathbb{N}$, car on peut bien "descendre" d'une marche" en restant chez les i-grands : "si n est i-grand, alors $n-1$ est aussi i-grand" ; on peut bien aussi descendre d'un nombre appréciable de marches, mais on ne peut pas descendre d'un nombre i-grand de marches en étant sûr de rester chez les i-grands.

Ceci étant, les théorèmes (S) et (N) se démontrent sans problème pour toutes les *parties classiques* de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$ c'est-à-dire celles qui peuvent être définies sans parler de la "couleur" des nombres ; leur validité ne peut être entachée que pour les collections de nombres dont les définitions nécessitent le recours à la différenciation des ordres de grandeur. Il faut alors, comme d'habitude en cas de nouveauté, y regarder de plus près.

L'obstacle se résume finalement à l'impossibilité de définir des frontières entre les ordres de grandeur. Mais, si l'on veut bien y réfléchir un peu, c'est justement cette impossibilité que l'on souhaite modéliser en la traduisant par une théorie adéquate (voir § 2.3.) ; il ne faut donc pas s'étonner que la NSA y parvienne.

Concernant nos conceptions, la résistance de cet obstacle est d'autant plus forte qu'il a constitué une connaissance essentiellement importante : en effet, c'est justement l'affirmation (par Dedekind et alii) que toute partie bornée vient buter sur un "nombre" qui a permis la compréhension de la notion de nombre "réel". Il nous est donc

difficile de relativiser cette conviction, devenue intime, aux nombres auxquels notre propre ordre de grandeur nous permet d'accéder et seulement à ceux-là.

Cette impossibilité de définir des frontières classiques entre les ordres de grandeur se traduit sous une forme plus positive : en effet, si un ensemble défini par des propriétés classiques ne peut pas s'identifier aux *i*-petits, il ne peut donc nécessairement que déborder sur les appréciables !

Plus formellement, nous appelons *principe de Cauchy* ou *principe de débordement*, un "principe" ici éclaté en plusieurs énoncés dont le premier fut effectivement invoqué par Cauchy :

Si une propriété classique est vraie pour tous les *i*-petits, alors elle est vraie sur un intervalle $[0, a]$ où a est appréciable.

Si une propriété classique est vraie pour tous les réels du halo de x , alors elle est vraie sur un intervalle $[x-a, x+a]$ où a est appréciable.

Si une propriété classique est vraie pour tous les *i*-grands, alors elle est vraie pour tous les réels supérieurs à A où A est appréciable.

Ce "débordement" d'un ordre de grandeur sur un autre est évidemment "essentiel" en calcul infinitésimal ; ceux qui approfondiront l'analyse non standard le verront apparaître sous la forme de principes dits de "permanence" ; le premier et le plus important d'entre eux est l'axiome de Transfert qui est l'outil principal de généralisation des propriétés classiques :

Si une propriété classique est vraie pour tout réel standard, alors elle est vraie pour tout réel.

3 - POURQUOI LA NSA (a posteriori)

3.1. Des raisons techniques.

Disposant d'un vocabulaire, d'énoncés et d'outils supplémentaires, il n'est pas anormal que leur utilisation simplifie et souvent éclaire la manipulation d'objets et de concepts même exclusivement classiques. Le phénomène n'est pas nouveau : on sait bien comment le passage aux complexes rend parfois lumineux, triviaux ou excitants certains résultats et situations pourtant bien réels ; de même pour l'usage de vecteurs en géométrie où l'on fait usage d'un "dictionnaire" assurant la traduction des propriétés géométriques en langage vectoriel et inversement,

En pratique, on se persuade très vite du confort et du gain de sagacité apportés par la NSA ; pour rester court, nous nous accommoderons de l'évocation choisie des trois points qui nous ont paru les plus significatifs :

1. L'adéquation entre les expressions formelles et certaines représentations mentales.
2. La manipulation de nombres à la place de fonctions.
3. La possibilité de calculer sur des nombres de termes finis (le *i*-grand n'ayant rien à voir avec l'infini).

Le point numéro 1 (*adéquation entre les expressions formelles et certaines représentations mentales*) est particulièrement présent dans le dictionnaire Analyse classique/NSA que nous avons esquissé avec la traduction des notions de limites de suites et de fonctions en termes d'ordre de grandeur ; insistons un peu avec les deux définitions suivantes :

La continuité : Une fonction classique f est continue en x standard ssi pour tout h *i*-petit $f(x+h)$ est *i*-voisin de f .

L'intégrabilité : Une fonction classique f est intégrable sur l'intervalle classique I ssi pour tout découpage infinitésimal $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de I , la somme $\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ reste i -voisine d'un même standard (qui sera l'intégrale de f sur I).

[Un découpage infinitésimal de I est naturellement une suite finie de termes deux à deux i -voisins, dont les premiers et derniers termes sont les extrémités de I].

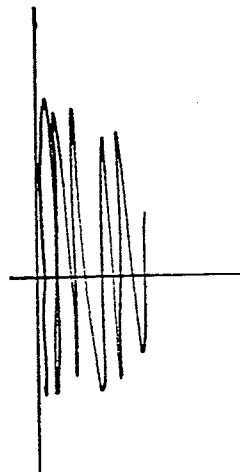
Un minimum de pratique montre la facilité de mise en oeuvre et l'efficacité de ces critères, dans des situations d'enseignement, où il est, de surcroît, bien agréable de laisser l'intuition s'appuyer sur des images adaptées au formalisme nécessaire des démonstrations. Voyons, par exemple, comment se présentent deux démonstrations de non-continuité ou de non-intégrabilité, quasiment impossibles à assumer dans un cadre d'enseignement classique de niveau élémentaire :

La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Il suffit d'exhiber deux i -petits x_0 et x_1 pour lesquels $\sin \frac{1}{x_0}$ et $\sin \frac{1}{x_1}$ ne sont pas i -voisins ; choisissons n entier i -grand, $x_0 = \frac{1}{2n\pi}$ et $x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ sont bons pour cette exhibition.

Remarquez la différence très caractéristique avec une démonstration classique où, au lieu des nombres $\frac{1}{2n\pi}$ et $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, on doit introduire deux suites $u_n = (\frac{1}{2n\pi})$ et $v_n = (\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi})$ et un théorème sur les limites de suites extraites des valeurs d'une fonction...

On voit ici émerger le point numéro 2, déjà évoqué dans le paragraphe 2.2. où nous avons vu l'équivalence des nombres remplacer l'équivalence des fonctions.



La fonction caractéristique des rationnels n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Il suffit d'exhiber deux découpages $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ et $(x'_j)_{j=0,\dots,n'}$,

pour lesquels
$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$
 et

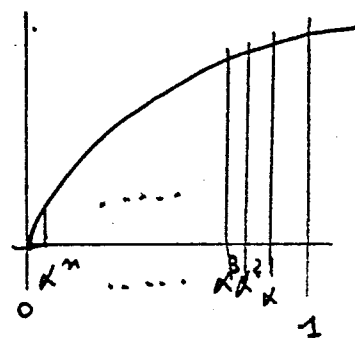
$$S' = \sum_{j=1}^{n'} f(x'_j) \cdot (x'_j - x'_{j-1})$$
 ne sont pas ε -voisins ; pour n entier

ε -grand, avec $x_i = \frac{i}{n}$, S prend la valeur 1 ; et pour ε ε -petit irrationnel, avec $x_i = i\varepsilon$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n'-1$ (n' étant le plus petit entier pour lequel $n'\varepsilon$ dépasse 1), S' prend la valeur ε (seul le dernier terme de la somme est non nul). cqfd.

Dans les cas où l'intégrabilité est assurée, il est vraiment très agréable de pouvoir calculer exactement une somme finie en se contentant de constater qu'elle est ε -voisine d'un nombre qui sera la valeur de l'intégrale.

Cette possibilité de limitation des suites à un nombre fini de termes permet de contourner les problèmes de convergence uniforme, par exemple lors de double passage à la limite, et autorise l'accès à des raisonnements que l'on n'oserait pas proposer à des étudiants de niveau élémentaire dans un cadre classique.

Ainsi, par exemple, l'idée de Fermat pour calculer $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ consistant à considérer un découpage géométrique $(0, \alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \dots, \alpha^2, \alpha, 1)$, où α doit être choisi d'une part "assez" proche de 1 pour que le découpage soit infinitésimal du côté de 1, mais d'autre part "pas trop" proche de 1 pour que α^n soit infinitésimalement proche de 0 pour n très grand.



Ainsi, le choix trivial $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ ne convient pas du côté de 0 ; mais $\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ est un choix intelligent qui permet aux calculs

d'aboutir avec bonheur !

Citons encore, comme illustration de notre point numéro 3, la belle démonstration (infinitésimale) du théorème des valeurs intermédiaires:

Si P est une fonction classique continue sur $[a,b]$ et telle que $P(a).P(b) < 0$, alors il existe un x de $[a,b]$ tel que $P(x) = 0$.

Démonstration : Soit $(x_i)_{i=0,1,\dots,n}$ un découpage fini infinitésimal de $[a,b]$, par exemple $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ pour n i -grand. Soit i le plus petit indice i tel que $P(x_i).P(b) \geq 0$ (cet i existe parce que le découpage est fini). Puisque $P(x_{i-1}).P(b) < 0$, $P(x_{i-1})$ et $P(x_i)$ sont de signes contraires ; pour le standard x_i voisin de x_{i-1} et de x_i , P prend donc par continuité une valeur à la fois négative ou nulle et positive ou nulle. On a donc bien $P(x) = 0$. cqfd.

3.2. Des raisons conceptuelles.

La constante de Planck ne tend pas vers zéro.

Le concept de limite traîne avec lui quelques idées qui n'ont parfois rien à voir avec la situation où il est censé intervenir.

Par exemple, dans une situation physique, si un nombre a est "négligeable" devant un nombre b , pourquoi faudrait-il introduire une fonction a et une fonction b d'une certaine variable, et pourquoi faudrait-il faire tendre cette variable vers quelque chose ?

Que signifie cette construction ? qui aboutit parfois à un degré d'abstract non sense qui dépasse le supportable : il est par exemple, assez curieux d'exiger d'un physicien (acceptant de faire des mathématiques) qu'il veuille bien faire tendre la constante de Planck vers zéro, car c'est le seul moyen légitime que lui offre le calcul classique pour "négliger" un nombre approchant les 6.10^{-34} ; faire tendre une constante vers zéro, est-ce bien raisonnable ?

Dans le même ordre d'idée, pour exprimer que l'aire d'un carré est

très grande quand la longueur du côté est très grande, est-il vraiment raisonnable de devoir énoncer que l'aire de ce carré "tend vers l'infini" quand la longueur de son côté "tend vers l'infini". Ne serait-il pas plus normal de dire que l'aire est (i-)grande quand le côté est (i-)grand ? et de le dire sachant que l'on reste sous le contrôle des mathématiques !

Cependant, ce qui m'a le plus frappé dans mes débuts d'exploration de la NSA, c'est l'étonnante sensation de voir apparaître "naturellement" (c'est-à-dire comme forcé par le déroulement du discours infinitésimal) les "bonnes idées". La subjectivité apparente de cette impression ne m'a cependant pas paru un argument suffisant pour chercher à la cacher. J'en donnerai trois exemples suffisamment simples pour pouvoir être exposés ici :

Le concept de suite convergente.

Cherchant à définir, pour un niveau très élémentaire et dans le cadre infinitésimal, la notion de "suite convergente vers une limite", nous avons d'abord cru rencontrer la difficulté suivante :

Si l'on traduit " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l " par " u_n est i-voisin de l ", alors u_n se trouve être aussi i-voisin de $l+\varepsilon$ pour n'importe quel ε i-petit. Comment reconnaître le nombre "limite" (en fait "standard") des autres nombres i-voisins de lui ?

Nous avons évidemment vite compris que la difficulté n'existerait pas si au lieu de vouloir définir la "convergence vers une limite" (comme une définition classique élémentaire nous y oblige), on définissait simplement la "convergence" :

" $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge" ssi "pour n i-grand, tous les u_n sont i-voisins les uns les autres" ou plus opérationnellement "pour n et m i-grands, u_n est i-voisin de u_m ".

On retrouve alors le point de vue originel de Cauchy et de Dedekind et l'on pourra ensuite affirmer que toute suite classique convergente

définit un seul réel standard : celui dans le halo duquel viennent s'accumuler ses termes d'indices i-grands.

En fait pour le débutant en analyse, aucun support intuitif ne vient illustrer le privilège de distinction des réels standards et le théorème "tout réel limité est i-voisin d'un réel standard et d'un seul" est le premier théorème fin de la vraie analyse (évidemment équivalent au théorème de complétude de $\mathbb{R}$ ou à ses avatars).

La différenciation de $\mathbb{R}$ en ordre de grandeur doit être vue, à notre avis, comme un palier vers cette "véritable" analyse.

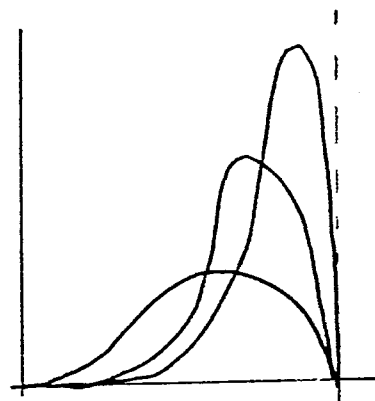
Le concept d'ombre

On sait bien la grande difficulté qu'il y a à faire comprendre des phénomènes comme la non-égalité de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{et de} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx .$$

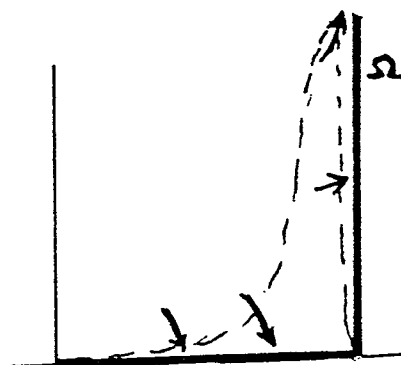
Exemple : $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$.

Le fait que f_n converge vers la fonction nulle tout en ayant une intégrale tendant vers l'infini est généralement dur à faire passer.



En fait les outils formels de l'analyse classique élémentaire ne permettent pas de bien décrire la situation.

Il faudrait pouvoir dire que le graphe de la fonction f_n ne tend pas, quand n tend vers l'infini, vers un graphe de fonction mais vers le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ représenté sur la figure.



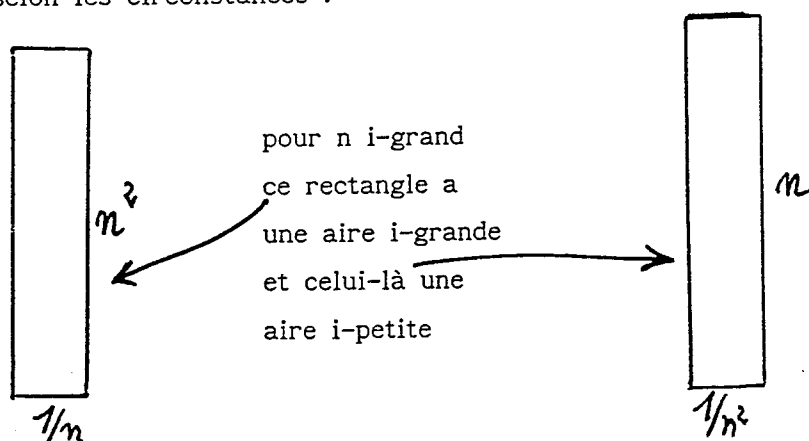
En calcul infinitésimal, on peut déjà faire des expériences numériques utiles. Par exemple pour n i-grand

$$f_n(1 - \frac{1}{n}) = n^3(1 - \frac{1}{n})^n \frac{1}{n} \approx \frac{n^2}{e}.$$

A la distance $\frac{1}{n}$ de l'abscisse 1 le graphe de f_n monte donc à une ordonnée de l'ordre de n^2 , ce qui explique bien des choses.

Remarque : de nombreux professeurs (nous y compris) diront que c'est exactement ce qu'ils disent pour faire comprendre leur discours classique ; la différence avec un discours accompagnant un calcul infinitésimal c'est que le sens de ce discours émane immédiatement des calculs et non d'une intuition très éloignée du discours formel nécessaire à une démonstration.

Insistons sur le fait que, en calcul infinitésimal, on regarde ce qui se passe pour un n fixé, sans aucune obligation de faire "tendre" n vers quoi que ce soit. et il est alors assez simple d'expliquer ce qui arrive à l'intégrale de f_n , car on a l'habitude (en calcul infinitésimal) de ce qui peut arriver au produit d'un i-grand par un i-petit selon les circonstances :



En fait, dans cette situation, le concept explicatif est le concept d'ombre.

[L'ombre d'un ensemble E est l'ensemble standard dont chaque point est i-voisin d'un point de E]. Les difficultés viennent de ce que l'ombre du graphe de f_n n'est pas un graphe de fonction et contient un morceau de verticale.

Le concept de tangente.

Pour étudier localement une courbe, il y a deux attitudes possibles :

- *se faire tout petit* pour marcher le long de la courbe, comme une fourmi le long d'une autoroute... et l'on constate, dans le cas C^1 , que l'on marche tout droit pendant un bon moment. C'est l'approche *différentielle* qui se traduit classiquement par un développement limité à l'ordre 1 et, en calcul infinitésimal, par l'énoncé

"pour h i-petit $f(x+h) - f(x)$ est équivalent à $a(x).h$ ".

Ainsi au lycée on fait généralement constater par des calculs numériques la proportionnalité approchée de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable.

Exemple :

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$4,1 \mapsto 2,024845$$

$$4,01 \mapsto 2,002498$$

$$4,001 \mapsto 2,000249$$

$$4,0001 \mapsto 2,000025$$

- *agrandir la portion de courbe* qui nous intéresse pour en amener un "petit" morceau à notre échelle, comme si on le regardait à la loupe (encore un "bon" concept infinitésimal)... et l'on constate, dans le cas C^1 , que le petit morceau est vu, à notre échelle, comme un segment de droite.

C'est ce que l'on peut faire aujourd'hui au lycée sur les écrans des ordinateurs où l'on peut choisir une représentation à grande échelle tout en étant assuré de la justesse des calculs.

Comment, cependant, démontrer à un lycéen par exemple qu'un arc de cercle, vu à la loupe, se présente comme un segment de droite ?

On peut faire un homothétie de rapport h au voisinage d'un point du cercle puis faire tendre ω vers l'infini ; mais cette "tendance" de ω va tout gâcher car la compréhension risque de se perdre dans les questions de limites avec tout ce que cela comporte comme idée de mouvement et d'inaccessibilité. La démonstration infinitésimale, elle, n'engendre vraiment pas d'état d'âme :

La validité des modèles abstraits d'une situation pratique.

Je voudrais enfin signaler une difficulté que l'on rencontre souvent au niveau du discours explicatif entourant la NSA.

On commence par dire, par exemple, que 10^{30} est un très grand nombre et que 10^{-20} est très petit. Plus tard, on sera obligé de faire comprendre que les nombres dont on peut voir écrit une écriture décimale sont standard et donc appréciables; le nombre 10^{30} n'est donc pas i-grand et le nombre 10^{-20} n'est pas i-petit.

Le problème vient de ce que la phrase " 10^{30} est très grand" n'est pas d'abord énoncée dans un discours mathématique mais dans un contexte pratique. Par contre on peut dire, en mathématiques, que "X est i-grand" et appliquer ces mathématiques comme modèle d'une situation pratique où X vaut 10^{30} . Le fait que 10^{30} puisse être manipulé sous la même forme en mathématique et dans les situations pratiques oblige à une gymnastique schizoïde qui peut parfois engendrer le quiproquo.

Pour tenter de dissiper ces quiproquos, il faut élargir un peu le cadre de nos réflexions : les mathématiques proposent des *modèles* idéaux ; lorsqu'on décide d'appliquer un tel modèle à des situations concrètes et réalistes, il faut toujours être conscients des *limites pratiques de validité*.

Par exemple, en géométrie euclidienne, "par deux points passe une et une seule droite" ; cependant, dans la réalité, si les points marqués sur une feuille sont trop près l'un de l'autre (et leur "épaisseur" aidant) plusieurs droites pourront être tracées qui passent par ces deux points. Plus généralement, on sait bien que des erreurs de tracé se glissent toujours dans les figures géométriques, soient que des points soient trop gros, soient que des angles soient trop petits,...

De la même manière lorsqu'on fait des calculs numériques, on est amené à négliger certains nombres par rapport à d'autres. Cela revient souvent à considérer des nombres "petits" dans la pratique, comme "idéalement petits" dans le modèle mathématique.

Quelques habitudes sont alors assez courantes ; par exemple, dans la vie de tous les jours le "grand" commence en général au-delà de 1000 (ou même de 100) ; et donc le "petit" commence à 1/1000ème. C'est pourquoi on garde la plupart du temps trois (ou même deux seulement) chiffres significatifs à l'écriture des différents nombres.

Il faut alors savoir à la fois profiter des règles de Leibniz et être conscient des limites pratiques de validité. Par exemple, si, dans une situation particulière, on considère 1000 comme "idéalement grand", et 1,2,3, comme "négligeables" devant 1000, alors on peut dire que dans cette situation :

- . 1,2,3 et quelques suivants sont "appréciables"
- . l'inverse de 1000, c'est-à-dire 0,001 est "idéalement petit"
- . la somme $0,001 + 0,001 = 0,002$ est "idéalement petite"
- . tant que l'on additionne 0,001 un nombre appréciable de fois, on reste idéalement petit, mais si on l'additionne un nombre idéalement grand de fois (1000 fois par exemple), le résultat risque de ne pas être idéalement petit.

Cependant, de la même manière que la géométrie ne "fonctionne pas" si on veut dessiner deux points trop près l'un de l'autre, les mathématiques des ordres de grandeur ne fonctionnent pas si on considère des nombres qui pourraient approcher la frontière entre deux ordres de grandeur ; ainsi, dans notre situation, il faut se garder de faire intervenir des nombres atteignant quelques centaines. Si on ne peut pas faire autrement, c'est que le modèle mathématique des ordres de grandeur, n'est pas utilisable dans cette situation et qu'il faut revenir à un modèle plus homogène, sans la distinction des ordres de grandeur.

Ainsi, l'apparition d'une contradiction dans la pratique concrète est l'indice que le modèle doit être, soit abandonné, soit limité dans sa validité.

ANS - BIBLIOGRAPHIE AMICALE

Articles :

- . Imre Lakatos - *Cauchy and the continuum : the signifiante of Non Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics* - 1966 - paru dans *Mathematical Intelligencer*, vol.1, 77-78.
- . Georges Reeb - *Mathematiques non standard (essai de vulgarisation)* - bulletin APMEP, n° 328, avril 1981.
- . Jacques Harthong - *L'analyse non standard* - La recherche, N° 148, octobre 1983.
- . R. Lutz - *Rêveries infinitésimales* - La gazette des mathématiciens n° 34, octobre 1987.
- . Francine Diener & Marc Diener - *Les applications de l'analyse non standard* - La recherche n° 206, janvier 1989.
- . André Deledicq - *Introduction au i-calcul, pratique de l'analyse non standard* - Quadrature, n° 6 et 7, septembre 90 et janvier 91.

Livres :

- . *La mathématique non standard* - Collectif - Editions du CNRS, 1989.
(contient la *Théorie des Ensembles Internes* de Edward Nelson, 1977 ; *Was sind und was sollen die Zählen ?* de Pierre Cartier ; *Une théorie du continu* de Jacques Harthong , ...).
- . Francine Diener & Georges Reeb - *Analyse non standard* - Hermann, 1989.
- . André Deledicq & Marc Diener - *Le calcul infinitésimal* - Colin, 1989.
- . Abraham Robinson - *Non Standard Analysis* - North Holland, 1966. (Pour mémoire).

Brochure de l'IREM de l'Université Paris 7 (2 place Jussieu - 75005) :

- . *La nouvelle et simple analyse* - André Deledicq, 1989
- . *Les débuts en analyse* - André Deledicq et Jean Louis Forgues, 1990.
- . *L'infini, est-ce bien raisonnable ?* - André Deledicq, 1990.
- . *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal* - Thérèse Antoine, André Beaumont, André Deledicq, Jean Louis Forgues, Marc Diener, 1991.