ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET FONCTIONS DE REFERENCE

Michèle Artigue, IUFM de Reims et Equipe DIDIREM

La commission inter-IREM "Analyse" a, par ses travaux, influé sensiblement sur les changements intervenus ces dix dernières années dans l'enseignement de l'analyse au lycée. Dix ans après la parution du Bulletin inter-IREM : "Enseignement de l'Analyse", à un moment où les programmes sont une fois de plus remaniés, il n'est peut-être pas inutile de s'interroger sur la façon dont les idées clefs qui ont sous-tendu la réforme de 1982 se sont traduites dans les programmes successifs et dans la réalité de l'enseignement.
J'ai choisi comme fil conducteur pour conduire cette réflexion la notion de "fonction de référence", y voyant une création didactique qui a servi en quelque sorte d'emblème aux changements introduits.

I - L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : UN ENSEIGNEMENT QUI POSE DES DIFFICULTES BIEN CONNUES

Il n'est pas question de résumer ici ce que nous ont appris les recherches nombreuses qui se sont développées ces dix dernières années tant en France qu'à l'étranger sur la didactique de l'analyse et je renvoie sur ce point le lecteur aux textes cités en référence. Je me bornerai à souligner quelques points qui me semblent particulièrement importants par rapport à la réflexion développée ici :

- L'analyse est un domaine dont les objets de base (nombres réels, suites, fonctions) et les notions de base sont des objets complexes. En ce qui concerne les objets, c'est indéniable pour suites et fonctions. Pour les nombres réels, cette complexité peut sembler moins évidente : nos élèves ne manipulent-ils pas des décimaux et fractions depuis l'école élémentaire, des irrationnels depuis le collège ? Ce serait oublier que ce ne sont pas les propriétés algébriques de R qui sont au centre de l'analyse mais la complétude de l'ensemble des nombres réels.
Ainsi, lorsque s'engage l'enseignement de l'analyse, le concept de fonction est chez les élèves en cours de constitution : la fonction est perçue essentiellement comme un processus, non comme un objet en soi, élément de classes plus ou moins générales qui conditionnent son traitement en résolution de problèmes et le champ de référence des élèves est très limité ; les réels fonctionnent comme des objets préconstruits et la complétude de R ne sera d'ailleurs pas explicitée avant l'université.
La notion de base de l'analyse pour la structuration actuelle du champ est la notion de limite. On sait bien que sa conceptualisation nécessite le franchissement d'un certain nombre d'obstacles et ne peut s'envisager que dans le long terme.
Il y a là donc une première source de difficultés incontournables pour l'enseignement.

- L'analyse est aussi un domaine qui s'oppose dans son fonctionnement à l'algèbre. L'approximation est au coeur des grands problèmes de l'analyse : approximation de nombres, de fonctions ... Elle est aussi au coeur des méthodes et techniques du champ. "Majorer, minorer, approcher", comme l'affirme Dieudonné, sont ici les techniques de base et ce fait engendre une rupture cognitive. Prenons un exemple simple souvent cité par M.Legrand (cf. références). En algèbre, pour montrer que deux quantités sont égales (nombres, fonctions, polynômes..), on va le plus souvent avancer par une suite d'égalités en procédant par équivalence : on passera ainsi de $a=b$ à $a_1=b_1 \ldots\ldots a_i=b_i$ jusqu'à pouvoir identifier les deux termes. Et même si on fonctionne par inégalités, on montrera que $a<b$ et $b<a$ par un schéma analogue. Entrer dans le champ de l'analyse, c'est comprendre que cette démarche sera le plus souvent hors de portée, que l'on va faire le détour de montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, $|a-b|$ est inférieur à ε et que ce détour va être payant. Plus tard, ce sera comprendre que pour démontrer qu'une famille F_1 d'objets possède une propriété, on va le plus souvent suivre un cheminement analogue : démontrer la propriété pour une famille F_2 plus simple convenablement choisie, montrer que tout élément de la famille F_1 peut être approché d'aussi près qu'on veut par des éléments de F_2 et que la propriété étudiée résiste au passage à la limite. Entrer dans le champ de l'analyse, c'est avoir compris que l'analyse est le domaine de l'approximation et avoir identifié les grands mécanismes généraux qui sous-tendent le fonctionnement conceptuel et technique de l'approximation.
Il y a donc là une rupture qui sera d'autant plus difficile à consommer que l'idéologie usuelle de l'enseignement conduit à minimiser les ruptures pour présenter au contraire le nouveau dans la continuité de l'ancien et à maintenir, pour faciliter la négociation didactique, l'illusion que par une succession de petits pas le nouveau est nécessairement accessible.

- On sait bien également que la maîtrise de ces techniques d'approximation résulte d'un apprentissage qui ne peut s'inscrire que dans le long terme : elle passe en particulier par la maîtrise des règles de majoration de produits et quotients, la gestion de valeurs absolues avec la mobilité permanente requise entre le point de vue inégalité et le point de vue distance, la familiarisation avec les raisonnements par condition suffisante et les contraintes imposées par ce type de raisonnement : accepter de perdre de l'information sur l'expression à traiter pour la simplifier judicieusement : suffisamment pour avancer dans la résolution du problème, suffisamment peu pour ne pas en sortir. Une telle familiarité ne se construit pas en quelques situations voire en quelques semaines, elle requiert du métier.

- Enfin, il est bien connu, et nous n'insisterons pas sur ce point, que la manipulation des définitions formelles en analyse est difficile : elle font toutes intervenir (dans leur version standard) des alternances de quantificateurs, elles fonctionnent en sens inverse des formulations spontanées des élèves.

Comment l'enseignement, qu'il soit secondaire ou supérieur (au niveau du DEUG) gère-t-il cet ensemble de difficultés et le long terme de l'apprentissage ? Quel effet ceci a-t-il sur les apprentissages des élèves ?
J'ai personnellement commencé à travailler sur ces questions il y a une dizaine d'années dans le contexte d'une recherche maths/physique sur l'enseignement des procédures différentielles et intégrales au niveau du DEUG (cf. références). A ce niveau d'enseignement, les recherches menées dans différents pays ont montré des convergences de stratégies d'enseignement surprenantes : avec les étudiants standard, la stratégie usuelle de l'enseignement consiste à peu près partout à contourner les problèmes via une algébrisation intensive de l'analyse. Précisons : l'enseignement dans les filières mathématiques et physique auxquelles nous nous intéressons plus particulièrement ici est, au niveau universitaire, un enseignement nécessairement formalisé et les définitions données mettent en jeu de façon incontournable le registre de l'approximation, mais ce n'est pas dans ce registre que fonctionne pour l'essentiel l'enseignement. Ceci a d'ailleurs conduit des chercheurs (D.Tall et S.Vinner, cf. références) à introduire au début des années 80 deux notions distinctes : celle de concept-image et celle de concept-définition pour rendre compte des ruptures et incohérences constatées dans les réponses d'étudiants qui, d'une part "connaissaient" les définitions de notions mathématiques, d'autre part n'utilisaient pas ces définitions pour décider si tel ou tel objet mathématique en était ou non un exemple.
L'enseignement fonctionne en effet dans le registre du calcul (d'où d'ailleurs l'expression "Calculus" utilisée dans de nombreux pays, le terme d'analyse restant réservé à des études plus avancées) : calcul de limites, de dérivées, de primitives, de développements limités, de solutions d'équations différentielles, à l'aide d'un stock de théorèmes relais qui, une fois admis ou démontrés, permettent d'algébriser la pratique : théorèmes sur les limites de sommes, quotients, composées...., théorèmes assurant la stabilité de classes de fonctions par certaines opérations (stabilité de la continuité par somme, produit...), théorèmes liant à des conditions pouvant se traiter de façon algébrique le niveau de régularité des objets manipulés (si f a des dérivées partielles continues, elle est différentiable, si f est de classe C^1, elle est localement lipschitzienne....).

Il ne faudrait cependant pas interpréter ce qui précède comme une critique en soi de l'algébrisation de l'analyse. Je ne songe pas à nier ce qu'historiquement a apporté cette algébrisation par le biais du calcul infinitésimal et comprends très bien l'enthousiasme qui a pu s'emparer des pionniers et de leurs élèves à découvrir le champ des possibilités subitement ouvert. Citons à ce propos le marquis de l'Hospital qui écrit en 1696 dans la préface du premier traité de calcul infinitésimal "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" :
"L'étendue de ce calcul est immense : il convient tout aussi bien aux courbes mécaniques qu'aux géométriques; il est indifférent aux signes radicaux et parfois même les utilise. Il s'étend à autant de variables qu'on le souhaite. En outre, il produit une infinité de découvertes surprenantes..."
Mais ce qui advient du fait des pratiques enseignantes de contournement et est uniformément attesté par les recherches, c'est que cette algébrisation tend pour les élèves à occuper l'espace entier. Les choix opérés par l'enseignement usuel, explicitement ou implicitement, permettent la réussite sur un certain nombre de tâches scolaires soigneusement calibrées, ils ne ménagent pas ce que l'on est en droit d'attendre aussi de l'enseignement, l'entrée dans le champ de l'approximation et sa maîtrise progressive, à la fois conceptuelle et technique.
Soulignons que ce que nous touchons là constitue un problème didactique et non un obstacle épistémologique. Il suffit d'ouvrir un ouvrage d'analyse infinitésimale du XVIIIème siècle pour se rendre compte du fait que l'algébrisation y fonctionne comme un outil fondamental et efficace, sans que ce soit au détriment du champ de l'approximation. Ce registre est omniprésent du fait des problèmes mêmes qui sous-tendent l'activité

mathématique : approximation de fonctions, résolution d'équations différentielles, calcul de variations... et les mathématiciens sont experts à la manipulation de ses techniques.

II - L'EVOLUTION DES PROGRAMMES DES LYCEES A PARTIR DES ANNEES 1980

Il est intéressant dans ces conditions de s'interroger sur les essais de rénovation de l'enseignement de l'analyse qui se sont développés au niveau du lycée en France ces dix dernières années et ont correspondu, au moins dans l'esprit de leurs promoteurs, à la volonté de construire un enseignement à la fois respectueux de l'épistémologie du champ et accessible aux élèves actuels.

Référons-nous par exemple à l'article publié par D.Lazet et J.L.Ovaert dans le Bulletin inter-IREM déjà cité de 1981, sous le titre : "Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse". Après avoir souligné l'importance de l'analyse comme secteur scientifique, il dénonce ce qui apparaît aux auteurs comme les défauts majeurs de la situation d'alors :

- l'introduction des notions de base sans problématique sous-jacente ou avec une problématique très élaborée mathématiquement mais "loin" de l'élève,
- l'emploi trop précoce d'un langage formalisé souvent hermétique,
- un enseignement trop centré sur le discours du maître,
- une construction linéaire des concepts, non rapportée à la résolution de problèmes,
- une prédominance trop grande du qualitatif sur le quantitatif,
- un intérêt trop précoce pour le pathologique.

Les propositions de rénovation qui sont faites consistent en particulier :

- à modifier les rapports entre théorie et applications :

"il faut organiser l'enseignement de l'analyse autour de quelques grands problèmes conduisant à des situations riches et liées aux autres disciplines",

- à promouvoir une approche constructiviste de l'apprentissage :

"il faut amener l'élève à agir, à construire lui-même son univers mathématique - certes en toute modestie- mais au contact des grands problèmes des sciences mathématiques",

- à rééquilibrer le quantitatif et le qualitatif :

"L'approfondissement de ces deux aspects doit aller de pair - les activités numériques, la recherche et l'exploitation d'algorithmes sont pédagogiquement très efficaces. Dans cette perspective l'usage des calculatrices (et éventuellement des microordinateurs) sera précieux à plusieurs titres..."

- à théoriser le seul nécessaire, en s'appuyant sur des niveaux de formalisation accessibles aux élèves, à ne pas théoriser pour le "plaisir".

Dans ce texte, on voit apparaître à plusieurs reprises les fonctions et suites de référence comme des objets privilégiés :

"Il est commode d'aborder l'étude des suites ou des fonctions par des méthodes quantitatives (comparaisons par majorations à des suites ou fonctions de référence pour l'étude des limites, inégalités lipschitziennes pour la continuité, inégalités de la forme $|f(x_0+h)-f(x_0)-ah| \leq k|h|^2$ pour la dérivabilité...Puis, dans un deuxième temps, des problèmes sortant du champ d'application de ces méthodes, permettent de comprendre l'intérêt d'un passage du quantitatif au qualitatif."

"Les techniques de majorations, encadrements, comparaisons à des suites ou des fonctions de référence sont mises en jeu dans la plupart des problèmes d'analyse, l'élève doit y être entraîné par le biais de ces problèmes et non par des exercices formels peu stimulants ("exercices de style")."

"En chemin, on aura fait fonctionner ou motivé l'introduction de concepts de l'analyse très importants : majoration, développements de fonctions à l'ordre 1, différence entre le local et le global, suites de référence, emploi de représentations graphiques..."

Ces fonctions et suites de référence apparaissent en fait à deux niveaux :

- comme correspondant à des cas simples et typiques dont l'étude quantitative doit précéder le passage au qualitatif qui permet d'aborder des classes plus larges d'objets ; soulignons que les rapports traditionnels dans l'enseignement entre quantitatif et qualitatif se trouvent ici inversés : le quantitatif n'est pas subordonné au qualitatif, il en est le moteur :

"En analyse, le qualitatif ne peut en général être bien compris qu'à travers une pratique suffisante du quantitatif",

- comme un outil technique utilisé en permanence dans la résolution de problèmes (fonctions et suites de référence étant ici à rapprocher des séries et intégrales de référence utilisées ensuite).

II1 - La réforme de 1982 ou la mise en programme des idées développées au sein de la commission

Les programmes de 1982 reflètent en effet très directement les conceptions présentées ci-dessus. Ceci se manifeste notamment par :

- La place du registre de l'approximation, marquée dès la classe de seconde, avant même donc le début officiel de l'enseignement de l'analyse. Cette place s'affirme dans les thèmes de travail proposés :

"Thèmes (à titre indicatif) :
1. Majoration, minoration d'une fonction sur un intervalle.
2. Recherches de maxima, de minima, associés à des problèmes élémentaires d'optimisation.
3. Taux de variation : encadrement de ce taux ; inégalités du type $|f(y)-f(x)| \leq M|x-y|$ pour tous x, y ; interprétation géométrique....."

mais également dans les commentaires :
"Il convient de consacrer de nombreuses activités réparties sur toute l'année aux concepts fondamentaux en analyse, de majoration, minoration, encadrement... Par ailleurs, ces activités de majoration habituent l'élève à la mise en forme de conditions suffisantes."

- L'importance accordée à l'exploration, notamment numérique, quantitative à l'aide de calculettes :
"Une grande facilité du calcul numérique permet d'aborder de façon nouvelle les problèmes d'approximation ; c'est l'expérimentation qui associe $(1+h)^a$ et $1+ah$ pour h petit, le raisonnement ensuite justifie le résultat et en indique les limites."

- L'importance accordée à l'étude de cas typiques simples en préalable à l'introduction de définitions qualitatives générales. C'est ainsi que la progression proposée en première pour la limite en 0 d'une fonction est la suivante : exemples de fonctions vérifiant $|f(x)| \leq M|x|$ au voisinage de 0 et vérification pour des fonctions de ce type que $|f(x)|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut en imposant à x d'être un intervalle suffisamment petit de centre 0 ; puis examen de situations comme $x \dashrightarrow \sqrt{|x|}$ qui échappent à ce cadre et incitent à un point de vue plus qualitatif. La stratégie préconisée est analogue pour la dérivation : majorations de l'écart de type $M|h|^2$ puis étude d'exemples du type $x \dashrightarrow x\sqrt{|x|}$ pour marquer "les limites de ce procédé et aider à dégager la notion de dérivabilité : $f(a+h)=f(a)+Ah+h\,\varepsilon(h)$ où la fonction ε a pour limite 0 en 0."

- L'inversion de l'ordre "théorique" : limites, continuité, dérivabilité, la continuité n'étant maintenant introduite qu'en terminale. Cette inversion est justifiée par le fait que la notion de dérivée, contrairement à celle de continuité, fournit tout un éventail d'applications intéressantes et pouvant prendre sens même si l'on ne dispose que d'un champ de référence fonctionnel restreint.

- La limitation de la formalisation. Il est par exemple précisé dans les commentaires du programme de première S :
"L'étude des limites exige des définitions : une seule, celle de la limite en 0, a besoin d'être explicitée en (ε,N) ou en (ε,η) ; il suffit ensuite sans manquer à la rigueur, d'employer des majorations et de recourir aux théorèmes (admis) de stabilité. Encore faut-il qu'à travers l'étude de nombreuses situations, on accède progressivement aux motivations de la définition en (ε,η) de la limite 0 ; on évitera l'emploi systématique de cette formulation au niveau du cours comme à celui des exercices."

- Le rôle transversal joué par les grands problèmes de l'analyse via les thèmes.

Mais soulignons que les termes de suites et fonctions de référence n'apparaissent pas explicitement dans le texte des programmes.

II2 - La réforme de 1985 ou l'invasion des fonctions de référence

La réforme suivante, en 1985, est présentée comme une réforme d'ajustement :

"Les programmes qui suivent conservent, pour l'essentiel, les objectifs et la substance des programmes mis en vigueur en 1982 [...] On a eu le double souci de tenir davantage compte des rythmes d'acquisition des élèves et des difficultés conceptuelles et techniques présentées par certaines notions, et d'ouvrir les sections scientifiques à un plus grand nombre d'élèves pour répondre à une demande sans cesse accrue d'ingénieurs, de techniciens, de chercheurs et d'enseignants."

En revanche, en ce qui concerne fonctions et suites de référence, on note un changement notable : les premières fonctions de référence sont explicitement introduites dès la classe de seconde et étudiées alors globalement. Elles servent d'appui graphique au travail sur les inégalités algébriques notamment. En première, l'objet envahit l'espace puisque c'est à travers lui que vont se formuler dorénavant les notions de limites de fonctions et de suites, dans un paragraphe qui s'intitule très modestement : "langage des limites" :
"Après observation des fonctions h -->h^n (n=1,2,3), h -->$\sqrt{h}$ au voisinage de 0, on dit que ces fonctions admettent en 0 la limite 0. Lorsqu'on a établi que, pour $|h|$ assez petit $|g(h)-L| \leq \lambda |h|^n$, où n est un entier strictement positif, on dit que g admet L pour limite au point 0, ce qu'on note lim $_{h->0}$ g(h)=L"

Les commentaires précisent d'autre part que :
"L'objectif est une première prise de contact avec les fonctions de référence et leur mise en oeuvre sur quelques exemples très simples."

Cette nouvelle formulation des programmes appelle quelques commentaires :

- On ne parle plus de "notion de limite" mais de "langage des limites" comme si l'on cherchait à gommer la conceptualisation amorcée. Ce changement d'intitulé n'est pas sans rappeler celui qui au collège a transformé "l'algèbre" en "calcul littéral",
- La convergence des suites de référence vers 0 ou l'infini, la limite des fonctions de référence en 0 sont officiellement admises sur la base d'explorations à la calculatrice, contrairement à ce qui se passait dans les programmes précédents où l'exploration préparait seulement les conjectures,
- La définition donnée est une définition par critère suffisant (soulignons que dans sa version initiale, elle ne permet même pas d'étudier les limites de fonctions directement dérivées de h --> $\sqrt{h}$ car cette fonction, bien que de référence, a été oubliée de la liste des conditions suffisantes). Elle ne permet donc pas d'identifier comme tels des contre-exemples à la convergence, fussent-ils aussi simples que n --> $(-1)^n$.
- L'algèbre des limites disparaît du programme de première. Le recours à l'approximation est donc imposé et, du point de vue technique, le théorème des gendarmes va devenir un instrument essentiel.

Les programmes de terminale se situent dans la continuité directe de ceux de première.

II3 - La réforme de 1990 ou le repli des fonctions de référence

Il s'agit encore une fois d'une réforme d'ajustement. L'introduction des programmes de seconde le précise clairement :
"Le programme qui suit conserve pour l'essentiel, les objectifs et la substance du programme précédent [...]. Cependant, il était nécessaire d'infléchir le programme pour assurer une bonne continuité avec les nouveaux programmes de collège (mis en vigueur en 1989-90 au niveau de la classe de troisième), qui font davantage appel à l'activité des élèves et sont plus tournés vers la résolution de problèmes et les applications".
Ce même chapeau se retrouve mutatis mutandis dans l'introduction des programmes des classes de premières S et E, terminales C, D, E où l'on insiste par ailleurs sur la volonté de poursuivre la politique d'ouverture des sections scientifiques.
En ce qui concerne l'analyse, cette introduction précise :
"En analyse, le programme combine l'étude des fonctions avec celle des suites (cette dernière étant moins approfondie en terminale D). Vu leur importance, les interventions du calcul différentiel et intégral sont largement exploitées ainsi que les problèmes numériques et les représentations graphiques. La formulation mathématique du concept de limite est hors programme ; l'unique objectif est d'acquérir une première idée de cette notion et de la faire fonctionner sur quelques exemples simples. l'étude des suites a été allégée en première et en Terminale D."
L'esprit du programme demeure donc le même.

En revanche, les fonctions de référence perdent le statut qu'elles avaient dans le programme précédent. Les pseudo-définitions des notions de convergence et de limite des programmes précédents disparaissent et les commentaires précisent (par exemple à propos des limites de fonctions) en première :
"Pour cette introduction, on s'appuiera sur des expérimentations numériques et graphiques portant notamment sur les fonctions de référence ci-contre. Pour donner une idée du cas général, on peut dire, par exemple, que f(x) est supérieur à 10, 10^2...10^9,...10^p dès que x est assez grand."
D'autre part, on réintroduit dès la première les rudiments de l'algèbre des limites :
"Limite de la somme de deux fonctions, du produit d'une fonction par une constante, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction, du quotient de deux fonctions."
La majoration et la minoration par des fonctions de référence ne sont donc plus le passage technique obligé. Le chapeau du paragraphe consacré aux fonctions précise à ce sujet :
"Quelques règles concernant la comparaison et les opérations algébriques sur les limites sont admises, leur signification intuitive étant mise en valeur. Les travaux sur les limites se bornent à l'étude de quelques situations où des opérations algébriques sur les fonctions de référence ou la comparaison à celles-ci permettent de conclure très simplement."

Il est difficile de lire cette modification, pratiquement la seule introduite, autrement que comme un désaveu au moins partiel du processus de transposition didactique qui s'était développé autour de l'objet "fonction de référence" et la marque de la volonté de la noosphère de profiter de l'adaptation nécessaire des programmes pour infléchir ce processus transpositif, sans changer pour autant les options essentielles. Pourquoi ce désaveu partiel ? Comment ont vécu les fonctions de référence dans la réalité du système d'enseignement ? Quels dysfonctionnements leur ont été associés ? J'aimerais dans la dernière partie de ce texte esquisser quelques hypothèses à partir du témoignage d'animateurs IREM et de la consultation de quelques manuels.

III - LES SUITES ET FONCTIONS DE REFERENCE DANS LE SYSTEME D'ENSEIGNEMENT

III1 - L'expérience des animateurs du groupe "Analyse" de l'IREM Paris 7[1]

Ces animateurs, membres de la commission inter-IREM analyse, ont bien sûr dès le début joué la carte des nouveaux programmes et d'ailleurs organisé des stages de formation à ces nouveaux programmes. Leur expérience nous est ici tout à fait précieuse. Or elle met clairement en évidence à la fois l'intérêt des suites et fonctions de référence dans une première approche de l'analyse et la non-viabilité des choix effectués dans le programme de 1985.

Décrivons très schématiquement les stratégies d'enseignement initialement mises en oeuvre par ces enseignants et leur évolution dans le temps. Après le premier contact global pris avec les fonctions de référence en seconde, on en venait à un regard local en première. Cette approche locale des fonctions de référence, d'abord au voisinage de 0, s'effectuait dans les classes des animateurs, conformément au programme, à la fois dans le cadre graphique et dans le cadre numérique. Elle permettait la formulation de conjectures ensuite admises. Les limites des fonctions de référence étant alors disponibles, on fait comparer à ces fonctions de référence des fonctions simples :

$x \dashrightarrow x\sin(1/x)$, $x \dashrightarrow \sqrt{1+x}-1$, une fonction du type : $x \dashrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, représentant une complexité maximum.

Dans chaque cas, la calculatrice était dans un premier temps utilisée pour émettre des conjectures. Ceci ne pouvait fonctionner économiquement que si les élèves programmaient les fonctions correspondantes (les animateurs IREM m'ont précisé que leurs élèves ne manifestaient pas de réticences vis à vis de la programmation mais qu'en revanche ils avaient rencontré souvent de telles réticences dans les stages de formation d'enseignants). Dans un second temps, il s'agissait de prouver les conjectures en majorant ou minorant par des fonctions de référence adéquatement choisies.

Considérons par exemple l'expression citée plus haut : $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ pour x non nul et supérieur strict à -1.

---

[1] Il s'agit de Chantal Jeulin, Roger Proteau et Danielle Spérandio que je remercie très chaleureusement pour l'aide qu'ils m'ont apportée à la préparation de cet exposé.

La calculatrice permet de conjecturer que sa limite en 0 est 2. On calcule donc : $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} - 2$. En multipliant et divisant le premier terme par la quantité conjuguée de son dénominateur, on se ramène à l'expression plus simple : $\sqrt{1+x} -1$ et il s'agit de montrer que la limite de cette expression est 0 en 0. Pour cela, on multiplie et divise une fois de plus par la quantité conjuguée d'où l'expression : $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$

Lorsque x est voisin de 0, le dénominateur est voisin de 2, on va donc essayer d'utiliser la fonction de référence : x --> x et montrer que la valeur absolue de l'expression est inférieure à $\lambda|x|$ pour un λ judicieusement choisi. On doit majorer un quotient donc minorer le dénominateur, ce qui ici s'avère facile puisqu'il est somme de deux quantités positives, l'une ne contenant pas x.

On arrive finalement à la majoration : $|\sqrt{1+x}-1| \leqslant |x|$ qui garantit que la limite est 0[2].

Le travail s'accompagnait nécessairement de la mise en place progressive de techniques. Les principales semblent les suivantes :

- apprendre à repérer les termes prépondérants d'une expression,
- apprendre à choisir une fonction de référence raisonnable pour la comparaison,
- apprendre à différencier le traitement à faire subir par numérateur et dénominateur d'une fraction pour la majorer (resp. la minorer),
- apprendre à utiliser les valeurs absolues et à privilégier le traitement de quantités postives pour limiter les problèmes posés par la non compatibilité des inégalités avec produits et quotients,
- apprendre à coincer la variable dans un intervalle judicieux autour de la valeur considérée pour majorer, minorer mais aussi éviter les zéros intempestifs de dénominateurs,
- apprendre à penser à multiplier par la quantité conjuguée lorsqu'on travaille avec des radicaux.

Comme l'on pouvait s'y attendre, la mise en place de ces techniques de base de l'approximation ne devenait pas miraculeusement facile parce que l'on travaillait avec des fonctions de référence au lieu de travailler avec des ε et des η. Un gain semblait cependant évident aux enseignants : lorsque la majoration par une fonction de référence était obtenue, on concluait directement alors que les formalisations antérieures obligaient à remonter le raisonnement par conditions suffisantes pour conclure.

Par exemple, si l'on était arrivé à la majoration : $|g(x)-2| \leqslant \lambda|x|^2$, on concluait directement au lieu de terminer le raisonnement de la façon suivante : pour majorer $|g(x)-2|$ par ε, il suffit de majorer $\lambda|x|^2$ par ε, donc de choisir x tel que $|x|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda}$ soit : $|x| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda}}$.

En revanche, ces mêmes enseignants souligneront qu'il fallait soigneusement limiter la complexité des exercices (ce que demandait le programme) pour que l'exigence de majoration par des fonctions de référence, qui restreint les choix possibles, ne devienne pas un carcan qui contraint plus le travail d'approximation qu'il ne le simplifie.

Même en respectant ces conditions, il semblait cependant difficile d'obtenir des compétences un tant soit peu stables en consacrant à ce travail moins d'une quinzaine d'heures, ce qu'ils feront les premières années.

Mais il est clair à la lecture des programmes que l'enjeu de la notion de limite en première n'est pas la notion de limite elle-même mais celle de dérivée et les problèmes que la notion de dérivée permet de résoudre. Et c'est ce qui va rendre la position initalement adoptée intenable. En effet, les enseignants constatent que lorsque l'on aborde les dérivées, le contrat didactique relatif aux calculs de limites et fonctions de référence bascule. Eux-mêmes et leurs élèves ressentent la nécessité de s'autoriser des modes de fonctionnement plus souples et un minimum d'algèbre des limites s'introduit presque spontanément ; par exemple, si la limite de l'expression déjà citée $\sqrt{1+x}-1$ est à calculer en 0, c'est maintenant en tant qu'intermédiaire de calcul et dans ces conditions, très vite on abrège : quand x tend vers 0, $\sqrt{1+x}$ tend vers 1 car 1+x tend vers 1 et $\sqrt{1}=1$, donc la différence tend vers 0.

Ceci conduit les redoublants éventuels à rassurer les élèves qui peinent, comme c'est naturel, sur les premières justifications de cacluls de limites par des commentaires du type suivant :

"Ne vous en faîtes pas, ce n'est qu'un mauvais moment à passer, bientôt ça sera bien plus simple, vous verrez."

---

[2] Cet exemple met bien en évidence la complication crée par l'obligation de recours aux fonctions de référence car il est clair que l'on a gagné mathématiquement dès que l'on est arrivé à l'expression $\sqrt{1+x} -1$.

Illustrons ce basculement nécessaire par un autre exemple simple :
Supposons que l'on approche la notion de dérivée en étudiant l'évolution du volume d'un cube d'arête a :
Posons : $V(a+h)=(a+h)^3$

$$V(a+h)-V(a)= 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

Une exploration à la calculatrice montre que lorsque h est petit, le terme prépondérant dans la variation de volume est : $3a^2h$.

Interpréter ceci en termes de dérivées revient à écrire que $V(a+h)-V(a)=3a^2h + h\varphi(h)$ et à montrer que $\varphi(h)$ a pour limite 0 en 0. Si l'on respecte le rituel des fonctions de référence, il faut passer ici peu ou prou par le cheminement suivant :

$$\varphi(h)=3ah+h^2=h(3a+h)$$

Au voisinage de 0, 3a+h est borné, donc on va pouvoir majorer par une expression de la forme $\lambda|h|$. En se limitant par exemple à $|h|\leq 1$, on obtient la majoration : $|\varphi(h)|\leq|3a+1||h|$.

Ce rituel en fait ne peut survivre longtemps : pour les élèves, il est évident que $\varphi(h)$, somme de deux quantités de limite 0, a aussi pour limite 0. Ils peuvent légitimement se demander pourquoi face à de telles évidences, il faudrait continuer à développer tant d'ingéniosité calculatoire alors que, dans le même temps, leur cours de mathématiques leur donne sans cesse l'exemple de résultats bien moins évidents admis sur la base de quelques explorations. Il y a là comme une excroissance de rigueur difficilement justiciable. Pour l'enseignant, l'enjeu étant maintenant la notion de dérivée et son exploitation dans des problèmes consistants, l'économie produite par un minimum d'algèbre des limites s'impose. Le contrat didactique est contraint d'évoluer en ce sens.
Mais cette évolution, en retour tend à faire considérer comme une purge transitoire les justifications associées à l'utilisation stricte des fonctions de référence préconisées qui ont précédé. D'où les réflexions de redoublants citées, et chez les enseignants progressivement une réticence à consacrer autant de temps à des activités délicates et qui ont si peu d'influence sur la suite de l'enseignement.

Le système finit par se stabiliser très raisonnablement sur une utilisation plutôt exploratoire et heuristique des fonctions de référence et la réintroduction dès la classe de première d'un minimum d'algèbre des limites, fonctionnement que les nouveaux programmes de 1990 ne feront qu'entériner.

IIIb - Les fonctions et suites de référence dans les manuels :

Le regard que nous avons jeté sur certains manuels largement répandus a d'une part confirmé le changement de contrat didactique provoqué par l'introduction des dérivées, chapitre que les programmes n'ont jamais, soulignons-le, demandé de traiter en se passant de toute algèbre des dérivées.
Nous reproduisons par exemple ci-après les deux premiers exemples donnés dans le manuel Transmath de premières S et E relatif aux programmes de 1985, respectivement pour illustrer la notion de limite en 0 et celle de dérivée. La différence de traitement des expressions se passe de tout commentaire :

Exemple 2 : **f est la fonction $h \longmapsto h^3+h^2+1$.**

On a tout lieu de penser que si h est proche de 0, alors h^3 et h^2 le sont aussi, donc que $f(h)$ est proche de 1. D'où la conjecture : f a pour limite 1 en 0.
Pour le montrer, écrivons que $f(h)-1=h^3+h^2=h^2(h+1)$.
Ainsi, pour tout réel h,

$$|f(h)-1|=|h^2(h+1)|=|h^2|\,|h+1|.$$

Pour arriver à une écriture du type : $|f(h)-1|\leqslant\lambda|h^2|$, il suffit de trouver un réel λ et un intervalle I de centre 0 tel que pour tout h de I on ait $|h+1|\leqslant\lambda$.
Choisissons par exemple $I=]-1;1[$; $h+1$ est alors dans $]0;2[$ et donc : $|h+1|<2$.
Donc, pour tout réel h tel que $|h|<1$, on a :

$$|f(h)-1|\leqslant 2|h^2|$$

et d'après l'affirmation du paragraphe a. (cas où $\lambda=2$ et $n=2$) :

$$f \text{ a pour limite 1 en 0} \quad \text{et} \quad \lim_0 (h \longmapsto h^3+h^2+1)=1.$$

Commentaires

- **Sur le choix de l'intervalle I :** on aurait tout aussi bien pu choisir h dans $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ par exemple et majorer alors $|h+1|$ par $\frac{5}{4}$; d'où : pour tout réel h tel que $|h|\leqslant\frac{1}{4}$, on a $|f(h)-1|\leqslant\frac{5}{4}|h^2|$. Ce qui permet aussi de conclure que f a pour limite 1 en 0.
- **Autre façon de majorer $|f(h)-1|$:** on a $|f(h)-1|=|h^3+h^2|$; or $|h^3+h^2|\leqslant|h^3|+|h^2|$.
De plus, pour tout réel h tel que $|h|\leqslant 1$, on a $|h^3|\leqslant|h|$ et $|h^2|\leqslant|h|$, d'où : $|h^3+h^2|\leqslant 2|h|$. D'où finalement :
pour tout réel h tel que $|h|\leqslant 1$, on a $|f(h)-1|\leqslant 2|h|$.

Exemple 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est-elle dérivable en un réel $a \neq 0$?

Pour $h \neq 0$, on peut écrire :

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2 + ah}.$$

Lorsque h est proche de zéro, il en est de même de ah donc $a^2 + ah$ est proche de a^2. De plus, $a^2 \neq 0$; la fonction g a pour limite $-\frac{1}{a^2}$ en zéro, donc f est dérivable en a, de nombre dérivé égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Mais, la lecture des manuels attire l'attention sur d'autres phénomènes contribuant à la non-viabilité des choix de 1985 :

- Le décalage entre le travail exploratoire de conjecture et le travail de justification :

La conscience de ce décalage s'est imposée à moi à travers un exemple extrait du Dimathème, caricatural certes mais attirant d'autant plus l'attention. L'exemple est le suivant :

Exemple traité 1

Chercher la limite de la suite u, définie pour tout entier naturel n par :

$u_n = n^2 - 2n - 3.$

Idée intuitive

Pour n grand, l'ordre de grandeur de u_n est n^2 : en effet à l'aide d'une calculatrice, on constate la primauté du terme n^2 lorsque n est assez grand : la calculatrice néglige par exemple $-2n - 3$ pour $n = 10^{2n}$.

Mise en forme

Montrons que $\lim u = +\infty$. Pour cela transformons l'écriture de u_n :

$u_n = n(n-2) - 3.$

En prenant n assez grand, nous pouvons minorer u_n par le terme général d'une suite de référence de limite $+\infty$: si $n > 4$ alors $n - 2 > 2$ et $n(n-2) > 2n$

d'où $\quad u_n > 2n - 3$

que l'on écrit $u_n > n + (n-3)$; or $n - 3 > 1$

donc $\quad u_n > n.$

Ceci montre que $\lim u = +\infty$.

Dans ce cas précis, ce que donne à voir l'exploration, c'est que l'expression donnée d'abord décroissante devient croissante pour n>10, semble tendre vers $+\infty$ quand n tend vers ∞, en se comportant à peu près comme n^2.

La justification proposée ne s'appuie en rien sur ceci : *à la logique des fonctions de référence comme outil exploratoire permettant de reconnaître et caractériser des types de comportement, s'oppose dans la seconde phase une autre logique, celle des fonctions de référence, instrument de majoration et de minoration.*

Une justification s'appuyant sur l'exploration conduirait naturellement à essayer de mettre en évidence le terme prépondérant identifié. Pour l'expression donnée, ceci passe par la mise en facteur de ce terme (pour une expression additive, la simple comparaison à n^2 aurait permis de conclure). On arrive ainsi à l'écriture : $n^2(1 - \frac{21}{n} - \frac{20}{n^2})$. La quantité entre parenthèses est une somme de trois termes, l'un constant, les deux autres étant des suites de référence de limite 0. Si l'on dispose d'un minimum d'algèbre des limites, la justification s'achève sans problème et respecte la démarche de l'exploration. S'il faut à tout prix majorer par une fonction de référence, le travail technique est loin d'être terminé et il y aura rupture nécessaire avec le travail d'exploration.

Or, rien dans les manuels ne signale à l'élève cette rupture (le manuel cité parle par exemple de "mise en forme" de l'exploration numérique). Et le fait que même si on trouve une croissance en n^2, on n'a pas forcément intérêt à chercher une minoration en $\lambda|n^2|$, que le plus souvent on pourra se rabattre par exemple sur une minoration en $\lambda|n|$ plus accessible techniquement, n'est bien sûr pas mentionné. Tout est fait en effet

pour que, dans cette première familiarisation avec "le langage des limites", tout semble naturel, intuitif, même ce qui ne l'est en rien.
On peut raisonnablement faire l'hypothèse que cette rupture non assumée est source de difficultés et contribue à la disqualification des méthodes de justification associées dès qu'un autre fonctionnement devient légitime.

- Le statut des énoncés :

La lecture des manuels correspondant aux programmes de 1985 attire également inévitablement l'attention sur une autre difficulté liée aux programmes actuels : l'ambiguïté du statut des énoncés, la difficulté qu'il y a à gérer, en particulier au niveau de l'écrit, l'absence de définition des notions introduites.
Nous illustrerons notre propos par deux exemples de manuels : le Dimathème, édité par Didier, le Transmaths, édité par Nathan.
Le manuel Dimathème commence le paragraphe de cours sur les limites de suites discrètement baptisé "information" par :
"Dans le chapitre précédent, nous nous sommes surtout intéressés aux premiers termes d'une suite. Nous cherchons ici à étudier le comportement des termes à partir d'un certain rang n_0 c'est à dire les termes d'indice supérieur à n_0.
Nous ne donnons aucune définition, mais nous proposons une approche intuitive qui pourrait recevoir une mise en forme rigoureuse."

Suit un paragraphe pudiquement baptisé "présentation" qui fournit une définition en bonne et due forme en langage naturel de la convergence vers $+\infty$, une définition qui n'est cependant pas reconnue comme telle :

« La suite u *a pour limite* $+\infty$ *(ou* u_n *tend vers* $+\infty$*) quand* n *tend vers* $+\infty$ *»* signifie que :

Autrement dit : pour A quelconque donné, il n'y a qu'un nombre fini de termes inférieurs à A (car leur rang est inférieur à n_0).

pour un réel donné A quelconque, tous les termes à partir d'un certain rang n_0 sont supérieurs à A.

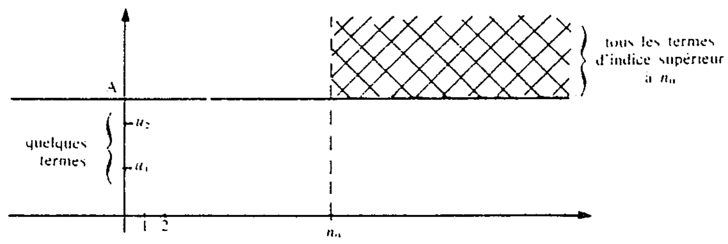


Fig. 6

Nous notons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u = +\infty$.

Exemples :

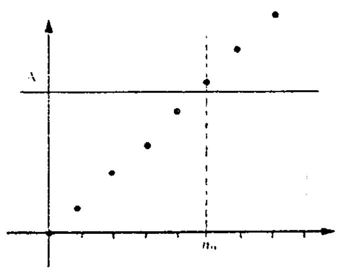


Fig. 7 $u_n = n$

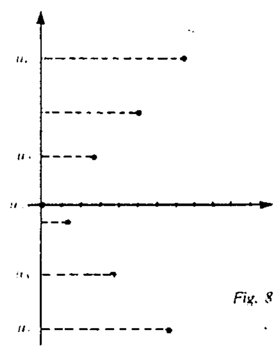


Fig. 8

$u_n = n$
u a pour limite $+\infty$.
Soit A donné.
Prenons n_0, un entier naturel supérieur à A :
A partir de n_0, tous les termes de u sont supérieurs à A.

$v_n = (-1)^n n$
v n'a pas pour limite $+\infty$.
Prenons A = 0.
Les termes de rang impair de la suite (donc une infinité) sont inférieurs à 0.

Remarque :
Pour la suite u, la propriété est vraie, quel que soit le nombre A donné.
Pour la suite v, une valeur de A suffit (ici A = 0).

Nous posons $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

On démontre ensuite, en utilisant cette définition que les suites de référence usuelles n^p (p=1, 2, 3), $\sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$, mais ces démonstrations ne sont pas reconnues comme telles et conclues par :
"Ceci nous amène à poser", "Nous dirons que"
Et les résultats correspondants n'ont pas le statut de théorèmes mais de règles.

Le manuel Transmath commence le chapitre sur les limites intitulé lui aussi très modestement : "L'idée de limite" par :
Dans le langage courant le mot limite a de multiples significations : le sens mathématique est bien particulier et il est préférable, au début, d'éviter des rapprochements avec les sens usuels.
Dans ce chapitre, nous expliquons, à travers des exemples, la signification de l'expression "la fonction f a pour limite 1 au point 0" ; conformément au programme, nous nous en tiendrons là évitant l'étude complète de la notion de limite d'une fonction. L'essentiel de ce chapitre se situe donc dans l'étude de ces exemples, aussi ne retrouve-t-on pas les rubriques habituelles."

Il est difficile de ne pas ressentir un malaise à la lecture de ces quelques lignes. On se réfugie derrière les programmes pour expliquer qu'on en reste au niveau d'exemples, qu'il n'y aura pas un cours dans les formes usuelles, en laissant croire que la seule autre alternative serait l'étude complète de la notion, et ce niveau d'exemples intuitifs doit, semble-t-il, suffire à marquer la différence entre le sens mathématique et les sens usuels de la limite...

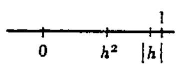
La suite confirme cette impression. Le paragraphe de cours qui suit les activités préliminiaires commence par un paragraphe intitulé : "Sens de l'expression "la fonction f a pour limite zéro au point zéro (ou en zéro) :

D'un point de vue naïf ou imagé, dire que la fonction f a pour limite zéro en zéro signifie que *$f(h)$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro* (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).
Mais ce langage imagé manque de précision; en effet, que signifie par exemple «le réel $f(h)$ est proche de zéro» si l'on ne donne pas d'autre renseignement?
Nous n'expliciterons pas davantage en théorie; nous allons illustrer plutôt par des exemples.

***Exemple 1 :* la fonction carré $f : h \longmapsto h^2$.**

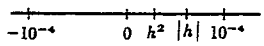
Nous savons que pour tout réel h tel que $|h|<1$ on a :

$$0 \leq h^2 \leq |h| \quad \text{soit} \quad 0 \leq f(h) \leq |h|.$$



Ces inégalités s'interprètent intuitivement, ainsi : si h est proche de zéro ($|h|$ aussi) alors $f(h)$ est encore plus proche de zéro.
Plus précisément, **ces inégalités prouvent que l'on peut avoir $f(h)$ aussi proche de zéro que l'on veut, pour tout h suffisamment petit.**
Par exemple, si l'on veut avoir :

$$0 \leq h^2 \leq 10^{-4}$$



il suffit de choisir h tel que $|h|<10^{-4}$.
En effet, on a alors : $0 \leq h^2 \leq |h| < 10^{-4}$.
De même, pour avoir $0 \leq h^2 < 10^{-24}$, *il suffit* de choisir h tel que $|h|<10^{-24}$.
Remarquez que pour un technicien, 10^{-24} est un nombre extrêmement petit, mais qu'en mathématique il n'est pas interdit de chercher à avoir $h^2<10^{-100}$, ou $h^2<10^{-9999}$, ...
La propriété : on peut avoir $f(h)$ aussi proche de zéro que l'on veut, pour tout réel h suffisamment petit, se traduit par : **la fonction f a pour limite zéro en zéro,** et se note :

$$\lim_0 f = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_0 (h \longmapsto h^2) = 0.$$

On peut légitimement se demander où est la naïveté ici, surtout lorsque l'on dit préciser cette naïveté, à la page suivante, en la paraphrasant de façon réductrice (celle des programmes) :

Naïvement, la fonction f a pour limite ℓ en zéro signifie que $f(h)$ est proche de ℓ pour tout réel h suffisamment proche de zéro. Or dire que $f(h)$ est proche de ℓ, c'est dire que $f(h)-\ell$ est proche de zéro. Autrement dit, *«la fonction f a pour limite ℓ en zéro» signifie que $f(h)-\ell$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro* (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).
De façon plus précise :

ℓ est un réel et D est l'ensemble de définition d'une fonction f.
***Si* l'on peut trouver un réel strictement positif λ et un naturel non nul n, tels que pour tout réel h assez proche de zéro (et dans D), on ait :**

$$|f(h)-\ell| \leq \lambda |h^n| \quad \textit{ou} \quad |f(h)-\ell| \leq \lambda\sqrt{|h|}$$

***alors* on dit que f a pour limite ℓ en zéro.**
On note alors :

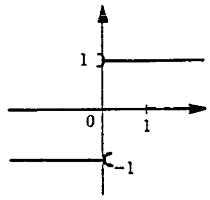
$$\lim_0 f = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_0 (h \longmapsto f(h)) = \ell.$$

Soulignons que dans ce cours, si l'on trouve quelques énoncés encadrés comme celui cité ci-dessus, aucun n'a de statut explicitement marqué.

Ces deux manuels mettent aussi en évidence une autre conséquence de l'absence de définition : la difficulté liée à l'impossibilité de gérer correctement les contre-exemples.
Ainsi, le Dimathème propose juste après la définition-présentation de la convergence vers $+\infty$,deux exemples : $u_n=n$ et $u_n=(-1)^n n$ et exploite la définition pour démontrer que la première converge vers $+\infty$ et l'autre non (cf. citation antérieure). Mais le lecteur ne trouvera pas d'autres exemples dans le cours et un seul dans les exercices : $u_n=(-1)^n$
pour lequel la solution proposée sera sans autre commentaire : "pas de limite $u_n=1$ ou $u_n=-1$" !
Le Transmath inclut dans le cours un exemple de fonction qui n'a pas de limite (exemple qui sera réutilisé dans le chapitre sur les dérivées) :

2.3. Exemples de fonctions qui n'ont pas de limite en zéro

a. Fonction $f : h \longmapsto \dfrac{|h|}{h}$



L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
On voit que l'on peut écrire :

$$f(h)=\frac{h}{h}=1 \qquad \text{pour } h>0$$

$$f(h)=\frac{-h}{h}=-1 \qquad \text{pour } h<0.$$

***f* ne peut pas avoir de limite en zéro, car les valeurs de *f(h)* pour les réels *h* proches de zéro, ne restent pas proches d'un SEUL réel ℓ.**
En effet, si h est proche de 0 et strictement positif, on a $f(h)$ proche de 1 (en fait égal à 1); mais si h est proche de 0 et strictement négatif, on a $f(h)$ proche de -1 (en fait égal à -1).

Mais bien sûr, comme dans le manuel précédent, la condition suffisante du cours ne permettant pas de prouver la non-convergence, on voit apparaître un énoncé écrit en gras, au statut indéterminé, qui vient miraculeusement justifier l'absence de limite.

Je me suis limitée ici à citer deux manuels largement utilisés. Le lecteur n'aura aucune difficulté à retrouver des illustrations analogues dans d'autres ouvrages car les exemples cités ne témoignent pas de l'incompétence de leurs auteurs. Ils sont simplement révélateurs de l'existence de difficultés incontournables.
Ce que nous donnent à voir en effet ces exemples, c'est la difficulté qu'il y a à gérer un enseignement de ce type, qui se veut simple familiarisation, où l'on s'interdit explicitement de définir ce dont on parle, mais où l'on veut que dans le même temps la présentation du savoir ne soit pas purement culturelle mais vise une opérationalité des connaissances. Le cours, ou ce qui en tient lieu, devient un ensemble où les énoncés sont sans statut. La frontière entre ce qui est admis et ce qui est démontré n'est pas conditionnée par des critères de difficultés réelles, clairement explicités, la frontière entre ce qui est reconnu comme précis ou non, comme mathématique ou non, semble à l'oeil non averti relever de la pure fantaisie et, comble pour des mathématiques, des démonstrations réelles effectuées n'osent plus s'affirmer en tant que telles.

On ne peut rester insensible à ce problème. Comment ne pas se demander, en effet, dans quelle mesure cet enseignement de familiarisation ne s'effectue pas au détriment de la construction de la rationalité mathématique dans laquelle est engagé l'élève ? Comment ne pas se demander ce que peut apprendre un enseignement qui ne se donne pas les armes nécessaires pour s'engager dans le jeu des preuves et réfutations ?
Comment ne pas se demander quel sera le prix à payer pour arriver à s'engager ultérieurement dans d'autres pratiques ?
Il est bien évident que ce n'est pas le simple retour à un statut plus raisonnable des fonctions de référence qu'entérine le programme de 1990 qui peut apporter à lui seul une réponse à ces questions.

IV - CONCLUSION

La réforme de 1982 a voulu rendre l'enseignement de l'analyse à la fois plus satisfaisant épistémologiquement et plus respectueux des processus d'apprentissage des élèves : il s'agissait de fonder l'enseignement sur la résolution de problèmes riches et significatifs, d'initier progressivement les élèves au champ de l'approximation, de repenser les rapports entre quantitatif et qualitatif, ceci tout en limitant la formalisation au strict nécessaire. Les fonctions et suites de référence ont été des emblèmes du changement souhaité : elles permettaient de mettre l'accent souhaité sur le quantitatif et de le faire vivre grâce aux calculatrices en préalable à un qualitatif plus général, elles pouvaient guider des pratiques d'exploration, de formulation de conjectures fondamentales pour les concepteurs de la réforme, elles se prêtaient particulièrement bien à l'intégration souhaitée des moyens technologiques nouveaux, elles fournissaient des exemples simples mais typiques pour aider à la structuration des connaissances. Ces atouts, convenablement exploités, vont leur permettre progressivement de dépasser ce statut de simple référent, d'outils d'exploration et classification pour devenir la cheville ouvrière du travail d'approximation et grignoter le terrain laissé libre par une formalisation désavouée. En 1985, l'invasion est achevée et entérinée par les programmes. C'est par rapport aux suites et fonctions de référence que sont formulées les pseudo-définitions de limites qui remplacent les quelques définitions qui avaient résisté au changement de programme précédent. Exit aussi l'algèbre des limites qui permettait de les contourner partiellement. Mais, à trop envahir l'espace, l'objet a dépassé ses limites : outil bien adapté à l'exploration, à la classification, il est pesant, inefficace, s'il doit assumer à lui seul tout le travail justificatif. Pour les suites et fonctions de référence, le déclin est dès lors inévitable et prévisible. Le strict respect de la lettre du programme produit dans les classes des phénomènes aberrants qui alertent l'Inspection, les pionners, persuadés de l'intérêt de ces objets, prennent la liberté nécessaire avec les programmes pour les faire vivre de façon raisonnable dans les classes. Les programmes de 1990 entérineront en réduisant espace et pouvoir des fonctions de référence. Leur statut actuel leur permettra-t-il de survivre dans le système d'enseignement ? Rien n'est moins sûr. Certes, ce sont des objets intéressants et utiles, mais un objet peut-il survivre avec ce type d'utilité ? Un rapide amalgame avec les séries et intégrales de référence pourrait laisser penser que oui. Ce serait oublier que séries et intégrales de référence fournissent des critères efficaces, quasiment algébrisés pour traiter bon nombre d'exercices classiques, ce qui n'est pas le cas des fonctions de référence au niveau où elles sont utilisées.

Au delà des seules fonctions et suites de référence, cette histoire, même sommairement analysée comme elle l'est ici, nous rappelle s'il en était besoin :

- que pour faire vivre un registre (ici celui de l'approximation), le plus efficace n'est pas forcément de forcer son utilisation en interdisant les autres (ici le registre algébrique),
- que supprimer systématiquement ce qui semble difficile d'accès (ici la formalisation) n'est pas forcément la meilleure solution,[3]
- qu'une notion ne peut pas vivre dans l'enseignement simplement à travers de grands et riches problèmes ; nécessairement doit se constituer autour d'elle un ensemble d'exercices de complexité réglable permettant de la faire fonctionner plus localement, de se familiariser avec elle, de s'entraîner à la rendre opérationnelle,
- que pour permettre et justifier un tel fonctionnement, une notion doit avoir un intérêt suffisamment substantiel et des champs de reprise possibles dans divers domaines,
- que pour qu'une notion puisse vivre dans l'enseignement, il faut que les contrats didactiques qui permettent de la gérer soient compatibles avec ceux qui permettent de gérer les notions en relation avec elle,
- que toute notion introduite dans le système d'enseignement échappe à ses concepteurs pour mener une vie conditionnée par des lois et contraintes que nous connaissons encore mal mais qui n'en existent pas pour autant.

Enfin, elle nous rappelle que ne pas vouloir prendre en compte ces dures réalités, c'est s'exposer, avec les meilleures idées et intentions du monde à proposer des remèdes qui risquent de s'avérer pires que le mal initial, et que, tout en développant le maximum d'analyses préalables, vu notre connaissance limitée du système, il est impératif de préparer avec chaque réforme la mise en place des systèmes d'observation et d'analyse qui permettront d'étudier le fonctionnement réel du système et de le réguler, autrement que par le système usuel du balancier.

---

[3] La recherche d'A.Deledicq (cf. références) visant à exploiter pour les débuts de l'enseignement de l'analyse les possibiltés offertes par l'analyse non-standard peut-être lue comme une tentative pour trouver face à ces questions un équilibre plus satisfaisant que celui de l'enseignement actuel.

REFERENCES :

Commission interIREM Analyse (1981) : *Enseignement de l'analyse,* Bulletin interIREM, Ed. IREM de Lyon.

Antoine T., Beaumont A., Deledicq A., Forgues J.L., Diener M. (1991) : *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal,* Ed. IREM Paris 7.

Alibert M., Artigue M., Hallez M., Legrand M., Ménigaux J., Viennot L. (1989) : *Différentielles et procédures différentielles au niveau du premier cycle universitaire,* Rapport de recherche, Ed. IREM Paris 7.

Artigue M. (1990) : Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices, *Communication à la Conference on Functions,* Purdue University, (to appear).

Artigue M. (1991) : Analysis in D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* pp. 167-198, Kluwer Academic Publishers.

Chevallard Y. (1990) : La transpostition didactique, Ed. La pensée Sauvage, Grenoble (1ère édition 1985).

Deledicq A. et Forgues J.L. : (1990) : *Les débuts en analyse,* Ed. IREM Paris 7.

Legrand M., Grenier D., Richard F. (1986) : *Une séquence d'enseignement de l'intégrale en DEUG A première année,* Cahier de Didactique des Mathématiques N°22, Ed. IREM Paris 7.

Legrand M. (1991) : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, *Conférence aux journées Inter-IREM Analyse,* Nice, à paraître dans Repères IREM.

Schneider M. (1988) : *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives,* Thèse de Doctorat, Louvain La Neuve.

Sierpinska A. (1985) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 6.1, pp. 5-67.

Tall D.O. & Vinner S. (1981) : Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12.2, pp. 151-169.