

DES OBJETS MENTAUX "AIRE" ET "VOLUME"

AUX CALCULS DES PRIMITIVES ;

Maggy Schneider

Avant de devenir des concepts mathématiques, les aires et les volumes sont des objets mentaux, au sens de Freudenthal, c'est à dire que les apprenants ont de ces concepts des représentations mentales induites dans leur chef par leur environnement culturel, leur vécu quotidien, et aussi leur passé scolaire. Nous avons exploré ces objets mentaux, en particulier celles de leurs facettes qui font obstacle, au sens d'obstacle épistémologique, à la définition des aires et des volumes au moyen des intégrales définies et à leur détermination par le biais des primitives.

On voit donc ici la théorie sous-jacente à cette **première hypothèse de travail**, hypothèse sous-jacente à toute théorie sur les représentations : on enseigne "dans du plein", pour reprendre une expression de Stella Baruk, on ne déverse pas les concepts mathématiques dans un coin vide du cerveau de l'élève, mais l'apprentissage de ces concepts va être entravé ou facilité par ce que les élèves ont déjà dans la tête, induit par leur environnement culturel, ou autre.

Nous avons aussi élargi l'investigation à d'autres objets mentaux, ceux qui sont associés au concept de vitesse, de débit, de tangente. Pourquoi ? L'hypothèse sous-jacente à cet élargissement est la suivante. Les surfaces et les solides sont des objets qui font partie du monde physico-géométrique et qui sont modélisés par un calcul formel, calcul qui opère sur des fonctions à travers le calcul des primitives. D'autres objets issus du monde physico-géométrique, les vitesses et les tangentes, sont eux aussi modélisés par un calcul formel, le calcul des dérivées. Et il y avait lieu de penser a priori que des hypothèses faites à propos des objets mentaux "surfaces", "solides" et de leurs mesures, pouvaient être corroborées par des observations faites sur les objets mentaux associés aux vitesses et aux tangentes, ce qui s'est effectivement réalisé.

Une **deuxième hypothèse de travail** a été de penser que le théorème fondamental du calcul intégral était au coeur de la modélisation du monde physico-géométrique par un calcul mathématique.

(Par théorème fondamental, nous entendons le théorème dont la thèse est, dans des notations que vous reconnaîtrez

$$D \int_a^x f(u) du = f(x)$$

et sa conséquence :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.)

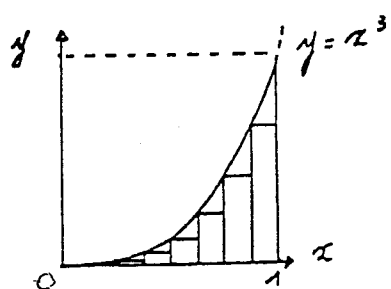


figure 1

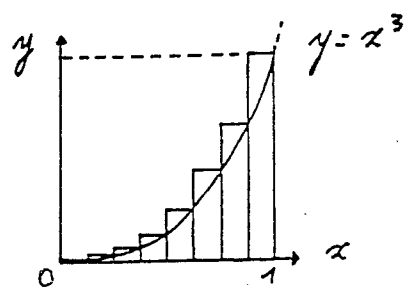


figure 2

Et cette deuxième hypothèse a orienté notre méthodologie de recherche, j'en parlerai à la fin de l'exposé : nous avons construit toute une série de problèmes qui, à terme, débouche sur le théorème fondamental du calcul intégral. Dans l'histoire des mathématiques, on voit ce théorème jouer un rôle tout à fait particulier, dans le sens où l'analyse devient une discipline autonome de la géométrie, qui a ses règles propres à partir du moment où Newton et Leibniz ont mis en évidence le lien de réciprocity entre processus d'intégration et processus de dérivation. Nous avons pensé que, dans l'histoire individuelle des élèves, le théorème pouvait jouer un rôle assez semblable et nous avons constaté effectivement que c'était vraiment un noeud : il nous a été impossible de trouver des problèmes qui suscitaient chez les élèves la découverte de ce théorème, c'est vraiment un morceau extrêmement consistant.

Pour la plupart des hypothèses que nous avons mises à l'épreuve, à la fois sur les aires, les volumes, les tangentes, les vitesses, nous avons trouvé une interprétation globale, qui a été la thèse défendue, et qui peut s'énoncer comme suit :

Les grandeurs physico-géométriques font l'objet d'une première perception de la part des élèves du secondaire. Etant considérée par eux comme un donné incontournable dont les mathématiques doivent être une copie quasi-conforme, cette perception fait obstacle à la modélisation mathématique de ces grandeurs par le biais du calcul infinitésimal.

Je reviendrai en bout d'exposé sur cette thèse, car je compte procéder un peu par cercles concentriques. Je vais partir de difficultés relatives au calcul d'une aire curviligne et décrire des réactions d'élèves, puis je donnerai une interprétation de ces difficultés comme hypothèse relative à la manière dont les élèves perçoivent le concept de limite. Je passerai ensuite à une deuxième réaction, difficulté des élèves à propos de la notion de tangente et je montrerai que l'hypothèse précédente tient le coup pour interpréter ces nouvelles difficultés. Puis je décrirai des erreurs d'élèves dans les calculs d'aires et de volumes et je montrerai que l'hypothèse précédente s'intègre dans un schéma d'interprétation plus global, que nous avons appelé **l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions**, qui, à son tour, fait partie d'un noyau encore plus général que j'ai énoncé dans la thèse, **séparation non nette entre l'illusion d'un monde sensible et les mathématiques**. Et cette dernière interprétation, non seulement rend compte de toutes les difficultés précédentes, mais en plus du refus qu'ont certains élèves des concepts de débit et de vitesse instantanés. Dans mon exposé, j'élargis donc l'interprétation à chaque fois que j'introduis des erreurs ou des réactions d'élèves.

Je commence par les **difficultés relatives au calcul d'une aire curviligne**. Voici, grosso modo, comment ça s'est passé dans les classes, je reviendrai en fin d'exposé sur la façon dont s'est déroulée l'expérimentation.

Nous avons demandé aux élèves de calculer l'aire sous la courbe $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1, j'appelle A cette aire. Avec l'aide du professeur, après de multiples recherches dont je ne vais pas décrire ici le détail (qui a été analysé dans mon travail), les élèves sont arrivés à écrire l'expression polynomiale de la somme des aires de n rectangles inscrits dans la surface comme dans la figure 1, soit

$$S_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

puis, ils sont arrivés à faire de même pour les rectangles de la figure 2, ce qui donne

$$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

Le professeur a alors demandé quelle était en définitive la valeur de l'aire sous la courbe. La plupart des élèves constatent alors qu'il y a ce terme $\frac{1}{4}$ qui est commun aux deux sommes et

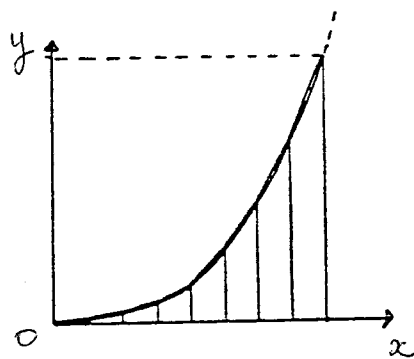


figure 3

qu'il y en a d'autres qui comportent n , et que ces termes $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{4n^2}$ deviennent de plus en plus négligeables au fur et à mesure que l'on prend un grand nombre de rectangles. Leur conclusion, assez unanime, est que l'aire doit être proche de $\frac{1}{4}$.

Le fait que l'aire soit encadrée par les sommes S_1 et S_2 conduit un certain nombre d'élèves à dire que l'aire vaut $\frac{1}{4}$ exactement.

Ce n'est pas le cas de tous, et c'est ce fait qu'on a voulu prendre en considération. D'autres persistent dans l'idée que l'aire vaut à peu près $\frac{1}{4}$, mais qu'il n'est pas possible que ce soit tout à fait égal à $\frac{1}{4}$. Pour le justifier, ils utilisent des arguments divers. Certains disent que

$\frac{1}{2n}$ ne sera jamais tout à fait nul, $\frac{1}{4n^2}$ non plus, parce que n n'atteindra jamais tout à fait l'infini. Certains font la moyenne arithmétique entre les sommes S_1 et S_2 , ce qui leur donne la somme des aires des trapèzes de la figure 3. Ils en déduisent qu'on obtient toujours un résultat excédentaire, étant donné que les côtés supérieurs de ces trapèzes surplombent la courbe. D'autres ont des arguments qui débouchent sur l'**alternative** suivante :

- Tant que les rectangles ont une certaine épaisseur, ils ne remplissent pas tout à fait la surface considérée, il reste des petits triangles à combler (si on se limite à l'approximation par défaut).

- Et, lorsque les rectangles sont réduits à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal comment leur somme conduit au résultat cherché.

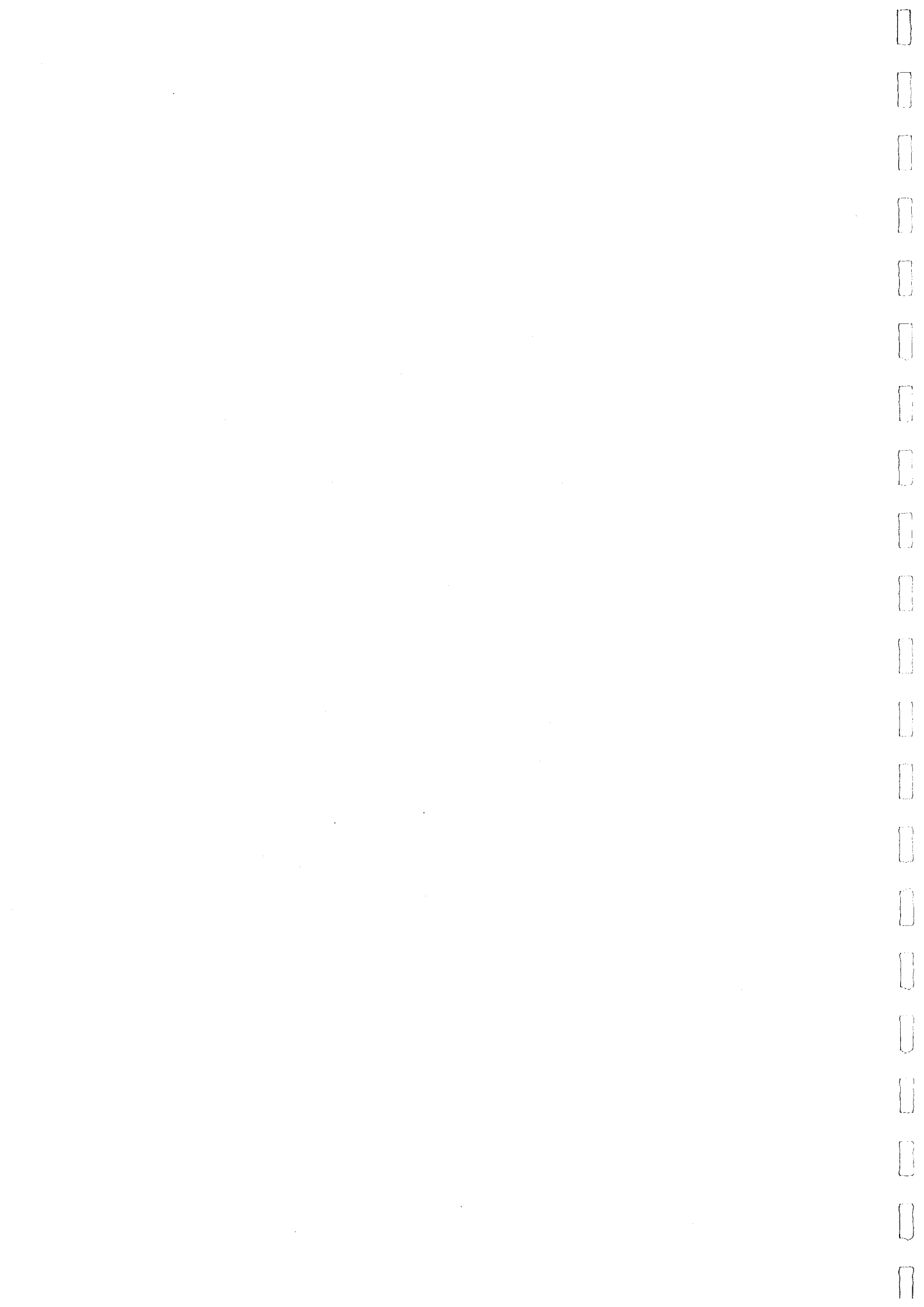
Cette alternative provoque un débat dans la classe et, en général, a tôt fait de faire douter tous les élèves, y compris ceux qui étaient persuadés que l'aire devait valoir $\frac{1}{4}$.

Je précise aussi qu'il est assez rare de voir une grande partie d'élèves formuler aussi clairement l'alternative par eux-mêmes, en général un élève donne une partie de l'alternative, un autre élève donne l'autre partie et, progressivement, sans l'intervention du professeur, ces éléments surgissent au milieu de la classe. Quand on veut ensuite les confronter, rien ne va plus dans la tête de personne. Il en est de même dans la tête de certains professeurs : que répondre à ces questions autrement que par une réponse de mathématicien affirmant que l'aire est une intégrale, réponse qui n'apporte rien à la compréhension de l'élève ?

Nous avons interprété le fait que les élèves soient si sensibles à cette alternative par la manière qu'ils ont de concevoir le passage à la limite. Il y a des **différences entre la limite des élèves et la limite mathématique** au moins par trois aspects :

- En mathématique, nous faisons la somme des aires d'un nombre fini de rectangles, puis nous fabriquons, en augmentant le nombre de ces rectangles, une suite dont on prend la limite au sens mathématique du terme. Tout se passe comme si, chez les élèves, la limite portait, non pas sur la somme des aires prise comme entité numérique, mais au contraire sur chacun des rectangles considérés comme une grandeur. Le mot limite est pris dans un sens très géométrique, au sens presque de la perception visuelle, sauf qu'il s'agit ici d'une imagerie mentale où les élèves voient les rectangles se réduire à vue en segments. Ils vont jusqu'à dire que la limite des rectangles, c'est les segments, qui combleraient parfaitement la surface, mais avec le problème que le segment n'a plus d'aire. Il y aurait une sorte de glissement entre le contexte numérique et une perception des grandeurs, avec un retour en fin

de parcours vers le contexte numérique lorsque les élèves essaient d'interpréter le résultat $\frac{1}{4}$ comme étant la somme des aires des rectangles réduits visuellement à des segments. De plus les élèves ne perçoivent pas souvent la suite mais une somme mobile, indéfiniment allongeable, dont les termes diminuent au fur et à mesure qu'ils deviennent de plus en plus



nombreux et nous obtenons des propos tels que celui-ci : on fait une somme infinie sur un nombre infiniment grand de rectangles d'aire infiniment petite.

- Le deuxième aspect est lié à la définition en (ϵ, δ) de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Cette définition forme un tout indissociable dont on ne peut isoler ni l'expression "f(x) tend vers b", ni l'expression "x tend vers a", qui, en analyse classique, ne reçoivent pas de sens quand on les prend isolément. Dans cette définition aussi, on choisit d'abord ϵ de manière arbitraire, le ϵ donnant la proximité entre $f(x)$ et b . Le choix de ϵ conditionne le choix du δ , qui donne la distance maximale entre x et a : x ne peut donc pas évoluer tout seul, il évolue en fonction de $f(x)$. Et c'est la même chose dans le cas qui nous intéresse, le nombre de rectangles qu'on prend ou, ce qui revient au même dans le cas d'une subdivision régulière, leur base Δx , est régi par la progression des aires formées des rectangles vers l'aire curviligne : on se donne un ϵ , on veut que la différence entre l'aire sous la courbe et la somme des aires des rectangles soit inférieure à ϵ , et c'est le choix du ϵ qui va conditionner le choix du nombre de rectangles ou le choix de leur base. Or rien de tel pour les élèves qui s'occupent, comme on l'a vu, de réduire à vue la base des rectangles jusqu'à 0 de manière complètement autonome, sans qu'ils ne fassent plus du tout allusion à la progression des aires formées des rectangles vers l'aire curviligne. En fait, les élèves ont en tête la "limite" d'une variable, c'est à dire qu'ils octroient un sens de manière intuitive à l'expression " Δx tend vers 0" ou "x tend vers a". Ce qui donne un sens à cette expression, c'est l'idée de mouvement, puisque l'imagerie mentale qu'ils ont dans la tête est un dessin animé, ils voient les rectangles se réduire en segments, leur base se réduire en un point.

- Le troisième aspect concerne la distinction entre l'**infini potentiel** et l'**infini actuel**. L'infini potentiel exprime une possibilité de dépassement, l'infini actuel plutôt une idée d'accomplissement. On ne peut pas vraiment dire que la définition en (ϵ, δ) relève de l'infini potentiel, parce qu'en fait cette distinction relève d'un discours philosophique que la définition en (ϵ, δ) avait pour but de supplanter, mais, des deux facettes potentielle et actuelle, seule la facette potentielle est restée dans la définition en (ϵ, δ) : on y exprime la possibilité de réduire à volonté la différence entre $f(x)$ et b . Chez les élèves il y a un mélange entre l'infini potentiel et l'infini actuel. Il y a l'infini potentiel dans le sens où, d'eux-mêmes ils disent qu'on peut réduire à volonté la différence entre l'aire sous la courbe et la somme des aires des rectangles, mais, ce qui est autre par rapport au discours mathématique, c'est qu'il y a aussi l'infini actuel, c'est à dire que dans l'imagerie mentale des élèves, il y a accomplissement : en se réduisant, les rectangles finissent par devenir des segments ; leur base se réduit, finit par devenir un point et Δx finit par devenir 0. C'est d'autant plus normal qu'ils ont l'attention attirée par la base des rectangles en tant que grandeur, or ce segment est une grandeur continue qu'on peut voir se réduire à vue en un point alors que la mesure de cette largeur qui est ici $\frac{1}{n}$, a une allure beaucoup plus discrète. De plus $\frac{1}{n}$ est lié à l'infiniment grand n , ce qui fait que les élèves répugnent plus vite à remplacer $\frac{1}{n}$ par 0 alors que annuler Δx ne les gêne nullement.

A l'appui de cette interprétation, nous pouvons avancer que l'alternative dont j'ai parlé a un sens dans la perception visuelle des élèves.

Si on considère les grandeurs comme des ensembles de points et si on pense à la partition du point de vue ensembliste, ou bien ce sont vraiment des rectangles et ils sont surmontés de sortes de petits triangles, ou bien ils sont réduits en segments. L'alternative fonctionne donc très bien au sens de la perception des grandeurs.

Maggy Schneider Actes analyse NICE 18 mai 1991

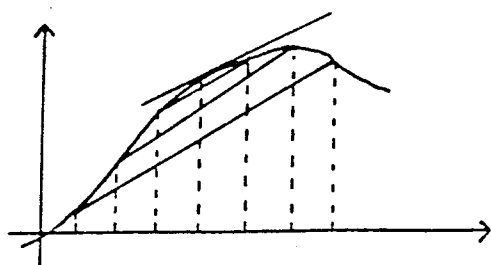


Fig.4

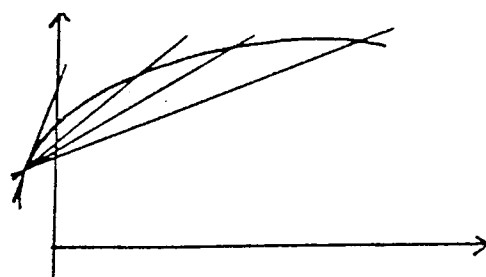


Fig.5

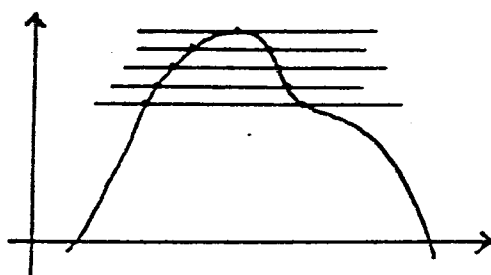


Fig.6

Au sens mathématique, cette alternative n'a plus de sens du tout. Le nombre $\frac{1}{4}$, qui est ici le résultat de la limite, est extérieur à la suite en ce sens qu'il n'est pas un de ses termes. Il n'y a pas lieu d'interpréter $\frac{1}{4}$ comme la somme des mesures des rectangles, même si les rectangles sont devenus des segments, or c'est ce que font les élèves, une fois qu'ils ont réduit les rectangles à vue, ils retournent dans le domaine numérique et ils essaient d'interpréter $\frac{1}{4}$, en général comme étant la somme des aires des rectangles devenus segments.

Pourquoi ? Sans doute, pensent-ils que pour obtenir une aire, on somme en général des aires. Peut-être qu'implicitement aussi, ils pensent qu'on ne peut obtenir un résultat fini en sommant les longueurs d'un nombre infini de segments. Quoiqu'il en soit, c'est l'impasse puisqu'ils arrivent à sommer des zéros. Mais l'impasse est à ce point insoutenable pour certains élèves que quelques uns n'hésitent pas à parler de la longueur des segments. L'un d'eux dit la chose suivante : "pour des segments, on ne somme pas leur surface, mais on somme leur longueur et cette somme remplit tout à fait la surface sous la courbe". On voit très bien dans ce propos le déplacement entre le domaine numérique et le domaine des grandeurs, glissement tout à fait inconscient qui caractérise ici le dérapage des élèves.

A propos de la question de savoir si l'aire curviligne sera atteinte par les aires des rectangles, je voudrais ajouter que cette question a du sens pour les élèves et qu'elle revient sans cesse dans le contexte des aires et des volumes et dans beaucoup d'autres contextes.

Remarquons aussi le fait que l'aire sous cette courbe soit $\frac{1}{4}$ n'est pas neutre non plus. Par exemple, le fait que l'aire d'un disque donne π , et qu'on l'obtienne à la suite d'un processus infini, convient très bien aux élèves : il y a un processus infini et π n'est jamais tout à fait atteint. Mais accepter que $\frac{1}{4}$ ou 0,25 puisse être obtenu comme le résultat d'un processus infini, c'est d'une autre nature que d'accepter que l'aire du disque soit π .

Nous avons quelque chose de comparable au niveau des tangentes. Il a été relevé dans plusieurs recherches, entre autres celles de Bernard Cornu et Anna Sierpinska, que les élèves éprouvent beaucoup de peine à associer pente de tangente et limite de quotient différentiel. L'hypothèse formulée plus haut permet d'interpréter aussi ces **difficultés relatives à la notion de tangente**.

Pour les élèves, la tangente ne serait pas ce qu'elle est en mathématique, c'est à dire la droite dont la pente est la limite de la fonction taux d'accroissement, mais ce serait la "limite", au sens de "position limite" des sécantes, en fait comme si on avait mis une topologie inconsciente et induite sur l'ensemble des droites. (figures 4, 5 et 6).

Les élèves font le circuit suivant : au lieu de partir des sécantes qui sont des objets géométriques, de passer à leur pente, qui sont des objets numériques symbolisés, puis de prendre la limite dans le domaine numérique, qui donne la pente, et de définir la tangente par la biais de cette pente, ils passent à la "limite" au sens géométrique du terme et reviennent après à la pente de la tangente avec cette impasse constatée dans l'histoire des mathématiques, qu'on a appelée l'impasse du $\frac{0}{0}$. $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, on n'a plus de pente et c'est difficile.

A ce sujet Bernard Cornu a relevé les propos suivants : "Une fois que les deux points se sont rejoints, la règle tombe, un point ne suffit pas pour déterminer une droite, il n'y a plus de tangente, ou bien il y en a plusieurs, en tout cas, on ne sait pas déterminer sa pente, etc".

J'ai relevé des propos du style : "Pour avoir la pente, il faudrait d'abord avoir la tangente, puis on aurait la pente". Mais le circuit inverse semble a priori tout à fait

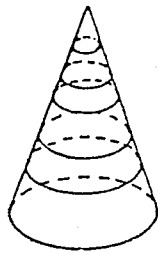


Fig. 7

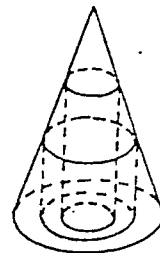


Fig. 8

impensable. Comme je l'ai dit pour les aires et les volumes, le mot limite est pris, ici aussi, en un sens très géométrique ; de plus le Δx et le Δy évoluent de manière tout à fait autonome, sans qu'il soit fait référence à leur rapport; donc Δy se réduit à 0, Δx aussi et c'est lorsqu'ils sont réduits à 0 qu'on se demande si on peut encore faire leur rapport (ici, il y a présence d'un infini actuel en ce sens qu'il y a accomplissement).

Il y a de nouveau un infini actuel, favorisé par l'idée de mouvement : dans ce mouvement où des sécantes tournent autour d'un point, rien ne les empêche d'atteindre effectivement la position limite de la tangente. Et si on pense au deuxième point de rencontre avec la courbe qui se rapproche du premier, rien ne l'empêche de tomber effectivement sur ce dernier.

Une remarque en passant, cette idée de sécante qui tourne autour d'un point est déjà un effet de l'enseignement : quand on laisse travailler les élèves sur la notion de tangente, ils prennent plus volontiers deux points qu'ils rapprochent l'un de l'autre en les bougeant tous deux, plutôt que d'en laisser un fixe et de faire bouger le deuxième (idée pertinente, qui pourrait être exploitée).

Je poursuis en décrivant quelques **erreurs d'élèves à propos des calculs d'aires et de volumes**, erreurs qui s'interprètent au moyen de ce que nous avons appelé **l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions**. Cet obstacle, à son tour, prend en compte tout ce que nous venons de faire comme hypothèses sur le passage à la limite, donc nous avons ici un élargissement de l'interprétation.

Je rappelle d'abord le principe suivant de **Cavalieri** : si deux solides sont compris entre des mêmes plans parallèles et si les sections déterminées dans l'un et l'autre par des plans parallèles au premier, sont soit égales, soit toujours dans un même rapport, alors les volumes de ces solides sont soit égaux, soit dans le même rapport.

On imagine le principe équivalent pour deux surfaces : on décompose deux surfaces en lignes, suivant une direction et on compare les longueurs des lignes déterminées. Si elles sont égales ou dans un même rapport, alors on transpose le rapport aux aires des surfaces.

Cavalieri appelle **indivisible** soit des sections planes découpées dans les solides, soit les lignes découpées dans les surfaces. Seulement, dans la caractérisation des indivisibles, il y a d'abord une dimension en moins, on passe de la dimension 3 à la dimension 2, ou de la dimension 2 à la dimension 1, mais aussi, pour être indivisible, il faut avoir été découpé suivant des règles très strictes, Cavalieri impose donc, même s'il ne le fait pas toujours, de découper les plans parallèlement à deux plans fixes et les lignes parallèlement à ce qu'il appelle une droite regula.

Alors, on imagine fort bien un dérapage : on découperait des surfaces dans des solides et des lignes dans les surfaces, mais les règles de découpage ne seraient pas respectées, auquel cas nous mettrons le mot *indivisible* entre guillemets. Si on parvient à décomposer en ensembles équipotents d'"indivisibles" et si ces "indivisibles" ont des mesures proportionnelles, alors, en général, les élèves concluent que les mesures des grandeurs sont dans le même rapport.

Ce type de dérapage est suggéré par un élève qui considère la surface d'un cône droit comme l'assemblage des cercles qu'y découpent des plans parallèles à sa base (figure 7). Il associe à chacun des cercles sa projection sur la base du cône (figure 8). Les cercles ainsi projetés composent le cercle de base. L'élève en conclut que l'aire de la surface latérale du cône est égale à l'aire de sa base, puisque ces deux surfaces sont composées d'un même nombre de cercles égaux deux à deux. Et beaucoup d'élèves sont impressionnés par cette mise en correspondance bijective d'indivisibles égaux. Ils lui opposent des cas extrêmes, comme celui d'un cône de 500 km de haut.

Il y aurait donc, dans le chef des élèves, un principe équivalent au principe de Cavalieri, mais ce principe ne respecte plus les règles de découpage et là, se situe évidemment un piège. Dans certains cas, on a de bons résultats au sens de la théorie des intégrales, mais

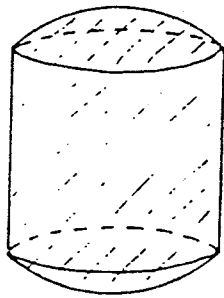


Fig. 9

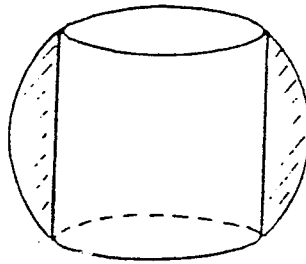


Fig. 10

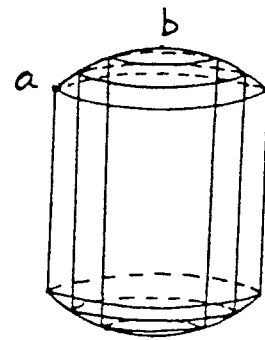


Fig. 11

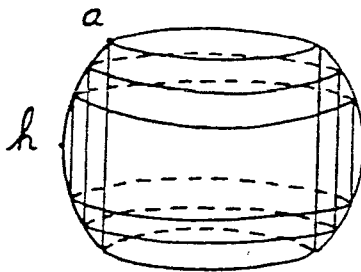


Fig. 12

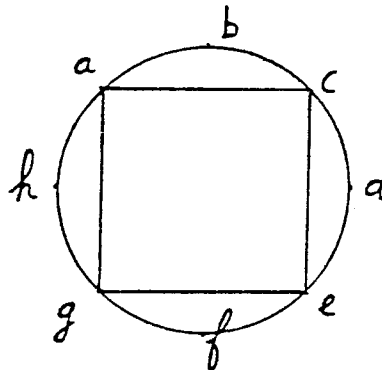


Fig. 13

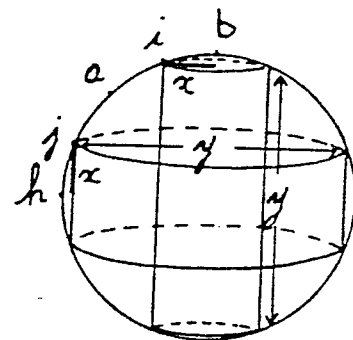


Fig. 14

Du cylindre au cône, tout de go.

Le volume d'un cône - droit, par exemple - égale le tiers de celui du cylindre qui lui est circonscrit. Peut-on pressentir ce résultat - fût-ce approximativement - en comparant directement ces deux solides l'un à l'autre, ou leurs indivisibles? Serait-ce éclairant de les décomposer tous deux en sections radiales contenant leur axe commun (Fig 15) Pourquoi?

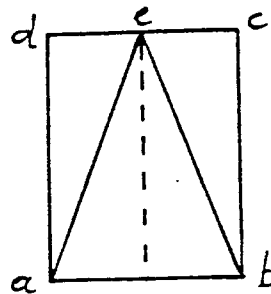
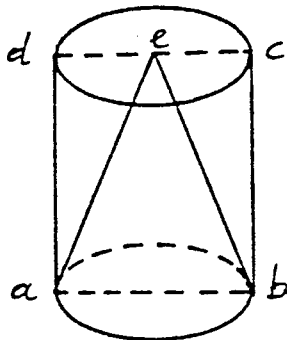


Fig 15

souvent on a des erreurs ou des paradoxes. Un paradoxe célèbre, proposé aux élèves, est celui qui a servi de discussion entre Torricelli et Cavalieri.

Un drôle de découpage de la sphère. Inscrivons dans une sphère un cylindre dont le diamètre égale la hauteur et partageons la sphère en deux solides, le premier constitué du cylindre et des deux calottes sphériques qui coiffent ses bases (figure 9) et le second obtenu en ôtant le premier solide de la sphère (figure 10).

Ces deux solides ont le même volume, car ils sont composés d'un même nombre de surfaces cylindriques emboîtées les unes dans les autres et égales deux par deux. En effet, d'une part, on peut décomposer le premier solide en autant de surfaces cylindriques qu'il y a de points sur l'arc de cercle ab et le second en autant de surfaces qu'il y a de points sur l'arc de cercle ah (figures 11 et 12). Or, étant donné les proportions du cylindre inscrit dans la sphère, ces deux arcs de cercle valent tous les deux le huitième du cercle et sont dès lors composés du même nombre de points (figure 13). D'autre part, les surfaces cylindriques qui constituent les deux solides, égales en nombre, sont aussi égales, deux par deux, en aire. Les surfaces prises respectivement dans chacun de ces solides, en des points i et j équidistants de a ont effectivement une même aire égale à $2\pi xy$ ($= 2\pi \cdot 2x \cdot y/2$) (figure 14)

(Ce raisonnement a été décrit et analysé par Torricelli, au XVII^e siècle, dans un texte intitulé "Campo di tartuffi" (champ de truffes) et mentionné par F. De Gandt, 1983. Et vous, qu'en pensez-vous ?)

Ici, on interroge les élèves et aucun ne pense a priori que les deux solides pourraient avoir le même volume : cela choque l'intuition. Mais arrivés au bout du raisonnement, qu'ils ont quand même du mal à suivre, ils acceptent et vont chercher de bonnes raisons de s'être laissé duper dans un premier temps. L'un dit : "ça, c'est un solide creux, et les solides creux c'est trompeur, parce qu'il y a une petite surface, elle tourne autour d'un axe de rotation mais elle tourne loin, et plus elle tourne loin et plus ça engendre du volume".

Une autre erreur beaucoup plus classique, dans le sens où elle intervient en dehors de toute expérimentation, c'est de considérer des sections radiales et d'extrapoler au volume des solides les rapports entre les aires des sections radiales. Par exemple le cône est engendré par un triangle, le cylindre est engendré par un rectangle; entre l'aire du triangle et celle du rectangle il y a un rapport de 1 à 2, donc il devrait y avoir un rapport de 1 à 2 pour les volumes du cône et du cylindre (figure 15). Là, les élèves savent bien que ce n'est pas vrai, mais ils posent la question et s'étonnent du résultat.

Et là où ils dérapent fréquemment, c'est lorsqu'on leur demande de calculer le volume d'un solide engendré par la rotation d'une surface autour de l'axe Ox . Une procédure assez fréquemment rencontrée, est de calculer l'aire, de la comparer à celle du rectangle circonscrit et d'extrapoler le rapport aux volumes engendrés.

D'où vient un tel dérapage et que les élèves transfèrent si spontanément aux mesures des grandeurs une loi vérifiée par celles de leurs "indivisibles" respectifs ? Reprenons ce qui a caractérisé tout à l'heure notre interprétation sur la passage à la limite : il y avait un glissement dans la tête des élèves entre le domaine des nombres et le domaine des grandeurs, donc la limite s'interprétait, non pas au sens numérique, mais au sens géométrique, perceptif. Il y a quelque chose de semblable qui se passe ici.

Examinons, pour y voir plus clair, des grandeurs composées d'un nombre fini de morceaux. Supposons en effet que l'on dise : ces deux surfaces A et B sont composées chacune d'un même nombre n de morceaux A_i et B_i ; de plus, on peut associer deux par deux leurs morceaux respectifs de manière à ce que chaque morceau de la première surface ait une aire égale à celle du morceau correspondant dans la seconde :

$$m(A_i) = m(B_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

On conclura avec raison que les deux surfaces ont même aire :



$$m(A) = m(B). \quad (2)$$

C'est grâce à l'additivité de la mesure :

$$\begin{aligned} A &= \bigcup A_i; A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow m(A) = \sum m(A_i), \\ B &= \bigcup B_i; B_i \cap B_j = \emptyset \Rightarrow m(B) = \sum m(B_i), \end{aligned}$$

que l'on peut déduire (2) de (1). La même loi d'additivité permet de tirer l'inégalité

$$m(A) < m(B), \quad (3)$$

des inégalités

$$m(A_i) < m(B_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Cette formule d'additivité découle du fait que les morceaux A_i (ou B_i) forment une partition finie de la grandeur A (ou B). Elle constitue une sorte de "pendant numérique" de cette partition.

Envisageons à présent deux surfaces partitionnées chacune en une infinité de segments indivisibles dont les mesures respectives vérifient une relation du type (1) ou (4). A ces partitions ne correspond plus aucune relation numérique du type de l'additivité : on n'obtient l'aire d'une surface ni en additionnant les longueurs de ses indivisibles, ni en additionnant leurs aires nulles. Or, comment peut-on inférer une relation entre les mesures de deux grandeurs d'une relation entre les mesures de leurs indivisibles, si ce n'est - tout comme dans le cas fini - au départ d'une loi reliant, pour chacune de ces grandeurs, sa mesure à celles de ses indivisibles ? Il se pourrait cependant - c'est là notre hypothèse - que la partition d'une surface en ses indivisibles soit tellement présente dans l'esprit des élèves qu'elle supplée l'absence d'une telle loi dont elle assume indûment le rôle, induisant ainsi un passage abusif du rapport des indivisibles au rapport des surfaces. Ainsi les élèves glisseraient inconsciemment du contexte des nombres à celui des grandeurs, empruntant à ce dernier une argumentation, un maillon de leur raisonnement qui leur fait défaut dans le premier.

Ce genre d'interprétation tient le coup pour d'autres erreurs, par exemple celle-ci, qui est à rapprocher de la précédente, mais qui en est une autre forme : on veut toujours calculer le volume d'un solide de révolution engendré par une surface tournant autour d'un axe, on calcule l'aire de cette surface, on la multiplie par 2π , ou bien des erreurs ou des interrogations, même parfois d'étudiants de l'université qui disent : "Le volume d'un parallélépipède oblique, ce serait bien l'aire de sa base multipliée par la longueur de l'arête oblique ou en tout cas ce serait normal". Notons qu'il leur faut un certain courage pour exprimer cette intuition.

Voici une autre erreur, très intéressante. Il s'agit de calculer l'aire sous $y = x^3$ alors que les élèves connaissent déjà l'aire sous $y = x$ et l'aire sous $y = x^2$. Un élève a eu l'idée d'écrire $\frac{x^3}{x} = x^2$. Il connaît l'aire sous la courbe $y = x^2$, donc il extrapole ce rapport en écrivant que :

$$(\text{aire sous } y = x^3) / (\text{aire sous } y = x) = (\text{aire sous } y = x^2).$$

Là de nouveau, nous avons à faire à des rapports numériques, x^2 est le rapport de deux mesures. Mais, en fait tout se passe comme si les rapports numériques x^2 était perçus par l'élève comme grandeurs (en l'occurrence des segments), globalisés comme tels en surfaces dont ils forment une partition ; l'élève retournant en fin de compte dans le domaine numérique au moment où il propose l'aire de cette surface comme rapport entre les mesures des deux grandeurs initiales. Cette fois encore, les prémisses et la conclusion du

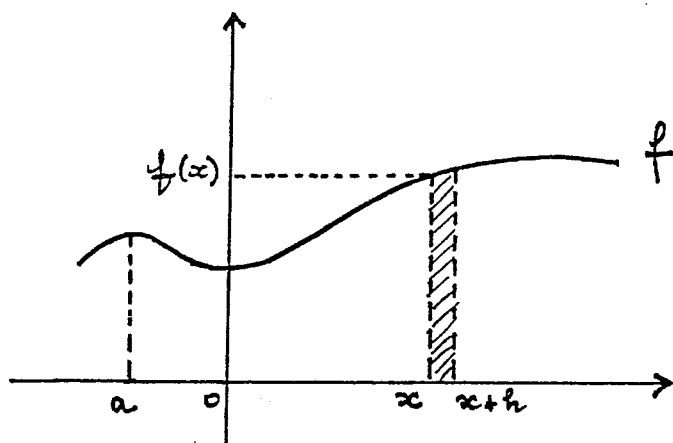


figure 16

raisonnement sont d'ordre numérique, mais le noeud de l'argumentation relève d'un partitionnement ensembliste des grandeurs.

Notons que ces deux erreurs ont été commises indépendamment l'une de l'autre et qu'elles ont donné du fil à retordre aux deux professeurs qui en étaient les témoins.

Enfin une dernière erreur, qui nous rapproche de la toute première, a été entendue d'un élève qui avait mémorisé le théorème fondamental du calcul intégral et qui le reproduisait. Il dit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(x+h) - S(x) = f(x) \quad \text{où} \quad S(x) = \int_a^x f(x) dx$$

Si h tend vers 0, la lamelle se rétrécit jusqu'à se réduire en un segment de longueur $f(x)$ (figure 16). Il y a ici absence de dénominateur, et encore une fois, perception visuelle d'une lamelle qui se rétrécit et le segment de longueur $f(x+h)$ qui coïncide à la fin, dans une forme d'infini actuel, avec le segment de longueur $f(x)$. Ce que dit l'élève, c'est que le vestige visuel de la lamelle, c'est le segment et il traduit cela indûment en termes de nombres : puisque le segment est le vestige visuel de la lamelle, sa longueur, c'est ce qui reste de la mesure de la lamelle, c'est à dire son aire, et de nouveau le mot limite est pris ici en un sens très proche peut-être de son utilisation dans le langage courant, c'est "ce qui reste à la fin".

D'autres recherches, entre autres celles de Anna Sierpiska et de Christiane Hauchart ont montré que le mot limite était entaché de toute une série de connotations de par son usage dans le langage courant.

Cette dernière erreur autorise un schéma d'interprétation dans les termes suivants, appelé **obstacle de l'hétérogénéité des dimensions** :

- 1) **Une certaine perception des grandeurs s'immisce dans les calculs d'aires et de volumes, de manière inconsciente et induite.**
- 2) **Des grandeurs de dimensions distinctes sont mêlées au sein de cette perception.**

Cet obstacle s'intègre dans un schéma d'interprétation beaucoup plus global, celui que j'ai donné au départ : entre un monde sensible, un monde que l'élève a l'illusion de pouvoir appréhender par ses sens, et les mathématiques, il n'y a pas de séparation nette. Les mathématiques, c'est à dire les nombres, les intégrales, sont censées devoir traduire ce qu'on voit.

Cet obstacle permet d'interpréter le refus qu'ont certains élèves des concepts de vitesse et de débit instantanés. Dans le monde des mesures et des sens, on ne peut pas appréhender complètement les vitesses et les débits instantanés, c'est une création de l'esprit humain, une création mathématique, et dans la mesure où, dans le monde sensible, les vitesses et les débits instantanés n'existent pas, elles ne peuvent pas exister non plus en mathématiques, **comme si les mathématiques devaient être vraiment une copie quasi conforme de ce monde sensible.**

Je précise que l'étude qui a été faite ici est de nature qualitative, je n'ai rien contre les statistiques, mais je considère que des études plus quantitatives doivent compléter les autres.

Les problèmes ont été proposés à des élèves souvent néophytes en analyse, travaillant le plus souvent par groupes et ayant choisi une option forte ou moyenne en mathématiques (on peut supposer que les difficultés qu'ils éprouvent seraient a fortiori celles d'élèves plus faibles).

Notons ici qu'un certain nombre d'erreurs n'ont pas été rencontrées souvent, certaines, par contre, comme celles des sections radiales sont très fréquentes. Nous ne pouvons pas dire non plus que le refus des vitesses et des débits instantanés soit énoncé par une majorité dans la classe mais quand un élève en parle, les autres suivent. Un élève amorce, un deuxième continue et il y a un raz de marée dans la classe, tout le monde, des



élèves forts comme des élèves faibles, commencent à douter et les professeurs sont démunis pour répondre à ce genre de questions.

En tant que professeur, j'avais engrangé du matériel, des interrogations d'élèves comme : "Est-ce qu'une intégrale définie donne le résultat exact d'une aire ?".

Il y a eu aussi des réactions provoquées. Nous avons fait travailler des élèves sur des problèmes, des "vrais" problèmes pour autant qu'on sache les définir : ceux qui nécessitent une conceptualisation, qui sont proposés à des élèves vierges de toute connaissance mathématique sur ce sujet, ou bien des problèmes proposés à des élèves qui avaient déjà un bagage en analyse, et l'effet était le même. Des élèves qui terminaient l'université en mathématiques, ne savaient pas prendre en compte le problème des sections radiales. Ils étaient en formation pour être professeur, et, dans ce cadre, posaient la question : "C'est embêtant si on a des questions comme ça avec des élèves." Ils étaient démunis et toute une partie de leur intuition n'avait pas été prise en compte, travaillée, reformulée en intuition plus correcte. Il y avait comme un plaquage de la théorie mathématique ; ils avaient tu leurs intuitions, ils les gardaient pour eux. Certains avaient le courage d'en parler, et d'autres se reconnaissaient dans les interrogations des premiers.

J'ai aussi interrogé des étudiants de première année d'université sur leurs souvenirs, et je les faisais parler pour voir ce qu'ils avaient retenu de leurs études secondaires. Leurs réactions étaient à peu près comparables à celles de tous les autres élèves que nous avons interrogés.

L'hypothèse sous-jacente à cette expérimentation, c'est que, dans l'histoire des mathématiques, des "erreurs" ou des hésitations ont été révélatrices du développement des connaissances et qu'il en allait de même dans l'histoire des élèves.

L'histoire a été une source méthodologique importante dans le sens où elle a suggéré des problèmes. Par exemple le paradoxe sur la sphère découpée en deux solides. Plus généralement, l'histoire a servi de grille de lecture des réactions des élèves. Lorsqu'on constate qu'il y a des erreurs semblables qui se produisent à la fois dans l'histoire des mathématiques, chez des élèves forts, chez des élèves faibles, chez les professeurs, on peut penser que ce sont des erreurs qui ne sont pas des "distractions d'esprits fatigués", pour reprendre une expression de Bachelard, mais des vraies erreurs, celles qui vont révéler les obstacles épistémologiques.

Je n'ai pas le temps de caractériser les problèmes.

Je termine en parlant de la portée didactique de cette recherche. Je dois apporter quelques précisions sur la situation en Belgique, je ne sais pas s'il en est de même en France. Ma thèse est perçue comme un plaidoyer en faveur de ces problèmes utilisés comme projet d'enseignement : quand il y a une recherche et une méthodologie utilisée, en l'occurrence ici le travail que nous avons fait faire aux élèves, l'ensemble est compris comme modèle d'enseignement. Et, bien sûr, ce n'est pas notre objectif.

Dans le groupe où je travaille, nous pensons qu'il faudrait concevoir un cours d'analyse en plusieurs boucles, une première boucle pour prendre en compte les intuitions des élèves et une deuxième boucle avec une théorie plus formalisée, (sans que les deux boucles soient séparées). On traiterait d'abord des phénomènes très intuitifs liés aux apparitions de l'infini, et puis, après un certain temps, on en arriverait à poser des problèmes internes aux mathématiques, problèmes qui se résolvent par l'intermédiaire d'une théorie beaucoup plus formalisée. La deuxième boucle ne devrait pas venir artificiellement par rapport à la première, ce serait un prolongement qui devrait être naturel. En Belgique actuellement, dès la cinquième année du secondaire, les élèves doivent gérer de front la théorie formalisée et toute une série de phénomènes liés aux apparitions de l'infini. Il n'y a aucun processus infini avant l'avant dernière année du secondaire et puis tout arrive en bloc sous une forme bien léchée. Nous voulions éviter cet état de choses. Alors que pour la

géométrie ou l'arithmétique, il y a une première phase plus expérimentale, plus intuitive et la théorie formalisée vient plus tard.

Notre travail néglige aussi des aspects numériques, nous avons surtout pointé des phénomènes liés aux perceptions géométriques.

Et puis, il y a des problèmes pièges qui sont peut-être un peu longs, qui contiennent des difficultés parasites, c'était bien pour l'expérimentation, pour un projet d'enseignement, ce serait peut-être lourd à gérer. Il y a peut-être à prendre dans ce travail des problèmes qui pourraient être exploités en classe, mais au départ les problèmes ont été conçus comme méthodologie de recherche et non comme projet d'enseignement.

Pour les professeurs, ce travail est une promenade qui peut leur faire prendre conscience d'apprentissages négligés ou d'insistances particulières dans l'enseignement de l'analyse tel qu'il est habituellement pratiqué. En Belgique, l'apprentissage de l'analyse a souvent comme seul objectif l'étude de la variation d'une fonction. C'est important, mais on en oublie de travailler certaines intuitions.

Ce travail est aussi une grille de lecture d'erreurs et de réactions d'élèves, en même temps qu'une contribution à la définition du concept d'obstacle épistémologique qu'il illustre. Et fondamentalement, je reprends une distinction mise en valeur par Rouchier et Steinbrick, où le problème est de savoir si la recherche en didactique doit préparer des méthodes toutes faites, directement utilisables dans les classes, ou produire des outils conceptuels, avec lesquels le professeur forgera ses propres méthodes d'enseignement.

Est-ce-que c'est pareil quand c'est penché?

a. On connaît la formule de l'aire du rectangle. Certains manuels démontrent la formule de l'aire du parallélogramme par une transformation de celui-ci en un rectangle (Fig.1) : on déplace un triangle approprié d'un côté à l'autre de la figure. Et si le parallélogramme se présente comme sur la Fig.2 ?

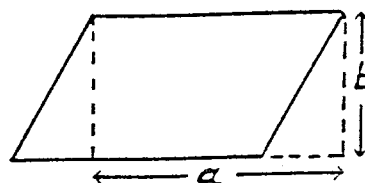
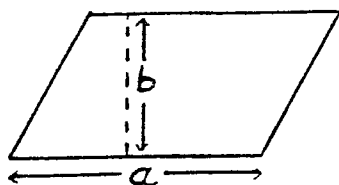


Fig.1

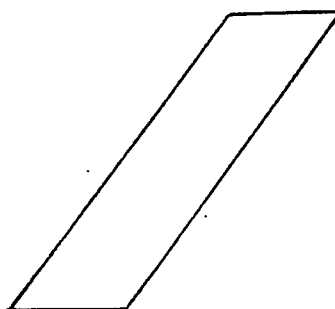


Fig 2

b. On connaît la formule du volume du parallélépipède rectangle. Trouvez celle qui donne le volume d'un parallélépipède oblique quelconque et justifiez-la.

c. Et que faire pour les prismes?

ATELIER DE Maggy Schneider

Nous avons vu ce matin que **mon travail n'est pas un plaidoyer pour un projet d'enseignement, mais que les problèmes ont été utilisés comme méthode de recherche**, le but étant de faire parler les élèves, de les faire buter sur des obstacles, et en ce sens-là, ils ont bien fonctionné.

Maintenant, je peux décrire les **cinq grandes catégories de problèmes** que j'ai exploités pour ma recherche, et nous pouvons voir quelles seraient les incidences, les inconvénients et les avantages si on proposaient ces problèmes comme projet d'enseignement. Je trouve beaucoup d'arguments contre l'utilisation de ces problèmes tels quels à des seules fins d'enseignement et je ne suis pas moi-même très favorable, mais il y a là un sujet à débat relativement intéressant.

Les problèmes se groupent donc en cinq catégories, ils ont pour fonction de déboucher sur la conceptualisation des processus d'intégration et de dérivation, et à terme, sur leur lien de réciprocité, c'est à dire sur le théorème fondamental du calcul intégral.

Le premier groupe de problèmes a pour fonction de mettre en défaut les méthodes d'équidécomposabilité et d'équicomplémentabilité utilisées en géométrie pour déterminer des aires et des volumes, et de déboucher à terme sur le recours à des découpages infinis, en l'occurrence les principes de Cavalieri.

Par exemple, le premier problème rappelle aux élèves la manière dont ils ont obtenu, à l'école élémentaire, l'aire du parallélogramme (figure 1), avec la difficulté que l'on connaît lorsqu'on prend un parallélogramme comme celui de la figure 2 et qu'on choisit comme base le petit côté. Dans le même ordre d'idée, on demande de rejustifier les volumes du parallélépipède rectangle, du parallélépipède oblique et du prisme. Le but n'est pas de trouver de nouvelles formules d'aires et de volumes, mais éventuellement de repasser par des formules connues et d'attirer l'attention des élèves sur les méthodes utilisées, avec description de l'équidécomposabilité et de l'équicomplémentabilité.

Maggy Schneider Actes analyse NICE 18 mai 1991

Le prisme oblique en 1743.

Vous trouverez ci-après un extrait des "Eléments de géométrie" publiés en 1743 par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765). Ce mathématicien français, connu du grand public surtout pour ses précisions relatives au retour de la comète de Halley en 1759, voulait enseigner la géométrie en s'appuyant le plus possible sur des évidences familières. Ci-après, il emprunte son argumentation au mathématicien italien Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Lisez ce texte et comparez la démarche de Clairaut à la vôtre.

"Formation des prismes obliques.

On connaît les prismes obliques formés par une base abc , k , i , qui se meut parallèlement à elle-même, et de telle façon que ses angles suivent des lignes parallèles ag , bh , cd , etc., qui s'élèvent hors du plan de la base, et qui ne lui sont point perpendiculaires.

Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

L'analogie qu'il y a entre cette formation et la formation des prismes droits, dont nous avons parlé, [...] donne facilement la mesure de la solidité [Le terme solidité signifie volume (d'un solide). (Note ajoutée au texte de Clairaut)] des prismes obliques ; car si on imagine à côté d'un prisme oblique $abcde$, $jghik$ (Fig.1), un prisme droit $ABCDEF$, $GHIK$ (Fig.2), qui ait la même base, et que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans parallèles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

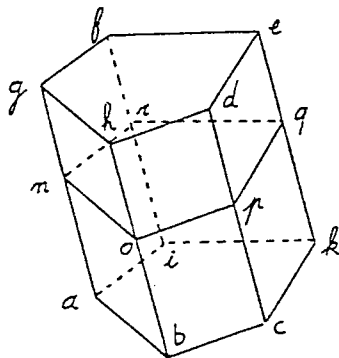


Fig.1

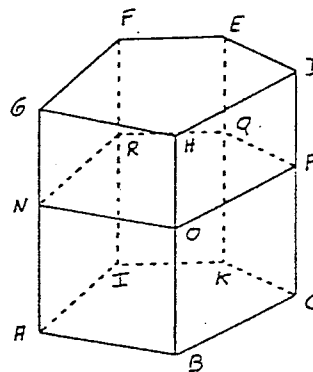


Fig.2

Car, si par un point quelconque P de la hauteur, on fait passer un plan parallèle à la base, les sections $NOPQR$, $nopqr$, que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases $ABCKI$, $abcki$, arrivées en $NOPQR$, $nopqr$, par le mouvement qui forme ces deux prismes ; et ainsi ces deux sections seront des polygones égaux.

Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par de mêmes plans coupants sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire, les prismes, soient égaux aussi. On énonce ordinairement ainsi cette proposition : les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur. On appelle la hauteur du prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'intérieur, ou sur son prolongement".

Nous avons aussi récolté leurs réactions à propos d'un texte écrit par Clairaut , (voir texte ci-contre), sur la manière d'obtenir le volume d'un prisme oblique, à partir du volume d'un prisme droit. Celui-ci utilise, en fait, le principe de Cavalieri : il décompose les solides en sections planes, dit que les sections ont même aire et en conclut que les solides ont le même volume.

Nous avons vu, dans les réactions des élèves, le germe d'incompréhensions qui allaient ressurgir plus tard de manière plus sensible, comme l'alternative dont j'ai parlé ce matin : ou bien les tranches sont des petits prismes, auquel cas on ne démontre rien parce qu'ils sont obliques d'un côté et droits de l'autre ; ou bien ce sont des surfaces et on ne peut pas faire un solide en empilant des surfaces. Bien que certains élèves disent : "Une droite, c'est composé de points". Pour certains, il y a un interdit à utiliser des tranches, ça ne se fait pas, par contre pour beaucoup, il y a quelque chose d'intuitif et ils disent l'avoir toujours pensé (analogie avec un empilement de feuilles de papier comme sur la figure 3).

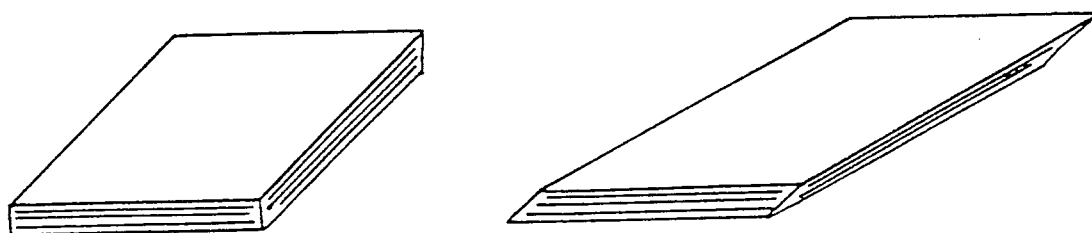


Fig. 3

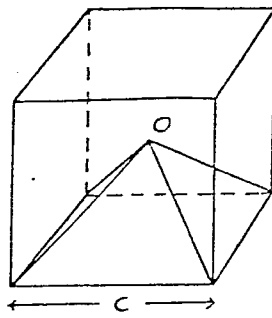


Fig. 4

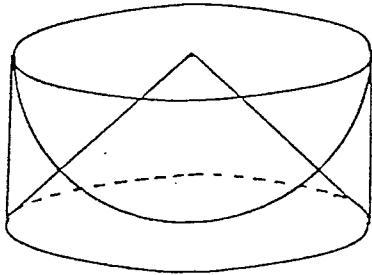


Fig. 5

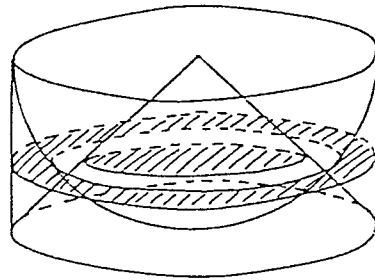


Fig. 6

$$r_1^2 = r_3^2 + m^2$$

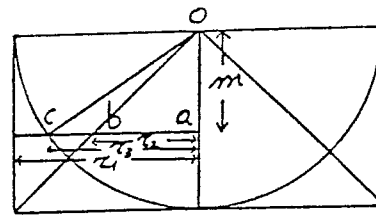
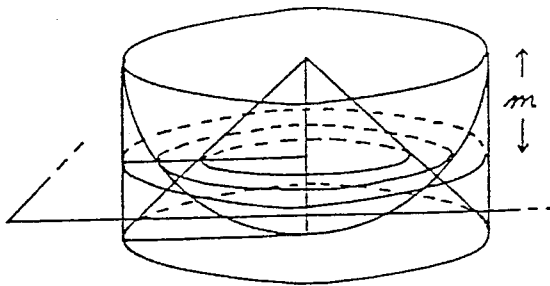


Fig. 7

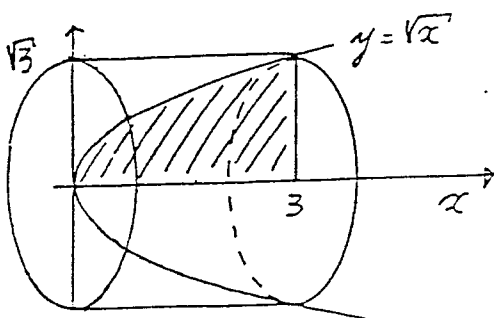


Fig. 8

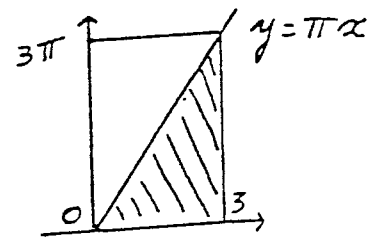


Fig. 9

Le deuxième groupe de problèmes montre l'impossibilité de calculer toutes les aires sous une courbe à l'aide des principes de Cavalieri et met en évidence que ces calculs d'aire sous une courbe standardisent les calculs d'aires et de volumes réductibles à l'intégrale d'une fonction d'une variable.

Ces problèmes ont pour fonction de faire travailler les principes de Cavalieri, vus une première fois à propos du texte de Clairaut, mais, cette fois, avec des indivisibles qui n'ont plus forcément la même mesure. On demande aux élèves de loger six pyramides isométriques dans un cube, ce qu'on obtient en partant du centre du cube et en allant sur chacune des faces (figure 4), et à partir de là de trouver le volume d'une pyramide quelconque. Ils y arrivent convenablement, mais rares sont les élèves qui, après avoir lu le texte de Clairaut, pensent à comparer, tranche par tranche, la pyramide quelconque à une pyramide de même hauteur susceptible d'occuper le sixième d'un cube.

Le problème de Valério, très connu, consiste à obtenir le volume d'une sphère à partir du volume du cône et du volume du cylindre, par coupes planes. La figure 5 est donnée aux élèves et nous avons vu, pour la première fois dans le cadre de cette expérimentation, que les sections radiales étaient vraiment un miroir aux alouettes pour beaucoup d'élèves. Ils connaissent le résultat ou ils s'en enquêtent, car ils savent que le but n'est pas de retrouver la formule, mais de contrôler par une méthode qu'on y arrive bien. On peut comparer le cône et l'"écuelle" que l'on obtient en ôtant l'hémisphère du cylindre (figure 6), et en fait il suffit de les comparer coupe plane par coupe plane, dans le cône on a des disques et dans l'"écuelle" on a des couronnes et deux par deux elles ont même aire (figure 7). Les élèves ne procèdent pas comme ça, ils découpent un disque dans le cône, un disque dans l'hémisphère et un disque dans le cylindre et ils trouvent une relation d'addition entre les trois aires et on a déjà ici une préfiguration de la linéarité de l'intégrale.

J'ai des arguments pour dire qu'il n'est pas neutre de passer à un moment donné par les principes de Cavalieri, ne fût-ce que pour en montrer les limites et l'obligation de s'en passer. C'est, entre autres, la fonction du deuxième groupe de problèmes. On voit apparaître la nécessité de traiter des aires sous des courbes. En tout cas, on voit apparaître les aires sous des courbes comme étant des problèmes standard et non comme des problèmes artificiels. Par le biais des principes de Cavalieri, on arrive à voir qu'à un moment donné, on est obligé de considérer ces objets.

C'est le but du problème intitulé le parabolôïde de révolution :

Considérons la surface délimitée par la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 3$, on fait tourner cette surface autour de l'axe Ox . Le solide engendré s'appelle parabolôïde de révolution. On demande de déterminer le volume de ce solide (figure 8).

Alors, pour la première fois, le principe de Cavalieri, comme tel, ne fonctionne pas. Si on veut comparer par exemple au cylindre circonscrit, on a des disques dans le parabolôïde, des disques dans le cylindre, mais il n'y a plus aucune relation d'égalité ou de proportionnalité entre les indivisibles. Alors, soit avec quelques indices du professeur, soit, comme c'est arrivé, spontanément, il y a une prise en compte du fait que la mesure des indivisibles tracés dans le parabolôïde évolue suivant une loi du premier degré : on découpe en effet des disques d'aire $\pi (\sqrt{x})^2 = \pi x$. Tous croient au départ que le parabolôïde doit prendre plus de la moitié du cylindre, toujours en fonction de cette intuition des sections radiales : quand on découpe, on voit bien que les sections radiales pour le parabolôïde prennent plus de la moitié de celles du cylindre. Etant donné la loi numérique qui gère l'évolution des disques dessinés dans le parabolôïde, soit $y = \pi x$, (figure 9), il y a ensuite cette idée qui mûrit petit à petit que ça doit faire à peu près la moitié parce que ça varie de

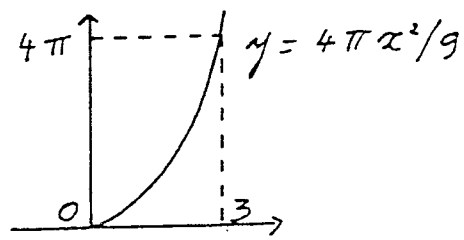


Fig. 10

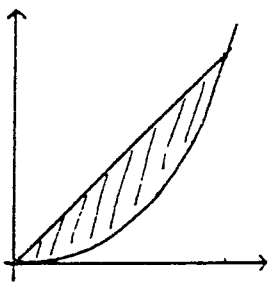


Fig. 11

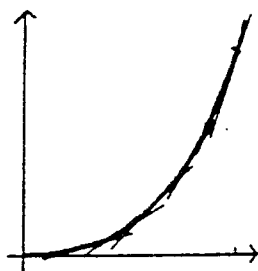


Fig. 12

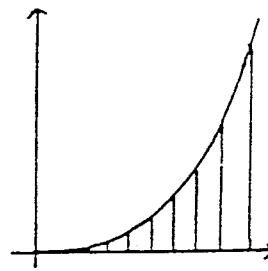


Fig. 13

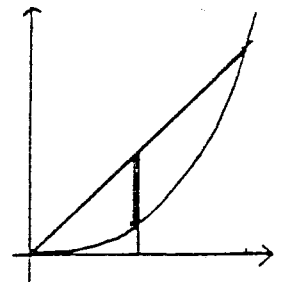


Fig. 14

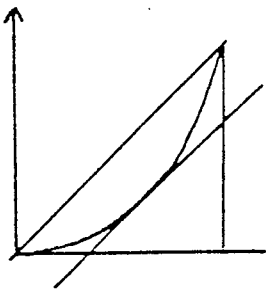


Fig. 15

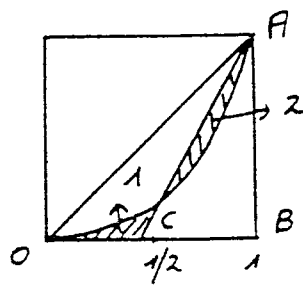


Fig. 16

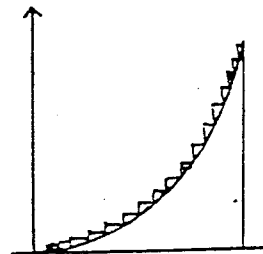


Fig. 17

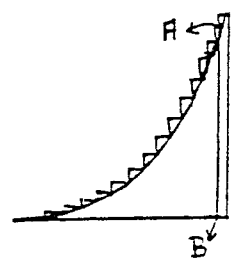


Fig. 18

manière régulière. Pour d'autres élèves, qui n'ont encore rien conclu, le professeur donne comme consigne de représenter cette droite qui exprime la variation des indivisibles du paraboloïde et celle qui représente les aires des indivisibles du cylindre, et alors, il devient évident pour eux que ça doit valoir la moitié.

Nous proposons aussi de montrer que le calcul de l'aire sous une parabole se ramène à celui du volume d'un cône.

Soit la surface délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 2$. Déduisez l'aire de cette surface du volume du cône.

Ce problème n'en est plus un pour les élèves qui ont déjà représenté, au moyen d'une parabole, la variation des aires des sections planes du cône. Pour les autres, le professeur donne la consigne de dessiner deux surfaces planes dont les segments indivisibles homologues sont entre eux comme les sections indivisibles d'un cône de rayon 2 et de hauteur 3 et celles du cylindre qui lui est circonscrit (figure 10). Ils concluent tous que l'aire délimitée par la parabole et les droites $y = 0$ et $x = 3$, est à celle du rectangle ce que le volume du cône est à celui du cylindre, c'est à dire ce que 1 est à 3.

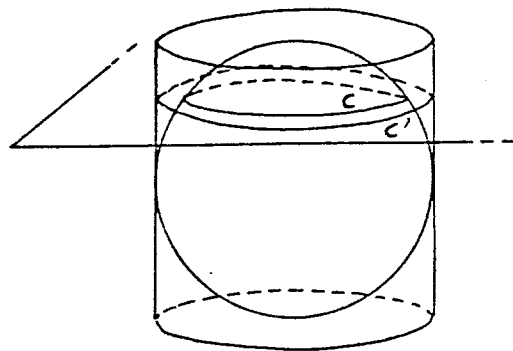
Dans ce deuxième groupe, une fois mis en défaut les principes de Cavalieri dans le sens où je l'ai expliqué tout à l'heure (on ne peut avoir l'aire sous une parabole sans avoir le volume d'un cône et vice versa), on propose alors des problèmes qui consistent à calculer l'aire délimitée par $y = x^3$ et les bornes 0 et 1 et rien n'est dit à ce moment-là. Il y a alors toute une analyse sur les procédures des élèves. L'approximation par sommes de rectangles ne vient pas tout de suite, loin de là. Ils vont essayer de trouver le polygone le plus gros possible, qui approche le mieux possible, ce sera un triangle parce que la forme au départ les inspire (figures 11 à 18).

La première fois qu'on voit apparaître des découpages laminaires, c'est souvent avec des trapèzes. Il y a tout un travail à faire pour montrer qu'avec des rectangles, on arrive aux mêmes fins qu'avec des trapèzes et qu'on y arrive plus rapidement qu'avec des procédures artisanales qui s'inspirent de la forme de la figure. Il est alors important de voir que ce qu'on fait avec des trapèzes, ou avec des rectangles, revient au même si on supprime les termes en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ comme je l'ai montré ce matin, et se posent alors toutes les questions de savoir : peut-on les supprimer, est-ce que l'on obtient l'aire exacte ou pas ? Et il nous a paru que c'était peut-être un bel endroit de faire apparaître quelque chose qui ressemble à la préfiguration de la définition en (ε, δ) de la limite. Nous avons demandé si l'aire pouvait valoir $\frac{1}{4} + \varepsilon$, où serait la contradiction ? En supposant que l'aire sous la courbe vaut $\frac{1}{4} + \varepsilon$, on parvient à rendre l'approximation par excès $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$ inférieure à cette aire, ce qui n'est pas possible : il y a là un double raisonnement par l'absurde où on voit apparaître la nécessité de définir plus tard la limite comme quelque chose dont on s'approche à n'importe quel ε près. C'était pour nous un bon endroit didactique pour faire apparaître qu'une limite devait se définir un jour ou l'autre avec les quantificateurs.

De l'aire latérale du cylindre à celle de la sphère.

Considérons une sphère et le cylindre qui lui est circonscrit

Tout plan parallèle aux bases du cylindre sectionne ces deux solides en deux disques C et C' . Regardons les surfaces latérales du cylindre et de la sphère comme l'assemblage des cercles correspondants. Il y a autant de cercles C que de cercles C' vu qu'on peut associer deux par deux les cercles coplanaires. Or, chaque cercle C est plus petit (ou égal en ce qui concerne la section médiane) que le cercle C' qui lui correspond. L'aire latérale de la sphère serait donc inférieure à celle du cylindre circonscrit. Or, elle ne l'est pas.



Corrigez ce raisonnement en le serrant d'aussi près que possible.

Le troisième groupe de problèmes est une mise en garde contre un usage abusif des indivisibles si l'on ne s'impose pas des règles précises de découpage, et c'est là que réapparaît une sorte d'épaisseur, mais une épaisseur relative entre deux solides.

Nous avons vu ce matin le paradoxe de Torricelli, et nous avons vu aussi comment un bon élève a montré l'égalité entre l'aire latérale d'un cône et la surface de son cercle de base.

Il y a aussi la comparaison de l'aire latérale de la sphère à celle du cylindre qui lui est circonscrit (voir texte ci-contre).

Dans des problèmes comme celui-ci ou d'autres paradoxes connus, mûrit très vite l'idée que ce n'est pas le même espace de part et d'autre entre les indivisibles, ou qu'il y a plus d'indivisibles d'un côté que de l'autre, que c'est plus dense, ou encore que les indivisibles sont plus épais. Il y a toute cette imagerie intuitive qui se situe au même niveau que leur intuition première, alors que la réponse via calcul intégral, qui consiste à calculer les aires en question par le calcul et à comparer les résultats, est une argumentation très éloignée de leur intuition. De même pour le cône inscrit dans le cylindre par sections radiales, les élèves ont analysé pourquoi ce n'est pas la moitié et là, ils ont repris des tranches de gâteau, entre deux sections radiales, et ils se sont remis à découper avec des arguments de nature très intuitive.

Il y a derrière cela, me semble-t-il un support intuitif très important, pour tout ce qui sera par la suite changement de variable et l'erreur au sujet du paraboloïde de révolution s'arrange bien via un changement de variable : au lieu de faire avec x , vous faites avec y . Nous avons donné à des élèves (qui avaient eu des problèmes sur les paradoxes de ce type) l'intégrale fausse de tout à l'heure et ils ont dit : "Mais ça donne des surfaces cylindriques qui sont inégalement espacées, qui sont plus resserrées d'un côté que de l'autre et c'est ça qui ne va pas". En fait, nous avons constaté que les classes qui avaient vu les principes de Cavalieri et qui en avaient vu les limites, entre autres leur usage abusif, étaient à même de régler toute une série d'intégrales fausses qui laissaient sur la touche les élèves qui avaient eu une théorie du calcul intégral assez formelle.

Les principes de Cavalieri, au départ ne servaient que de matériel d'expérimentation pour faire parler les élèves à propos de leurs intuitions relatives aux découpages infinis. D'un autre côté, on peut dire que ces activités donnent lieu à des débats intéressants, source d'intuitions pour la théorie formelle qui vient après. Par conséquent, même si c'est une voie sans issue pour les mathématiques qui suivent, je crois que le passage par les principes de Cavalieri permet de mettre à jour les intuitions fausses que la théorie ne règlera quand même pas.

Je n'ai plus le temps de parler des problèmes des deux derniers groupes.

Les problèmes du groupe IV mobilisent des calculs de taux de variation instantanés divers.

Les problèmes du groupe V débouchent sur la réciprocité des processus d'intégration et de dérivation.

BIBLIOGRAPHIE

- ARTIGUE M. (1991) : Epistémologie et Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3., 241-285. Cahier de Didirem, Université Paris VII.
- BACHELARD G. (1938) : *La formation de l'esprit scientifique*, J. Vrin, Paris, 1980.
- BROUSSEAU G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4/2., 165-198.
- FREUDENTHAL H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht.
- SCHNEIDER M. (1988) : *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.
- SCHNEIDER M. (1990) : Quelques obstacles à la modélisation des aires et des volumes par le calcul intégral : un exemple de recherche en didactique des mathématiques, son objet, ses méthodes", *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, Vol XLII, Fasc.II, ser.B, 157-168.
- SCHNEIDER M. (1991) : "Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente", *Repères IREM* n°5 65-82.
- SCHNEIDER M. (1991) : "Un fossé entre le concept d'intégrale définie et une première perception des aires et des volumes", *Mathématique et Pédagogie* n°81 , 85-104.
- SCHNEIDER M. (1991) : "D'une première perception des aires et des volumes au calcul des primitives", *Mathématique et Pédagogie* n°82 , 29-50.
- SCHNEIDER M. (1991) : Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11/2.3., 241-294.
- SCHNEIDER M. "A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. Première partie : pourquoi les concepts de vitesse et de débit instantanés pâtissent-ils d'un a priori négatif ? ", article accepté par la revue *Educational Studies in Mathematics*, épreuve corrigée sous presse, 16 pages.
- SCHNEIDER M. "A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. Deuxième partie : analyse des enjeux didactiques d'un problème mobilisant le concept de débit instantané", article accepté par la revue *Educational Studies in Mathematics*, épreuve corrigée sous presse, 17 pages.
- SIERPINSKA A . (1985a) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6/1., 5-67.
- SIERPINSKA A . (1985b) : La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques, *Comptes-rendus de la 37° rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M.(Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur)*, Leiden, 73-95.
- TALL D. O., VINNER S. (1981) : Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.12, 151-169.