

1991

COMMISSION INTER IREM ANALYSE

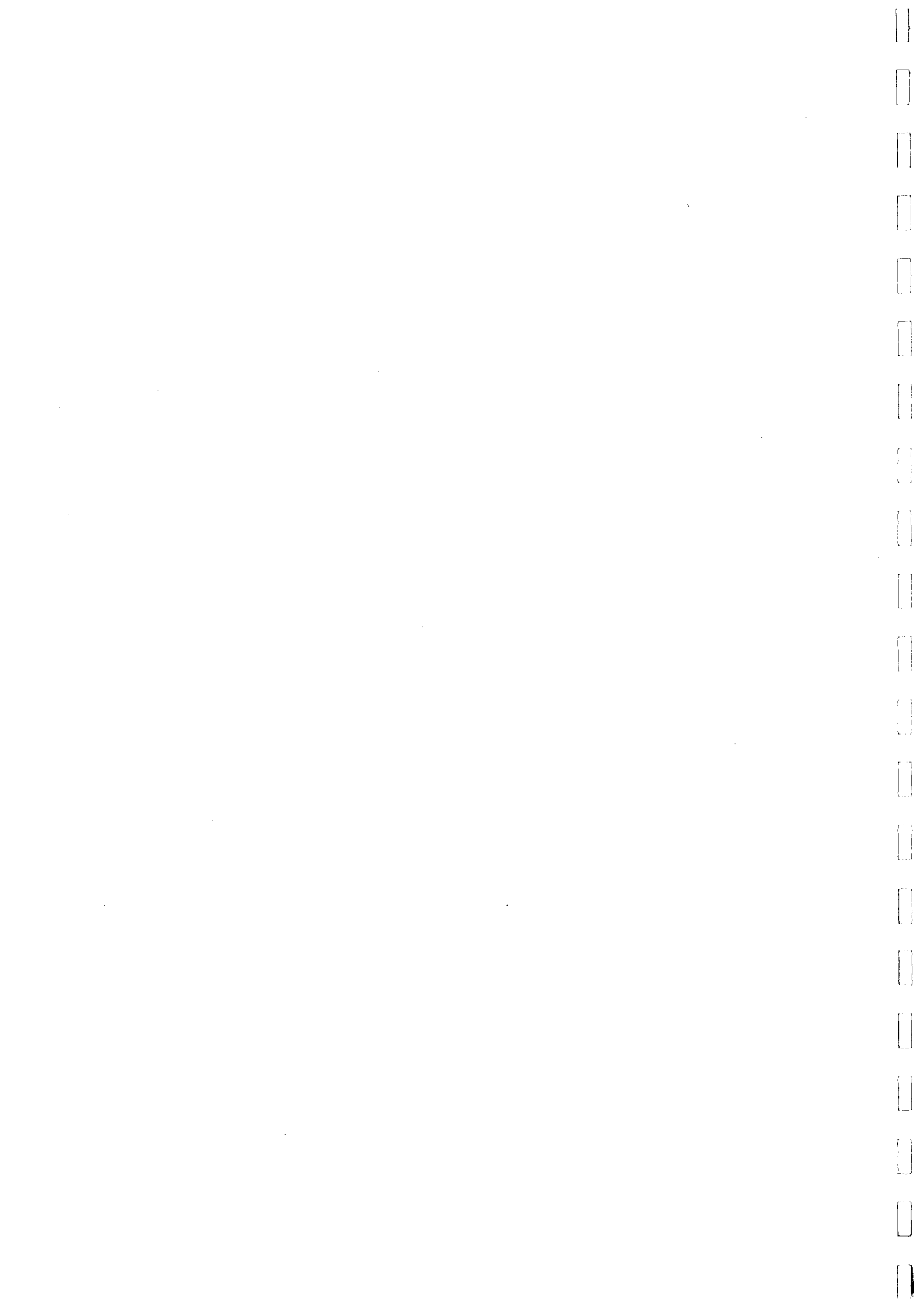
ACTES DE LA JOURNEE DE NICE DU 18 MAI 1991

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE AU LYCEE

POURQUOI ET COMMENT ?

IREM DE NICE

[illegible]



Dans le cadre de ses journées de travail, la Commission Inter Irem Analyse a organisé le 18 mai 1991, à Nice, une rencontre autour du thème :

L'enseignement de l'analyse au lycée. Pourquoi et comment ?

Maggy Schneider, dans son exposé et dans l'atelier qui a suivi, a expliqué comment certaines erreurs des élèves dans les calculs d'aires et de volumes, révèlent des conceptions erronées qui font obstacle, en terme d'obstacle épistémologique, à l'apprentissage du calcul intégral.

Marc Legrand a présenté le débat scientifique en cours de mathématiques, et plus particulièrement le rôle que ce débat peut jouer pour faire entrer les élèves et les étudiants dans une problématique mathématicienne, notamment en analyse.

Michèle Artigue a raconté l'histoire d'un objet d'enseignement : les fonctions de référence en Première S.

André Deledicq a commenté des expériences d'enseignement de l'Analyse Non Standard en DEUG et en Première S, et a montré comment l'introduction de l'ANS permet une manipulation rigoureuse des ordres de grandeur pour les débutants en analyse.

Nous publions ici les textes issus de ces travaux.

Maggy Schneider nous demande de préciser que son texte est la retranscription de l'enregistrement de son exposé et propose au lecteur, et à la lectrice, de consulter la bibliographie jointe pour prendre connaissance de ses travaux dans un style moins oral.

Si vous souhaitez réagir à ces textes, vous pouvez envoyer vos écrits à Maryse Maurel, responsable de la Commission Inter Irem Analyse, Irem de Nice.



SOMMAIRE

Des objets mentaux "aire" et "volume" aux calculs des primitives	1
Maggy Schneider	
Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse	33
Marc Legrand	
Enseignement de l'analyse et fonctions de référence	61
Michèle Artigue	
De l'analyse non standard au calcul infinitésimal	75
André Deledicq	
L'histoire de l'enseignement de l'analyse et le non standard	108
Contribution au débat de Martin Zerner	



DES OBJETS MENTAUX "AIRE" ET "VOLUME"

AUX CALCULS DES PRIMITIVES ;

Maggy Schneider

Avant de devenir des concepts mathématiques, les aires et les volumes sont des objets mentaux, au sens de Freudenthal, c'est à dire que les apprenants ont de ces concepts des représentations mentales induites dans leur chef par leur environnement culturel, leur vécu quotidien, et aussi leur passé scolaire. Nous avons exploré ces objets mentaux, en particulier celles de leurs facettes qui font obstacle, au sens d'obstacle épistémologique, à la définition des aires et des volumes au moyen des intégrales définies et à leur détermination par le biais des primitives.

On voit donc ici la théorie sous-jacente à cette **première hypothèse de travail**, hypothèse sous-jacente à toute théorie sur les représentations : on enseigne "dans du plein", pour reprendre une expression de Stella Baruk, on ne déverse pas les concepts mathématiques dans un coin vide du cerveau de l'élève, mais l'apprentissage de ces concepts va être entravé ou facilité par ce que les élèves ont déjà dans la tête, induit par leur environnement culturel, ou autre.

Nous avons aussi élargi l'investigation à d'autres objets mentaux, ceux qui sont associés au concept de vitesse, de débit, de tangente. Pourquoi ? L'hypothèse sous-jacente à cet élargissement est la suivante. Les surfaces et les solides sont des objets qui font partie du monde physico-géométrique et qui sont modélisés par un calcul formel, calcul qui opère sur des fonctions à travers le calcul des primitives. D'autres objets issus du monde physico-géométrique, les vitesses et les tangentes, sont eux aussi modélisés par un calcul formel, le calcul des dérivées. Et il y avait lieu de penser a priori que des hypothèses faites à propos des objets mentaux "surfaces", "solides" et de leurs mesures, pouvaient être corroborées par des observations faites sur les objets mentaux associés aux vitesses et aux tangentes, ce qui s'est effectivement réalisé.

Une **deuxième hypothèse de travail** a été de penser que le théorème fondamental du calcul intégral était au coeur de la modélisation du monde physico-géométrique par un calcul mathématique.

(Par théorème fondamental, nous entendons le théorème dont la thèse est, dans des notations que vous reconnaîtrez

$$D \int_a^x f(u) du = f(x)$$

et sa conséquence :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.)

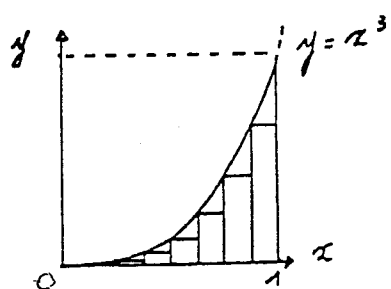


figure 1

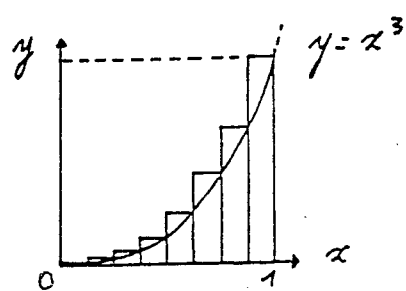


figure 2

Et cette deuxième hypothèse a orienté notre méthodologie de recherche, j'en parlerai à la fin de l'exposé : nous avons construit toute une série de problèmes qui, à terme, débouche sur le théorème fondamental du calcul intégral. Dans l'histoire des mathématiques, on voit ce théorème jouer un rôle tout à fait particulier, dans le sens où l'analyse devient une discipline autonome de la géométrie, qui a ses règles propres à partir du moment où Newton et Leibniz ont mis en évidence le lien de réciprocity entre processus d'intégration et processus de dérivation. Nous avons pensé que, dans l'histoire individuelle des élèves, le théorème pouvait jouer un rôle assez semblable et nous avons constaté effectivement que c'était vraiment un noeud : il nous a été impossible de trouver des problèmes qui suscitaient chez les élèves la découverte de ce théorème, c'est vraiment un morceau extrêmement consistant.

Pour la plupart des hypothèses que nous avons mises à l'épreuve, à la fois sur les aires, les volumes, les tangentes, les vitesses, nous avons trouvé une interprétation globale, qui a été la thèse défendue, et qui peut s'énoncer comme suit :

Les grandeurs physico-géométriques font l'objet d'une première perception de la part des élèves du secondaire. Etant considérée par eux comme un donné incontournable dont les mathématiques doivent être une copie quasi-conforme, cette perception fait obstacle à la modélisation mathématique de ces grandeurs par le biais du calcul infinitésimal.

Je reviendrai en bout d'exposé sur cette thèse, car je compte procéder un peu par cercles concentriques. Je vais partir de difficultés relatives au calcul d'une aire curviligne et décrire des réactions d'élèves, puis je donnerai une interprétation de ces difficultés comme hypothèse relative à la manière dont les élèves perçoivent le concept de limite. Je passerai ensuite à une deuxième réaction, difficulté des élèves à propos de la notion de tangente et je montrerai que l'hypothèse précédente tient le coup pour interpréter ces nouvelles difficultés. Puis je décrirai des erreurs d'élèves dans les calculs d'aires et de volumes et je montrerai que l'hypothèse précédente s'intègre dans un schéma d'interprétation plus global, que nous avons appelé **l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions**, qui, à son tour, fait partie d'un noyau encore plus général que j'ai énoncé dans la thèse, **séparation non nette entre l'illusion d'un monde sensible et les mathématiques**. Et cette dernière interprétation, non seulement rend compte de toutes les difficultés précédentes, mais en plus du refus qu'ont certains élèves des concepts de débit et de vitesse instantanés. Dans mon exposé, j'élargis donc l'interprétation à chaque fois que j'introduis des erreurs ou des réactions d'élèves.

Je commence par les **difficultés relatives au calcul d'une aire curviligne**. Voici, grosso modo, comment ça s'est passé dans les classes, je reviendrai en fin d'exposé sur la façon dont s'est déroulée l'expérimentation.

Nous avons demandé aux élèves de calculer l'aire sous la courbe $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1, j'appelle A cette aire. Avec l'aide du professeur, après de multiples recherches dont je ne vais pas décrire ici le détail (qui a été analysé dans mon travail), les élèves sont arrivés à écrire l'expression polynomiale de la somme des aires de n rectangles inscrits dans la surface comme dans la figure 1, soit

$$S_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

puis, ils sont arrivés à faire de même pour les rectangles de la figure 2, ce qui donne

$$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

Le professeur a alors demandé quelle était en définitive la valeur de l'aire sous la courbe. La plupart des élèves constatent alors qu'il y a ce terme $\frac{1}{4}$ qui est commun aux deux sommes et

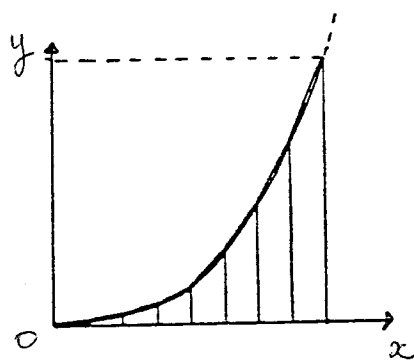


figure 3

qu'il y en a d'autres qui comportent n , et que ces termes $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{4n^2}$ deviennent de plus en plus négligeables au fur et à mesure que l'on prend un grand nombre de rectangles. Leur conclusion, assez unanime, est que l'aire doit être proche de $\frac{1}{4}$.

Le fait que l'aire soit encadrée par les sommes S_1 et S_2 conduit un certain nombre d'élèves à dire que l'aire vaut $\frac{1}{4}$ exactement.

Ce n'est pas le cas de tous, et c'est ce fait qu'on a voulu prendre en considération. D'autres persistent dans l'idée que l'aire vaut à peu près $\frac{1}{4}$, mais qu'il n'est pas possible que ce soit tout à fait égal à $\frac{1}{4}$. Pour le justifier, ils utilisent des arguments divers. Certains disent que

$\frac{1}{2n}$ ne sera jamais tout à fait nul, $\frac{1}{4n^2}$ non plus, parce que n n'atteindra jamais tout à fait l'infini. Certains font la moyenne arithmétique entre les sommes S_1 et S_2 , ce qui leur donne la somme des aires des trapèzes de la figure 3. Ils en déduisent qu'on obtient toujours un résultat excédentaire, étant donné que les côtés supérieurs de ces trapèzes surplombent la courbe. D'autres ont des arguments qui débouchent sur l'**alternative** suivante :

- Tant que les rectangles ont une certaine épaisseur, ils ne remplissent pas tout à fait la surface considérée, il reste des petits triangles à combler (si on se limite à l'approximation par défaut).

- Et, lorsque les rectangles sont réduits à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal comment leur somme conduit au résultat cherché.

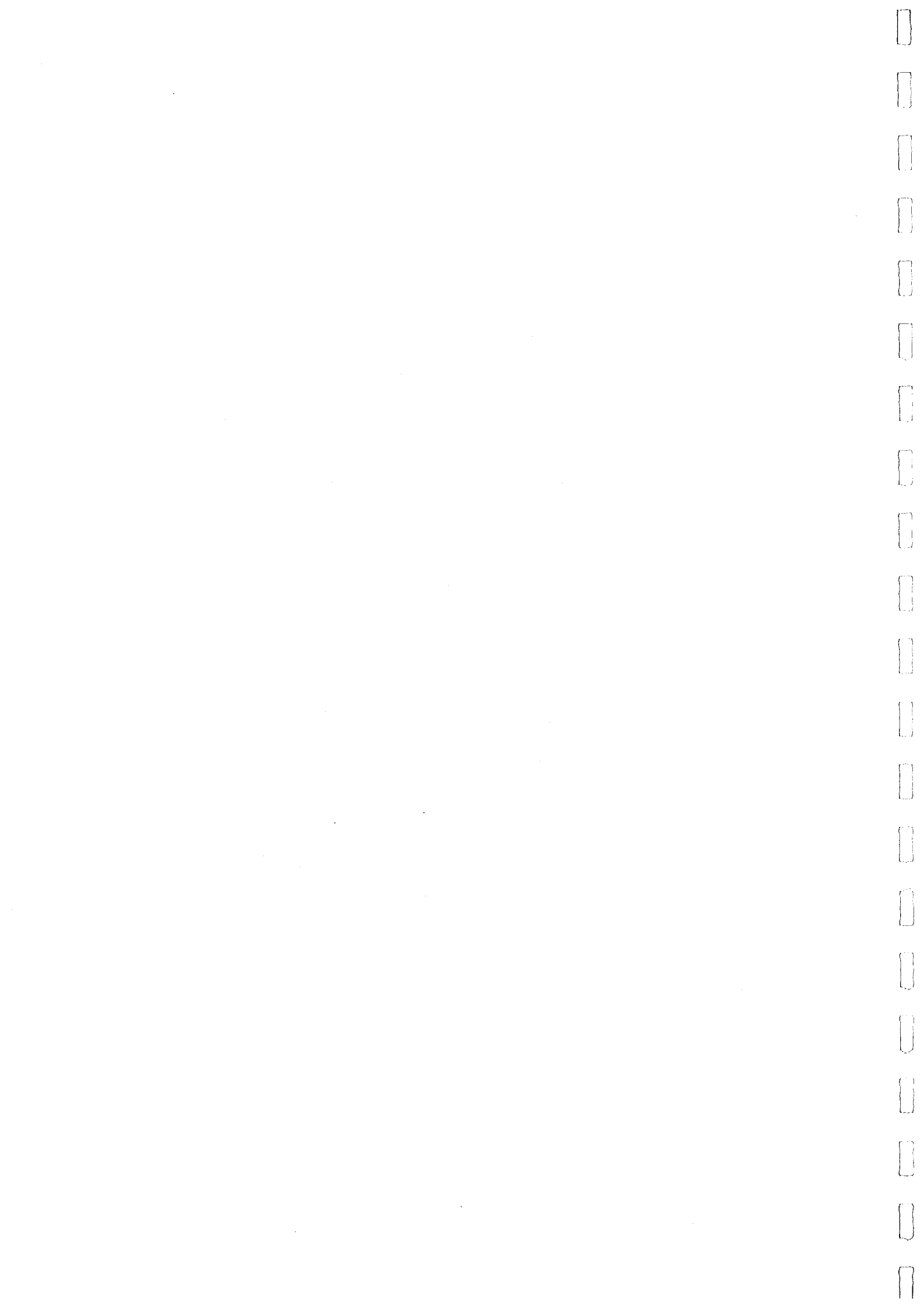
Cette alternative provoque un débat dans la classe et, en général, a tôt fait de faire douter tous les élèves, y compris ceux qui étaient persuadés que l'aire devait valoir $\frac{1}{4}$.

Je précise aussi qu'il est assez rare de voir une grande partie d'élèves formuler aussi clairement l'alternative par eux-mêmes, en général un élève donne une partie de l'alternative, un autre élève donne l'autre partie et, progressivement, sans l'intervention du professeur, ces éléments surgissent au milieu de la classe. Quand on veut ensuite les confronter, rien ne va plus dans la tête de personne. Il en est de même dans la tête de certains professeurs : que répondre à ces questions autrement que par une réponse de mathématicien affirmant que l'aire est une intégrale, réponse qui n'apporte rien à la compréhension de l'élève ?

Nous avons interprété le fait que les élèves soient si sensibles à cette alternative par la manière qu'ils ont de concevoir le passage à la limite. Il y a des **différences entre la limite des élèves et la limite mathématique** au moins par trois aspects :

- En mathématique, nous faisons la somme des aires d'un nombre fini de rectangles, puis nous fabriquons, en augmentant le nombre de ces rectangles, une suite dont on prend la limite au sens mathématique du terme. Tout se passe comme si, chez les élèves, la limite portait, non pas sur la somme des aires prise comme entité numérique, mais au contraire sur chacun des rectangles considérés comme une grandeur. Le mot limite est pris dans un sens très géométrique, au sens presque de la perception visuelle, sauf qu'il s'agit ici d'une imagerie mentale où les élèves voient les rectangles se réduire à vue en segments. Ils vont jusqu'à dire que la limite des rectangles, c'est les segments, qui combleront parfaitement la surface, mais avec le problème que le segment n'a plus d'aire. Il y aurait une sorte de glissement entre le contexte numérique et une perception des grandeurs, avec un retour en fin de parcours vers le contexte numérique lorsque les élèves essaient d'interpréter le résultat $\frac{1}{4}$

comme étant la somme des aires des rectangles réduits visuellement à des segments. De plus les élèves ne perçoivent pas souvent la suite mais une somme mobile, indéfiniment allongeable, dont les termes diminuent au fur et à mesure qu'ils deviennent de plus en plus



nombreux et nous obtenons des propos tels que celui-ci : on fait une somme infinie sur un nombre infiniment grand de rectangles d'aire infiniment petite.

- Le deuxième aspect est lié à la définition en (ϵ, δ) de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Cette définition forme un tout indissociable dont on ne peut isoler ni l'expression "f(x) tend vers b", ni l'expression "x tend vers a", qui, en analyse classique, ne reçoivent pas de sens quand on les prend isolément. Dans cette définition aussi, on choisit d'abord ϵ de manière arbitraire, le ϵ donnant la proximité entre $f(x)$ et b . Le choix de ϵ conditionne le choix du δ , qui donne la distance maximale entre x et a : x ne peut donc pas évoluer tout seul, il évolue en fonction de $f(x)$. Et c'est la même chose dans le cas qui nous intéresse, le nombre de rectangles qu'on prend ou, ce qui revient au même dans le cas d'une subdivision régulière, leur base Δx , est régi par la progression des aires formées des rectangles vers l'aire curviligne : on se donne un ϵ , on veut que la différence entre l'aire sous la courbe et la somme des aires des rectangles soit inférieure à ϵ , et c'est le choix du ϵ qui va conditionner le choix du nombre de rectangles ou le choix de leur base. Or rien de tel pour les élèves qui s'occupent, comme on l'a vu, de réduire à vue la base des rectangles jusqu'à 0 de manière complètement autonome, sans qu'ils ne fassent plus du tout allusion à la progression des aires formées des rectangles vers l'aire curviligne. En fait, les élèves ont en tête la "limite" d'une variable, c'est à dire qu'ils octroient un sens de manière intuitive à l'expression " Δx tend vers 0" ou "x tend vers a". Ce qui donne un sens à cette expression, c'est l'idée de mouvement, puisque l'imagerie mentale qu'ils ont dans la tête est un dessin animé, ils voient les rectangles se réduire en segments, leur base se réduire en un point.

- Le troisième aspect concerne la distinction entre l'**infini potentiel** et l'**infini actuel**. L'infini potentiel exprime une possibilité de dépassement, l'infini actuel plutôt une idée d'accomplissement. On ne peut pas vraiment dire que la définition en (ϵ, δ) relève de l'infini potentiel, parce qu'en fait cette distinction relève d'un discours philosophique que la définition en (ϵ, δ) avait pour but de supplanter, mais, des deux facettes potentielle et actuelle, seule la facette potentielle est restée dans la définition en (ϵ, δ) : on y exprime la possibilité de réduire à volonté la différence entre $f(x)$ et b . Chez les élèves il y a un mélange entre l'infini potentiel et l'infini actuel. Il y a l'infini potentiel dans le sens où, d'eux-mêmes ils disent qu'on peut réduire à volonté la différence entre l'aire sous la courbe et la somme des aires des rectangles, mais, ce qui est autre par rapport au discours mathématique, c'est qu'il y a aussi l'infini actuel, c'est à dire que dans l'imagerie mentale des élèves, il y a accomplissement : en se réduisant, les rectangles finissent par devenir des segments ; leur base se réduit, finit par devenir un point et Δx finit par devenir 0. C'est d'autant plus normal qu'ils ont l'attention attirée par la base des rectangles en tant que grandeur, or ce segment est une grandeur continue qu'on peut voir se réduire à vue en un point alors que la mesure de cette largeur qui est ici $\frac{1}{n}$, a une allure beaucoup plus discrète. De plus $\frac{1}{n}$ est lié à l'infiniment grand n , ce qui fait que les élèves répugnent plus vite à remplacer $\frac{1}{n}$ par 0 alors que annuler Δx ne les gêne nullement.

A l'appui de cette interprétation, nous pouvons avancer que l'alternative dont j'ai parlé a un sens dans la perception visuelle des élèves.

Si on considère les grandeurs comme des ensembles de points et si on pense à la partition du point de vue ensembliste, ou bien ce sont vraiment des rectangles et ils sont surmontés de sortes de petits triangles, ou bien ils sont réduits en segments. L'alternative fonctionne donc très bien au sens de la perception des grandeurs.

Maggy Schneider Actes analyse NICE 18 mai 1991

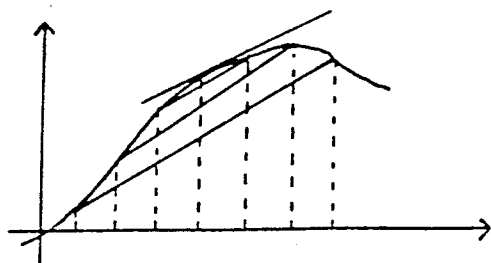


Fig.4

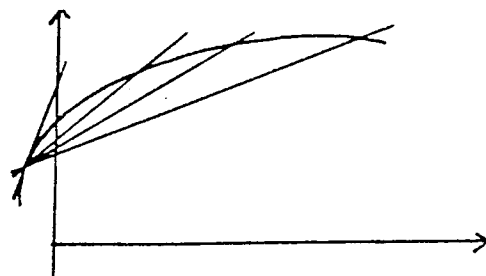


Fig.5

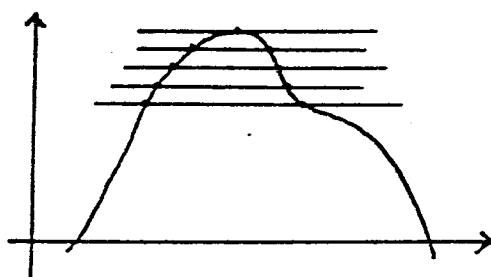


Fig.6

Au sens mathématique, cette alternative n'a plus de sens du tout. Le nombre $\frac{1}{4}$, qui est ici le résultat de la limite, est extérieur à la suite en ce sens qu'il n'est pas un de ses termes. Il n'y a pas lieu d'interpréter $\frac{1}{4}$ comme la somme des mesures des rectangles, même si les rectangles sont devenus des segments, or c'est ce que font les élèves, une fois qu'ils ont réduit les rectangles à vue, ils retournent dans le domaine numérique et ils essaient d'interpréter $\frac{1}{4}$, en général comme étant la somme des aires des rectangles devenus segments.

Pourquoi ? Sans doute, pensent-ils que pour obtenir une aire, on somme en général des aires. Peut-être qu'implicitement aussi, ils pensent qu'on ne peut obtenir un résultat fini en sommant les longueurs d'un nombre infini de segments. Quoiqu'il en soit, c'est l'impasse puisqu'ils arrivent à sommer des zéros. Mais l'impasse est à ce point insoutenable pour certains élèves que quelques uns n'hésitent pas à parler de la longueur des segments. L'un d'eux dit la chose suivante : "pour des segments, on ne somme pas leur surface, mais on somme leur longueur et cette somme remplit tout à fait la surface sous la courbe". On voit très bien dans ce propos le déplacement entre le domaine numérique et le domaine des grandeurs, glissement tout à fait inconscient qui caractérise ici le dérapage des élèves.

A propos de la question de savoir si l'aire curviligne sera atteinte par les aires des rectangles, je voudrais ajouter que cette question a du sens pour les élèves et qu'elle revient sans cesse dans le contexte des aires et des volumes et dans beaucoup d'autres contextes.

Remarquons aussi le fait que l'aire sous cette courbe soit $\frac{1}{4}$ n'est pas neutre non plus. Par exemple, le fait que l'aire d'un disque donne π , et qu'on l'obtienne à la suite d'un processus infini, convient très bien aux élèves : il y a un processus infini et π n'est jamais tout à fait atteint. Mais accepter que $\frac{1}{4}$ ou 0,25 puisse être obtenu comme le résultat d'un processus infini, c'est d'une autre nature que d'accepter que l'aire du disque soit π .

Nous avons quelque chose de comparable au niveau des tangentes. Il a été relevé dans plusieurs recherches, entre autres celles de Bernard Cornu et Anna Sierpiska, que les élèves éprouvent beaucoup de peine à associer pente de tangente et limite de quotient différentiel. L'hypothèse formulée plus haut permet d'interpréter aussi ces **difficultés relatives à la notion de tangente**.

Pour les élèves, la tangente ne serait pas ce qu'elle est en mathématique, c'est à dire la droite dont la pente est la limite de la fonction taux d'accroissement, mais ce serait la "limite", au sens de "position limite" des sécantes, en fait comme si on avait mis une topologie inconsciente et induite sur l'ensemble des droites. (figures 4, 5 et 6).

Les élèves font le circuit suivant : au lieu de partir des sécantes qui sont des objets géométriques, de passer à leur pente, qui sont des objets numériques symbolisés, puis de prendre la limite dans le domaine numérique, qui donne la pente, et de définir la tangente par la biais de cette pente, ils passent à la "limite" au sens géométrique du terme et reviennent après à la pente de la tangente avec cette impasse constatée dans l'histoire des mathématiques, qu'on a appelée l'impasse du $\frac{0}{0}$. $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, on n'a plus de pente et c'est difficile.

A ce sujet Bernard Cornu a relevé les propos suivants : "Une fois que les deux points se sont rejoints, la règle tombe, un point ne suffit pas pour déterminer une droite, il n'y a plus de tangente, ou bien il y en a plusieurs, en tout cas, on ne sait pas déterminer sa pente, etc".

J'ai relevé des propos du style : "Pour avoir la pente, il faudrait d'abord avoir la tangente, puis on aurait la pente". Mais le circuit inverse semble a priori tout à fait

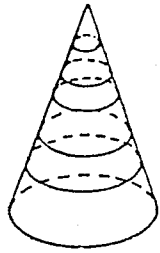


Fig. 7

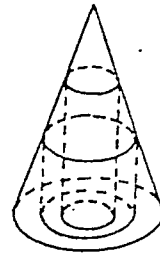


Fig. 8

impensable. Comme je l'ai dit pour les aires et les volumes, le mot limite est pris, ici aussi, en un sens très géométrique ; de plus le Δx et le Δy évoluent de manière tout à fait autonome, sans qu'il soit fait référence à leur rapport; donc Δy se réduit à 0, Δx aussi et c'est lorsqu'ils sont réduits à 0 qu'on se demande si on peut encore faire leur rapport (ici, il y a présence d'un infini actuel en ce sens qu'il y a accomplissement).

Il y a de nouveau un infini actuel, favorisé par l'idée de mouvement : dans ce mouvement où des sécantes tournent autour d'un point, rien ne les empêche d'atteindre effectivement la position limite de la tangente. Et si on pense au deuxième point de rencontre avec la courbe qui se rapproche du premier, rien ne l'empêche de tomber effectivement sur ce dernier.

Une remarque en passant, cette idée de sécante qui tourne autour d'un point est déjà un effet de l'enseignement : quand on laisse travailler les élèves sur la notion de tangente, ils prennent plus volontiers deux points qu'ils rapprochent l'un de l'autre en les bougeant tous deux, plutôt que d'en laisser un fixe et de faire bouger le deuxième (idée pertinente, qui pourrait être exploitée).

Je poursuis en décrivant quelques **erreurs d'élèves à propos des calculs d'aires et de volumes**, erreurs qui s'interprètent au moyen de ce que nous avons appelé **l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions**. Cet obstacle, à son tour, prend en compte tout ce que nous venons de faire comme hypothèses sur le passage à la limite, donc nous avons ici un élargissement de l'interprétation.

Je rappelle d'abord le principe suivant de **Cavalieri** : si deux solides sont compris entre des mêmes plans parallèles et si les sections déterminées dans l'un et l'autre par des plans parallèles au premier, sont soit égales, soit toujours dans un même rapport, alors les volumes de ces solides sont soit égaux, soit dans le même rapport.

On imagine le principe équivalent pour deux surfaces : on décompose deux surfaces en lignes, suivant une direction et on compare les longueurs des lignes déterminées. Si elles sont égales ou dans un même rapport, alors on transpose le rapport aux aires des surfaces.

Cavalieri appelle **indivisible** soit des sections planes découpées dans les solides, soit les lignes découpées dans les surfaces. Seulement, dans la caractérisation des indivisibles, il y a d'abord une dimension en moins, on passe de la dimension 3 à la dimension 2, ou de la dimension 2 à la dimension 1, mais aussi, pour être indivisible, il faut avoir été découpé suivant des règles très strictes, Cavalieri impose donc, même s'il ne le fait pas toujours, de découper les plans parallèlement à deux plans fixes et les lignes parallèlement à ce qu'il appelle une droite regula.

Alors, on imagine fort bien un dérapage : on découperait des surfaces dans des solides et des lignes dans les surfaces, mais les règles de découpage ne seraient pas respectées, auquel cas nous mettrons le mot *indivisible* entre guillemets. Si on parvient à décomposer en ensembles équipotents d'"indivisibles" et si ces "indivisibles" ont des mesures proportionnelles, alors, en général, les élèves concluent que les mesures des grandeurs sont dans le même rapport.

Ce type de dérapage est suggéré par un élève qui considère la surface d'un cône droit comme l'assemblage des cercles qu'y découpent des plans parallèles à sa base (figure 7). Il associe à chacun des cercles sa projection sur la base du cône (figure 8). Les cercles ainsi projetés composent le cercle de base. L'élève en conclut que l'aire de la surface latérale du cône est égale à l'aire de sa base, puisque ces deux surfaces sont composées d'un même nombre de cercles égaux deux à deux. Et beaucoup d'élèves sont impressionnés par cette mise en correspondance bijective d'indivisibles égaux. Ils lui opposent des cas extrêmes, comme celui d'un cône de 500 km de haut.

Il y aurait donc, dans le chef des élèves, un principe équivalent au principe de Cavalieri, mais ce principe ne respecte plus les règles de découpage et là, se situe évidemment un piège. Dans certains cas, on a de bons résultats au sens de la théorie des intégrales, mais

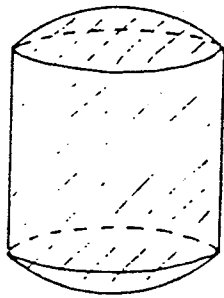


Fig. 9

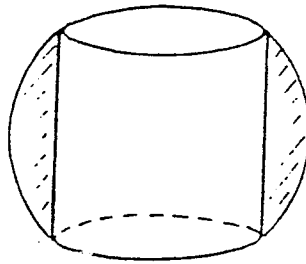


Fig. 10

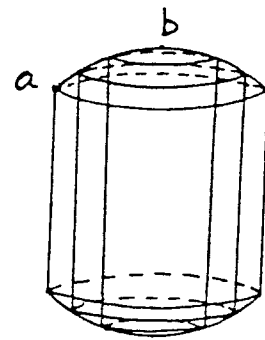


Fig. 11

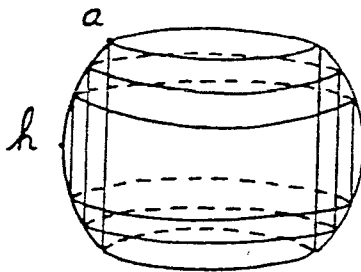


Fig. 12

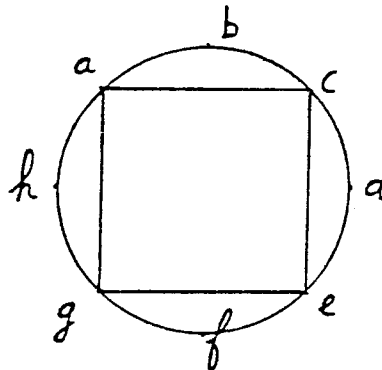


Fig. 13

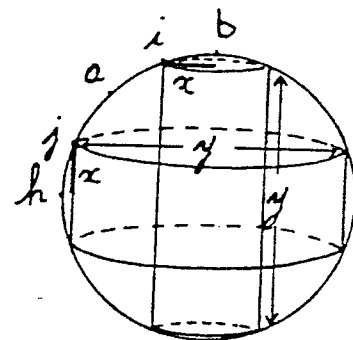


Fig. 14

Du cylindre au cône, tout de go.

Le volume d'un cône - droit, par exemple - égale le tiers de celui du cylindre qui lui est circonscrit. Peut-on pressentir ce résultat - fût-ce approximativement - en comparant directement ces deux solides l'un à l'autre, ou leurs indivisibles? Serait-ce éclairant de les décomposer tous deux en sections radiales contenant leur axe commun (Fig 15) Pourquoi?

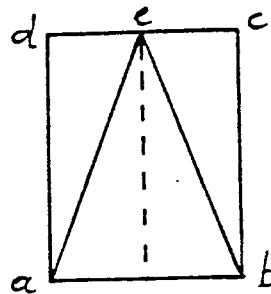
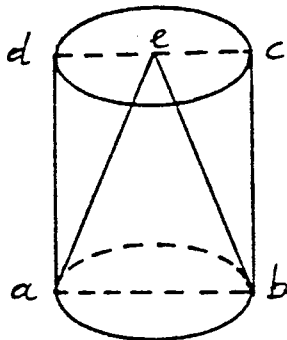


Fig 15

souvent on a des erreurs ou des paradoxes. Un paradoxe célèbre, proposé aux élèves, est celui qui a servi de discussion entre Torricelli et Cavalieri.

Un drôle de découpage de la sphère. Inscrivons dans une sphère un cylindre dont le diamètre égale la hauteur et partageons la sphère en deux solides, le premier constitué du cylindre et des deux calottes sphériques qui coiffent ses bases (figure 9) et le second obtenu en ôtant le premier solide de la sphère (figure 10).

Ces deux solides ont le même volume, car ils sont composés d'un même nombre de surfaces cylindriques emboîtées les unes dans les autres et égales deux par deux. En effet, d'une part, on peut décomposer le premier solide en autant de surfaces cylindriques qu'il y a de points sur l'arc de cercle ab et le second en autant de surfaces qu'il y a de points sur l'arc de cercle ah (figures 11 et 12). Or, étant donné les proportions du cylindre inscrit dans la sphère, ces deux arcs de cercle valent tous les deux le huitième du cercle et sont dès lors composés du même nombre de points (figure 13). D'autre part, les surfaces cylindriques qui constituent les deux solides, égales en nombre, sont aussi égales, deux par deux, en aire. Les surfaces prises respectivement dans chacun de ces solides, en des points i et j équidistants de a ont effectivement une même aire égale à $2\pi xy$ ($= 2\pi \cdot 2x \cdot y/2$) (figure 14)

(Ce raisonnement a été décrit et analysé par Torricelli, au XVII^e siècle, dans un texte intitulé "Campo di tartuffi" (champ de truffes) et mentionné par F. De Gandt, 1983. Et vous, qu'en pensez-vous ?)

Ici, on interroge les élèves et aucun ne pense a priori que les deux solides pourraient avoir le même volume : cela choque l'intuition. Mais arrivés au bout du raisonnement, qu'ils ont quand même du mal à suivre, ils acceptent et vont chercher de bonnes raisons de s'être laissé duper dans un premier temps. L'un dit : "ça, c'est un solide creux, et les solides creux c'est trompeur, parce qu'il y a une petite surface, elle tourne autour d'un axe de rotation mais elle tourne loin, et plus elle tourne loin et plus ça engendre du volume".

Une autre erreur beaucoup plus classique, dans le sens où elle intervient en dehors de toute expérimentation, c'est de considérer des sections radiales et d'extrapoler au volume des solides les rapports entre les aires des sections radiales. Par exemple le cône est engendré par un triangle, le cylindre est engendré par un rectangle; entre l'aire du triangle et celle du rectangle il y a un rapport de 1 à 2, donc il devrait y avoir un rapport de 1 à 2 pour les volumes du cône et du cylindre (figure 15). Là, les élèves savent bien que ce n'est pas vrai, mais ils posent la question et s'étonnent du résultat.

Et là où ils dérapent fréquemment, c'est lorsqu'on leur demande de calculer le volume d'un solide engendré par la rotation d'une surface autour de l'axe Ox . Une procédure assez fréquemment rencontrée, est de calculer l'aire, de la comparer à celle du rectangle circonscrit et d'extrapoler le rapport aux volumes engendrés.

D'où vient un tel dérapage et que les élèves transfèrent si spontanément aux mesures des grandeurs une loi vérifiée par celles de leurs "indivisibles" respectifs ? Reprenons ce qui a caractérisé tout à l'heure notre interprétation sur la passage à la limite : il y avait un glissement dans la tête des élèves entre le domaine des nombres et le domaine des grandeurs, donc la limite s'interprétait, non pas au sens numérique, mais au sens géométrique, perceptif. Il y a quelque chose de semblable qui se passe ici.

Examinons, pour y voir plus clair, des grandeurs composées d'un nombre fini de morceaux. Supposons en effet que l'on dise : ces deux surfaces A et B sont composées chacune d'un même nombre n de morceaux A_i et B_i ; de plus, on peut associer deux par deux leurs morceaux respectifs de manière à ce que chaque morceau de la première surface ait une aire égale à celle du morceau correspondant dans la seconde :

$$m(A_i) = m(B_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

On conclura avec raison que les deux surfaces ont même aire :



$$m(A) = m(B). \quad (2)$$

C'est grâce à l'additivité de la mesure :

$$\begin{aligned} A &= \bigcup A_i; A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow m(A) = \sum m(A_i), \\ B &= \bigcup B_i; B_i \cap B_j = \emptyset \Rightarrow m(B) = \sum m(B_i), \end{aligned}$$

que l'on peut déduire (2) de (1). La même loi d'additivité permet de tirer l'inégalité

$$m(A) < m(B), \quad (3)$$

des inégalités

$$m(A_i) < m(B_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Cette formule d'additivité découle du fait que les morceaux A_i (ou B_i) forment une partition finie de la grandeur A (ou B). Elle constitue une sorte de "pendant numérique" de cette partition.

Envisageons à présent deux surfaces partitionnées chacune en une infinité de segments indivisibles dont les mesures respectives vérifient une relation du type (1) ou (4). A ces partitions ne correspond plus aucune relation numérique du type de l'additivité : on n'obtient l'aire d'une surface ni en additionnant les longueurs de ses indivisibles, ni en additionnant leurs aires nulles. Or, comment peut-on inférer une relation entre les mesures de deux grandeurs d'une relation entre les mesures de leurs indivisibles, si ce n'est - tout comme dans le cas fini - au départ d'une loi reliant, pour chacune de ces grandeurs, sa mesure à celles de ses indivisibles ? Il se pourrait cependant - c'est là notre hypothèse - que la partition d'une surface en ses indivisibles soit tellement présente dans l'esprit des élèves qu'elle supplée l'absence d'une telle loi dont elle assume indûment le rôle, induisant ainsi un passage abusif du rapport des indivisibles au rapport des surfaces. Ainsi les élèves glisseraient inconsciemment du contexte des nombres à celui des grandeurs, empruntant à ce dernier une argumentation, un maillon de leur raisonnement qui leur fait défaut dans le premier.

Ce genre d'interprétation tient le coup pour d'autres erreurs, par exemple celle-ci, qui est à rapprocher de la précédente, mais qui en est une autre forme : on veut toujours calculer le volume d'un solide de révolution engendré par une surface tournant autour d'un axe, on calcule l'aire de cette surface, on la multiplie par 2π , ou bien des erreurs ou des interrogations, même parfois d'étudiants de l'université qui disent : "Le volume d'un parallélépipède oblique, ce serait bien l'aire de sa base multipliée par la longueur de l'arête oblique ou en tout cas ce serait normal". Notons qu'il leur faut un certain courage pour exprimer cette intuition.

Voici une autre erreur, très intéressante. Il s'agit de calculer l'aire sous $y = x^3$ alors que les élèves connaissent déjà l'aire sous $y = x$ et l'aire sous $y = x^2$. Un élève a eu l'idée d'écrire $\frac{x^3}{x} = x^2$. Il connaît l'aire sous la courbe $y = x^2$, donc il extrapole ce rapport en écrivant que :

$$(\text{aire sous } y = x^3) / (\text{aire sous } y = x) = (\text{aire sous } y = x^2).$$

Là de nouveau, nous avons à faire à des rapports numériques, x^2 est le rapport de deux mesures. Mais, en fait tout se passe comme si les rapports numériques x^2 était perçus par l'élève comme grandeurs (en l'occurrence des segments), globalisés comme tels en surfaces dont ils forment une partition ; l'élève retournant en fin de compte dans le domaine numérique au moment où il propose l'aire de cette surface comme rapport entre les mesures des deux grandeurs initiales. Cette fois encore, les prémisses et la conclusion du

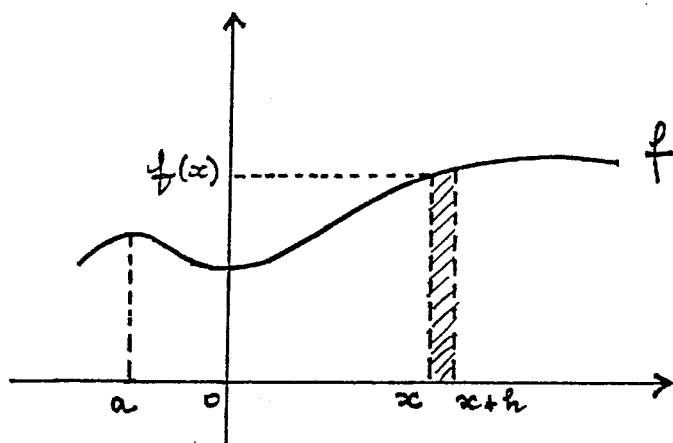


figure 16

raisonnement sont d'ordre numérique, mais le noeud de l'argumentation relève d'un partitionnement ensembliste des grandeurs.

Notons que ces deux erreurs ont été commises indépendamment l'une de l'autre et qu'elles ont donné du fil à retordre aux deux professeurs qui en étaient les témoins.

Enfin une dernière erreur, qui nous rapproche de la toute première, a été entendue d'un élève qui avait mémorisé le théorème fondamental du calcul intégral et qui le reproduisait. Il dit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(x+h) - S(x) = f(x) \quad \text{où} \quad S(x) = \int_a^x f(x) dx$$

Si h tend vers 0, la lamelle se rétrécit jusqu'à se réduire en un segment de longueur $f(x)$ " (figure 16). Il y a ici absence de dénominateur, et encore une fois, perception visuelle d'une lamelle qui se rétrécit et le segment de longueur $f(x+h)$ qui coïncide à la fin, dans une forme d'infini actuel, avec le segment de longueur $f(x)$. Ce que dit l'élève, c'est que le vestige visuel de la lamelle, c'est le segment et il traduit cela indûment en termes de nombres : puisque le segment est le vestige visuel de la lamelle, sa longueur, c'est ce qui reste de la mesure de la lamelle, c'est à dire son aire, et de nouveau le mot limite est pris ici en un sens très proche peut-être de son utilisation dans le langage courant, c'est "ce qui reste à la fin".

D'autres recherches, entre autres celles de Anna Sierpiska et de Christiane Hauchart ont montré que le mot limite était entaché de toute une série de connotations de par son usage dans le langage courant.

Cette dernière erreur autorise un schéma d'interprétation dans les termes suivants, appelé **obstacle de l'hétérogénéité des dimensions** :

- 1) **Une certaine perception des grandeurs s'immisce dans les calculs d'aires et de volumes, de manière inconsciente et induite.**
- 2) **Des grandeurs de dimensions distinctes sont mêlées au sein de cette perception.**

Cet obstacle s'intègre dans un schéma d'interprétation beaucoup plus global, celui que j'ai donné au départ : entre un monde sensible, un monde que l'élève a l'illusion de pouvoir appréhender par ses sens, et les mathématiques, il n'y a pas de séparation nette. Les mathématiques, c'est à dire les nombres, les intégrales, sont censées devoir traduire ce qu'on voit.

Cet obstacle permet d'interpréter le refus qu'ont certains élèves des concepts de vitesse et de débit instantanés. Dans le monde des mesures et des sens, on ne peut pas appréhender complètement les vitesses et les débits instantanés, c'est une création de l'esprit humain, une création mathématique, et dans la mesure où, dans le monde sensible, les vitesses et les débits instantanés n'existent pas, elles ne peuvent pas exister non plus en mathématiques, **comme si les mathématiques devaient être vraiment une copie quasi conforme de ce monde sensible.**

Je précise que l'étude qui a été faite ici est de nature qualitative, je n'ai rien contre les statistiques, mais je considère que des études plus quantitatives doivent compléter les autres.

Les problèmes ont été proposés à des élèves souvent néophytes en analyse, travaillant le plus souvent par groupes et ayant choisi une option forte ou moyenne en mathématiques (on peut supposer que les difficultés qu'ils éprouvent seraient a fortiori celles d'élèves plus faibles).

Notons ici qu'un certain nombre d'erreurs n'ont pas été rencontrées souvent, certaines, par contre, comme celles des sections radiales sont très fréquentes. Nous ne pouvons pas dire non plus que le refus des vitesses et des débits instantanés soit énoncé par une majorité dans la classe mais quand un élève en parle, les autres suivent. Un élève amorce, un deuxième continue et il y a un raz de marée dans la classe, tout le monde, des



élèves forts comme des élèves faibles, commencent à douter et les professeurs sont démunis pour répondre à ce genre de questions.

En tant que professeur, j'avais engrangé du matériel, des interrogations d'élèves comme : "Est-ce qu'une intégrale définie donne le résultat exact d'une aire ?".

Il y a eu aussi des réactions provoquées. Nous avons fait travailler des élèves sur des problèmes, des "vrais" problèmes pour autant qu'on sache les définir : ceux qui nécessitent une conceptualisation, qui sont proposés à des élèves vierges de toute connaissance mathématique sur ce sujet, ou bien des problèmes proposés à des élèves qui avaient déjà un bagage en analyse, et l'effet était le même. Des élèves qui terminaient l'université en mathématiques, ne savaient pas prendre en compte le problème des sections radiales. Ils étaient en formation pour être professeur, et, dans ce cadre, posaient la question : "C'est embêtant si on a des questions comme ça avec des élèves." Ils étaient démunis et toute une partie de leur intuition n'avait pas été prise en compte, travaillée, reformulée en intuition plus correcte. Il y avait comme un plaquage de la théorie mathématique ; ils avaient tu leurs intuitions, ils les gardaient pour eux. Certains avaient le courage d'en parler, et d'autres se reconnaissaient dans les interrogations des premiers.

J'ai aussi interrogé des étudiants de première année d'université sur leurs souvenirs, et je les faisais parler pour voir ce qu'ils avaient retenu de leurs études secondaires. Leurs réactions étaient à peu près comparables à celles de tous les autres élèves que nous avons interrogés.

L'hypothèse sous-jacente à cette expérimentation, c'est que, dans l'histoire des mathématiques, des "erreurs" ou des hésitations ont été révélatrices du développement des connaissances et qu'il en allait de même dans l'histoire des élèves.

L'histoire a été une source méthodologique importante dans le sens où elle a suggéré des problèmes. Par exemple le paradoxe sur la sphère découpée en deux solides. Plus généralement, l'histoire a servi de grille de lecture des réactions des élèves. Lorsqu'on constate qu'il y a des erreurs semblables qui se produisent à la fois dans l'histoire des mathématiques, chez des élèves forts, chez des élèves faibles, chez les professeurs, on peut penser que ce sont des erreurs qui ne sont pas des "distractions d'esprits fatigués", pour reprendre une expression de Bachelard, mais des vraies erreurs, celles qui vont révéler les obstacles épistémologiques.

Je n'ai pas le temps de caractériser les problèmes.

Je termine en parlant de la portée didactique de cette recherche. Je dois apporter quelques précisions sur la situation en Belgique, je ne sais pas s'il en est de même en France. Ma thèse est perçue comme un plaidoyer en faveur de ces problèmes utilisés comme projet d'enseignement : quand il y a une recherche et une méthodologie utilisée, en l'occurrence ici le travail que nous avons fait faire aux élèves, l'ensemble est compris comme modèle d'enseignement. Et, bien sûr, ce n'est pas notre objectif.

Dans le groupe où je travaille, nous pensons qu'il faudrait concevoir un cours d'analyse en plusieurs boucles, une première boucle pour prendre en compte les intuitions des élèves et une deuxième boucle avec une théorie plus formalisée, (sans que les deux boucles soient séparées). On traiterait d'abord des phénomènes très intuitifs liés aux apparitions de l'infini, et puis, après un certain temps, on en arriverait à poser des problèmes internes aux mathématiques, problèmes qui se résolvent par l'intermédiaire d'une théorie beaucoup plus formalisée. La deuxième boucle ne devrait pas venir artificiellement par rapport à la première, ce serait un prolongement qui devrait être naturel. En Belgique actuellement, dès la cinquième année du secondaire, les élèves doivent gérer de front la théorie formalisée et toute une série de phénomènes liés aux apparitions de l'infini. Il n'y a aucun processus infini avant l'avant dernière année du secondaire et puis tout arrive en bloc sous une forme bien léchée. Nous voulions éviter cet état de choses. Alors que pour la

géométrie ou l'arithmétique, il y a une première phase plus expérimentale, plus intuitive et la théorie formalisée vient plus tard.

Notre travail néglige aussi des aspects numériques, nous avons surtout pointé des phénomènes liés aux perceptions géométriques.

Et puis, il y a des problèmes pièges qui sont peut-être un peu longs, qui contiennent des difficultés parasites, c'était bien pour l'expérimentation, pour un projet d'enseignement, ce serait peut-être lourd à gérer. Il y a peut-être à prendre dans ce travail des problèmes qui pourraient être exploités en classe, mais au départ les problèmes ont été conçus comme méthodologie de recherche et non comme projet d'enseignement.

Pour les professeurs, ce travail est une promenade qui peut leur faire prendre conscience d'apprentissages négligés ou d'insistances particulières dans l'enseignement de l'analyse tel qu'il est habituellement pratiqué. En Belgique, l'apprentissage de l'analyse a souvent comme seul objectif l'étude de la variation d'une fonction. C'est important, mais on en oublie de travailler certaines intuitions.

Ce travail est aussi une grille de lecture d'erreurs et de réactions d'élèves, en même temps qu'une contribution à la définition du concept d'obstacle épistémologique qu'il illustre. Et fondamentalement, je reprends une distinction mise en valeur par Rouchier et Steinbrick, où le problème est de savoir si la recherche en didactique doit préparer des méthodes toutes faites, directement utilisables dans les classes, ou produire des outils conceptuels, avec lesquels le professeur forgera ses propres méthodes d'enseignement.

Est-ce-que c'est pareil quand c'est penché?

a. On connaît la formule de l'aire du rectangle. Certains manuels démontrent la formule de l'aire du parallélogramme par une transformation de celui-ci en un rectangle (Fig.1) : on déplace un triangle approprié d'un côté à l'autre de la figure. Et si le parallélogramme se présente comme sur la Fig.2 ?

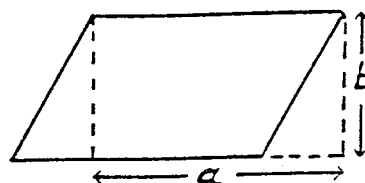
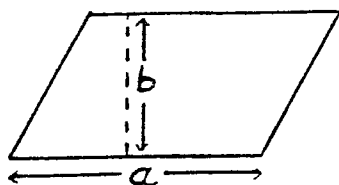


Fig.1

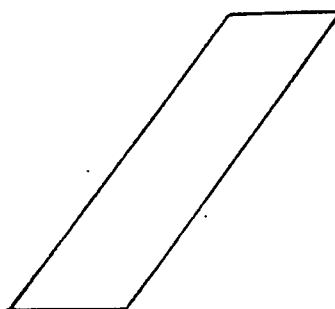


Fig 2

b. On connaît la formule du volume du parallélépipède rectangle. Trouvez celle qui donne le volume d'un parallélépipède oblique quelconque et justifiez-la.

c. Et que faire pour les prismes?

ATELIER DE Maggy Schneider

Nous avons vu ce matin que **mon travail n'est pas un plaidoyer pour un projet d'enseignement, mais que les problèmes ont été utilisés comme méthode de recherche**, le but étant de faire parler les élèves, de les faire buter sur des obstacles, et en ce sens-là, ils ont bien fonctionné.

Maintenant, je peux décrire les **cinq grandes catégories de problèmes** que j'ai exploités pour ma recherche, et nous pouvons voir quelles seraient les incidences, les inconvénients et les avantages si on proposaient ces problèmes comme projet d'enseignement. Je trouve beaucoup d'arguments contre l'utilisation de ces problèmes tels quels à des seules fins d'enseignement et je ne suis pas moi-même très favorable, mais il y a là un sujet à débat relativement intéressant.

Les problèmes se groupent donc en cinq catégories, ils ont pour fonction de déboucher sur la conceptualisation des processus d'intégration et de dérivation, et à terme, sur leur lien de réciprocité, c'est à dire sur le théorème fondamental du calcul intégral.

Le premier groupe de problèmes a pour fonction de mettre en défaut les méthodes d'équidécomposabilité et d'équicomplémentabilité utilisées en géométrie pour déterminer des aires et des volumes, et de déboucher à terme sur le recours à des découpages infinis, en l'occurrence les principes de Cavalieri.

Par exemple, le premier problème rappelle aux élèves la manière dont ils ont obtenu, à l'école élémentaire, l'aire du parallélogramme (figure 1), avec la difficulté que l'on connaît lorsqu'on prend un parallélogramme comme celui de la figure 2 et qu'on choisit comme base le petit côté. Dans le même ordre d'idée, on demande de rejustifier les volumes du parallélépipède rectangle, du parallélépipède oblique et du prisme. Le but n'est pas de trouver de nouvelles formules d'aires et de volumes, mais éventuellement de repasser par des formules connues et d'attirer l'attention des élèves sur les méthodes utilisées, avec description de l'équidécomposabilité et de l'équicomplémentabilité.

Maggy Schneider Actes analyse NICE 18 mai 1991

Le prisme oblique en 1743.

Vous trouverez ci-après un extrait des "Eléments de géométrie" publiés en 1743 par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765). Ce mathématicien français, connu du grand public surtout pour ses précisions relatives au retour de la comète de Halley en 1759, voulait enseigner la géométrie en s'appuyant le plus possible sur des évidences familières. Ci-après, il emprunte son argumentation au mathématicien italien Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Lisez ce texte et comparez la démarche de Clairaut à la vôtre.

"Formation des prismes obliques.

On connaît les prismes obliques formés par une base abc , qui se meut parallèlement à elle-même, et de telle façon que ses angles suivent des lignes parallèles ag , bh , cd , etc., qui s'élèvent hors du plan de la base, et qui ne lui sont point perpendiculaires.

Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

L'analogie qu'il y a entre cette formation et la formation des prismes droits, dont nous avons parlé, [...] donne facilement la mesure de la solidité [Le terme solidité signifie volume (d'un solide). (Note ajoutée au texte de Clairaut)] des prismes obliques ; car si on imagine à côté d'un prisme oblique $abcde$ $ghijk$ (Fig.1), un prisme droit $ABCDEF$ $GHIK$ (Fig.2), qui ait la même base, et que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans parallèles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

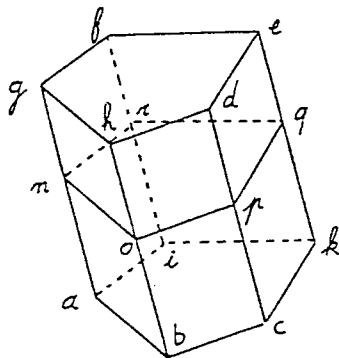


Fig.1

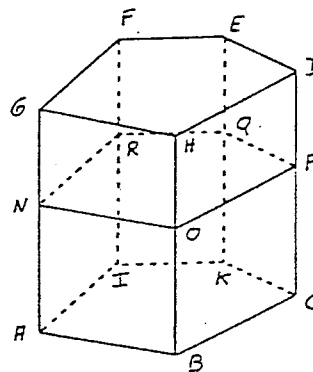


Fig.2

Car, si par un point quelconque P de la hauteur, on fait passer un plan parallèle à la base, les sections $NOPQR$, $nopqr$, que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases $ABCKI$, $abcki$, arrivées en $NOPQR$, $nopqr$, par le mouvement qui forme ces deux prismes ; et ainsi ces deux sections seront des polygones égaux.

Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par de mêmes plans coupants sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire, les prismes, soient égaux aussi. On énonce ordinairement ainsi cette proposition : les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur. On appelle la hauteur du prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'intérieur, ou sur son prolongement".

Nous avons aussi récolté leurs réactions à propos d'un texte écrit par Clairaut , (voir texte ci-contre), sur la manière d'obtenir le volume d'un prisme oblique, à partir du volume d'un prisme droit. Celui-ci utilise, en fait, le principe de Cavalieri : il décompose les solides en sections planes, dit que les sections ont même aire et en conclut que les solides ont le même volume.

Nous avons vu, dans les réactions des élèves, le germe d'incompréhensions qui allaient resurgir plus tard de manière plus sensible, comme l'alternative dont j'ai parlé ce matin : ou bien les tranches sont des petits prismes, auquel cas on ne démontre rien parce qu'ils sont obliques d'un côté et droits de l'autre ; ou bien ce sont des surfaces et on ne peut pas faire un solide en empilant des surfaces. Bien que certains élèves disent : "Une droite, c'est composé de points". Pour certains, il y a un interdit à utiliser des tranches, ça ne se fait pas, par contre pour beaucoup, il y a quelque chose d'intuitif et ils disent l'avoir toujours pensé (analogie avec un empilement de feuilles de papier comme sur la figure 3).

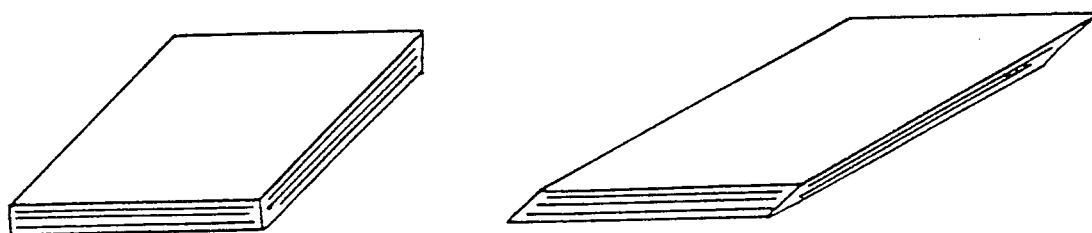


Fig. 3

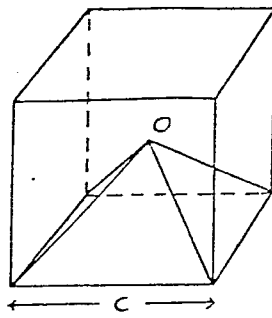


Fig. 4

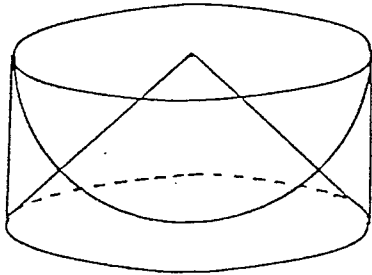


Fig. 5

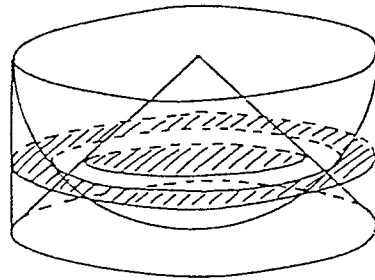


Fig. 6

$$r_1^2 = r_3^2 + m^2$$

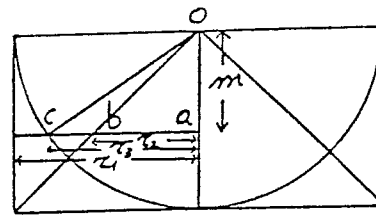
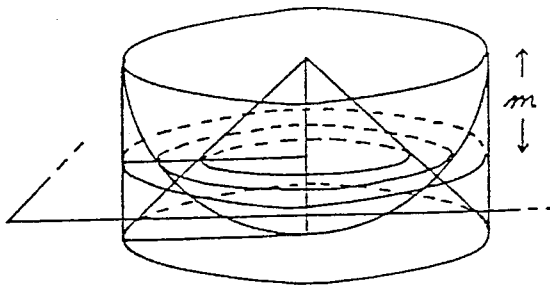


Fig. 7

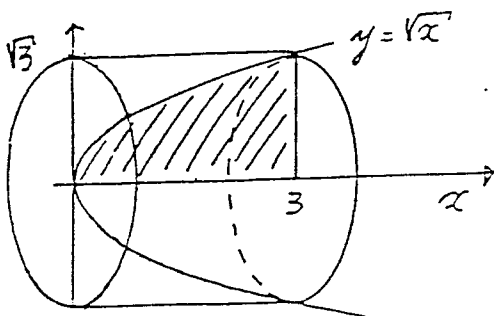


Fig. 8

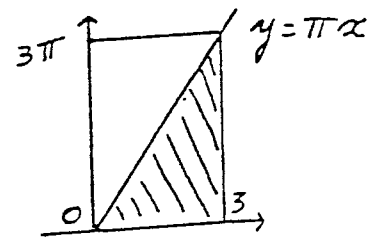


Fig. 9

Le deuxième groupe de problèmes montre l'impossibilité de calculer toutes les aires sous une courbe à l'aide des principes de Cavalieri et met en évidence que ces calculs d'aire sous une courbe standardisent les calculs d'aires et de volumes réductibles à l'intégrale d'une fonction d'une variable.

Ces problèmes ont pour fonction de faire travailler les principes de Cavalieri, vus une première fois à propos du texte de Clairaut, mais, cette fois, avec des indivisibles qui n'ont plus forcément la même mesure. On demande aux élèves de loger six pyramides isométriques dans un cube, ce qu'on obtient en partant du centre du cube et en allant sur chacune des faces (figure 4), et à partir de là de trouver le volume d'une pyramide quelconque. Ils y arrivent convenablement, mais rares sont les élèves qui, après avoir lu le texte de Clairaut, pensent à comparer, tranche par tranche, la pyramide quelconque à une pyramide de même hauteur susceptible d'occuper le sixième d'un cube.

Le problème de Valério, très connu, consiste à obtenir le volume d'une sphère à partir du volume du cône et du volume du cylindre, par coupes planes. La figure 5 est donnée aux élèves et nous avons vu, pour la première fois dans le cadre de cette expérimentation, que les sections radiales étaient vraiment un miroir aux alouettes pour beaucoup d'élèves. Ils connaissent le résultat ou ils s'en enquêtent, car ils savent que le but n'est pas de retrouver la formule, mais de contrôler par une méthode qu'on y arrive bien. On peut comparer le cône et l'"écuelle" que l'on obtient en ôtant l'hémisphère du cylindre (figure 6), et en fait il suffit de les comparer coupe plane par coupe plane, dans le cône on a des disques et dans l'"écuelle" on a des couronnes et deux par deux elles ont même aire (figure 7). Les élèves ne procèdent pas comme ça, ils découpent un disque dans le cône, un disque dans l'hémisphère et un disque dans le cylindre et ils trouvent une relation d'addition entre les trois aires et on a déjà ici une préfiguration de la linéarité de l'intégrale.

J'ai des arguments pour dire qu'il n'est pas neutre de passer à un moment donné par les principes de Cavalieri, ne fût-ce que pour en montrer les limites et l'obligation de s'en passer. C'est, entre autres, la fonction du deuxième groupe de problèmes. On voit apparaître la nécessité de traiter des aires sous des courbes. En tout cas, on voit apparaître les aires sous des courbes comme étant des problèmes standard et non comme des problèmes artificiels. Par le biais des principes de Cavalieri, on arrive à voir qu'à un moment donné, on est obligé de considérer ces objets.

C'est le but du problème intitulé le parabolôïde de révolution :

Considérons la surface délimitée par la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 3$, on fait tourner cette surface autour de l'axe Ox . Le solide engendré s'appelle parabolôïde de révolution. On demande de déterminer le volume de ce solide (figure 8).

Alors, pour la première fois, le principe de Cavalieri, comme tel, ne fonctionne pas. Si on veut comparer par exemple au cylindre circonscrit, on a des disques dans le parabolôïde, des disques dans le cylindre, mais il n'y a plus aucune relation d'égalité ou de proportionnalité entre les indivisibles. Alors, soit avec quelques indices du professeur, soit, comme c'est arrivé, spontanément, il y a une prise en compte du fait que la mesure des indivisibles tracés dans le parabolôïde évolue suivant une loi du premier degré : on découpe en effet des disques d'aire $\pi (\sqrt{x})^2 = \pi x$. Tous croient au départ que le parabolôïde doit prendre plus de la moitié du cylindre, toujours en fonction de cette intuition des sections radiales : quand on découpe, on voit bien que les sections radiales pour le parabolôïde prennent plus de la moitié de celles du cylindre. Etant donné la loi numérique qui gère l'évolution des disques dessinés dans le parabolôïde, soit $y = \pi x$, (figure 9), il y a ensuite cette idée qui mûrit petit à petit que ça doit faire à peu près la moitié parce que ça varie de

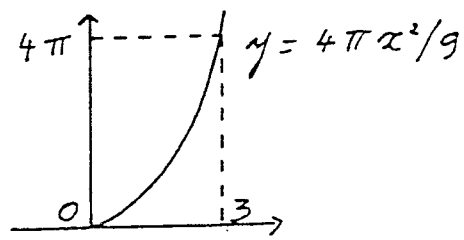


Fig. 10

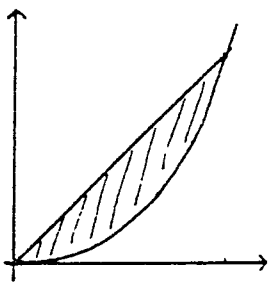


Fig. 11

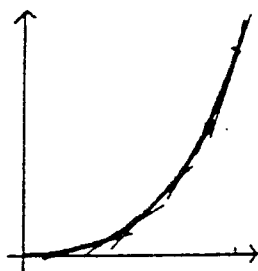


Fig. 12

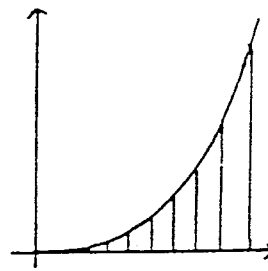


Fig. 13

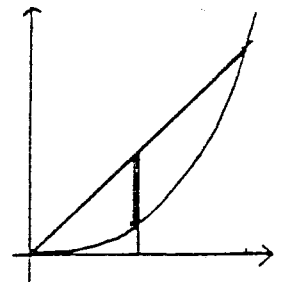


Fig. 14

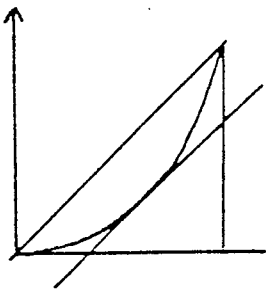


Fig. 15

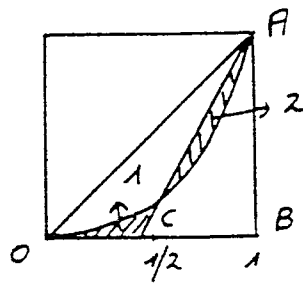


Fig. 16

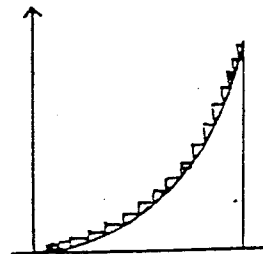


Fig. 17

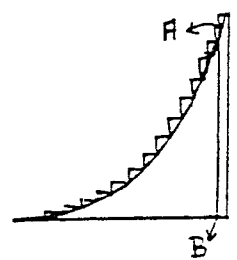


Fig. 18

manière régulière. Pour d'autres élèves, qui n'ont encore rien conclu, le professeur donne comme consigne de représenter cette droite qui exprime la variation des indivisibles du paraboloïde et celle qui représente les aires des indivisibles du cylindre, et alors, il devient évident pour eux que ça doit valoir la moitié.

Nous proposons aussi de montrer que le calcul de l'aire sous une parabole se ramène à celui du volume d'un cône.

Soit la surface délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 2$. Déduisez l'aire de cette surface du volume du cône.

Ce problème n'en est plus un pour les élèves qui ont déjà représenté, au moyen d'une parabole, la variation des aires des sections planes du cône. Pour les autres, le professeur donne la consigne de dessiner deux surfaces planes dont les segments indivisibles homologues sont entre eux comme les sections indivisibles d'un cône de rayon 2 et de hauteur 3 et celles du cylindre qui lui est circonscrit (figure 10). Ils concluent tous que l'aire délimitée par la parabole et les droites $y = 0$ et $x = 3$, est à celle du rectangle ce que le volume du cône est à celui du cylindre, c'est à dire ce que 1 est à 3.

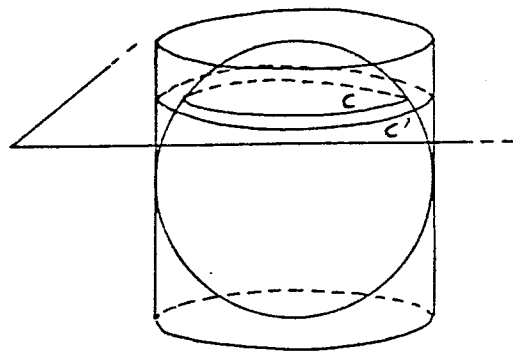
Dans ce deuxième groupe, une fois mis en défaut les principes de Cavalieri dans le sens où je l'ai expliqué tout à l'heure (on ne peut avoir l'aire sous une parabole sans avoir le volume d'un cône et vice versa), on propose alors des problèmes qui consistent à calculer l'aire délimitée par $y = x^3$ et les bornes 0 et 1 et rien n'est dit à ce moment-là. Il y a alors toute une analyse sur les procédures des élèves. L'approximation par sommes de rectangles ne vient pas tout de suite, loin de là. Ils vont essayer de trouver le polygone le plus gros possible, qui approche le mieux possible, ce sera un triangle parce que la forme au départ les inspire (figures 11 à 18).

La première fois qu'on voit apparaître des découpages laminaires, c'est souvent avec des trapèzes. Il y a tout un travail à faire pour montrer qu'avec des rectangles, on arrive aux mêmes fins qu'avec des trapèzes et qu'on y arrive plus rapidement qu'avec des procédures artisanales qui s'inspirent de la forme de la figure. Il est alors important de voir que ce qu'on fait avec des trapèzes, ou avec des rectangles, revient au même si on supprime les termes en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ comme je l'ai montré ce matin, et se posent alors toutes les questions de savoir : peut-on les supprimer, est-ce que l'on obtient l'aire exacte ou pas ? Et il nous a paru que c'était peut-être un bel endroit de faire apparaître quelque chose qui ressemble à la préfiguration de la définition en (ε, δ) de la limite. Nous avons demandé si l'aire pouvait valoir $\frac{1}{4} + \varepsilon$, où serait la contradiction ? En supposant que l'aire sous la courbe vaut $\frac{1}{4} + \varepsilon$, on parvient à rendre l'approximation par excès $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$ inférieure à cette aire, ce qui n'est pas possible : il y a là un double raisonnement par l'absurde où on voit apparaître la nécessité de définir plus tard la limite comme quelque chose dont on s'approche à n'importe quel ε près. C'était pour nous un bon endroit didactique pour faire apparaître qu'une limite devait se définir un jour ou l'autre avec les quantificateurs.

De l'aire latérale du cylindre à celle de la sphère.

Considérons une sphère et le cylindre qui lui est circonscrit

Tout plan parallèle aux bases du cylindre sectionne ces deux solides en deux disques C et C' . Regardons les surfaces latérales du cylindre et de la sphère comme l'assemblage des cercles correspondants. Il y a autant de cercles C que de cercles C' vu qu'on peut associer deux par deux les cercles coplanaires. Or, chaque cercle C est plus petit (ou égal en ce qui concerne la section médiane) que le cercle C' qui lui correspond. L'aire latérale de la sphère serait donc inférieure à celle du cylindre circonscrit. Or, elle ne l'est pas.



Corrigez ce raisonnement en le serrant d'aussi près que possible.

Le troisième groupe de problèmes est une mise en garde contre un usage abusif des indivisibles si l'on ne s'impose pas des règles précises de découpage, et c'est là que réapparaît une sorte d'épaisseur, mais une épaisseur relative entre deux solides.

Nous avons vu ce matin le paradoxe de Torricelli, et nous avons vu aussi comment un bon élève a montré l'égalité entre l'aire latérale d'un cône et la surface de son cercle de base.

Il y a aussi la comparaison de l'aire latérale de la sphère à celle du cylindre qui lui est circonscrit (voir texte ci-contre).

Dans des problèmes comme celui-ci ou d'autres paradoxes connus, mûrit très vite l'idée que ce n'est pas le même espace de part et d'autre entre les indivisibles, ou qu'il y a plus d'indivisibles d'un côté que de l'autre, que c'est plus dense, ou encore que les indivisibles sont plus épais. Il y a toute cette imagerie intuitive qui se situe au même niveau que leur intuition première, alors que la réponse via calcul intégral, qui consiste à calculer les aires en question par le calcul et à comparer les résultats, est une argumentation très éloignée de leur intuition. De même pour le cône inscrit dans le cylindre par sections radiales, les élèves ont analysé pourquoi ce n'est pas la moitié et là, ils ont repris des tranches de gâteau, entre deux sections radiales, et ils se sont remis à découper avec des arguments de nature très intuitive.

Il y a derrière cela, me semble-t-il un support intuitif très important, pour tout ce qui sera par la suite changement de variable et l'erreur au sujet du paraboloïde de révolution s'arrange bien via un changement de variable : au lieu de faire avec x , vous faites avec y . Nous avons donné à des élèves (qui avaient eu des problèmes sur les paradoxes de ce type) l'intégrale fausse de tout à l'heure et ils ont dit : "Mais ça donne des surfaces cylindriques qui sont inégalement espacées, qui sont plus resserrées d'un côté que de l'autre et c'est ça qui ne va pas". En fait, nous avons constaté que les classes qui avaient vu les principes de Cavalieri et qui en avaient vu les limites, entre autres leur usage abusif, étaient à même de régler toute une série d'intégrales fausses qui laissaient sur la touche les élèves qui avaient eu une théorie du calcul intégral assez formelle.

Les principes de Cavalieri, au départ ne servaient que de matériel d'expérimentation pour faire parler les élèves à propos de leurs intuitions relatives aux découpages infinis. D'un autre côté, on peut dire que ces activités donnent lieu à des débats intéressants, source d'intuitions pour la théorie formelle qui vient après. Par conséquent, même si c'est une voie sans issue pour les mathématiques qui suivent, je crois que le passage par les principes de Cavalieri permet de mettre à jour les intuitions fausses que la théorie ne règlera quand même pas.

Je n'ai plus le temps de parler des problèmes des deux derniers groupes.

Les problèmes du groupe IV mobilisent des calculs de taux de variation instantanés divers.

Les problèmes du groupe V débouchent sur la réciprocity des processus d'intégration et de dérivation.

BIBLIOGRAPHIE

- ARTIGUE M. (1991) : Epistémologie et Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3., 241-285. Cahier de Didirem, Université Paris VII.
- BACHELARD G. (1938) : *La formation de l'esprit scientifique*, J. Vrin, Paris, 1980.
- BROUSSEAU G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4/2., 165-198.
- FREUDENTHAL H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht.
- SCHNEIDER M. (1988) : *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.
- SCHNEIDER M. (1990) : Quelques obstacles à la modélisation des aires et des volumes par le calcul intégral : un exemple de recherche en didactique des mathématiques, son objet, ses méthodes", *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, Vol XLII, Fasc.II, ser.B, 157-168.
- SCHNEIDER M. (1991) : "Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente", *Repères IREM* n°5 65-82.
- SCHNEIDER M. (1991) : "Un fossé entre le concept d'intégrale définie et une première perception des aires et des volumes", *Mathématique et Pédagogie* n°81 , 85-104.
- SCHNEIDER M. (1991) : "D'une première perception des aires et des volumes au calcul des primitives", *Mathématique et Pédagogie* n°82 , 29-50.
- SCHNEIDER M. (1991) : Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11/2.3., 241-294.
- SCHNEIDER M. "A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. Première partie : pourquoi les concepts de vitesse et de débit instantanés pâtissent-ils d'un a priori négatif ? ", article accepté par la revue *Educational Studies in Mathematics*, épreuve corrigée sous presse, 16 pages.
- SCHNEIDER M. "A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. Deuxième partie : analyse des enjeux didactiques d'un problème mobilisant le concept de débit instantané", article accepté par la revue *Educational Studies in Mathematics*, épreuve corrigée sous presse, 17 pages.
- SIERPINSKA A . (1985a) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6/1., 5-67.
- SIERPINSKA A . (1985b) : La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques, *Comptes-rendus de la 37° rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M.(Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur)*, Leiden, 73-95.
- TALL D. O., VINNER S. (1981) : Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.12, 151-169.

DÉBAT SCIENTIFIQUE EN COURS DE MATHÉMATIQUES ET SPÉCIFICITÉ DE L'ANALYSE

Marc Legrand

Je ne veux ici ni décrire en détail les moyens que nous utilisons pour produire un débat scientifique en classe ou dans un amphi, ni présenter de scripts de tels débats, car ce n'est pas l'objet de mon propos d'aujourd'hui (on pourra trouver de telles précisions dans Legrand M. et al. [1], [2], [3] ou [4]).

Je vais plutôt essayer de préciser les caractéristiques de ce débat, ce que l'on en attend, le type de contrat didactique qu'il présuppose et ensuite, dans une deuxième partie, je présenterai deux thèses ou conjectures de type épistémologico-didactique, tendant à montrer:

- qu'il est assez vain, au niveau de la formation générale, de vouloir "faire (faire) des mathématiques" sans (faire) entrer véritablement dans une problématique mathématicienne,
- et en quel sens une forme de débat scientifique en cours de mathématiques prend en compte l'énorme difficulté qu'il y a pour l'élève ou l'étudiant à entrer dans une telle problématique, notamment en analyse.

Quand peut-on dire qu'une situation d'enseignement fonctionne sur le principe du débat scientifique ?

La nature et le statut des énoncés:

Je pense que la première caractéristique de cette forme d'enseignement est la nature des énoncés qui circulent à l'intérieur de la situation.

Est-ce que ce sont des résultats supposés connus ou à connaître, ou est-ce que ce sont des **énoncés conjecturaux**, c'est-à-dire des énoncés jugés vrais par celui qui les propose, mais qui n'ont aucun caractère de vérité institutionnelle?

L'élève s'adresse-t-il à l'enseignant sous la forme: "est-ce que j'ai le droit de..., est-ce qu'il est possible de...?" ou bien précise-t-il ses hypothèses et s'engage-t-il devant ses pairs sous la forme: "avec ce que je pense, avec ce que je sais, j'affirme que...?"

L'expérience semble montrer qu'il n'y a possibilité d'acquisition stable de connaissances mathématiques au cours d'un débat scientifique que si ceux qui proposent les énoncés ne sont pas réputés "savoir", et que s'ils prennent le risque de dire ce qu'ils pensent être vrai en soutenant leurs propos avec leurs arguments (les arguments qui les persuadent intimement que c'est vrai ou faux).

En effet, je fais l'hypothèse que **pour entendre en compréhension une proposition scientifique, il faut douter de sa vérité et de sa pertinence**, il faut se sentir dans l'obligation d'exercer une réelle vigilance épistémologique. Pour cela, rien de tel que de travailler sur les propositions de ses pairs, puisqu'a priori elles sont incertaines!

Habituellement, en classe, c'est l'enseignant qui propose les énoncés; dans ce cas ils sont institutionnellement vrais, et s'ils ne le sont pas (le professeur pose des questions), l'élève ne se place pas forcément sur un plan scientifique pour les analyser, car il est souvent plus simple pour lui de décoder le piège didactique du professeur que d'entrer dans la réalité du problème.

En résumé, pour qu'il y ait potentialité d'acquisition de connaissances profondément scientifiques par le débat en cours, il semble nécessaire de respecter un premier groupe de contraintes:

- les énoncés sur lesquels on travaille sont essentiellement conjecturaux,
- il existe un contrat didactique qui légitime le fait que tout élève puisse soumettre ses propres conjectures à la classe ou à l'amphi.

Ce contrat didactique doit être tel que celui qui propose l'énoncé puisse s'engager fortement, sans avoir à redouter d'être humilié (par le professeur, par la classe ou par son propre regard) si après coup il s'avère que l'énoncé est non vrai ou non pertinent.

- les élèves qui entendent ces propositions doivent pouvoir réellement douter de leur pertinence et/ou de leur vérité, c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas pouvoir interpréter l'attitude du professeur en termes de soutien ou de désaveu (même tacite) de la conjecture.

Le jeu de l'élève

Les "vrais" interlocuteurs du débat sont-ils les pairs ou l'enseignant ?

Ce point est capital et nécessite un véritable apprentissage de toute la classe (élèves et professeurs), vu les coutumes didactiques les plus répandues qui, lorsqu'elles autorisent un débat, se structurent essentiellement autour d'un dialogue maître-élèves.

Il y a donc obligation d'une négociation didactique amenant l'élève à considérer qu'il va acquérir des connaissances différemment, mais qu'il va apprendre quand même quand il écoute et analyse avec sagacité le propos d'un pair ou quand il s'adresse directement à ses pairs pour les convaincre du bien-fondé de ses assertions, sans solliciter a priori la médiation de l'enseignant.

Cette volonté collective (à des fins épistémologiques et didactiques) de ne plus centrer le travail de la classe sur l'enseignant est la condition même de survie d'un débat, surtout avec des milieux hétérogènes.

En particulier, s'il y a des étudiants nettement "plus forts" que les autres et si l'interlocuteur à convaincre est l'enseignant, le débat ne peut pas durer, car l'étudiant qui pense avoir "trouvé" va parler en langage codé à l'enseignant, langage codé qui veut dire: "vous voyez que je sais ce que vous voulez que je sache" et l'enseignant comprendra à mi-mot, parce que l'information scientifique circule de façon très économique entre des personnes qui sont sur la même longueur d'onde.

Par suite, ceux qui ont le plus besoin d'explications seront complètement court-circuités dans ce débat, qui leur passera au-dessus de la tête.

L'essentiel de la potentialité cognitive engendrée par l'incertitude scientifique d'un débat entre pairs disparaît presque automatiquement, dès que l'interlocuteur à convaincre est l'enseignant, car la connivence didactique induit un rythme trop rapide qui efface tout doute et toute contradiction scientifique : il y a d'un côté ceux qui croient savoir et qui font tout pour éviter de mettre en évidence ce qu'ils ne comprennent pas, et de l'autre ceux qui sont dépassés et qui ne cherchent plus à intervenir positivement dans un débat qui ne peut plus être le leur. Toute intervention de la part de ces derniers manifesterait trop violemment leur incompétence; ils ne peuvent plus que "casser" le débat, en saisissant toute occasion pour tourner en dérision la moindre faiblesse qui apparaîtrait chez un pair ou chez le professeur.

S'il y a hétérogénéité à l'intérieur du groupe classe ou amphi, le débat ne subsistera que si le but de celui qui propose une idée est d'arriver à la faire partager au plus grand nombre de ses pairs (ce qui ne veut pas dire l'unanimité) et que si chacun peut légitimement considérer qu'on s'adresse bien à lui.

Pour qu'il y ait un réel débat mathématique, il doit donc être clair pour chaque élève (et cela touche très profondément à l'épistémologie mathématique des élèves et du professeur) que celui qui n'arrive pas à atteindre par ses explications le groupe classe ou amphi a en partie échoué dans la résolution du problème scientifique qu'on avait

collectivement abordé (même s'il est convaincu du bien-fondé de sa solution et qu'il est arrivé à persuader son voisin de droite ou de gauche, c'est-à-dire les personnes avec lesquelles il s'entend bien naturellement).

Le fondement épistémologique de la didactique du débat scientifique en cours de mathématiques repose sur la conception des mathématiques suivante : un mathématicien n'est pas un homme seul face aux mathématiques, c'est un homme qui utilise le point de vue et les méthodes des mathématiciens

- pour saisir des enchaînements d'idées qu'il va considérer comme vrais (les conjectures),

- pour se persuader d'abord intimement que ces conjectures sont bien vraies (les preuves et les démonstrations personnelles)

- pour faire partager ses convictions à ceux qui adoptent ses prémices et s'accordent sur une certaine forme de rationalité (utilisation des cas particuliers et des métaphores pour faire comprendre, de la démonstration formelle pour persuader).

Et finalement, quoique certains s'en défendent, y a-t-il beaucoup de mathématiciens qui considèrent avoir résolu une conjecture tant qu'ils n'ont pas, au moins partiellement, réussi à emporter l'adhésion d'une part suffisante de leurs interlocuteurs?

Si nous revenons à la classe, dans le système du débat scientifique l'élève-mathématicien a pour interlocuteur principal la mini-communauté scientifique classe ou amphi; parfois c'est un interlocuteur qui, en un certain sens, peut exiger plus que le professeur lui-même.

En particulier, l'élève accepte plus facilement l'exigence de produire des contre-exemples précis, de fournir des arguments reconnus de tous (en particulier les théorèmes), quand cette demande vient de personnes qui réclament des arguments pour être persuadées et comprendre, que lorsqu'elle est faite par l'enseignant.

En effet, l'élève "sait que le professeur sait" et a déjà tout compris, il sait donc que son questionnement est un faux questionnement et qu'il cherche principalement à vérifier que lui, élève, a bien compris et arrive à l'exprimer.

On constate donc que cette pression des pairs va obliger tout élève qui prend la parole (même s'il est très avancé par rapport au groupe) à aller plus loin dans l'investigation du problème, à mieux comprendre ce qu'il pense pour arriver à le dire publiquement. Bien souvent, on voit un élève s'arrêter brutalement dans son explication, car il vient de découvrir une faille dans son raisonnement en essayant de persuader les autres qu'il n'y en avait pas.

Par contre, si le professeur est un interlocuteur possible, il devient à lui seul l'interlocuteur suffisant; dans ce cas, tout le travail de changement de point de vue et d'approfondissement nécessaire pour atteindre les pairs devient superfétatoire et tend à disparaître : l'élève qui s'est adapté à l'école sait que le professeur fait semblant de ne pas comprendre, quand il se fait tirer l'oreille pour accepter un raisonnement partiellement exact. Cet élève -et la classe avec lui- fait alors pression sur le professeur pour que ce dernier fasse son travail : qu'il reconnaisse l'idée juste, qu'il la reprenne à son compte et qu'il rectifie lui-même tout ce qui ne va pas !

Le jeu de l'enseignant

L'enseignant, pour sa part, doit gérer simultanément un triple jeu: épistémologique, didactique et social.

Le jeu épistémologique d'abord: le professeur doit être le plus conscient possible, à chaque instant, de tout ce qui est mathématiquement en jeu.

Sans cette (super)vision épistémologique du débat, l'enseignant ne peut sentir les différents niveaux d'argumentation en présence, il ne peut donc aider la classe à saisir ce qui est fondamentalement en jeu, il ne peut pousser les protagonistes à clarifier leurs

points de vue afin d'éviter les faux débats, et surtout, il ne peut pressentir les changements de cap et l'entrée dans des impasses.

En clair, l'enseignant doit pouvoir contrôler épistémologiquement le débat, car il ne peut se payer le luxe de découvrir avec la classe qu'on est dans une impasse (excepté si la classe est très homogène et de très haut niveau). En effet, il s'avère qu'un débat que l'enseignant ne contrôle plus sur le plan épistémologique, soit s'effondre dans un désarroi improductif, soit s'envole et se concentre sur quelques individus. Le reste de la classe assiste alors dans l'indifférence, l'admiration ou plus fréquemment le bruit, à quelques passes d'armes entre ces individus.

Précisons ce qu'on entend par *"l'enseignant doit pouvoir contrôler épistémologiquement le débat"*.

Il s'agit de ne pas se cacher le fait très délicat suivant: dès que plusieurs élèves interviennent sincèrement, il y a très peu de chances pour qu'ils se situent sur le même plan; le plus souvent ils développent des arguments parallèles ou en apparence contraires, mais qui ne peuvent ni se renforcer ni se contredire, car ils ne partent pas des mêmes prémices et/ou ne visent pas le même résultat et/ou ne s'appuient pas sur des arguments de même nature.

En clair, livrés à eux-mêmes, ces élèves ne pourront pas après quelques échanges continuer à débattre scientifiquement, car soit ils ne se comprendront plus du tout, soit au contraire ils croiront faussement être d'accord.

Si, pour des raisons épistémologiques, cognitives et éthiques, l'enseignant s'interdit absolument de manipuler le débat au sens où il tenterait de faire dire aux élèves des choses qu'ils ne pensent pas vraiment, il ne peut pas non plus tout laisser venir dans le désordre (sinon trois élèves au plus vont rester dans la course au bout de cinq minutes et zéro au bout de dix).

A la suite de quelques échanges, l'enseignant doit donc choisir très rapidement quel point va être discuté avant, après ou contradictoirement à tel autre, il ne doit pas désigner ce qui est pertinent et ce qui ne l'est pas, mais il doit organiser le débat de telle sorte qu'un élève "normal" puisse le suivre, c'est-à-dire n'ait pas à prendre en compte simultanément trop de raisons se situant sur des plans trop différents.

En particulier, s'il y a un trop grand foisonnement des considérants, l'enseignant doit choisir quel argument ne va pas être discuté tout de suite et expliquer, de façon non péjorative, pourquoi il est épistémologiquement et/ou didactiquement raisonnable de ne pas le discuter maintenant.

Le guide prioritaire pour effectuer rationnellement tous ces choix est donc de nature épistémologique. Par exemple, si la classe s'engage dans une impasse, le professeur doit le pressentir, et s'il décide néanmoins de laisser faire, il doit savoir comment on pourra sortir mathématiquement de cette impasse. C'est, à mon sens, le seul moyen pour qu'il soit après coup possible d'exploiter pleinement, sur un plan didactique, l'apparente perte de temps occasionnée par cette mésaventure.

S'il est surpris, le professeur risque de "paniquer" car il doit alors simultanément être pleinement chercheur et pleinement enseignant. Le résultat probable de cette trop forte tension est que, se départissant de sa neutralité didactique, brutalement l'enseignant ne devienne un élève pris au piège de l'ignorance devant ses élèves devenus censeurs; il cherchera fébrilement en essayant en solitaire (sans dire ce qu'il fait) tous les coups mathématiquement permis et il dépossédera brutalement la classe de toute initiative. Les élèves verront alors leur professeur ne plus tenir compte de leur avis et "sortir des lapins de dessous son chapeau", sans comprendre pourquoi il y a eu cette rupture brutale du contrat didactique.

Finalement, tout le monde gardera un si désagréable souvenir de cette mésaventure que la connaissance en jeu risquera d'en avoir pris un bien "mauvais coup".

En résumé, si l'enseignant perd le contrôle épistémologique du débat, il ne peut plus aider à le clarifier sans prendre parti, et l'on constate bien souvent alors qu'en interprétant à contresens les propositions des élèves, ses interventions deviennent inadéquates et embrouillent plus la situation qu'elles ne l'éclairent.

Le jeu didactique du professeur.

Toutefois, comme on vient de le pressentir, le professeur, tout en contrôlant le niveau épistémologique, doit néanmoins se garder de se laisser prendre lui-même au jeu mathématique: s'il éprouve pendant le débat un certain plaisir dans l'échange des idées scientifiques, c'est très positif dans la mesure où cela l'aide à mieux supporter certaines énormités sans maudire, mais là n'est pas le but.

La fonction essentielle de ce débat reste de permettre aux élèves ou aux étudiants de s'introduire à des problématiques et à des techniques scientifiques difficiles, en gardant un niveau de sens que la plupart d'entre eux perdent en partie ou déforment profondément quand la didactique adoptée ne leur donne pas suffisamment la possibilité d'exprimer ce qu'ils pensent sincèrement.

L'enseignant ne doit donc pas laisser le débat se dérouler au rythme de sa propre compréhension ou de celle de ses meilleurs élèves; pour cela, il écrit au tableau ce qui se dit afin, d'une part, de ralentir la vitesse des échanges et d'autre part, de constituer une mémoire des idées fortes (vraies ou fausses), de telle sorte que chacun puisse en (re)discuter. Dans un débat purement verbal, les idées importantes sont trop fugitives pour que des non-spécialistes puissent les épingler au moment où elles sont proposées.

De plus, il n'est pas inutile de placer un intermédiaire inerte (le tableau) entre le locuteur et ses contradicteurs. Quand on réintervient immédiatement pour contredire la personne qui vient de parler, on a du mal à ne pas l'agresser, surtout si elle s'est exprimée maladroitement ou timidement.

Tout en restant neutre sur ce qui se dit, l'enseignant organise donc la mémoire de la classe par sa gestion du tableau et des faits soumis au débat contradictoire.

Par là il agit en sous-main, non pour désigner implicitement ce qui est vrai, mais pour augmenter le nombre des élèves qui entrent dans la problématique et découvrent ce qui est fondamentalement en jeu à travers les arguments forts (vrais ou faux) qui s'échangent.

Ces arguments, le professeur les reprendra au moment de l'institutionnalisation pour mettre en avant ce qui est vrai (et à retenir en tant que tel) et ce qui est faux (et à retenir plus encore en tant que savoir erroné).

Le jeu social de l'enseignant: il est très important, car il faut bien que quelqu'un conduise le groupe social classe ou amphi, afin d'éviter que le débat ne s'enlise dans un forum où chacun crierait plus fort que l'autre.

Nous possédons en mathématiques, avec le principe "un contre-exemple suffit pour montrer la fausseté d'une conjecture", un remarquable outil de régulation du débat. Je pense que les autres disciplines (philosophie, français et même sciences physiques) ne disposant pas du même atout, il est probablement beaucoup plus difficile d'y organiser un débat dans lequel le professeur reste effectivement neutre pendant tout un temps. (cf Joshua S. et Dupin J.J.[5])

Il faut néanmoins éviter que certains leaders, ayant le verbe plus facile, étouffent les idées originales plus discrètes: l'important n'est pas que tout le monde parle, mais que tous les groupes d'idées soient exprimés.

Jeu social aussi, car l'enseignant doit réinstituer son propre statut social: comme, dans toute la première partie du débat, l'enseignant ne laisse pas apparaître ce qu'il pense en tant que spécialiste, cette position risque de devenir intenable si elle n'est pas négociée, tant elle est contraire à l'image qu'un professeur de mathématiques se fait traditionnellement de son rôle et aux habitudes sociales dominantes.

De plus en plus la société confine l'enseignant dans un rôle de spécialiste qui se doit de transmettre ses techniques, i.e. dire tout ce qu'il sait tel qu'il le sait. (Illusion de la transparence du discours magistral!)

Cette pression sociale qui s'exerce sur le professeur est doublée chez le mathématicien d'une sorte d'aversion épistémologique vis-à-vis de tout ce qui est faux.

Un mathématicien a tendance à prendre sans arrêt parti de façon tranchée: nous sommes tout sourire face au vrai et nous sommes horriblement grimaçants face à tout ce qui est faux.

Vous pouvez observer qu'il est très dur pour un professeur de mathématiques de rester neutre quand il reçoit une assertion fausse. Et il ne suffit pas qu'il se taise pour qu'il parvienne à cacher ses opinions, car il y a des indicateurs non verbaux très pertinents, qui le sont d'autant plus que le professeur s'adresse à des élèves jeunes. Les enfants décodent beaucoup de choses dans le comportement extérieur du professeur (surtout s'il s'agit de leur professeur ou de leur maître habituel) : ils savent très vite et très sûrement ce que leur professeur pense réellement.

Cette neutralité de l'enseignant, qui est la clef de voûte du dispositif, est donc techniquement difficile à établir, et ne peut se maintenir que dans un contrat didactique explicite qui permettra de renégocier le contrat social implicite.

En effet, dans le débat scientifique, le nouveau rôle du professeur n'est socialement tenable que s'il est compris par la classe ou l'amphi. Le professeur doit donc, à maintes reprises, expliquer à ses élèves la signification épistémologique et cognitive du doute, de l'incertitude, du conflit cognitif, et donner un sens didactique à ses silences et à son refus de prendre parti, dans un premier temps, en tant que spécialiste.

L'enjeu du débat: épistémologique, didactique et éthique.

L'enjeu est d'abord épistémologique, bien qu'il soit clair que le but du débat n'est pas la découverte de propriétés originales, mais la prise de sens au sujet de théories bien établies.

Il s'agit, par le débat, non de se donner l'illusion qu'on serait tous capables de découvrir en très peu de temps des résultats et des modes de raisonnement que les mathématiciens ont mis en évidence progressivement, erratiquement et sur une durée importante; par contre, il s'agit de découvrir la signification de ces résultats et de s'approprier les méthodes de raisonnement qui confèrent une certaine indépendance de pensée.

On évitera donc de faire croire aux élèves qu'ils sont subitement devenus des chercheurs professionnels, mais on les invitera à prendre très au sérieux cette mini-communauté scientifique classe ou amphi, dans la mesure où elle exploite des méthodes et des résultats qui ont fait leurs preuves dans la recherche.

C'est un élément essentiel de la négociation du contrat didactique que de faire partager l'hypothèse que, si le questionnement interne de la mini-communauté scientifique classe est important et sincère, il va permettre la vie, dans la durée de la classe, de problématiques scientifiques indispensables à la constitution du sens.

C'est donc pour permettre aux élèves d'abord d'entrer dans des problématiques scientifiques, ensuite d'éviter de trop déformer le sens des connaissances apprises et enfin d'accéder à cette forme d'autonomie de pensée que confère l'acquisition de méthodes scientifiques, que le professeur essaye d'installer dans la classe ou dans l'amphi des modes de fonctionnement inspirés de la communauté des chercheurs.

L'acquisition d'une certaine indépendance de pensée est mise en avant comme un objectif éthique fondamental. Nous utilisons cet objectif comme levier important pour aider à contrer les inhibitions qui incitent chacun à ne pas trop prendre de risques, à ne pas trop se dévoiler de peur de manifester une faiblesse.

La place du débat à l'intérieur du cours.

Nous avons voulu que les objets du débat puissent devenir l'essence des théorèmes du cours, afin que se fasse, dans l'action, la preuve auprès des élèves de l'efficacité de la preuve mathématique.

Un problème ou un exercice qui est donné à résoudre fait bien évidemment travailler l'élève, mais en fin de compte le résultat est le plus souvent oublié. La preuve, dans ce cas, fournit des énoncés dont la durée de vie est le temps de la discussion.

Nous avons donc choisi qu'une partie des conjectures proposées par les élèves deviennent, par rectifications successives, les théorèmes du cours: on cherche à garder les "bonnes idées" des conjectures initiales, mais on les débarrasse, par le jeu de la recherche de preuves ou de contre-exemples, de ce qui les empêchait éventuellement d'être vraies.

Si les principaux théorèmes qu'on utilise au cours de l'année sont obtenus de cette façon, il devient alors clair pour l'étudiant que la preuve mathématique sert à autre chose qu'à montrer qu'on sait faire des preuves; la preuve sert à se frayer un chemin dans la jungle du vrai et du faux, elle permet de sélectionner parmi les intuitions spontanées celles qui sont profondes et qui vont fournir des théorèmes, en les distinguant de celles qui sont trop naïves et qui pour cela aboutissent à des résultats faux.

C'est pour toutes ces raisons qu'il nous paraît essentiel que le débat ait lieu, au moins pour une bonne partie, sur des énoncés que les élèves pourront retrouver à l'extérieur du groupe classe ou amphi: **le débat de la classe est scientifique en particulier parce que ce n'est pas un débat d'idées privées**, il débouche sur les mêmes résultats que ceux qui sont obtenus à l'extérieur de la classe. Cette coïncidence n'est pas seulement le fait de l'enseignant, elle tient surtout à ce que la mini-communauté classe a accepté d'utiliser le même regard sur la réalité, les mêmes modes de contrôle de la validité des idées que ceux qui sont en vigueur dans la communauté de recherche.

L'institutionnalisation

L'institutionnalisation est ce moment où l'enseignant sort totalement de sa neutralité épistémologique et didactique pour étiqueter, parmi les résultats étudiés, ceux qui seront certainement réutilisés: ceux qui sont vrais deviennent les théorèmes du cours, et ceux qui sont erronés et qui correspondent à des modes de pensée très "naturels" sont repérés comme tels (i.e. on sait qu'ils sont faux et on sait qu'on "aimerait bien" qu'ils soient vrais!)

Dans ce contexte, le professeur réaffirme donc que ce n'est pas du temps perdu que de produire des énoncés faux et de s'en rendre compte, et que **c'est une véritable connaissance scientifique que de savoir que tel raisonnement, telle méthode, tel résultat n'aboutit pas dans telle ou telle situation.**

Une part importante des connaissances institutionnalisées est donc de nature très différente de celles qui figurent traditionnellement dans un cours.

En effet le débat met systématiquement en évidence un certain nombre d'idées fausses et de modes de pensée erronés. L'analyse collective de ces propositions fait ressortir qu'elles sont loin d'être totalement absurdes: l'explication donnée par leurs auteurs montre le plus souvent qu'elles ont même une certaine pertinence; il est donc fort probable qu'elles réapparaîtront par la suite, dans l'action.

Il est indispensable, pour que l'élève entre véritablement dans le jeu scientifique, qu'il prenne peu à peu conscience que les intuitions scientifiques, ces idées qui viennent spontanément à l'esprit quand on analyse qualitativement un problème, sont loin d'être idiotes (le débat montre que ce sont elles qui bien souvent produisent, après travail, les théorèmes du cours), mais que ces raisonnements spontanés, seuls, conduisent le plus souvent à des résultats en partie ou fondamentalement faux.

Un des enjeux du débat est donc de faire découvrir à chacun qu'à partir du moment où l'on n'inhibe pas ses facultés imaginatives et créatrices (par exemple en se déclarant inapte à la réflexion ou en se disant qu'il ne sert à rien de chercher ce qui a déjà été trouvé), on a des idées personnelles, mais qu'une idée spontanée n'est pour ainsi dire jamais totalement exacte, qu'elle doit être "travaillée" avec la méthode de recherche de preuves ou de contre-exemples.

Il y a donc une double connaissance à institutionnaliser: d'abord faire repérer ce qui est faux, ensuite étiqueter des procédures qui permettent de débusquer et de neutraliser les idées fausses sans pour autant "jeter le bébé avec l'eau du bain".

Le rôle du contrat didactique

L'enseignant ne va donc pas péjorer dans la phase d'institutionnalisation l'attitude de ceux qui ont commis des erreurs: ils ont pris le risque de dire publiquement ce qu'ils pensaient, l'approfondissement du sujet montre qu'ils se sont trompés et pourquoi ils se sont trompés. Comme globalement la classe a pu apprendre grâce à ces erreurs (elle est maintenant moins naïve sur ce sujet que si chacun avait gardé pour lui ce qu'il pensait intimement), personne donc n'a à être désigné comme celui qui a raison ou celui qui a tort.

Les erreurs une fois identifiées et analysées doivent seulement venir renforcer la thèse suivant laquelle une "bonne idée" scientifique, non contrôlée par la preuve, risque fort d'être une idée fausse! (Pour cette raison, excepté lorsqu'il s'agit de problèmes de formulation, nous ne mettons jamais en concurrence plusieurs conjectures sous la forme: quelle est la meilleure ou la moins intéressante de ces conjectures?)

Il est donc explicite dans le contrat didactique que les situations qui permettent d'enclencher le débat ne sont ni les situations scolaires traditionnelles de type applications directes du cours, ni les situations totalement incertaines auxquelles sont confrontés les chercheurs.

Les élèves doivent se savoir à l'intérieur d'un montage didactique dans lequel l'enseignant, s'il s'interdit de les manipuler (au sens où il chercherait à les piéger ou à leur faire dire des choses qu'ils ne pensent pas), s'autorise par contre à réorganiser le contexte scientifique de façon à ce que les problèmes soumis à leur réflexion soient:

- abordables avec leurs connaissances,
- suffisamment simples pour que chacun puisse avoir des idées personnelles en un temps fini assez bref,
- suffisamment complexes pour nécessiter l'introduction d'une nouvelle connaissance,
- et suffisamment orientés pour que les énoncés conjecturaux qu'ils suscitent soient en rapport avec la connaissance visée par le cours.

Il doit donc y avoir une réelle complicité entre les apprenants et l'enseignant sur le fait qu'il y a une mise en scène didactique, dans laquelle l'enseignant cache volontairement la connaissance qu'il veut enseigner parce que, s'il la montrait directement, il ne pourrait pas la faire découvrir de façon significative. (cf Guy Brousseau [6])

L'élève ou l'étudiant n'acceptera cette mise en scène du savoir que s'il a compris qu'en poursuivant le petit jeu scolaire -qui consiste à cacher le mieux possible ses erreurs et à tenter de trouver par tous les moyens la "bonne réponse"- il risque gros sur le plan scientifique et cognitif.

L'élève doit être conscient qu'en en restant au petit jeu scolaire, il se donne une échappatoire pour ne pas entrer vraiment dans le problème scientifique proposé; de plus, en masquant ses erreurs, il se prive de l'occasion de comprendre ce qui lui permettrait éventuellement demain de moins se tromper.

En fait, nous constatons que cette complicité élève-enseignant doit être constamment renégociée, pour que vive ce double jeu didactique où l'enseignant cache ce qu'il veut montrer et où l'élève s'interdit de "tirer les ficelles"; et cette complicité ne peut se nouer et perdurer qu'autour d'un fort enjeu épistémologique!

Il faut donc que le professeur et les élèves réintériorisent régulièrement le fait qu'une telle didactique nécessite du temps et le droit à beaucoup d'erreurs. En effet, si l'un des deux partenaires veut trop fortement supprimer la contrainte de temps ou d'erreur pour arriver plus directement au résultat, le charme est rompu, le débat se pervertit, la connaissance qui circule n'a plus de véritable statut, on perd véritablement son temps !

Il doit en particulier être clair dans la tête de tous (professeur et élèves) qu'aucun élève n'est censé savoir le résultat au départ, sinon ce serait un tout autre jeu qu'on entreprendrait (celui de l'émulation à bien réciter le cours); par contre chacun est censé, s'il réfléchit et éventuellement échange des idées avec ses proches voisins, pouvoir se faire assez rapidement une première opinion sur les problèmes qui lui sont soumis.

Et dans le débat, l'élève doit peu à peu découvrir que s'il est vigilant, s'il sait se taire pour écouter les propositions de ses pairs, il peut de plein droit exercer une réelle responsabilité scientifique en argumentant autour des énoncés qui circulent dans le cours: il possède des connaissances et des méthodes qui lui permettent d'appréhender rationnellement la discussion.

Si, face à un énoncé soumis au débat, un étudiant pense qu'il s'agit là d'une réponse non pertinente au problème à traiter, il doit le dire, à charge pour celui qui a proposé l'énoncé d'argumenter.

Habituellement, dans une classe, le travail de pertinence est entièrement à la charge de l'enseignant, c'est lui qui trie parmi les propositions des élèves, en élimine certaines soit par la surdité, soit en relevant leur manque d'intérêt de son point de vue.

Si quelqu'un pense qu'un énoncé est faux, il doit réagir, mais pour emporter l'adhésion du groupe, il doit produire un contre-exemple qui soit reconnu comme tel par le groupe.

L'évolution des modes de preuves

On voit les contre-exemples se modifier peu à peu tout au long de l'année : au début, ce sont des énoncés trop généraux, car l'élève scolaire pense que "plus c'est compliqué, plus cela fera bien" et puis, dans le jeu de débat, il prend conscience qu'il a intérêt à choisir ses considérants, à éviter les grands calculs, les propositions trop techniques ou filandreuses, à dire ce qu'il veut faire, sinon ses pairs ont trop de mal à le suivre et ne l'écoutent plus.

Pour pouvoir réintervenir et continuer à être écouté, l'élève découvre qu'il lui faut être pertinent et précis; ainsi, par ce jeu social, se fait la dévolution au groupe classe ou amphi de la responsabilité de découvrir et de mettre en évidence ce qui est non pertinent ou faux. Cette dévolution se fait d'autant plus facilement que ce groupe est nombreux, pas trop homogène et non exclusivement constitué de "bons élèves" au sens classique du terme.

Avec un assez grand nombre de personnes, et parmi elles des personnes originales, des conjectures naïvement fausses vont être produites, que l'on n'obtiendrait jamais avec de "bons élèves" (non parce qu'ils n'ont pas de naïvetés à ce niveau, mais parce qu'ils ont des indicateurs internes qui leur font sentir qu'il y a peut-être un piège, et cela leur interdit de dire au groupe ce qu'ils pensent véritablement, sans que pour autant cela les empêche de le penser).

Le traitement des définitions

Ces conjectures naïvement fausses présentent l'énorme avantage de mettre en évidence que *lorsqu'on n'est pas d'accord sur des évidences, c'est peut-être parce qu'on ne parle pas des mêmes choses.*

Les objets que nous manipulons en mathématiques, même lorsqu'ils sont la transposition d'une réalité sensible, sont néanmoins des objets construits, et **on ne peut pas en discuter mathématiquement si leur définition n'est pas claire; mais**

ceci est de l'ordre du discours moral de l'enseignant, et les élèves, surtout ceux qui ont des difficultés, n'ont en général que faire d'un tel discours.

Le traitement des conjectures naïves provoque le plus souvent des prises de position très tranchées qui obligent au bout d'un temps à se dire: "est-ce que nous parlons bien tous de la même chose?"

Le débat de définition qui suit, a alors beaucoup de chances d'être écouté, même par les élèves faibles, car la définition devient alors le seul moyen rationnel de lever un malentendu.

Quand un élève voit qu'une définition produit des énoncés qu'il ne souhaite pas, alors et alors seulement, il commence à se dire qu'une définition précise, "ça a de l'importance!", même dans une perspective où les mathématiques ne sont vues que comme des outils.

La démonstration

Autant la dévolution à la classe de la recherche de pertinence et de la désignation de ce qui est faux est relativement facile à faire à partir d'un certain contrat de débat, autant **la dévolution de la démonstration est un autre problème**: on peut aisément dans le débat obtenir des idées de démonstration, mais le plus souvent elles vont avorter si on laisse les élèves organiser seuls ces idées.

Je ne prétends donc pas que dans la majorité des situations que nous avons utilisées en DEUG ou dans le secondaire, nos étudiants aient réellement construit la démonstration complète des théorèmes que nous avons finalement institutionnalisés.

Ce que l'on peut affirmer par contre, c'est que lorsque l'enseignant a abordé lui-même la démonstration à l'issue d'un débat, les raisonnements simplistes qui stérilisent bien souvent le besoin de démonstration ("pourquoi chercher à démontrer, puisqu'un raisonnement évident prouve le résultat!") ont en général déjà été proposés, et le débat a permis de voir qu'ils ne prouvaient rien.

Ainsi, au moment où il aborde une argumentation rationnellement construite (très difficile à suivre quand on ne saisit pas ce qui est fondamentalement en jeu), le professeur se trouve en présence d'un groupe de personnes qui ont à peu près la même problématique, à peu près la même préoccupation démonstrative et qui parlent à peu près de la même chose.

Il peut donc décemment inviter la classe à s'engager franchement dans la rationalité mathématicienne malgré l'exigence de cette démarche, car elle répond à un besoin, elle correspond à une problématique commune. Ce professeur parvient d'ailleurs d'autant mieux à garder l'attention du groupe qu'il peut, au cours de son enchaînement démonstratif, utiliser une part non négligeable des éléments de preuve qui ont surgi de façon éparse dans la discussion et justifier certains choix à partir de mésaventures que le groupe vient de vivre en se fourvoyant dans de "fausses solutions".

Le débat apporte donc, le plus souvent dans le désordre, des matériaux souvent très pertinents qui réclament néanmoins, pour être agencés sous une forme démonstrative mathématicienne, une technicité que très peu d'élèves ont encore acquise.

Certaines propositions erronées, antérieurement débattues, montrent des directions dans lesquelles il vaut mieux se garder d'aller et justifient par là même les choix "surprenants" du professeur.

Ce dernier point est capital, car c'est lorsque les choix de l'enseignant au cours de la démonstration (et Dieu sait s'ils sont nombreux en analyse, vu l'utilisation qui y est faite de majorations et de minoration) apparaissent à l'élève comme impensables et/ou totalement arbitraires qu'il est envahi par le découragement: "je n'y comprends rien, car je n'aurais jamais eu l'idée de faire cela".

Le débat préalable permet donc de suivre autrement la démonstration du professeur.

Avec un optimisme modéré, beaucoup d'élèves peuvent raisonnablement se tenir le discours: "avec un peu de temps et d'expérience, et du travail, je crois que j'aurais pu

avoir moi aussi ces idées, car elles s'inscrivent assez logiquement dans le droit fil d'un débat où j'ai pu personnellement intervenir".

Sans se bercer de l'illusion qu'il a presque tout découvert seul, l'élève ne se sent pas non plus totalement étranger à la démonstration proposée par le professeur. Il a donc de bonnes raisons de chercher à en repérer la philosophie et les méthodes, car il ne se sent pas trop loin du moment où il pourra prendre lui-même l'initiative démonstrative (il a suffisamment compris les raisons du cheminement adopté pour espérer avoir des idées personnelles dans des situations similaires !)

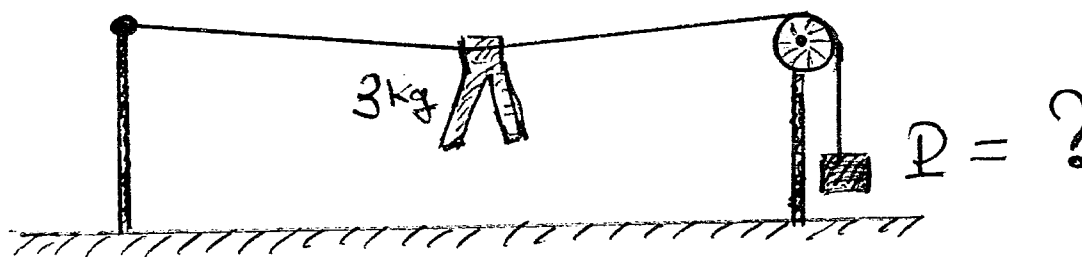
Différents types de situations gérées par le débat

Les situations d'introduction à un nouveau concept

Quand on parle de débat en classe, on pense prioritairement à la mise en place de situations problématiques permettant l'introduction d'un concept.

Par exemple, on peut, pour introduire à la notion de vecteur dans le secondaire, utiliser la problématique des forces, et pour cela s'engager sur des paris quant à la tension d'un fil à linge "horizontal" quand il supporte un blue-jean mouillé de 3kg.

Au tableau se trouve le dessin suivant:



Question

La tension T du fil (c'est-à-dire le poids P qu'il faudrait suspendre à son extrémité pour maintenir le blue-jean en l'air) est-elle à votre avis plutôt de:

1,5 kg 3kg 6kg 20kg 45kg 100kg

Cinq minutes de réflexion individuelle ou en petits groupes sont laissées aux élèves pour se faire une opinion avant qu'ils désignent par un vote leurs préférences individuelles:

1,5 kg,	3kg,	6kg,	20kg,	45kg	100kg
7	13	9	1	0	0

Il est normal que le "bon sens" pousse un élève sur trois à choisir 3 kg puisque c'est le poids du pantalon. De même il est naturel que le cadre purement numérique (qui est le cadre préférentiel de l'élève qui n'a pas encore formé le concept de vecteur) pousse un élève sur quatre à proposer 1,5 kg, car chaque brin du fil à linge semble supporter la moitié du poids.

La discussion basée en partie sur des expériences déjà réalisées par certains élèves (les pragmatiques qui ont déjà essayé de tendre un fil à linge chargé) va peu à peu disqualifier les raisonnements numériques qui privilégient les réponses 1,5 kg, 3kg, 6kg.

Le fait que les réponses les plus réalistes (45kg à 100kg quand la corde ne fléchit pas trop) n'aient été choisies par personne, montreront en fin de compte que le fameux "bon sens" peut nous orienter sur des résultats très faux.

Les élèves sentent donc, d'entrée de jeu, qu'ils ont peut-être intérêt à prendre au sérieux et la science et ces nouveaux venus: les "vecteurs".

Ces vecteurs vont donc être introduits comme des modèles plus adéquats que les nombres pour rendre compte de la réalité physique. (Combien de personnes, ayant fait des études scientifiques, retiennent néanmoins constamment leurs étendages jusqu'à ce qu'ils cassent? Pourquoi n'ont-elles pas pu "tirer" de leurs études vectorielles qu'il leur faudrait une tension infinie pour maintenir l'étendage horizontal?)

Ainsi le vecteur entre dans la classe avec son problème crucial, à savoir que le module de la somme n'est pas forcément la somme (ou la différence) des modules, il peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre ces deux extrêmes et le débat va être chaud pour qu'on en convienne.

De même, en Deug A, on peut introduire à la problématique de l'intégrale de Riemann (découpage, encadrement, sommation, passage à la limite) à partir de la question suivante :

Quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M et M' situées à 3m l'une de l'autre, la masse M étant constituée d'une barre homogène de 6m de long et de 18kg, et la masse M' de 2kg étant considérée comme ponctuelle ?

$$F = ?$$

$$M=18 \text{ kg}$$

$$M' = 2 \text{ kg}$$

$$\leftarrow \dots \dots \dots 6 \text{ m} \dots \dots \dots \rightarrow \leftarrow \dots \dots \dots 3 \text{ m} \dots \dots \dots \rightarrow$$

Réponse des étudiants au bout de 15 mn de travail personnel:

$F =$	- 8 k	4/9 k	k	4/3 k	4 k	8 k	?
Nb. d'étud.	10	3	#50	8	10	4	#25

(Pour une étude détaillée de cette situation, voir [4])

En pratique, il s'agit de bien comprendre que ces situations d'entrée dans un concept sont longues et difficiles à élaborer et souvent assez délicates à gérer quand on n'en a pas l'habitude, surtout si on n'en maîtrise pas convenablement les variables didactiques.

En effet, en cas de mauvaises prévisions, le débat va difficilement converger vers la connaissance visée, il va éventuellement devenir tellement confus que l'enseignant sera contraint à manipuler le groupe et à utiliser l'effet Topaze (voir [6] Guy Brousseau), jusqu'au point où il tuera complètement la potentialité cognitive de sa situation.

Par exemple, dans la situation du blue-jean, il y a une différence didactique très importante entre poser la question sous la forme :

- Quelle tension T ?

et

- La tension T du fil est-elle, à votre avis, plutôt de:

1,5 kg 3kg 6kg 20kg 45kg 100kg ?

Dans le premier cas, des élèves qui ne connaissent pas les vecteurs n'ont pas les moyens de faire ce calcul. Or, on leur fait croire qu'ils le peuvent, en leur posant cette question; ils vont donc être poussés à faire un "peu n'importe quoi" en manipulant les données du problème, dans le style "âge du capitaine". Le débat sera alors probablement très difficile à gérer.

Dans le second cas, il est clair que la référence à l'expérience est évoquée comme un recours légitime: on demande à l'élève son avis, ce qui est vraisemblable pour lui, et on envisage qu'il n'y ait pas une réponse unique et impersonnelle.

L'enseignant va alors pouvoir exploiter les réponses du type 1,5 kg comme non adéquate au problème, mais relevant néanmoins d'une rationalité: elles correspondent au problème où les deux extrémités du fil seraient attachées à un même crochet au plafond.

Il est donc possible de s'appuyer sur les raisonnements partiellement inadaptés des élèves pour les faire évoluer: en sciences on travaille sous hypothèses, et ici l'hypothèse est que les extrémités du fil ne sont pas accrochées au même point, mais en des points écartés.

La discussion de ce premier type de modèle, le modèle vertical, conduit, par effet de contraire, à regarder le modèle horizontal et à constater qu'il ne correspond à aucune réalité observée par les élèves.

A terme, il va donc falloir envisager un modèle intermédiaire où le fil à linge fait une flèche, et élaborer des hypothèses sur "l'importance" de cette flèche afin de dépasser le stade des opinions et des impressions sur la tension du fil.

Le débat, s'il reste délicat à gérer, peut naturellement (sans manipulation traumatisante de l'enseignant) évoluer vers la nouvelle branche des mathématiques que l'on veut enseigner.

En effet, la classe se rend assez rapidement compte ici que les nombres qui sont les seuls objets mathématiques disponibles, ne fournissent pas un modèle adéquat de cette réalité.

Il est alors moins difficile pour l'enseignant de négocier l'entrée dans la complexité du modèle vectoriel, dès lors que ce dernier peut être introduit comme une sorte de réponse pertinente du mathématicien à un problème qui correspond à une réalité tangible et qui, sans cet outil, semble ne pas avoir de solution mathématique.

Pour revenir au cas général, la situation problématique choisie pour introduire un concept doit donc être assez robuste pour qu'au cours du débat l'enseignant puisse garder au tableau la trace de la plupart des idées émises par les élèves, et que ces idées spontanées soient suffisamment connectées au sujet abordé pour pouvoir être les matériaux de base à partir desquels, par opposition ou par perfectionnement, le professeur introduira le nouveau concept, le nouveau raisonnement.

Nous ne croyons pas que la théorie puisse surgir spontanément d'un débat ou d'une expérience préalable, mais nous attendons par contre de l'expérience préalable et/ou du débat qu'ils facilitent l'introduction magistrale de la théorie: ils la rendent crédible, lui donnent du sens, justifient sa complexité.

On comprend donc que ces situations problématiques ne se trouvent pas aisément sous le pas d'un cheval!

Les autres formes de situations de débat

A côté de ces situations de constructions "sophistiquées", il y a fort heureusement deux types de situations de débat beaucoup plus simples à produire et à gérer: **les débats de conjectures pour approfondir une théorie bien engagée et les débats issus des questions spontanées.**

Les débats de conjectures

Ces débats se produisent le plus souvent quand le cours est engagé dans la phase de développement d'une théorie.

Par exemple, au sujet de l'intégrale, lorsque le signe $\int f$ a été introduit de façon problématique et bien défini mathématiquement, on demande aux étudiants de faire des conjectures reliant les qualités mathématiques que peut détenir l'intégrale dépendant de la borne supérieure de f , $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, à celles que détient l'intégrand f .

On n'obtiendra pas tout de suite les théorèmes "F est toujours continue", ou "F est croissante quand f est positive", mais plutôt les conjectures naïves du type "si f est continue, alors F continue", "si f est croissante, alors F est croissante".

Les théorèmes classiques sur l'intégrale vont alors avoir une épaisseur sémantique très différente pour l'étudiant, suivant qu'ils sont l'aboutissement de discussions et de rectifications successives de conjectures erronées, ou s'ils sont directement proposés par l'enseignant lui-même qui les démontre au fur et à mesure qu'il les énonce.

Les débats "spontanés"

Le troisième type de débat est le débat de retournement des questions en conjectures et le renvoi à l'amphi ou au groupe classe de la responsabilité de répondre sous les trois formes :

"vrai", "faux", "autre"

"autre" signifiant "je ne peux pas" ou "je ne veux pas (pour des raisons à justifier ultérieurement) répondre sous la forme vrai/faux".

Nous avons beaucoup appris depuis dix ans en transformant en conjectures ces questions naïves, que nous traitions auparavant de façon expéditive parce qu'elles nous paraissaient, vu ce que nous venions d'expliquer cinq minutes avant, comme totalement triviales. Le plus souvent, nous avons l'impression que les élèves qui posaient de telles questions soit n'avaient rien écouté, soit étaient complètement déphasés avec la connaissance en jeu.

Il nous a donc fallu apprendre à maîtriser nos pulsions de réponses instantanées et parfois cinglantes.

Par exemple: si f est la fonction $f(x)=\sin(x)$ sur $[0,\pi[$ et $f(x)=\cos(x)$ sur $[\pi,2\pi]$ et si l'on a à calculer $\int_0^\pi f(t) dt$, les étudiants ne voient en général aucun inconvénient à ce que nous écrivions $\int_0^\pi f(t) dt = [-\cos t]_0^\pi = 2$.

Ils sont d'accord parce qu'ils ne se posent pas la question de savoir si la discontinuité de f en π peut ou non introduire une perturbation sur la valeur de l'intégrale. (Ceux qui se posent de telles questions, les abandonnent assez rapidement, car d'un côté, ils ne savent pas comment faire intervenir une discontinuité dans leurs calculs, et d'autre part ils se disent que s'il y avait quelque chose à modifier, "on le leur aurait appris!")

L'enseignant-épistémologue conclut, lui, que ses étudiants ont "presque tous compris" la subtilité qui fait marcher les choses.

Si, dans ces conditions, un étudiant atypique pose la question qui s'impose tant qu'on ne l'a pas résolue:

"pourquoi a-t-on le droit de ne pas tenir compte de la valeur de f en π pour calculer $\int_0^\pi f(t)dt$?",

il s'entendra répondre laconiquement: "parce que la mesure d'un point est nulle !"

On peut être assuré qu'alors le malentendu élève-enseignant est consommé car, que cet étudiant ait compris ou non, que d'autres se posent en cachette la même question, personne n'interviendra plus sur ce sujet après cette magnifique réponse: elle a été si instantanée, si naturelle et si simple que l'étudiant en conclut que sa question était profondément "stupide"!

D'ailleurs, si d'aventure cet étudiant manifestait une nouvelle fois son incompréhension, il serait probablement accueilli par un petit rire moqueur de l'amphi ou du T.D., rire qui lui rappellerait de façon cinglante, s'il ne l'avait senti, qu'il est franchement hors-jeu.

Si par contre,
- vous arrivez à contraindre votre envie de répondre,
- si vous arrivez à contrôler ce froncement de sourcils qui dit si bien: "voilà une question incongrue dont la réponse est évidente",
- si vous transformez imperturbablement cette question en conjecture, par exemple:

Conjecture : Si f est intégrable sur $[0, \pi]$ et si $g(x) = f(x)$ sur $[0, \pi] \setminus \{a\}$ où a est un point fixé dans $[0, \pi]$, alors quelle que soit la valeur de g en a , la fonction g est intégrable sur $[0, \pi]$ et $\int_0^\pi f(t) dt = \int_0^\pi g(t) dt$.

- si après avoir écrit cette conjecture au tableau, vous laissez cinq minutes aux étudiants pour avoir un avis motivé (une éternité pour vous, enseignant),
- et si enfin vous soumettez cette conjecture au vote en commençant par "Qui ne peut pas prendre de décision motivée rationnellement?",

les contradictions qui apparaîtront dans le résultat du vote et les débats qui suivront vous permettront un approfondissement de la continuité et une entrée significative dans le "presque partout", qui justifieront très largement "le temps perdu" à ne pas répondre instantanément à cette question apparemment triviale.

La crédibilité de cette forme d'enseignement

Enfin, pour conclure ce panorama très rapide de la nature et de la fonction du débat scientifique pendant le cours de mathématiques, disons que cette forme d'enseignement étant tout à fait contraire aux formes plus traditionnelles, elle doit en permanence (re)faire la preuve de sa fonctionnalité didactique.

Disons toutefois qu'il y a deux périodes tout à fait différentes dans l'année:

- la première période est celle où il s'agit d'installer ce nouveau mode de fonctionnement du cours; il faut donc bien choisir ses entrées, car on n'a pas le droit à plusieurs erreurs successives.

- puis vient une deuxième période au bout de deux, trois mois où les élèves ont suffisamment compris les règles du jeu pour qu'il reste jouable, même si la situation choisie localement n'est pas excellente.

Il ne faut pas se leurrer cependant, car une fois que le climat de débat est à peu près accepté par l'ensemble des personnes, rien n'est définitivement acquis. La pression extérieure est tellement forte qu'il va falloir toute l'année que les élèves et leurs parents ou les étudiants puissent toucher du doigt qu'ils sont bien en train d'apprendre, par ce procédé, des connaissances intériorisées, que le simple discours explicatif du professeur ne leur aurait probablement pas données directement.

Entendons-nous bien, il ne s'agit pas de faire un clan et de dénigrer le travail des collègues, il s'agit de justifier aux yeux des élèves et de leurs parents qu'il vaut bien la peine de dépenser son temps et ses énergies de cette façon. Sans explications réitérées, cette pratique de débat va être considérée comme du temps perdu, comme manquant de clarté et/ou comme marquant une perte d'autorité de la part du professeur, voire comme une forme de démagogie.

La situation de débat peut se bloquer très vite si trop d'élèves se disent: "on n'apprend plus, ou plus assez...", car alors ils font (de bon droit) pression sur leurs camarades pour que le débat n'ait pas lieu, afin d'avancer plus vite dans le cours.

Je vais maintenant proposer deux conjectures didactiques à propos de l'activité mathématique en général et de l'analyse en particulier.

Première thèse ou conjecture générale sur la nécessité des conjectures

S'il est indispensable en mathématiques comme ailleurs, pour mieux connaître ce que l'on connaît déjà d'une certaine façon, de mettre son savoir à l'épreuve de la résolution d'exercices et de problèmes particuliers, éventuellement très techniques, il est peu probable que cette activité de résolution de problèmes permette à elle seule une conceptualisation qui respecte la spécificité de la démarche mathématicienne.

Par exemple, si chacun conçoit bien l'importance qu'il y a à étudier le comportement de diverses suites récurrentes ou de fonctions données par des formules pour approfondir les concepts de limite et de continuité (car le plus souvent l'étude de ces cas très particuliers force à se poser des questions plus générales sans provoquer les pertes de sens), l'expérience du secondaire et du supérieur montre néanmoins que ce travail seul (qui produit un résultat scolaire) ne provoque qu'exceptionnellement une conceptualisation de type mathématique des notions de suite, de fonction, de limite et de continuité.

Par conceptualisation non mathématicienne, j'entends le fait que la conceptualisation qui se produit sous les pressions scolaires classiques, reste le plus souvent enfermée dans le particularisme et la contingence des situations; au lieu de dégager les fils conducteurs, les nécessités d'ordre général (ce qui à mon sens caractérise la pensée mathématique), l'élève semble, en étudiant des suites d'exemples, ne percevoir que des concomitances, ne concevoir que des concepts amalgamés.

C'est ainsi qu'au premier cycle du secondaire, le concept de parallélogramme par exemple se réduit à l'ensemble des propriétés que possède simultanément un parallélogramme. Pour beaucoup d'élèves, un parallélogramme, c'est donc un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux et parallèles, dont les diagonales se coupent en leur milieu, dont les angles opposés sont égaux et les angles consécutifs supplémentaires, et ce n'est rien d'autre.

C'est-à-dire que ces élèves ne tirent de leur connaissance du parallélogramme aucune nécessité entre le parallélisme et la conservation des longueurs ou des angles.

Certains diront que les élèves de ce niveau sont bien jeunes pour entrer dans une telle problématique; nos expériences ne confirment pas ce point de vue, et de plus je constate qu'à ne pas vouloir entrer franchement dans une problématique mathématicienne en premier cycle du secondaire, ça ne s'améliore pas par la suite.

En effet, dans le second cycle du secondaire et le premier cycle du supérieur, les racines d'une équation ne peuvent se détacher du discriminant, la fonction ne peut se détacher de la formule, la croissance de la dérivée positive, la convergence ne peut se détacher de la monotonie, la limite et la borne supérieure ne peuvent suivant les personnes s'envisager que comme toujours égales (ou au contraire comme toujours différentes) des valeurs prises ou du maximum, etc. etc..

Et malgré une énorme sélection, ces problèmes restent très présents même en licence de mathématiques.

Je fais donc l'hypothèse que si l'activité mathématique sous le contrôle de l'étudiant (le cours proprement dit, c'est-à-dire l'énonciation par l'enseignant de définitions et de théorèmes et leur démonstration, n'est en général ni à l'initiative ni sous le contrôle de l'étudiant) se réduit à la résolution d'exercices et de problèmes particuliers, l'étudiant se trouve très insuffisamment incité à conceptualiser dans une problématique mathématicienne ce qu'il apprend par l'enseignement.

Vu la sollicitation incontournable de l'école vers une mathématique scolaire, et vu les pressions qui s'exercent de l'extérieur pour que personne n'échoue à l'école, il y a donc de façon structurelle une très forte probabilité pour qu'il se produise au lycée comme à l'université un glissement de sens de l'activité mathématique et que le jeu

scientifique pratiqué à l'école ne se trouve au niveau de l'esprit en très forte contradiction avec les principes fondamentaux de l'activité scientifique.

En clair, je fais la conjecture que l'élève ou l'étudiant ne peut véritablement conceptualiser les mathématiques qu'on lui enseigne à l'école ou à l'université que si on lui ménage des entrées explicites au niveau de l'action dans une problématique de mathématicien, c'est-à-dire que si on lui propose une structure de travail dans laquelle il va pouvoir lui aussi, de sa propre initiative, passer du particulier au général, du général au particulier et éprouver le besoin de distinguer le nécessaire du contingent.

Pour que l'élève puisse devenir complice de l'aspect paradigmatique de nos exercices et problèmes (le professeur donne à résoudre en détail tel exercice ou problème particulier car il le juge porteur d'une grande généralité), il faut qu'il puisse s'exercer à regarder ces objets particuliers comme des vecteurs d'idées générales (auxquelles il n'aurait peut-être jamais pensé spontanément dans une contemplation directe de la généralité).

Inversement la connaissance intime de nombreux cas particuliers doit lui devenir indispensable pour donner du sens aux énoncés généraux et pour contrôler leur pertinence.

Toutes les expérimentations du débat scientifique que nous avons pu mener dans le secondaire comme dans le supérieur tendent à fonder solidement la thèse suivante :

La fabrication par les élèves ou les étudiants d'énoncés généraux, de conjectures, et la discussion par le groupe classe ou amphi de leur pertinence et de leur vérité permettent de rééquilibrer le jeu scolaire au profit du jeu scientifique. Cette didactique "force l'élève" à chercher la ou les raisons des choses, l'incite (à mon sens, bien au delà de ce que produisent les exhortations magistrales classiques) à sortir de la contingence au profit de la découverte d'une nécessité, qui est le propre de la démarche mathématicienne.

Quelques éléments à l'appui de cette thèse

Pour mieux expliciter le sens de cette thèse, confrontons-la aux avatars didactiques des concepts de fonction, de continuité et d'intégrale.

Les fonctions sur lesquelles on fait travailler habituellement les lycéens et les étudiants de Deug A sont celles qui sont définies globalement au moyen d'une unique formule.

Ces fonctions-formules nous fournissent de bons outils pour construire des situations a-didactiques, par exemple sur le concept de continuité ou d'intégrale.

En d'autres termes, une façon de voir si les étudiants ont bien compris ce qu'est la continuité ou l'intégrale, pourra être de leur donner à étudier l'intégrale dépendant de la borne supérieure d'une fonction donnée par une formule relativement compliquée sur laquelle les calculs de primitive échouent en partie. En effet, dans ces conditions, seuls ceux qui maîtriseront les concepts fondamentaux de continuité et d'intégrale pourront avancer, car précisément ces hypothèses de continuité, de positivité, de monotonie, etc. seront les éléments pertinents pour résoudre le problème et elles n'auront pas été explicitement désignées dans les données.

Cette situation a-didactique pour la continuité et/ou l'intégrale sera donc très distincte de la situation didactique où on demandera à l'étudiant d'émettre lui-même des conjectures sur l'intégrale dépendant de la borne supérieure d'une fonction quelconque, fonction qu'il pourra supposer soit continue, soit positive ou monotone, etc.. En effet, dans ce cas on lui aura désigné explicitement les concepts de continuité ou de positivité et d'intégrale comme à prendre en compte pour résoudre le problème.

La situation sera donc épistémologiquement moins fine dans le second cas que dans le premier.

Mais didactiquement que constatera-t-on ?

- Dans le premier cas, si la situation est vraiment a-didactique, seuls quelques rarissimes étudiants arriveront à faire quelque chose de mathématiquement acceptable; les autres, ne voyant pas d'issues rationnelles, feront apparemment "n'importe quoi" ou ne feront rien.

Une telle situation ne pouvant se répéter plusieurs fois, l'enseignant, malgré son désir initial de faire faire de "vraies mathématiques à ses élèves", se trouvera peu à peu contraint à dé-a-didactifier la situation en donnant point par point la marche à suivre (seuls les calculs techniques resteront alors à la charge de l'étudiant).

- Dans le second cas, si on utilise un dispositif codidactique (travail en petits groupes, débat scientifique entre pairs, etc.), on constatera assez régulièrement que la grande majorité des étudiants se mettent véritablement au travail.

Ainsi on les verra se poser de vraies questions sur le concept de continuité, alors qu'on leur a soumis un problème d'intégrabilité; et vice versa, en étudiant la continuité de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, ils seront amenés à s'interroger sur la signification profonde de l'hypothèse " f est intégrable".

Cela ne veut pas dire qu'au bout du compte personne ne comprendrait rien dans le premier cas, et que tous comprendraient tout dans le second, mais quelques indices solides montrent qu'une proportion "anormale" d'élèves ou d'étudiants ("anormale" par rapport à la proportion qui se dégage avec des méthodes traditionnelles) font une entrée significative dans une problématique mathématicienne à propos de ces concepts, lorsqu'ils sont invités à trouver eux-mêmes des énoncés généraux qui les relient de façon nécessaire.

Ainsi, quand je dis que "restreindre le travail de l'élève à l'étude de mathématiques particulières" risque de le détourner du sens du jeu mathématique, je veux souligner que, par cette méthode, les concepts généraux des mathématiques risquent de n'être pour eux que des qualificatifs des objets et non des moyens de mieux les connaître.

Par exemple, pour un élève de terminale ou un étudiant de Deug A1, les fonctions, ce sont des formules, l'ensemble de définition, c'est l'ensemble des valeurs où les calculs se font, et la continuité, c'est le qualificatif qui accompagne algébriquement ces fonctions-formules, sauf aux endroits où leur écriture n'a plus de sens.

Par habitude scolaire, l'étudiant envisage donc la continuité comme une sorte d'application directe du cours. Il fait ici ou là un raisonnement de continuité, parce qu'on lui demande de vérifier que telle ou telle fonction est bien continue; mais il ne pense pas un instant qu'inversement la continuité pourrait lui éviter des calculs pénibles ou lui permettre d'orienter ses calculs en vue d'obtenir un résultat qui ne s'exprime pas en terme de continuité !

Par exemple, si nous regardons la conjecture:

"L'ensemble A des nombres rationnels, dont le carré est plus petit que 2, n'a pas de maximum".

la quasi-totalité des étudiants d'un amphi de Deug A1 est persuadée que c'est vrai.

- Pourquoi ?
- Parce que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel!

Cela crève les yeux à tous qu'il faut soit admettre, soit montrer ce résultat.

Question de l'enseignant:

- Si nous admettons ou démontrons ce résultat, a-t-on montré la conjecture ?

L'amphi:

- Oui !
- Pourquoi?
- Parce que c'est impossible que A ait un maximum.
- Et pourquoi c'est impossible ?

Silence de déconcertation de l'amphi. Rires gênés et exclamation à mi-voix:

- C'est évident!
- C'est impossible parce que c'est impossible !
- ça se voit !

Au bout d'un temps, petite voix timide d'une étudiante:

- Ne serait-ce pas une histoire de continuité de $x \mapsto x^2$?

Rire moqueur de l'amphi signifiant probablement que l'étudiante a dépassé les bornes: il ne faut pas exagérer, car vraiment la continuité n'a absolument rien à voir avec ce problème !

On peut donc apercevoir que dans un amphi de 120 titulaires du bac C, seul un ou deux étudiants ont formé un concept de continuité qui leur permet de montrer autre chose que de la continuité: ici c'est la non-existence d'un maximum (je ne pense pas qu'il s'agisse en l'occurrence d'une confusion avec les paroles de la chanson: "une fonction continue sur un compact...")

Et la grande majorité de leurs collègues ne comprennent goutte à cette explication, puisqu'ils sont persuadés par amalgame de la croissance, des valeurs intermédiaires et de la continuité ici présentes qu'il n'y a rien à montrer, que ... que c'est évident!

Ils se trouvent donc contraints de se moquer de cet argument mathématiquement pertinent, qui n'a pas de sens dans leur problématique.

Essayons d'analyser pourquoi il n'est pas évident de se rendre compte que la continuité de la fonction $x \mapsto x^2$ est ici décisive.

A mon sens, pour le voir, il faut entrer dans l'univers des mathématiciens:

- *Supposons l'impossible*, c'est-à-dire que A possède un maximum a et tentons de faire logiquement surgir une contradiction!

- *Ecrivons qu'un maximum*: appartient à l'ensemble : $a^2 < 2$.

- L'idée naturelle est alors de se dire que si a^2 est strictement plus petit que 2, il y a une "telle place" entre ces deux nombres qu'il serait tout à fait invraisemblable qu'on ne puisse y trouver au moins un carré b^2 d'un rationnel b strictement supérieur à a (ce qui contredirait immédiatement l'hypothèse " $a = \max A$ ").

- Pour se persuader de l'existence d'un tel b ($b \in \mathbb{Q}$, $b > a$ et $b^2 \leq 2$), l'idée "naturelle" (si on suppose que le concept de "se rapprocher de" est un concept opérationnel) est de traduire l'hypothèse $a^2 < 2$ par l'égalité $2 = a^2 + \varepsilon$ et de considérer ce nombre ε strictement positif comme la distance "incompressible" entre a^2 et 2.

Dans cette vision métrique du problème, tout nombre b^2 qui sera proche du nombre a^2 de moins de ε ne pourra dépasser 2.

Notre problème sera donc résolu s'il est possible de trouver un nombre rationnel $b > a$ dont le carré b^2 soit proche de a^2 à moins de ε .

C'est alors que l'idée générale de continuité de la fonction $x \mapsto x^2$ s'impose (si ce concept existe) comme le fait pertinent.

En effet, en écrivant $b = a + \beta$, on est certain, grâce à la continuité en a de $x \mapsto x^2$, qu'en choisissant un rationnel $\beta > 0$ suffisamment petit, on fabriquera par ce procédé un rationnel $b > a$ suffisamment proche de a pour que son carré b^2 soit proche de a^2 à moins de la distance fatidique ϵ donnée au départ.

Si jamais on n'était pas totalement convaincu par ce raisonnement qualitatif, l'idée de continuité nous permettrait encore d'organiser nos calculs pour le prouver explicitement en détail.

-Traduisons nos intuitions en termes d'accroissements, et pour cela écrivons:

$$b = a + \beta \text{ avec } \beta > 0.$$

- Ecrivons le carré de ce point en développant $(a + \beta)^2$.

- On obtient par substitution $b^2 = 2 - \epsilon + 2 a.\beta + \beta^2$.

- Pour connaître la position de b^2 par rapport à 2, écrivons :

$$b^2 = 2 - (\epsilon - 2 a.\beta - \beta^2).$$

- Il suffit alors, pour pouvoir affirmer que b est un élément de A strictement plus grand que a , de montrer que la parenthèse $(\epsilon - 2 a.\beta - \beta^2)$ peut être rendue strictement positive pour un β strictement positif.

- Pour voir si on peut choisir un tel β , il suffit de résoudre l'inéquation:

$$\epsilon - 2 a.\beta - \beta^2 > 0.$$

- Comme cette inéquation "aveugle" $\epsilon - 2 a\beta - \beta^2 > 0$ n'admet pas de solution évidente, on peut toujours, en pensant à la continuité de $x \mapsto x^2$, la transformer en :

$$2a.\beta + \beta^2 < \epsilon ;$$

puis, remarquant que $a \leq 2$ et qu'on peut prendre $\beta \leq 1$, on peut effectuer la majoration :

$$2 a.\beta + \beta^2 \leq 5 \beta .$$

Une telle majoration nous persuade que notre inéquation de départ sera satisfaite si l'inéquation plus triviale " $5\beta < \epsilon$ " l'est également.

- Il suffit alors de choisir $\beta < \epsilon/5$, par exemple $\beta = \epsilon/6$, pour fabriquer un rationnel b strictement supérieur à a et dont le carré ne dépasse pas 2.

Ayant ainsi obtenu une contradiction formelle, on en déduit que A n'a pas de maximum!

N.B. J'ai mis en italique tout ce qui, dans ce raisonnement, relève d'une pratique profondément mathématicienne.

Faisons l'inventaire de ces pratiques profondément mathématiciennes:

- supposer le contraire de ce qu'on pense être le résultat,
- chercher une contradiction,
- travailler par conditions suffisantes,
- utiliser le fait que deux points distincts sont en un certain sens très éloignés,
- utiliser le jeu des écritures, notamment l'écriture $b = a + \beta$, pour signifier qu'on travaille autour de a et pour matérialiser les idées de continuité,
- ne pas résoudre aveuglément une inéquation compliquée, mais faire des majorations, afin d'en résoudre une plus simple qui implique la précédente,
- choisir, parmi les paramètres possibles, non pas le "meilleur", mais un qui soit simple et qui "marche",
- considérer qu'une seule contradiction en fin de raisonnement suffit, par enchaînement logique, pour faire vaciller les prémices, et que si ces prémices sont la

négarion du résultat qu'on souhaite établir, il devient certain par ce raisonnement que ce résultat est exact.

Il est clair que pour celui qui est familier avec ces pratiques mathématiciennes et qui a formé le concept de continuité, il suffit d'évoquer la continuité de $x \mapsto x^2$ pour que se dessine rapidement dans son esprit la trame du raisonnement précédent; il est tout aussi clair qu'excepté pour quelques génies, le raisonnement précédent ne viendra jamais à l'esprit d'élèves ou d'étudiants qui sont étrangers à ces pratiques et à ce concept de continuité.

On pourra bien leur laisser un temps de réflexion quasi illimité, ils n'auront pratiquement aucune chance de découvrir seuls un tel raisonnement, et même lorsque le professeur le leur détaillera, il risquera de leur apparaître comme une sorte d'extra-terrestre tant ses arguments seront éloignés de leurs problématiques: ce raisonnement semblera immensément loin et complexe à certains et sera ressenti comme une véritable tartufferie par d'autres.

Ma conjecture est donc que jouer véritablement le jeu mathématique en construisant et en discutant des énoncés généraux est une activité indispensable pour que de tels raisonnements deviennent d'abord nécessaires, ensuite accessibles, enfin naturels.

Sachant qu'à l'heure actuelle les étudiants qui pratiquent spontanément, seuls ou avec quelques camarades, une telle activité de conjecturation à l'issue des cours et des T.D. sont devenus rarissimes, cette conjecture didactique a pour corollaire la nécessité de trouver des didactiques de cours et de travaux dirigés qui amènent momentanément l'élève à entrer dans une problématique de chercheur. L'organisation en cours d'un débat scientifique est donc une mise en application de ce corollaire.

Des choix de didactiques, plus idéologiques que didactiques, vont à l'encontre de cette thèse.

Depuis la réaction contre l'excès de boubakisme des "maths modernes" des années 70, les choix dominants de l'enseignement secondaire et supérieur vont à mon sens à l'encontre de la thèse précédente.

Ces choix didactiques reposent essentiellement sur l'analyse suivante: pour que les élèves ne soient pas formalistes, pour qu'ils ne raisonnent pas comme des caisses vides, faisons-les entrer dans les mathématiques par le calcul, par le travail sur des expressions "concrètes", ne donnons plus de mots complexes, n'utilisons plus le langage symbolique, naturalisons la logique mathématique, n'insistons pas sur les différences entre définitions et propriétés caractéristiques, car toutes ces subtilités risquent de passer par-dessus la tête du plus grand nombre des élèves qui se contenteront alors de jargonner sur des objets qu'ils ne maîtrisent pas.

L'important n'est-il pas de faire manipuler l'élève sur les objets mathématiques courants?

Pourquoi penser que la conceptualisation de ces techniques ne se réalisera pas progressivement, de façon naturelle, quand la complexité des problèmes la rendra indispensable et/ou que l'élève accédera à la maturité nécessaire, comme cela s'est produit spontanément chez tous ceux qui sont devenus mathématiciens, y compris les très grands?

Il y a, je crois, dans cette analyse pleine de "bon sens" faite en général par d'anciens "bons élèves" devenus bons mathématiciens, un terrible oubli, une formidable ignorance de toute l'action didactique qu'ils se sont appliquée à eux-mêmes (au delà et en dehors des enseignements officiels) pour comprendre, didactique que la plupart des chercheurs continuent à s'appliquer quotidiennement pour mener de front technique et sens, langage familier et langage symbolique.

Il y a aussi dans cette façon d'envisager les problèmes d'enseignement une sorte d'identification du monde de nos élèves à notre propre monde d'élève, car cette analyse nie tout ce qu'un certain environnement extra-scolaire a pu apporter à ceux qui sont issus de milieux culturellement favorisés, et par suite ne tient aucun compte du manque didactique dont souffrent ceux qui n'en bénéficient pas.

En fait, il est clair que nos élèves ou nos étudiants ne deviendront pas tous de grands mathématiciens et que leur préoccupation principale n'est pas, et ne sera jamais pour la plupart d'entre eux, les mathématiques vingt quatre heures sur vingt quatre, et c'est bien ainsi.

Cela a pour conséquence que, pour eux, le transfert du particulier au général et du général au particulier ne va probablement pas se produire spontanément comme il s'est produit pour certains d'entre nous.

C'est la raison pour laquelle nous pensons que l'action didactique doit prendre en charge ce problème explicitement.

Le but du débat scientifique en cours de mathématiques (qui agace si fortement ceux qui déclarent qu'ils n'auraient pas aimé qu'on leur enseigne les mathématiques de cette façon) est précisément de faire en sorte que les élèves non "extraordinaires" par leurs dons initiaux ou par leur environnement culturel puissent eux aussi jouer avec les mathématiques, qu'ils puissent apprivoiser les énoncés généraux en apprenant à les manipuler en tenant compte de leur fonctionnalité, c'est-à-dire finalement qu'ils parviennent à leur attribuer un sens compatible avec celui du mathématicien professionnel.

Maintenant on peut se poser la question: pourquoi soutenir cette thèse principalement en analyse, puisque, si elle est pertinente en analyse, elle le sera certainement aussi pour les mathématiques en général, et peut-être même pour tout apprentissage scientifique ?

En fait, je pense que la pertinence de cette conjecture est effective sur l'ensemble des mathématiques, mais que ses conséquences sont plus directement sensibles en analyse qu'ailleurs, car si beaucoup d'élèves arrivent dans un enseignement non problématique à manipuler avec un certain bonheur les équations ou les matrices, rarissimes sont ceux qui sans être entrés profondément dans une problématique mathématicienne, arrivent à faire autre chose que de la figuration avec les notions de convergence.

Tant que l'expression " $\forall \epsilon > 0, \exists \beta ; \dots$ " demeure une formule magique, les seuls traitements possibles de l'analyse consistent en des manipulations formelles des théorèmes et des algorithmes sous un contrôle sémantique et épistémologique très rudimentaire.

C'est précisément l'objet de la deuxième conjecture que de pointer le fait que "passer par l'analyse", c'est accepter, pour des raisons métamathématiques non évidentes, d'entrer dans un jeu scientifique qui est en un certain sens encore plus anormal que celui que le mathématicien pratique en algèbre ou en géométrie.

Par suite, si sous les contraintes de l'institution scolaire *le professeur s'interdit de prendre le temps de la nécessaire désorganisation conceptuelle* et s'oblige à ne faire travailler les élèves que sur des terrains où ils peuvent rapidement produire des résultats immédiatement tangibles, il sera condamné, après quelques développements introductifs, à restreindre le fonctionnement de l'analyse à des situations qui "tournent bien" sans avoir trop à réfléchir et où l'élève peut en un certain sens éviter de jouer le jeu de l'analyse.

Il est clair dans ce cas que la plupart des élèves passeront à côté de ce jeu, car la pression scolaire les conduira à ne manipuler que les aspects purement algorithmiques et algébriques de cette composante des mathématiques.

suffit de faire les hypothèses de continuité indispensables à son fonctionnement à chaque fois que cela lui paraît nécessaire.

Bien entendu, faire des hypothèses supplémentaires pour pouvoir utiliser un outil de démonstration peut restreindre inutilement la portée de résultats que l'on établit ainsi. Mais c'est dans l'esprit même de la résolution d'un problème général que d'arriver à cerner des classes de situations favorables où tout "marche bien" grâce à des hypothèses de continuité (ou bien, au contraire, de constater que même avec des hypothèses supplémentaires de ce type on ne peut toujours pas garantir le résultat).

Par contre, dans une problématique initialement très particulière ou très algébrique, on aura tendance à s'acharner sur la particularité, à faire des calculs, à chercher des raisons techniques éventuellement très compliquées, car rien a priori ne nous incitera à penser qu'un passage par l'infini fournirait une solution à un problème qui est explicitement posé en termes finis, ou que des majorations ou des approximations pourraient en fin de compte produire les égalités recherchées.

En résumé, il me semble qu'en analyse, le jeu mathématique scolaire, s'il n'est pas compensé par un fort jeu scientifique, est condamné plus qu'ailleurs à se réduire à la mise en œuvre assez mécanique de recettes, car il oblige l'élève qui ne contrôle plus rien au niveau du sens et de la validité à faire une confiance quasi aveugle à l'enseignant!

Dans ce cas, je me demande quel est le sens véritable de notre formation scientifique, car, dans la mesure où les vraies raisons de ce qu'il apprend en analyse lui échappent, la rationalité développée ici par l'élève n'est efficace que dans l'atmosphère aseptisée de l'école et ne "vaut" pratiquement plus rien à l'extérieur!

Un exemple où l'analyse scolarisée glisse vers une caricature de démarche scientifique.

Pour ne pas en rester au stade des affirmations générales, regardons sur un exemple caractéristique de l'analyse (*la procédure différentialo-intégrale*) jusqu'où peut aller la perte de contrôle épistémologique de l'étudiant, quand on veut lui éviter d'entrer de plein pied dans une problématique scientifique.

Quel problème didactique va-t-on épingler ici?

Combien d'étudiants sortant d'une licence de mathématiques ont remarqué en quoi la mise en équation différentialo-intégrale de certains problèmes dits "physiques" est une pure mystification quand on l'effectue sans contrôle? et inversement, combien d'étudiants de physique ont réalisé qu'en exerçant un minimum de contrôle, ils disposaient par cette procédure de l'exemple même de ce que la science peut produire de mieux, quand elle exploite convenablement la rationalité mathématique pour traiter physiquement certains aspects de la réalité?

De quoi s'agit-il au fait dans cette procédure?

Il s'agit de remplacer un calcul direct qu'on ne sait pas effectuer, par un empilement de calculs approchés, empilement qui paradoxalement devient de plus en plus précis à mesure qu'on augmente le nombre des approximations, jusqu'à fournir à la limite, par un moyen très détourné, un résultat rigoureusement exact!

De façon plus technique, cette procédure se présente de la façon suivante:

- A première vue, c'est très simple et très significatif. Ne sachant pas calculer directement un résultat V attaché à un objet Ω , on "découpe" astucieusement l'objet Ω en

parties ou "tranches très petites" $\Delta\Omega$, dans l'espoir de pouvoir calculer plus simplement le résultat partiel ΔV correspondant à chaque élément $\Delta\Omega$ du découpage.

On fait cela bien sûr quand des considérations externes montrent que le problème est additif, c'est-à-dire que la somme de toutes ces contributions partielles ΔV redonne le résultat V initialement recherché.

En principe donc $V = \sum \Delta V$ et par suite, si on connaît exactement tous les Δv , on connaît par sommation finie le résultat V recherché.

- Par une alchimie qui échappe facilement au néophyte, le calcul du résultat partiel ΔV devient $dV = f(x) dx$, où $f(x)$ est le coefficient qui apparaît pour calculer ΔV quand on considère que "l'épaisseur" dx de la tranche est "infinitement ou très petite".

La somme finie $\sum \Delta V$ devient alors $\int dv$ ou $\int_a^b f(x) dx$, qui par la théorie de l'intégration se calcule en effectuant l'opération $F(b) - F(a)$ avec une primitive quelconque F de f .

Ainsi se présentent donc la plupart des mises en équations différentialo-intégrales !

Pour des raisons de coutume didactique et d'efficacité scolaire, personne ne se révolte contre ce qui pourrait apparaître à beaucoup, lorsque cela se reproduit, comme un tour de "passe-passe".

Il n'y a pas de révolte car, d'abord, *personne n'a envie d'aller calculer directement le $\sum \Delta V$ qui a du sens physique, mais qu'on ne sait pas traiter algébriquement, alors qu'on sait calculer (tout au moins dans les cas qui sont présentés à l'école) le $\int_a^b f(x) dx$ par un calcul de primitive classique.*

Ensuite et surtout, il n'y a pas de révolte parce qu'à *chaque fois que cette procédure est utilisée dans le cadre scolaire ou universitaire, elle ne fournit jamais de résultats surprenants*: on retrouve bien πR^2 pour l'aire du disque et $4/3 \pi R^3$ pour le volume de la sphère !

Jusqu'à ce point, on pourrait dire qu'il n'y a rien là de très scandaleux: nous utilisons tous à un moment ou à un autre des sortes de boîtes noires dont nous contrôlons uniquement les entrées et les sorties, et le travail scientifique n'interdit pas (bien au contraire) de faire confiance aux équipes constituées qui nous fournissent des outils scientifiques dont elles garantissent les spécificités.

Là où la procédure relève de la mystification, c'est lorsque l'étudiant cherchant à s'en servir pour établir lui-même un résultat, se trouve face au fait crucial suivant :

Quand on découpe Ω en parcelles $\Delta\Omega$, dans 99,99... % des cas on ne sait pas mieux calculer exactement au moyen d'une procédure algébrique le ΔV qu'on ne savait le faire directement pour V (c'est même souvent encore plus délicat, car les morceaux $\Delta\Omega$ ont éventuellement perdu les symétries et autres régularités que détenait l'objet global initial Ω).

Par suite, écrire en utilisant le mot magique "tranche infinitement petite" que $\Delta V = f(x) \Delta x$, relève du miracle ou de la "magouille".

Par contre, en analysant les caractéristiques de la situation et en essayant de modéliser la tranche $\Delta\Omega$ par une tranche plus simple $d\Omega$, l'hypothèse " Δx est infinitement petit" permet honnêtement d'envisager de pouvoir décomposer le résultat partiel Δv (que l'on ne sait pas calculer exactement) en somme d'un résultat idéal dv proportionnel à l'épaisseur Δx (que l'on écrira $dv = f(x) dx$) et d'une partie secondaire $r(\Delta x)$ qui représentera ce que l'on ne sait pas calculer.

Si, pour calculer V , on additionne dans ces conditions tous les résultats partiels Δv , d'un côté on va bien retrouver le résultat V cherché et de l'autre on va trouver deux sommes: une somme $\sum dv$ dont la théorie de l'intégration garantit sous des hypothèses

faibles (f intégrable) qu'elle tend vers $\int f dx$, et une somme $R(\Delta x) = \sum r(\Delta x)$ qui représente la somme de toutes les erreurs commises dans le calcul approximatif des résultats partiels.

En sciences, l'apparition de ce reste $R(\Delta x)$ est a priori dramatique, car dire que chaque reste $r(\Delta x)$ est très petit, ne garantit en rien que la somme $\sum r(\Delta x)$ de tous ces restes le soit aussi.

Dans une procédure de découpage de plus en plus fin, la précision sur chaque tranche augmente, mais le nombre des tranches aussi, et l'un des b a ba de l'analyse est de réaliser que la somme d'un grand nombre de quantités très petites peut être très grande ($\sum_1^n 1/n$ n'est pas si petit que ça!).

A priori donc, les mises en équations intégrales devraient immanquablement déboucher sur une discussion de fond: quels sont les ordres de grandeur admissibles pour $r(\Delta x)$ qui légitiment cette procédure, c'est-à-dire à quelles approximations partielles $r(\Delta x)$ a-t-on droit pour que leur somme $R(\Delta x)$ tende vers zéro quand Δx tend vers 0?

Une réponse simple peut être: si l'erreur partielle est du second ordre au sens large (i.e. $|r(\Delta x)| \leq M \Delta x^2$ ou encore $r(\Delta x) = \Delta x \cdot \epsilon(\Delta x)$ avec $\epsilon(\Delta x)$ tendant vers zéro - indépendamment de x - quand Δx devient infiniment petit, ou des hypothèses encore plus pointues), alors $R(\Delta x)$ tend vers zéro avec Δx et la procédure est valide.

Mais la coutume d'enseignement est autre: pour éviter la partie proprement analyse de cette mise en équation, on ne discute pour ainsi dire jamais en mathématiques comme en physique les ordres de grandeur qui légitimeraient la procédure adoptée.

Par suite, on est condamné à pratiquer ces mises en équation "sauvagement", c'est-à-dire sans véritablement se soucier de savoir si ce qu'on ne prend pas en compte dans la mise en équation est ou non infiniment petit par rapport à ce qu'on retient pour le calcul, à savoir $f(x) \Delta x$.

Les mots magiques utilisés par tous sont alors: "la tranche est très fine, Δx est infiniment petit..." et c'est à ce stade que la procédure intégrale devient une véritable mystification scientifique.

En effet, en bonne logique, si dans cette procédure on "jette $r(\Delta x)$ du seul fait qu'il est infiniment petit", il faut de même "jeter $f(x) \Delta x$ qui lui aussi est infiniment petit"!

Mais cela, on ne le fera jamais! car si on le faisait, il ne resterait plus rien à intégrer, et on serait vite conduit à abandonner cette procédure inadaptée qui ne présenterait plus les apparences de la scientificité!

On ne garde donc cette procédure que parce qu'en présentant une façade de rationalité, elle nous redonne les résultats que nous connaissons déjà.

Autant donc donner directement le résultat qu'on prétend faussement établir rigoureusement ainsi, puisque les moyens de contrôle qui sont évoqués (toute théorie de l'intégrale mise à part) sont tels que personne ne peut savoir si ce qui est négligé est négligeable ou au contraire aussi grand, si ce n'est beaucoup plus grand, que ce qui a été minutieusement calculé.

Pour que cette procédure intégrale prenne sens et donne à l'étudiant un nouveau moyen d'investigation sur la réalité physique, il nous semble donc nécessaire de lui offrir l'occasion d'effectuer "sauvagement" des mises en équations intégrales qui produiront naturellement des résultats absurdes.

Par exemple, on peut proposer des mises en équation qui "prouvent" que l'aire latérale du cône est égale à la moitié de celle du cylindre de même disque de base et de même hauteur, ou que la surface de la sphère est égale à $\pi^2 R^2$, voir [1] et Artigue M.[7].

A partir de ces expériences qui conduisent à de véritables catastrophes (trouver par cette procédure une aire 2 fois, 10 fois, 10 000 fois supérieure à la réalité), la discussion sur les ordres de grandeur des approximations locales $r(\Delta x)$ prendra tout son sens et la procédure intégrale maintenant contrôlée deviendra pour eux non seulement un magnifique outil scientifique, mais surtout une remarquable illustration de ce que peut produire la science quand elle marie intuition et rigueur.

En conclusion, je fais donc l'hypothèse que si l'enseignement traditionnel aboutit si inexorablement, sans s'en rendre vraiment compte, à de telles mystifications scientifiques, c'est probablement que, notamment en analyse, il est quasiment impossible d'aborder scientifiquement des concepts fondamentaux, tels la continuité ou l'intégrale, sans convier les élèves à pratiquer le grand jeu, c'est-à-dire le jeu d'une communauté scientifique dans laquelle chacun s'essaye à produire des théorèmes et se sent en charge de contrôler la validité de ceux qui lui sont proposés par les autres.

Dans l'entreprise didactique, ce grand jeu scientifique est difficile à jouer, certes, mais n'est-ce pas par lui que l'on pourra le mieux tenter de faire partager à nos élèves une valeur fondamentale: l'accès à une forme de rationalité qui confère à ceux qui la maîtrisent une certaine indépendance de pensée ?

Bibliographie

[1] L'enseignement des mathématiques au niveau universitaire. Textes réunis par la commission INTER IREM "UNIVERSITE". ICME 6 -1988.

[2] Legrand M.: Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique: le débat scientifique en situation d'enseignement. Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. Journées S.M.F. Luminy, 16-21 novembre 1986.

[3] Legrand M.: Les compétences scientifiques des étudiants sont-elles indépendantes de la façon dont nous leur présentons la science ? Gazette des Mathématiciens, Supplément n° 48, avril 1991.

[4] Grenier D. - Legrand M. - Richard F.: Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année. Cahiers de Didactique des Mathématiques, IREM Paris VII, n° 22, 1985.

[5] Johsua S. et Dupin J.J. (1989) Représentations et modélisations: le "débat scientifique" dans la classe et l'apprentissage de la physique. Editions Peter Lang S.A., Berne.

[6] Brousseau G. Thèse d'état. IREM de Bordeaux I.

[7] Artigue M. et al. "Questionnaire de travail sur les différentielles". IREM de Paris VII, mars 1989.

ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET FONCTIONS DE REFERENCE

Michèle Artigue, IUFM de Reims et Equipe DIDIREM

La commission inter-IREM "Analyse" a, par ses travaux, influé sensiblement sur les changements intervenus ces dix dernières années dans l'enseignement de l'analyse au lycée. Dix ans après la parution du Bulletin inter-IREM : "Enseignement de l'Analyse", à un moment où les programmes sont une fois de plus remaniés, il n'est peut-être pas inutile de s'interroger sur la façon dont les idées clefs qui ont sous-tendu la réforme de 1982 se sont traduites dans les programmes successifs et dans la réalité de l'enseignement. J'ai choisi comme fil conducteur pour conduire cette réflexion la notion de "fonction de référence", y voyant une création didactique qui a servi en quelque sorte d'emblème aux changements introduits.

I - L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : UN ENSEIGNEMENT QUI POSE DES DIFFICULTES BIEN CONNUES

Il n'est pas question de résumer ici ce que nous ont appris les recherches nombreuses qui se sont développées ces dix dernières années tant en France qu'à l'étranger sur la didactique de l'analyse et je renvoie sur ce point le lecteur aux textes cités en référence. Je me bornerai à souligner quelques points qui me semblent particulièrement importants par rapport à la réflexion développée ici :

- L'analyse est un domaine dont les objets de base (nombres réels, suites, fonctions) et les notions de base sont des objets complexes. En ce qui concerne les objets, c'est indéniable pour suites et fonctions. Pour les nombres réels, cette complexité peut sembler moins évidente : nos élèves ne manipulent-ils pas des décimaux et fractions depuis l'école élémentaire, des irrationnels depuis le collège ? Ce serait oublier que ce ne sont pas les propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ qui sont au centre de l'analyse mais la complétude de l'ensemble des nombres réels.

Ainsi, lorsque s'engage l'enseignement de l'analyse, le concept de fonction est chez les élèves en cours de constitution : la fonction est perçue essentiellement comme un processus, non comme un objet en soi, élément de classes plus ou moins générales qui conditionnent son traitement en résolution de problèmes et le champ de référence des élèves est très limité ; les réels fonctionnent comme des objets préconstruits et la complétude de $\mathbb{R}$ ne sera d'ailleurs pas explicitée avant l'université.

La notion de base de l'analyse pour la structuration actuelle du champ est la notion de limite. On sait bien que sa conceptualisation nécessite le franchissement d'un certain nombre d'obstacles et ne peut s'envisager que dans le long terme.

Il y a là donc une première source de difficultés incontournables pour l'enseignement.

- L'analyse est aussi un domaine qui s'oppose dans son fonctionnement à l'algèbre. L'approximation est au cœur des grands problèmes de l'analyse : approximation de nombres, de fonctions ... Elle est aussi au cœur des méthodes et techniques du champ. "Majorer, minorer, approcher", comme l'affirme Dieudonné, sont ici les techniques de base et ce fait engendre une rupture cognitive. Prenons un exemple simple souvent cité par M. Legrand (cf. références). En algèbre, pour montrer que deux quantités sont égales (nombres, fonctions, polynômes...), on va le plus souvent avancer par une suite d'égalités en procédant par équivalence : on passera ainsi de $a=b$ à $a_1=b_1, \dots, a_i=b_i$ jusqu'à pouvoir identifier les deux termes. Et même si on fonctionne par inégalités, on montrera que $a < b$ et $b < a$ par un schéma analogue. Entrer dans le champ de l'analyse, c'est comprendre que cette démarche sera le plus souvent hors de portée, que l'on va faire le détour de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $|a-b|$ est inférieur à ϵ et que ce détour va être payant. Plus tard, ce sera comprendre que pour démontrer qu'une famille F_1 d'objets possède une propriété, on va le plus souvent suivre un cheminement analogue : démontrer la propriété pour une famille F_2 plus simple convenablement choisie, montrer que tout élément de la famille F_1 peut être approché d'autant près qu'on veut par des éléments de F_2 et que la propriété étudiée résiste au passage à la limite. Entrer dans le champ de l'analyse, c'est avoir compris que l'analyse est le domaine de l'approximation et avoir identifié les grands mécanismes généraux qui sous-tendent le fonctionnement conceptuel et technique de l'approximation.

Il y a donc là une rupture qui sera d'autant plus difficile à consommer que l'idéologie usuelle de l'enseignement conduit à minimiser les ruptures pour présenter au contraire le nouveau dans la continuité de l'ancien et à maintenir, pour faciliter la négociation didactique, l'illusion que par une succession de petits pas le nouveau est nécessairement accessible.

- On sait bien également que la maîtrise de ces techniques d'approximation résulte d'un apprentissage qui ne peut s'inscrire que dans le long terme : elle passe en particulier par la maîtrise des règles de majoration de produits et quotients, la gestion de valeurs absolues avec la mobilité permanente requise entre le point de vue inégalité et le point de vue distance, la familiarisation avec les raisonnements par condition suffisante et les contraintes imposées par ce type de raisonnement : accepter de perdre de l'information sur l'expression à traiter pour la simplifier judicieusement : suffisamment pour avancer dans la résolution du problème, suffisamment peu pour ne pas en sortir. Une telle familiarité ne se construit pas en quelques situations voire en quelques semaines, elle requiert du métier.

- Enfin, il est bien connu, et nous n'insisterons pas sur ce point, que la manipulation des définitions formelles en analyse est difficile : elle font toutes intervenir (dans leur version standard) des alternances de quantificateurs, elles fonctionnent en sens inverse des formulations spontanées des élèves.

Comment l'enseignement, qu'il soit secondaire ou supérieur (au niveau du DEUG) gère-t-il cet ensemble de difficultés et le long terme de l'apprentissage ? Quel effet ceci a-t-il sur les apprentissages des élèves ?

J'ai personnellement commencé à travailler sur ces questions il y a une dizaine d'années dans le contexte d'une recherche maths/physique sur l'enseignement des procédures différentielles et intégrales au niveau du DEUG (cf. références). A ce niveau d'enseignement, les recherches menées dans différents pays ont montré des convergences de stratégies d'enseignement surprenantes : avec les étudiants standard, la stratégie usuelle de l'enseignement consiste à peu près partout à contourner les problèmes via une algébrisation intensive de l'analyse. Précisons : l'enseignement dans les filières mathématiques et physique auxquelles nous nous intéressons plus particulièrement ici est, au niveau universitaire, un enseignement nécessairement formalisé et les définitions données mettent en jeu de façon incontournable le registre de l'approximation, mais ce n'est pas dans ce registre que fonctionne pour l'essentiel l'enseignement. Ceci a d'ailleurs conduit des chercheurs (D.Tail et S.Vinner, cf. références) à introduire au début des années 80 deux notions distinctes : celle de concept-image et celle de concept-définition pour rendre compte des ruptures et incohérences constatées dans les réponses d'étudiants qui, d'une part "connaissaient" les définitions de notions mathématiques, d'autre part n'utilisaient pas ces définitions pour décider si tel ou tel objet mathématique en était ou non un exemple. L'enseignement fonctionne en effet dans le registre du calcul (d'où d'ailleurs l'expression "Calculus" utilisée dans de nombreux pays, le terme d'analyse restant réservé à des études plus avancées) : calcul de limites, de dérivées, de primitives, de développements limités, de solutions d'équations différentielles, à l'aide d'un stock de théorèmes relais qui, une fois admis ou démontrés, permettent d'algébriser la pratique : théorèmes sur les limites de sommes, quotients, composées..., théorèmes assurant la stabilité de classes de fonctions par certaines opérations (stabilité de la continuité par somme, produit...), théorèmes liant à des conditions pouvant se traiter de façon algébrique le niveau de régularité des objets manipulés (si f a des dérivées partielles continues, elle est différentiable, si f est de classe C^1 , elle est localement lipschitzienne....).

Il ne faudrait cependant pas interpréter ce qui précède comme une critique en soi de l'algébrisation de l'analyse. Je ne songe pas à nier ce qu'historiquement a apporté cette algébrisation par le biais du calcul infinitésimal et comprends très bien l'enthousiasme qui a pu s'emparer des pionniers et de leurs élèves à découvrir le champ des possibilités subitement ouvert. Citons à ce propos le marquis de l'Hospital qui écrit en 1696 dans la préface du premier traité de calcul infinitésimal "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" :

"L'étendue de ce calcul est immense : il convient tout aussi bien aux courbes mécaniques qu'aux géométriques; il est indifférent aux signes radicaux et parfois même les utilise. Il s'étend à autant de variables qu'on le souhaite. En outre, il produit une infinité de découvertes surprenantes..."

Mais ce qui advient du fait des pratiques enseignantes de contournement et est uniformément attesté par les recherches, c'est que cette algébrisation tend pour les élèves à occuper l'espace entier. Les choix opérés par l'enseignement usuel, explicitement ou implicitement, permettent la réussite sur un certain nombre de tâches scolaires soigneusement calibrées, ils ne ménagent pas ce que l'on est en droit d'attendre aussi de l'enseignement, l'entrée dans le champ de l'approximation et sa maîtrise progressive, à la fois conceptuelle et technique.

Soulignons que ce que nous touchons là constitue un problème didactique et non un obstacle épistémologique. Il suffit d'ouvrir un ouvrage d'analyse infinitésimale du XVIIIème siècle pour se rendre compte du fait que l'algébrisation y fonctionne comme un outil fondamental et efficace, sans que ce soit au détriment du champ de l'approximation. Ce registre est omniprésent du fait des problèmes mêmes qui sous-tendent l'activité

mathématique : approximation de fonctions, résolution d'équations différentielles, calcul de variations... et les mathématiciens sont experts à la manipulation de ses techniques.

II - L'EVOLUTION DES PROGRAMMES DES LYCEES A PARTIR DES ANNEES 1980

Il est intéressant dans ces conditions de s'interroger sur les essais de rénovation de l'enseignement de l'analyse qui se sont développés au niveau du lycée en France ces dix dernières années et ont correspondu, au moins dans l'esprit de leurs promoteurs, à la volonté de construire un enseignement à la fois respectueux de l'épistémologie du champ et accessible aux élèves actuels.

Référons-nous par exemple à l'article publié par D.Lazet et J.L.Ovaert dans le Bulletin inter-IREM déjà cité de 1981, sous le titre : "Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse". Après avoir souligné l'importance de l'analyse comme secteur scientifique, il dénonce ce qui apparaît aux auteurs comme les défauts majeurs de la situation d'alors :

- l'introduction des notions de base sans problématique sous-jacente ou avec une problématique très élaborée mathématiquement mais "loin" de l'élève,
- l'emploi trop précoce d'un langage formalisé souvent hermétique,
- un enseignement trop centré sur le discours du maître,
- une construction linéaire des concepts, non rapportée à la résolution de problèmes,
- une prédominance trop grande du qualitatif sur le quantitatif,
- un intérêt trop précoce pour le pathologique.

Les propositions de rénovation qui sont faites consistent en particulier :

- à modifier les rapports entre théorie et applications :
"il faut organiser l'enseignement de l'analyse autour de quelques grands problèmes conduisant à des situations riches et liées aux autres disciplines",
- à promouvoir une approche constructiviste de l'apprentissage :
"il faut amener l'élève à agir, à construire lui-même son univers mathématique - certes en toute modestie- mais au contact des grands problèmes des sciences mathématiques",
- à rééquilibrer le quantitatif et le qualitatif :
"L'approfondissement de ces deux aspects doit aller de pair - les activités numériques, la recherche et l'exploitation d'algorithmes sont pédagogiquement très efficaces. Dans cette perspective l'usage des calculatrices (et éventuellement des microordinateurs) sera précieux à plusieurs titres..."
- à théoriser le seul nécessaire, en s'appuyant sur des niveaux de formalisation accessibles aux élèves, à ne pas théoriser pour le "plaisir".

Dans ce texte, on voit apparaître à plusieurs reprises les fonctions et suites de référence comme des objets privilégiés :

"Il est commode d'aborder l'étude des suites ou des fonctions par des méthodes quantitatives (comparaisons par majorations à des suites ou fonctions de référence pour l'étude des limites, inégalités lipschitziennes pour la continuité, inégalités de la forme $|f(x_0+h)-f(x_0)-ah| \leq k|h|^2$ pour la dérivabilité...Puis, dans un deuxième temps, des problèmes sortant du champ d'application de ces méthodes, permettent de comprendre l'intérêt d'un passage du quantitatif au qualitatif."

"Les techniques de majorations, encadrements, comparaisons à des suites ou des fonctions de référence sont mises en jeu dans la plupart des problèmes d'analyse, l'élève doit y être entraîné par le biais de ces problèmes et non par des exercices formels peu stimulants ("exercices de style")."

"En chemin, on aura fait fonctionner ou motivé l'introduction de concepts de l'analyse très importants : majoration, développements de fonctions à l'ordre 1, différence entre le local et le global, suites de référence, emploi de représentations graphiques..."

Ces fonctions et suites de référence apparaissent en fait à deux niveaux :

- comme correspondant à des cas simples et typiques dont l'étude quantitative doit précéder le passage au qualitatif qui permet d'aborder des classes plus larges d'objets ; soulignons que les rapports traditionnels dans l'enseignement entre quantitatif et qualitatif se trouvent ici inversés : le quantitatif n'est pas subordonné au qualitatif, il en est le moteur :

"En analyse, le qualitatif ne peut en général être bien compris qu'à travers une pratique suffisante du quantitatif",

- comme un outil technique utilisé en permanence dans la résolution de problèmes (fonctions et suites de référence étant ici à rapprocher des séries et intégrales de référence utilisées ensuite).

III - La réforme de 1982 ou la mise en programme des idées développées au sein de la commission

Les programmes de 1982 reflètent en effet très directement les conceptions présentées ci-dessus. Ceci se manifeste notamment par :

- La place du registre de l'approximation, marquée dès la classe de seconde, avant même donc le début officiel de l'enseignement de l'analyse. Cette place s'affirme dans les thèmes de travail proposés :

"Thèmes (à titre indicatif) :

1. Majoration, minoration d'une fonction sur un intervalle.
2. Recherches de maxima, de minima, associés à des problèmes élémentaires d'optimisation.
3. Taux de variation : encadrement de ce taux ; inégalités du type $|f(y)-f(x)| \leq M|x-y|$ pour tous x, y ; interprétation géométrique....."

mais également dans les commentaires :

"Il convient de consacrer de nombreuses activités réparties sur toute l'année aux concepts fondamentaux en analyse, de majoration, minoration, encadrement... Par ailleurs, ces activités de majoration habituent l'élève à la mise en forme de conditions suffisantes."

- L'importance accordée à l'exploration, notamment numérique, quantitative à l'aide de calculettes :

"Une grande facilité du calcul numérique permet d'aborder de façon nouvelle les problèmes d'approximation ; c'est l'expérimentation qui associe $(1+h)^a$ et $1+ah$ pour h petit, le raisonnement ensuite justifie le résultat et en indique les limites."

- L'importance accordée à l'étude de cas typiques simples en préalable à l'introduction de définitions qualitatives générales. C'est ainsi que la progression proposée en première pour la limite en 0 d'une fonction est la suivante : exemples de fonctions vérifiant $|f(x)| \leq M|x|$ au voisinage de 0 et vérification pour des fonctions de ce type que $|f(x)|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut en imposant à x d'être un intervalle suffisamment petit de centre 0 ; puis examen de situations comme $x \rightarrow \sqrt{|x|}$ qui échappent à ce cadre et incitent à un point de vue plus qualitatif. La stratégie préconisée est analogue pour la dérivation : majorations de l'écart de type $M|h|^2$ puis étude d'exemples du type $x \rightarrow x\sqrt{|x|}$ pour marquer "les limites de ce procédé et aider à dégager la notion de dérivabilité : $f(a+h)=f(a)+Ah+h \varepsilon(h)$ où la fonction ε a pour limite 0 en 0."

- L'inversion de l'ordre "théorique" : limites, continuité, dérivabilité, la continuité n'étant maintenant introduite qu'en terminale. Cette inversion est justifiée par le fait que la notion de dérivée, contrairement à celle de continuité, fournit tout un éventail d'applications intéressantes et pouvant prendre sens même si l'on ne dispose que d'un champ de référence fonctionnel restreint.

- La limitation de la formalisation. Il est par exemple précisé dans les commentaires du programme de première S :

"L'étude des limites exige des définitions : une seule, celle de la limite en 0, a besoin d'être explicitée en (ε, N) ou en (ε, η) ; il suffit ensuite sans manquer à la rigueur, d'employer des majorations et de recourir aux théorèmes (admis) de stabilité. Encore faut-il qu'à travers l'étude de nombreuses situations, on accède progressivement aux motivations de la définition en (ε, η) de la limite 0 ; on évitera l'emploi systématique de cette formulation au niveau du cours comme à celui des exercices."

- Le rôle transversal joué par les grands problèmes de l'analyse via les thèmes.

Mais soulignons que les termes de suites et fonctions de référence n'apparaissent pas explicitement dans le texte des programmes.

III2 - La réforme de 1985 ou l'invasion des fonctions de référence

La réforme suivante, en 1985, est présentée comme une réforme d'ajustement :

"Les programmes qui suivent conservent, pour l'essentiel, les objectifs et la substance des programmes mis en vigueur en 1982 [...] On a eu le double souci de tenir davantage compte des rythmes d'acquisition des élèves et des difficultés conceptuelles et techniques présentées par certaines notions, et d'ouvrir les sections scientifiques à un plus grand nombre d'élèves pour répondre à une demande sans cesse accrue d'ingénieurs, de techniciens, de chercheurs et d'enseignants."

En revanche, en ce qui concerne fonctions et suites de référence, on note un changement notable : les premières fonctions de référence sont explicitement introduites dès la classe de seconde et étudiées alors globalement. Elles servent d'appui graphique au travail sur les inégalités algébriques notamment. En première, l'objet envahit l'espace puisque c'est à travers lui que vont se formuler dorénavant les notions de limites de fonctions et de suites, dans un paragraphe qui s'intitule très modestement : "langage des limites" :

"Après observation des fonctions $h \rightarrow h^n$ ($n=1,2,3$), $h \rightarrow \sqrt[n]{h}$ au voisinage de 0, on dit que ces fonctions admettent en 0 la limite 0. Lorsqu'on a établi que, pour $|h|$ assez petit $|g(h)-L| \leq \lambda |h|^n$, où n est un entier strictement positif, on dit que g admet L pour limite au point 0, ce qu'on note $\lim_{h \rightarrow 0} g(h)=L$ "

Les commentaires précisent d'autre part que :

"L'objectif est une première prise de contact avec les fonctions de référence et leur mise en oeuvre sur quelques exemples très simples."

Cette nouvelle formulation des programmes appelle quelques commentaires :

- On ne parle plus de "notion de limite" mais de "langage des limites" comme si l'on cherchait à gommer la conceptualisation amorcée. Ce changement d'intitulé n'est pas sans rappeler celui qui au collège a transformé "l'algèbre" en "calcul littéral",

- La convergence des suites de référence vers 0 ou l'infini, la limite des fonctions de référence en 0 sont officiellement admises sur la base d'explorations à la calculatrice, contrairement à ce qui se passait dans les programmes précédents où l'exploration préparait seulement les conjectures,

- La définition donnée est une définition par critère suffisant (soulignons que dans sa version initiale, elle ne permet même pas d'étudier les limites de fonctions directement dérivées de $h \rightarrow \sqrt[n]{h}$ car cette fonction, bien que de référence, a été oubliée de la liste des conditions suffisantes). Elle ne permet donc pas d'identifier comme tels des contre-exemples à la convergence, fussent-ils aussi simples que $n \rightarrow (-1)^n$.

- L'algèbre des limites disparaît du programme de première. Le recours à l'approximation est donc imposé et, du point de vue technique, le théorème des gendarmes va devenir un instrument essentiel.

Les programmes de terminale se situent dans la continuité directe de ceux de première.

II3 - La réforme de 1990 ou le repli des fonctions de référence

Il s'agit encore une fois d'une réforme d'ajustement. L'introduction des programmes de seconde le précise clairement :

"Le programme qui suit conserve pour l'essentiel, les objectifs et la substance du programme précédent [...]. Cependant, il était nécessaire d'infléchir le programme pour assurer une bonne continuité avec les nouveaux programmes de collège (mis en vigueur en 1989-90 au niveau de la classe de troisième), qui font davantage appel à l'activité des élèves et sont plus tournés vers la résolution de problèmes et les applications".

Ce même chapeau se retrouve mutatis mutandis dans l'introduction des programmes des classes de premières S et E, terminales C, D, E où l'on insiste par ailleurs sur la volonté de poursuivre la politique d'ouverture des sections scientifiques.

En ce qui concerne l'analyse, cette introduction précise :

"En analyse, le programme combine l'étude des fonctions avec celle des suites (cette dernière étant moins approfondie en terminale D). Vu leur importance, les interventions du calcul différentiel et intégral sont largement exploitées ainsi que les problèmes numériques et les représentations graphiques. La formulation mathématique du concept de limite est hors programme ; l'unique objectif est d'acquérir une première idée de cette notion et de la faire fonctionner sur quelques exemples simples. l'étude des suites a été allégée en première et en Terminale D."

L'esprit du programme demeure donc le même.

En revanche, les fonctions de référence perdent le statut qu'elles avaient dans le programme précédent. Les pseudo-définitions des notions de convergence et de limite des programmes précédents disparaissent et les commentaires précisent (par exemple à propos des limites de fonctions) en première :

"Pour cette introduction, on s'appuiera sur des expérimentations numériques et graphiques portant notamment sur les fonctions de référence ci-contre. Pour donner une idée du cas général, on peut dire, par exemple, que $f(x)$ est supérieur à $10, 10^2, \dots, 10^9, \dots, 10^p$ dès que x est assez grand."

D'autre part, on réintroduit dès la première les rudiments de l'algèbre des limites :

"Limite de la somme de deux fonctions, du produit d'une fonction par une constante, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction, du quotient de deux fonctions."

La majoration et la minoration par des fonctions de référence ne sont donc plus le passage technique obligé. Le chapeau du paragraphe consacré aux fonctions précise à ce sujet :

"Quelques règles concernant la comparaison et les opérations algébriques sur les limites sont admises, leur signification intuitive étant mise en valeur. Les travaux sur les limites se bornent à l'étude de quelques situations où des opérations algébriques sur les fonctions de référence ou la comparaison à celles-ci permettent de conclure très simplement."

Il est difficile de lire cette modification, pratiquement la seule introduite, autrement que comme un désaveu au moins partiel du processus de transposition didactique qui s'était développé autour de l'objet "fonction de référence" et la marque de la volonté de la noosphère de profiter de l'adaptation nécessaire des programmes pour infléchir ce processus transpositif, sans changer pour autant les options essentielles. Pourquoi ce désaveu partiel ? Comment ont vécu les fonctions de référence dans la réalité du système d'enseignement ? Quels dysfonctionnements leur ont été associés ? J'aimerais dans la dernière partie de ce texte esquisser quelques hypothèses à partir du témoignage d'animateurs IREM et de la consultation de quelques manuels.

III - LES SUITES ET FONCTIONS DE REFERENCE DANS LE SYSTEME D'ENSEIGNEMENT

III.1 - L'expérience des animateurs du groupe "Analyse" de l'IREM Paris 7⁽¹⁾

Ces animateurs, membres de la commission inter-IREM analyse, ont bien sûr dès le début joué la carte des nouveaux programmes et d'ailleurs organisé des stages de formation à ces nouveaux programmes. Leur expérience nous est ici tout à fait précieuse. Or elle met clairement en évidence à la fois l'intérêt des suites et fonctions de référence dans une première approche de l'analyse et la non-viabilité des choix effectués dans le programme de 1985.

Décrivons très schématiquement les stratégies d'enseignement initialement mises en oeuvre par ces enseignants et leur évolution dans le temps. Après le premier contact global pris avec les fonctions de référence en seconde, on en venait à un regard local en première. Cette approche locale des fonctions de référence, d'abord au voisinage de 0, s'effectuait dans les classes des animateurs, conformément au programme, à la fois dans le cadre graphique et dans le cadre numérique. Elle permettait la formulation de conjectures ensuite admises. Les limites des fonctions de référence étant alors disponibles, on fait comparer à ces fonctions de référence des fonctions simples :

$x \rightarrow x \sin(1/x)$, $x \rightarrow \sqrt{1+x} - 1$, une fonction du type : $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, représentant une complexité maximum.

Dans chaque cas, la calculatrice était dans un premier temps utilisée pour émettre des conjectures. Ceci ne pouvait fonctionner économiquement que si les élèves programmaient les fonctions correspondantes (les animateurs IREM m'ont précisé que leurs élèves ne manifestaient pas de réticences vis à vis de la programmation mais qu'en revanche ils avaient rencontré souvent de telles réticences dans les stages de formation d'enseignants). Dans un second temps, il s'agissait de prouver les conjectures en majorant ou minorant par des fonctions de référence adéquatement choisies.

Considérons par exemple l'expression citée plus haut : $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ pour x non nul et supérieur strict à -1.

¹ Il s'agit de Chantal Jeulin, Roger Proteau et Danielle Spérandio que je remercie très chaleureusement pour l'aide qu'ils m'ont apportée à la préparation de cet exposé.

La calculatrice permet de conjecturer que sa limite en 0 est 2. On calcule donc : $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} - 2$. En multipliant et divisant le premier terme par la quantité conjuguée de son dénominateur, on se ramène à l'expression plus simple : $\sqrt{1+x} - 1$ et il s'agit de montrer que la limite de cette expression est 0 en 0. Pour cela, on multiplie et divise une fois de plus par la quantité conjuguée d'où l'expression : $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$

Lorsque x est voisin de 0, le dénominateur est voisin de 2, on va donc essayer d'utiliser la fonction de référence : $x \rightarrow x$ et montrer que la valeur absolue de l'expression est inférieure à $\lambda|x|$ pour un λ judicieusement choisi. On doit majorer un quotient donc minorer le dénominateur, ce qui ici s'avère facile puisqu'il est somme de deux quantités positives, l'une ne contenant pas x .

On arrive finalement à la majoration : $|\sqrt{1+x}-1| \leq |x|$ qui garantit que la limite est 0⁽²⁾.

Le travail s'accompagnait nécessairement de la mise en place progressive de techniques. Les principales semblent les suivantes :

- apprendre à repérer les termes prépondérants d'une expression,
- apprendre à choisir une fonction de référence raisonnable pour la comparaison,
- apprendre à différencier le traitement à faire subir par numérateur et dénominateur d'une fraction pour la majorer (resp. la minorer),
- apprendre à utiliser les valeurs absolues et à privilégier le traitement de quantités positives pour limiter les problèmes posés par la non compatibilité des inégalités avec produits et quotients,
- apprendre à coincer la variable dans un intervalle judicieux autour de la valeur considérée pour majorer, minorer mais aussi éviter les zéros intempestifs de dénominateurs,
- apprendre à penser à multiplier par la quantité conjuguée lorsqu'on travaille avec des radicaux.

Comme l'on pouvait s'y attendre, la mise en place de ces techniques de base de l'approximation ne devenait pas miraculeusement facile parce que l'on travaillait avec des fonctions de référence au lieu de travailler avec des ε et des η . Un gain semblait cependant évident aux enseignants : lorsque la majoration par une fonction de référence était obtenue, on concluait directement alors que les formalisations antérieures obligeaient à remonter le raisonnement par conditions suffisantes pour conclure.

Par exemple, si l'on était arrivé à la majoration : $|g(x)-2| \leq \lambda|x|^2$, on concluait directement au lieu de terminer le raisonnement de la façon suivante : pour majorer $|g(x)-2|$ par ε , il suffit de majorer $\lambda|x|^2$ par ε , donc de choisir x tel que $|x|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$ soit : $|x| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda}}$.

En revanche, ces mêmes enseignants souligneront qu'il fallait soigneusement limiter la complexité des exercices (ce que demandait le programme) pour que l'exigence de majoration par des fonctions de référence, qui restreint les choix possibles, ne devienne pas un carcan qui contraint plus le travail d'approximation qu'il ne le simplifie.

Même en respectant ces conditions, il semblait cependant difficile d'obtenir des compétences un tant soit peu stables en consacrant à ce travail moins d'une quinzaine d'heures, ce qu'ils feront les premières années.

Mais il est clair à la lecture des programmes que l'enjeu de la notion de limite en première n'est pas la notion de limite elle-même mais celle de dérivée et les problèmes que la notion de dérivée permet de résoudre. Et c'est ce qui va rendre la position initialement adoptée intenable. En effet, les enseignants constatent que lorsque l'on aborde les dérivées, le contrat didactique relatif aux calculs de limites et fonctions de référence bascule. Eux-mêmes et leurs élèves ressentent la nécessité de s'autoriser des modes de fonctionnement plus souples et un minimum d'algèbre des limites s'introduit presque spontanément ; par exemple, si la limite de l'expression déjà citée $\sqrt{1+x}-1$ est à calculer en 0, c'est maintenant en tant qu'intermédiaire de calcul et dans ces conditions, très vite on abrège : quand x tend vers 0, $\sqrt{1+x}$ tend vers 1 car $1+x$ tend vers 1 et $\sqrt{1}=1$, donc la différence tend vers 0.

Ceci conduit les redoublants éventuels à rassurer les élèves qui peinent, comme c'est naturel, sur les premières justifications de calculs de limites par des commentaires du type suivant :

"Ne vous en faites pas, ce n'est qu'un mauvais moment à passer, bientôt ça sera bien plus simple, vous verrez."

² Cet exemple met bien en évidence la complication créée par l'obligation de recours aux fonctions de référence car il est clair que l'on a gagné mathématiquement dès que l'on est arrivé à l'expression $\sqrt{1+x}-1$.

Illustrons ce basculement nécessaire par un autre exemple simple :

Supposons que l'on approche la notion de dérivée en étudiant l'évolution du volume d'un cube d'arête a :

Posons : $V(a+h)=(a+h)^3$

$$V(a+h)-V(a)=3a^2h+3ah^2+h^3$$

Une exploration à la calculatrice montre que lorsque h est petit, le terme prépondérant dans la variation de volume est : $3a^2h$.

Interpréter ceci en termes de dérivées revient à écrire que $V(a+h)-V(a)=3a^2h+h\varphi(h)$ et à montrer que $\varphi(h)$ a pour limite 0 en 0. Si l'on respecte le rituel des fonctions de référence, il faut passer ici peu ou prou par le cheminement suivant :

$$\varphi(h)=3ah+h^2=h(3a+h)$$

Au voisinage de 0, $3a+h$ est borné, donc on va pouvoir majorer par une expression de la forme $\lambda|h|$. En se limitant par exemple à $|h| \leq 1$, on obtient la majoration : $|\varphi(h)| \leq 3a+1||h|$.

Ce rituel en fait ne peut survivre longtemps : pour les élèves, il est évident que $\varphi(h)$, somme de deux quantités de limite 0, a aussi pour limite 0. Ils peuvent légitimement se demander pourquoi face à de telles évidences, il faudrait continuer à développer tant d'ingéniosité calculatoire alors que, dans le même temps, leur cours de mathématiques leur donne sans cesse l'exemple de résultats bien moins évidents admis sur la base de quelques explorations. Il y a là comme une excroissance de rigueur difficilement justiciable. Pour l'enseignant, l'enjeu étant maintenant la notion de dérivée et son exploitation dans des problèmes consistants, l'économie produite par un minimum d'algèbre des limites s'impose. Le contrat didactique est contraint d'évoluer en ce sens.

Mais cette évolution, en retour tend à faire considérer comme une purge transitoire les justifications associées à l'utilisation stricte des fonctions de référence préconisées qui ont précédé. D'où les réflexions de redoublants citées, et chez les enseignants progressivement une réticence à consacrer autant de temps à des activités délicates et qui ont si peu d'influence sur la suite de l'enseignement.

Le système finit par se stabiliser très raisonnablement sur une utilisation plutôt exploratoire et heuristique des fonctions de référence et la réintroduction dès la classe de première d'un minimum d'algèbre des limites, fonctionnement que les nouveaux programmes de 1990 ne feront qu'entériner.

B1b - Les fonctions et suites de référence dans les manuels :

Le regard que nous avons jeté sur certains manuels largement répandus a d'une part confirmé le changement de contrat didactique provoqué par l'introduction des dérivées, chapitre que les programmes n'ont jamais, soulignons-le, demandé de traiter en se passant de toute algèbre des dérivées.

Nous reproduisons par exemple ci-après les deux premiers exemples donnés dans le manuel Transmath de premières S et E relatif aux programmes de 1985, respectivement pour illustrer la notion de limite en 0 et celle de dérivée. La différence de traitement des expressions se passe de tout commentaire :

Exemple 2 : f est la fonction $h \mapsto h^3 + h^2 + 1$.

On a tout lieu de penser que si h est proche de 0, alors h^3 et h^2 le sont aussi, donc que $f(h)$ est proche de 1. D'où la conjecture : f a pour limite 1 en 0.

Pour le montrer, écrivons que $f(h)-1=h^3+h^2=h^2(h+1)$.

Ainsi, pour tout réel h ,

$$|f(h)-1|=|h^2(h+1)|=|h^2||h+1|.$$

Pour arriver à une écriture du type : $|f(h)-1| \leq \lambda|h^2|$, il suffit de trouver un réel λ et un intervalle I de centre 0 tel que pour tout h de I on ait $|h+1| \leq \lambda$.

Choisissons par exemple $I =]-1; 1[$; $h+1$ est alors dans $]0; 2[$ et donc : $|h+1| < 2$.

Donc, pour tout réel h tel que $|h| < 1$, on a :

$$|f(h)-1| \leq 2|h^2|$$

et d'après l'affirmation du paragraphe a. (cas où $\lambda=2$ et $n=2$) :

$$f \text{ a pour limite } 1 \text{ en } 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (h \mapsto h^3 + h^2 + 1) = 1.$$

Commentaires

• Sur le choix de l'intervalle I : on aurait tout aussi bien pu choisir h dans $]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$ par exemple et majorer alors $|h+1|$ par $\frac{5}{4}$; d'où : pour tout réel h tel que $|h| \leq \frac{1}{4}$, on a $|f(h)-1| \leq \frac{5}{4}|h^2|$. Ce qui permet aussi de conclure que f a pour limite 1 en 0.

• Autre façon de majorer $|f(h)-1|$: on a $|f(h)-1| = |h^3+h^2|$; or $|h^3+h^2| \leq |h^3| + |h^2|$. De plus, pour tout réel h tel que $|h| \leq 1$, on a $|h^3| \leq |h|$ et $|h^2| \leq |h|$, d'où : $|h^3+h^2| \leq 2|h|$. D'où finalement : pour tout réel h tel que $|h| \leq 1$, on a $|f(h)-1| \leq 2|h|$.

Exemple 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle dérivable en un réel $a \neq 0$?

Pour $h \neq 0$, on peut écrire :

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2 + ah}.$$

Lorsque h est proche de zéro, il en est de même de ah donc $a^2 + ah$ est proche de a^2 .

De plus, $a^2 \neq 0$; la fonction g a pour limite $-\frac{1}{a^2}$ en zéro, donc f est dérivable en a , de

nombre dérivé égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Mais, la lecture des manuels attire l'attention sur d'autres phénomènes contribuant à la non-viabilité des choix de 1985 :

- Le décalage entre le travail exploratoire de conjecture et le travail de justification :

La conscience de ce décalage s'est imposée à moi à travers un exemple extrait du Dimathème, caricatural certes mais attirant d'autant plus l'attention. L'exemple est le suivant :

Exemple traité 1

Chercher la limite de la suite u , définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2 - 2n - 3.$$

Idée intuitive

Pour n grand, l'ordre de grandeur de u_n est n^2 : en effet à l'aide d'une calculatrice, on constate la primauté du terme n^2 lorsque n est assez grand : la calculatrice néglige par exemple $-2n - 3$ pour $n = 10^{20}$.

Mise en forme

Montrons que $\lim u = +\infty$. Pour cela transformons l'écriture de u_n :

$$u_n = n(n-2) - 3.$$

En prenant n assez grand, nous pouvons minorer u_n par le terme général d'une suite de référence de limite $+\infty$: si $n > 4$ alors $n-2 > 2$ et $n(n-2) > 2n$

d'où $u_n > 2n - 3$

que l'on écrit $u_n > n + (n-3)$; or $n-3 > 1$

donc $u_n > n$.

Ceci montre que $\lim u = +\infty$.

Dans ce cas précis, ce que donne à voir l'exploration, c'est que l'expression donnée d'abord décroissante devient croissante pour $n > 10$, semble tendre vers $+\infty$ quand n tend vers ∞ , en se comportant à peu près comme n^2 .

La justification proposée ne s'appuie en rien sur ceci : à la logique des fonctions de référence comme outil exploratoire permettant de reconnaître et caractériser des types de comportement, s'oppose dans la seconde phase une autre logique, celle des fonctions de référence, instrument de majoration et de minoration.

Une justification s'appuyant sur l'exploration conduirait naturellement à essayer de mettre en évidence le terme prépondérant identifié. Pour l'expression donnée, ceci passe par la mise en facteur de ce terme (pour une expression additive, la simple comparaison à n^2 aurait permis de conclure). On arrive ainsi à l'écriture :

$n^2(1 - \frac{21}{n} - \frac{20}{n^2})$. La quantité entre parenthèses est une somme de trois termes, l'un constant, les deux autres

étant des suites de référence de limite 0. Si l'on dispose d'un minimum d'algèbre des limites, la justification s'achève sans problème et respecte la démarche de l'exploration. S'il faut à tout prix majorer par une fonction de référence, le travail technique est loin d'être terminé et il y aura rupture nécessaire avec le travail d'exploration.

Or, rien dans les manuels ne signale à l'élève cette rupture (le manuel cité parle par exemple de "mise en forme" de l'exploration numérique). Et le fait que même si on trouve une croissance en n^2 , on n'a pas forcément intérêt à chercher une minoration en $\lambda|n^2|$, que le plus souvent on pourra se rabattre par exemple sur une minoration en $\lambda|n|$ plus accessible techniquement, n'est bien sûr pas mentionné. Tout est fait en effet

pour que, dans cette première familiarisation avec "le langage des limites", tout semble naturel, intuitif, même ce qui ne l'est en rien.

On peut raisonnablement faire l'hypothèse que cette rupture non assumée est source de difficultés et contribue à la disqualification des méthodes de justification associées dès qu'un autre fonctionnement devient légitime.

- Le statut des énoncés :

La lecture des manuels correspondant aux programmes de 1985 attire également inévitablement l'attention sur une autre difficulté liée aux programmes actuels : l'ambiguïté du statut des énoncés, la difficulté qu'il y a à gérer, en particulier au niveau de l'écrit, l'absence de définition des notions introduites.

Nous illustrerons notre propos par deux exemples de manuels : le Dimathème, édité par Didier, le Transmaths, édité par Nathan.

Le manuel Dimathème commence le paragraphe de cours sur les limites de suites discrètement baptisé "information" par :

"Dans le chapitre précédent, nous nous sommes surtout intéressés aux premiers termes d'une suite. Nous cherchons ici à étudier le comportement des termes à partir d'un certain rang n_0 c'est à dire les termes d'indice supérieur à n_0 .

Nous ne donnons aucune définition, mais nous proposons une approche intuitive qui pourrait recevoir une mise en forme rigoureuse."

Suit un paragraphe pudiquement baptisé "présentation" qui fournit une définition en bonne et due forme en langage naturel de la convergence vers $+\infty$, une définition qui n'est cependant pas reconnue comme telle :

Autrement dit : pour A quelconque donné, il n'y a qu'un nombre fini de termes inférieurs à A (car leur rang est inférieur à n_0).

« La suite u a pour limite $+\infty$ (ou u_n tend vers $+\infty$) quand n tend vers $+\infty$ » signifie que :

pour un réel donné A quelconque, tous les termes à partir d'un certain rang n_0 sont supérieurs à A.

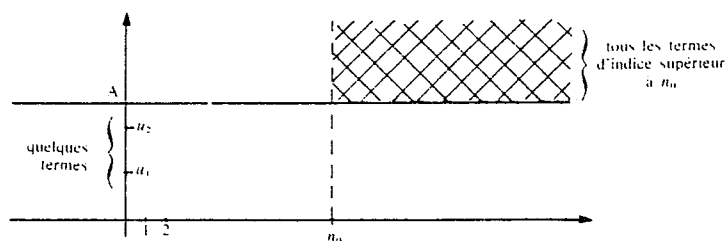


Fig. 6

Nous notons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u = +\infty$.

Exemples :

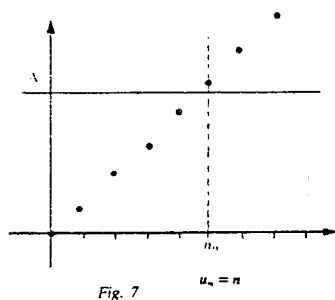


Fig. 7

$$u_n = n$$

u a pour limite $+\infty$.

Soit A donné.

Prenons n_0 , un entier naturel supérieur à A :

A partir de n_0 , tous les termes de u sont supérieurs à A.

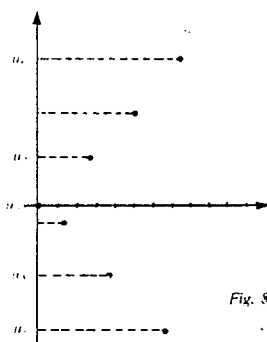


Fig. 8

$$v_n = (-1)^n n$$

v n'a pas pour limite $+\infty$.

Prenons A = 0.

Les termes de rang impair de la suite (donc une infinité) sont inférieurs à 0.

Remarque :

Pour la suite u , la propriété est vraie, quel que soit le nombre A donné.

Pour la suite v , une valeur de A suffit (ici A = 0).

Nous posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

On démontre ensuite, en utilisant cette définition que les suites de référence usuelles n^p ($p=1, 2, 3$), $\sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$, mais ces démonstrations ne sont pas reconnues comme telles et conclues par : "Ceci nous amène à poser", "Nous dirons que"
Et les résultats correspondants n'ont pas le statut de théorèmes mais de règles.

Le manuel Transmath commence le chapitre sur les limites intitulé lui aussi très modestement : "L'idée de limite" par :

Dans le langage courant le mot limite a de multiples significations : le sens mathématique est bien particulier et il est préférable, au début, d'éviter des rapprochements avec les sens usuels.

Dans ce chapitre, nous expliquons, à travers des exemples, la signification de l'expression "la fonction f a pour limite l au point 0 " ; conformément au programme, nous nous en tiendrons là évitant l'étude complète de la notion de limite d'une fonction. L'essentiel de ce chapitre se situe donc dans l'étude de ces exemples, aussi ne retrouve-t-on pas les rubriques habituelles."

Il est difficile de ne pas ressentir un malaise à la lecture de ces quelques lignes. On se réfugie derrière les programmes pour expliquer qu'on en reste au niveau d'exemples, qu'il n'y aura pas un cours dans les formes usuelles, en laissant croire que la seule autre alternative serait l'étude complète de la notion, et ce niveau d'exemples intuitifs doit, semble-t-il, suffire à marquer la différence entre le sens mathématique et les sens usuels de la limite...

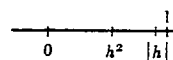
La suite confirme cette impression. Le paragraphe de cours qui suit les activités préliminaires commence par un paragraphe intitulé : "Sens de l'expression "la fonction f a pour limite zéro au point zéro (ou en zéro) :

D'un point de vue naïf ou imagé, dire que la fonction f a pour limite zéro en zéro signifie que $f(h)$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).
Mais ce langage imagé manque de précision; en effet, que signifie par exemple «le réel $f(h)$ est proche de zéro» si l'on ne donne pas d'autre renseignement?
Nous n'explicitons pas davantage en théorie; nous allons illustrer plutôt par des exemples.

Exemple 1 : la fonction carré $f : h \mapsto h^2$.

Nous savons que pour tout réel h tel que $|h| < 1$ on a :

$$0 \leq h^2 \leq |h| \quad \text{soit} \quad 0 \leq f(h) \leq |h|.$$

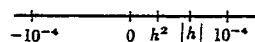


Ces inégalités s'interprètent intuitivement, ainsi : si h est proche de zéro ($|h|$ aussi) alors $f(h)$ est encore plus proche de zéro.

Plus précisément, ces inégalités prouvent que l'on peut avoir $f(h)$ aussi proche de zéro que l'on veut, pour tout h suffisamment petit.

Par exemple, si l'on veut avoir :

$$0 \leq h^2 \leq 10^{-4}$$



il suffit de choisir h tel que $|h| < 10^{-2}$.

En effet, on a alors : $0 \leq h^2 \leq |h| < 10^{-2}$.

De même, pour avoir $0 \leq h^2 < 10^{-24}$, il suffit de choisir h tel que $|h| < 10^{-12}$.

Remarquez que pour un technicien, 10^{-24} est un nombre extrêmement petit, mais qu'en mathématique il n'est pas interdit de chercher à avoir $h^2 < 10^{-100}$, ou $h^2 < 10^{-999}$, ...

La propriété : on peut avoir $f(h)$ aussi proche de zéro que l'on veut, pour tout réel h suffisamment petit, se traduit par : la fonction f a pour limite zéro en zéro, et se note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (h \mapsto h^2) = 0.$$

On peut légitimement se demander où est la naïveté ici, surtout lorsque l'on dit préciser cette naïveté, à la page suivante, en la paraphrasant de façon réductrice (celle des programmes) :

Naïvement, la fonction f a pour limite ℓ en zéro signifie que $f(h)$ est proche de ℓ pour tout réel h suffisamment proche de zéro. Or dire que $f(h)$ est proche de ℓ , c'est dire que $f(h) - \ell$ est proche de zéro. Autrement dit, «la fonction f a pour limite ℓ en zéro» signifie que $f(h) - \ell$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).
De façon plus précise :

ℓ est un réel et D est l'ensemble de définition d'une fonction f .
Si l'on peut trouver un réel strictement positif λ et un naturel non nul n , tels que pour tout réel h assez proche de zéro (et dans D), on ait :

$$|f(h) - \ell| \leq \lambda |h|^n \quad \text{ou} \quad |f(h) - \ell| \leq \lambda \sqrt[n]{|h|}$$

alors on dit que f a pour limite ℓ en zéro.

On note alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (h \mapsto f(h)) = \ell.$$

Soulignons que dans ce cours, si l'on trouve quelques énoncés encadrés comme celui cité ci-dessus, aucun n'a de statut explicitement marqué.

Ces deux manuels mettent aussi en évidence une autre conséquence de l'absence de définition : la difficulté liée à l'impossibilité de gérer correctement les contre-exemples.

Ainsi, le Dimathème propose juste après la définition-présentation de la convergence vers $+\infty$, deux exemples : $u_n=n$ et $u_n=(-1)^n n$ et exploite la définition pour démontrer que la première converge vers $+\infty$ et l'autre non (cf. citation antérieure). Mais le lecteur ne trouvera pas d'autres exemples dans le cours et un seul dans les exercices : $u_n=(-1)^n$

pour lequel la solution proposée sera sans autre commentaire : "pas de limite $u_n=1$ ou $u_n=-1$ " !

Le Transmath inclut dans le cours un exemple de fonction qui n'a pas de limite (exemple qui sera réutilisé dans le chapitre sur les dérivées) :

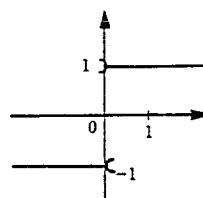
2.3. Exemples de fonctions qui n'ont pas de limite en zéro

a. Fonction $f : h \mapsto \frac{|h|}{h}$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
On voit que l'on peut écrire :

$$f(h) = \frac{h}{h} = 1 \quad \text{pour } h > 0$$

$$f(h) = \frac{-h}{h} = -1 \quad \text{pour } h < 0.$$



f ne peut pas avoir de limite en zéro, car les valeurs de $f(h)$ pour les réels h proches de zéro, ne restent pas proches d'un SEUL réel ℓ .
En effet, si h est proche de 0 et strictement positif, on a $f(h)$ proche de 1 (en fait égal à 1); mais si h est proche de 0 et strictement négatif, on a $f(h)$ proche de -1 (en fait égal à -1).

Mais bien sûr, comme dans le manuel précédent, la condition suffisante du cours ne permettant pas de prouver la non-convergence, on voit apparaître un énoncé écrit en gras, au statut indéterminé, qui vient miraculeusement justifier l'absence de limite.

Je me suis limitée ici à citer deux manuels largement utilisés. Le lecteur n'aura aucune difficulté à retrouver des illustrations analogues dans d'autres ouvrages car les exemples cités ne témoignent pas de l'incompétence de leurs auteurs. Ils sont simplement révélateurs de l'existence de difficultés incontournables.

Ce que nous donnent à voir en effet ces exemples, c'est la difficulté qu'il y a à gérer un enseignement de ce type, qui se veut simple familiarisation, où l'on s'interdit explicitement de définir ce dont on parle, mais où l'on veut que dans le même temps la présentation du savoir ne soit pas purement culturelle mais vise une opérationalité des connaissances. Le cours, ou ce qui en tient lieu, devient un ensemble où les énoncés sont sans statut. La frontière entre ce qui est admis et ce qui est démontré n'est pas conditionnée par des critères de difficultés réelles, clairement explicités, la frontière entre ce qui est reconnu comme précis ou non, comme mathématique ou non, semble à l'oeil non averti relever de la pure fantaisie et, comble pour des mathématiciens, des démonstrations réelles effectuées n'osent plus s'affirmer en tant que telles.

On ne peut rester insensible à ce problème. Comment ne pas se demander, en effet, dans quelle mesure cet enseignement de familiarisation ne s'effectue pas au détriment de la construction de la rationalité mathématique dans laquelle est engagé l'élève ? Comment ne pas se demander ce que peut apprendre un enseignement qui ne se donne pas les armes nécessaires pour s'engager dans le jeu des preuves et réfutations ? Comment ne pas se demander quel sera le prix à payer pour arriver à s'engager ultérieurement dans d'autres pratiques ?

Il est bien évident que ce n'est pas le simple retour à un statut plus raisonnable des fonctions de référence qu'entérine le programme de 1990 qui peut apporter à lui seul une réponse à ces questions.

IV - CONCLUSION

La réforme de 1982 a voulu rendre l'enseignement de l'analyse à la fois plus satisfaisant épistémologiquement et plus respectueux des processus d'apprentissage des élèves : il s'agissait de fonder l'enseignement sur la résolution de problèmes riches et significatifs, d'initier progressivement les élèves au champ de l'approximation, de repenser les rapports entre quantitatif et qualitatif, ceci tout en limitant la formalisation au strict nécessaire. Les fonctions et suites de référence ont été des emblèmes du changement souhaité : elles permettaient de mettre l'accent souhaité sur le quantitatif et de le faire vivre grâce aux calculatrices en préalable à un qualitatif plus général, elles pouvaient guider des pratiques d'exploration, de formulation de conjectures fondamentales pour les concepteurs de la réforme, elles se prêtaient particulièrement bien à l'intégration souhaitée des moyens technologiques nouveaux, elles fournissaient des exemples simples mais typiques pour aider à la structuration des connaissances. Ces atouts, convenablement exploités, vont leur permettre progressivement de dépasser ce statut de simple référent. D'outils d'exploration et de classification pour devenir la cheville ouvrière du travail d'approximation et grignoter le terrain laissé libre par une formalisation désavouée. En 1985, l'invasion est achevée et entérinée par les programmes. C'est par rapport aux suites et fonctions de référence que sont formulées les pseudo-définitions de limites qui remplacent les quelques définitions qui avaient résisté au changement de programme précédent. Exit aussi l'algèbre des limites qui permettait de les contourner partiellement. Mais, à trop envahir l'espace, l'objet a dépassé ses limites : outil bien adapté à l'exploration, à la classification, il est pesant, inefficace, s'il doit assumer à lui seul tout le travail justificatif. Pour les suites et fonctions de référence, le déclin est dès lors inévitable et prévisible. Le strict respect de la lettre du programme produit dans les classes des phénomènes aberrants qui alertent l'Inspection, les pionniers, persuadés de l'intérêt de ces objets, prennent la liberté nécessaire avec les programmes pour les faire vivre de façon raisonnable dans les classes. Les programmes de 1990 entérineront en réduisant espace et pouvoir des fonctions de référence. Leur statut actuel leur permettra-t-il de survivre dans le système d'enseignement ? Rien n'est moins sûr. Certes, ce sont des objets intéressants et utiles, mais un objet peut-il survivre avec ce type d'utilité ? Un rapide amalgame avec les séries et intégrales de référence pourrait laisser penser que oui. Ce serait oublier que séries et intégrales de référence fournissent des critères efficaces, quasiment algébrisés pour traiter bon nombre d'exercices classiques, ce qui n'est pas le cas des fonctions de référence au niveau où elles sont utilisées.

Au delà des seules fonctions et suites de référence, cette histoire, même sommairement analysée comme elle l'est ici, nous rappelle s'il en était besoin :

- que pour faire vivre un registre (ici celui de l'approximation), le plus efficace n'est pas forcément de forcer son utilisation en interdisant les autres (ici le registre algébrique),
- que supprimer systématiquement ce qui semble difficile d'accès (ici la formalisation) n'est pas forcément la meilleure solution,³
- qu'une notion ne peut pas vivre dans l'enseignement simplement à travers de grands et riches problèmes ; nécessairement doit se constituer autour d'elle un ensemble d'exercices de complexité réglable permettant de la faire fonctionner plus localement, de se familiariser avec elle, de s'entraîner à la rendre opérationnelle,
- que pour permettre et justifier un tel fonctionnement, une notion doit avoir un intérêt suffisamment substantiel et des champs de reprise possibles dans divers domaines,
- que pour qu'une notion puisse vivre dans l'enseignement, il faut que les contrats didactiques qui permettent de la gérer soient compatibles avec ceux qui permettent de gérer les notions en relation avec elle,
- que toute notion introduite dans le système d'enseignement échappe à ses concepteurs pour mener une vie conditionnée par des lois et contraintes que nous connaissons encore mal mais qui n'en existent pas pour autant.

Enfin, elle nous rappelle que ne pas vouloir prendre en compte ces dures réalités, c'est s'exposer, avec les meilleures idées et intentions du monde à proposer des remèdes qui risquent de s'avérer pires que le mal initial, et que, tout en développant le maximum d'analyses préalables, vu notre connaissance limitée du système, il est impératif de préparer avec chaque réforme la mise en place des systèmes d'observation et d'analyse qui permettront d'étudier le fonctionnement réel du système et de le réguler, autrement que par le système usuel du balancier.

³ La recherche d'A. Deledicq (cf. références) visant à exploiter pour les débuts de l'enseignement de l'analyse les possibilités offertes par l'analyse non-standard peut-être lue comme une tentative pour trouver face à ces questions un équilibre plus satisfaisant que celui de l'enseignement actuel.

REFERENCES :

- Commission interIREM Analyse (1981) : *Enseignement de l'analyse*, Bulletin interIREM, Ed. IREM de Lyon.
- Antoine T., Beaumont A., Deledicq A., Forgues J.L., Diener M. (1991) : *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal*, Ed. IREM Paris 7.
- Alibert M., Artigue M., Hallez M., Legrand M., Ménigaux J., Viennot L. (1989) : *Différentielles et procédures différentielles au niveau du premier cycle universitaire*, Rapport de recherche, Ed. IREM Paris 7.
- Artigue M. (1990) : Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices, *Communication à la Conference on Functions*, Purdue University, (to appear).
- Artigue M. (1991) : Analysis in D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 167-198, Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard Y. (1990) : La transposition didactique, Ed. La pensée Sauvage, Grenoble (1ère édition 1985).
- Deledicq A. et Forgues J.L. : (1990) : *Les débuts en analyse*, Ed. IREM Paris 7.
- Legrand M., Grenier D., Richard F. (1986) : *Une séquence d'enseignement de l'intégrale en DEUG A première année*, Cahier de Didactique des Mathématiques N°22, Ed. IREM Paris 7.
- Legrand M. (1991) : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, *Conférence aux journées Inter-IREM Analyse*, Nice, à paraître dans Repères IREM.
- Schneider M. (1988) : *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, Thèse de Doctorat, Louvain La Neuve.
- Sierpiska A. (1985) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6.1, pp. 5-67.
- Tall D.O. & Vinner S. (1981) : Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12.2, pp. 151-169.

DE L'ANALYSE NON STANDARD AU CALCUL INFINITESIMAL

André Deledicq - IREM de l'Université de Paris 7

PROPOS :

L'analyse non standard¹ peut-elle apporter quelque chose à l'enseignement élémentaire de l'analyse ?

Mon propos n'est pas exactement de répondre à cette question mais d'en préciser le sens ; après quoi, très classiquement, lorsque le contexte en aura été bien délimité et le sens des mots mieux établi, on s'apercevra que la réponse à la question devient quasiment triviale, modulo la réflexion, l'argumentation et les expériences que son énoncé pourra évoquer.

La difficulté essentielle tient évidemment dans l'expression "analyse non standard" et dans ce que chacun peut en connaître au regard de ce qui a été publié sur le sujet (voir la bibliographie) : ces textes entraînent en effet trop rapidement le lecteur vers des questions importantes certes, mais prématurées au regard de son accoutumance avec le sujet :

- comment s'articulent les liens non standard/non fini ?
- où donc la logique et/ou la théorie des ensembles sont-elles utiles ou nécessaires ?
- s'agit-il d'une véritable révolution culturelle sur les fondements des mathématiques ?

Mon travail a plutôt consisté à faire émerger et à expliciter le côté élémentaire et pragmatique des concepts et des techniques ; pour cela, je me suis appuyé sur :

- l'enseignement optionnel de "calcul infinitésimal" mis au point avec

¹en abrégé NSA pour "Non Standard Analysis", ou, pour les francophones : "Nouvelle et Simple Analyse".

Marc Diener en DEUG A de l'Université Paris 7 (88-89 à 90-91)² ;

- la formation continue de professeurs de mathématiques en analyse non standard à partir d'une perspective historique à l'IREM de Paris 7 (en 90-91) ;

- la mise au point, avec des professeurs de lycées, d'interventions diverses en Première S et en Terminale (de 1 heure de conférence, à 6 heures d'exposés et exercices, depuis octobre 89)³.

J'essaierai donc de répondre successivement aux questions suivantes :

§1 Comment peut-on introduire aujourd'hui l'analyse d'une manière radicalement élémentaire ?

Réponse : par l'introduction de trois ordres de grandeur principaux (le grand, l'appréciable, le petit) assortis de leurs techniques opératoires (les règles de Leibniz).

§2 Quelles sont les raisons *a priori* militant pour cette introduction ?

Réponses : *historiques, didactiques et épistémologiques.*

§3 Quels sont les obstacles classiques à cette introduction ? Peut-on proposer un modèle de mesure des grandeurs à la fois réaliste (on ne peut pas tout (s)avoir !) et raisonnablement optimiste (mais on peut en (s)avoir autant que nécessaire !) ?

Réponses : la *récurrence pragmatique*, et les principes de débordement.

² Le contenu de cet enseignement est développé dans *Le calcul infinitésimal* édité chez A. Colin (Collection U.)

³ Pour les professeurs des lycées qui voudraient effectivement parler à leur élèves le vocabulaire infinitésimal, un document est disponible à l'IREM de Paris 7 : *L'analyse, au lycée avec le vocabulaire infinitésimal* (juillet 91).

§4 Quelles sont les *raisons a posteriori* justifiant cette introduction?

Réponses : *techniques et conceptuelles.*

§5 Quels sont les *obstacles* nouveaux qui risquent alors d'apparaître ?

Réponses : au niveau des énoncés mathématiques, essentiellement un phénomène d'*interférence* ; au niveau des applications, certaines conceptions concernant le *domaine de validité du modèle abstrait d'une situation pratique.*

1 - UNE NOUVELLE ET SIMPLE ANALYSE : LE CALCUL INFINITESIMAL.

1.1. Existence d'ordres de grandeur.

Avant d'exposer les principes du (nouveau) calcul infinitésimal, précisons que nous avons choisi le cadre théorique défini par Nelson [voir la bibliographie] en 1977, redessiné et médiatisé dans un contexte élémentaire.

En particulier, l'idée qu'il est bon de garder à l'esprit pour minimiser les obstacles qui risquent de se présenter et éviter de se poser de fausses questions est la suivante :

R et N restent ce qu'ils ont toujours été !

Rien ne change, donc, et ce qui était vrai classiquement le reste en calcul infinitésimal. Ce qui est nouveau, c'est notre capacité à voir des *différences* entre des objets que les axiomes classiques voient indifférenciés : tout se passe *comme si les nombres avaient été créés en couleur*, mais que nos "sens classiques" (i.e. nos énoncés et nos techniques classiques) les percevaient en noir et blanc. C'est ce caractère daltonien qui se trouve "guéri" par notre essentiel et premier énoncé :

Axiome de différenciation des ordres de grandeur (dans N)

Il y a, dans N, deux classes d'entiers : les entiers dits *appréciables*, comprenant 0 et 1, et les entiers dits *i-grands*. Ces

deux classes, ou "ordres de grandeur", sont telles que...

- ... tout entier *i*-grand est supérieur à tout entier appréciable ;
- ... la somme de deux entiers appréciables est appréciable.

De cet axiome, et par le jeu des propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$, on déduit (la démonstration est sans difficulté) les propriétés que les mathématiciens du XVIIIème siècle utilisaient sans complexes et que tous les mathématiciens (et tous les physiciens) voudraient bien pouvoir écrire aujourd'hui sans arrière pensée parce qu'elles ne font que traduire une certaine "intuition". En particulier :

Différenciation des ordres de grandeur dans $\mathbb{R}$.

Il y a, dans $\mathbb{R}$, trois classes de réels :

- les réels *i*-grands (ceux dont la partie entière est *i*-grande en valeur absolue)
- les réels *i*-petits (0 et ceux qui sont inverses d'un *i*-grand)
- les autres, dits réels *appréciables*.

Et l'on a, par exemple :

Un réel est *i*-petit *ssi* sa valeur absolue est inférieure à tous les appréciables positifs.

Un réel est *i*-grand *ssi* sa valeur absolue est supérieure à tous les appréciables positifs.

1.2. Règles opératoires

Les tableaux suivants résument les règles que nous proposons d'appeler "règles de Leibniz", en hommage à l'inventeur du premier "calcul" sur les infinitésimaux.

nature de $x + y$	y est ip	y est app	y est lg
x est ip	ip	app	lg
x est app	app	app ou ip (?)	lg
x est lg	ip	lg	?

nature de $x \times y$	y est ip	y est app	y est lg
x est ip	ip	ip	?
x est app	ip	app	lg
x est lg	?	lg	lg

nature de x / y	y est ip	y est app	y est lg
x est ip	?	ip	ip
x est app	lg	app	ip
x est lg	lg	lg	?

Notez que le fait de ne rien pouvoir dire a priori du produit xy , lorsque x est i-petit et y i-grand, n'est ni plus ni moins gênant que le fait de ne rien pouvoir dire a priori de la somme $x+y$ lorsque x est positif et y négatif.

En fait, en calcul infinitésimal, le problème dit des "formes indéterminées" en mathématiques classiques ne semble pas du tout se poser comme un artefact mais apparaît sous la forme de "vrais" problèmes du type : "beaucoup de petites choses ... combien cela peut-il faire ?" . On pourra voir, dans *L'analyse au lycée avec le calcul infinitésimal* que nous avons fait de ce problème l'une des motivations et des situations-clefs des débuts de l'analyse.

1.3. Le vocabulaire infinitésimal

Nous terminerons cette courte liste de propriétés par quelques définitions utiles et un résumé (encadré) de quelques propositions lexicales.

Définition : Deux réels x et y sont dits *i-voisins* (en abrégé *iv*) ssi $x-y$ est un réel *i-petit*.

On note alors $x \approx y$.

Commentaire : Autour de 0, on trouve ainsi les réels *i-petits*, qui sont exactement les nombres *i-voisins* de 0.

Autour de 1, il y a les nombres *i-voisins* de 1. Autour du rationnel $16/7$, il y a les nombres *i-voisins* de $16/7$...

Ainsi, les nombres à notre échelle se groupent-ils comme des "halos" entourant certains nombres particuliers :

Il y a des nombres réels non *i-grands* qui sont, pour les nombres *i-voisins* qui les entourent, exactement ce que 0 est pour les *i-petits* qui l'entourent : ce sont les réels *standard*. Précisément, un réel standard est un réel que l'on peut définir par une propriété non infinitésimale (voir encadré).

Définitions : Lorsque le quotient a/b est *i-petit*, on dit que a est *négligeable* devant b ; on note souvent $a \ll b$.

Lorsque le quotient x/y est appréciable, on dit que x et y sont du même ordre de grandeur ; on peut dire aussi, comme Leibniz, que x et y sont *comparables*.

Lorsque le quotient u/v est *i*-voisin de 1, on dit que u et v sont *équivalents* ; on note $u \sim v$

1.4. Résumé de quelques propositions de vocabulaire pour une meilleure communication en CALCUL INFINITESIMAL.

□ Celui qui commence une phrase par "*En calcul infinitésimal...*", se place explicitement dans une théorie des nombres réels comprenant l'axiome de *différenciation des ordres de grandeur* ; il peut donc se permettre des argumentations et des démonstrations d'analyse infinitésimale" dite aussi "non standard" (mais ces deux derniers mots sont un peu "gros" en français et n'évoquent pas exactement ce qu'ils évoquent en américain.

□ Les adjectifs et noms *i-grands*, *i-petits* et *i-voisins* ont l'avantage d'être à la fois simples et courants, le "*i-*" marquant suffisamment leur appartenance au vocabulaire mathématique. Ce "*i-*" peut être développé, parlé ou interprété, selon les circonstances, en "*infiniment*" si l'on veut rappeler des références historiques, ou en "*idéalement*" si l'on préfère ne pas mêler l'infini à ces affaires.

□ Le vocabulaire minimum du calcul infinitésimal comprend aussi les quelques mots suivants :

nombre appréciable : nombre ni *i-grand*, ni *i-petit*

nombre limité : nombre *i-petit* ou appréciable

nombres équivalents : nombres dont le quotient est *i-voisin* de 1

Une *propriété infinitésimale* est une propriété ne pouvant pas s'énoncer sans recours à la différenciation des ordres de grandeur.

Une *propriété non infinitésimale* est dite aussi *classique* ou *standard*.

Plus généralement, les adjectifs *classique* ou *standard* qualifient les objets, propriétés, notions,... pouvant être définis sans référence à l'axiome de différenciation des ordres de grandeur. En particulier un réel standard est un réel pouvant être la limite d'une suite classique.

(Remarquez que les notions de "fini" et "d'infini" sont absolument non infinitésimales et donc parfaitement classiques).

□ Une propriété non-standard ne peut pas caractériser une collection méritant le nom d'*ensemble* labélisé par une théorie classique des ensembles (ZFC par exemple), sinon il existerait une propriété classique exactement équivalente à cette propriété non-standard ; cela se serait su et on aurait pu alors se passer des axiomes supplémentaires non standard tout en profitant du vocabulaire infinitésimal. Si l'on préfère, cependant, conserver le caractère naïf du mot "ensemble", on qualifiera ce type de collection d'*ensemble externe*.

2 - POURQUOI LA NSA ? (a priori)

2.1. Des raisons historiques

De "bien avant Leibniz" à "bien après Cauchy" tous les mathématiciens ont manipulé des quantités dites "infiniment" grandes ou "infiniment" petites, avec bonheur et efficacité. Cela posait bien quelques problèmes (voir "*Métaphysique du calcul infinitésimal*", Carnot, 1797) mais cela fonctionnait ; les exemples abondent :

- Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes
- 1696 - Marquis de l'Hospital (page 3).

On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre

infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entre eux, la courbure de la ligne.

- Introduction à l'Analyse Infinitésimale - Euler - Trad. Labey - 1796 (page 86).

Comme i est un nombre infiniment grand ; il s'ensuit que $(i-1)/i = 1$; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $(i - 1)/i$ approchera de l'unité ; donc si i est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction $(i - 1)/i$ égalera l'unité. Par une raison semblable : $(i - 2)/i = 1$; $(i - 3)/i = 1$ etc.

- Résumé des leçons (...) à l'Ecole Polytechnique (1823) - Cauchy (page 7).

Lorsque la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et définie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence $f(x+i) - f(x)$ est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit.

Mais le passage que je préfère est celui d'Euler (dans *Introduction à l'analyse infinitésimale* - 1740) où il "établit" les formules qui porteront son nom, en quelques lignes magistrales... qui seraient certainement aujourd'hui peut-être mal comprises dans un cours d'analyse classique !

$$\begin{aligned} 133. - \\ \cos n\zeta &= \frac{(\cos \zeta + \sqrt{-1} \sin \zeta)^n + (\cos \zeta - \sqrt{-1} \sin \zeta)^n}{2} \quad \& \\ \sin n\zeta &= \frac{(\cos \zeta + \sqrt{-1} \sin \zeta)^n - (\cos \zeta - \sqrt{-1} \sin \zeta)^n}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

...

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) l'arc ζ infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i , afin d'obtenir pour $i\zeta$ une valeur finie v ; nous aurons donc $n\zeta = v$, & $\zeta = \frac{v}{i}$, & par conséquent

$\sin. x = \frac{v}{i}$, & $\cos. x = 1$; ces substitutions faites donneront

$$\cos. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$
 & $\sin. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$. Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i = e^x$, e désignant la base des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour x , d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura

$$\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$
 & $\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \sin. v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \sin. v$.

2.2. Des raisons didactiques

Tous les enseignants savent les difficultés d'un enseignement classique de la notion de limite ; et chacun, à un moment ou à un autre, aura décidé d'en appeler à "l'intuition" portée par le vocabulaire infinitésimal.

Même dans des manuels (écrits), on trouve par exemple :

D'un point de vue naïf ou imagé, dire que la fonction f a pour limite zéro en zéro signifie que $f(h)$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).

Mais ce langage imagé manque de précision : en effet, que signifie par exemple "le réel $f(h)$ est proche de zéro" si l'on ne donne pas d'autre renseignement ? (Ed. Nathan - Première 1980).

En fait, bien après l'exposition devenue classique de Weierstrass (Berlin 1865), les ouvrages d'enseignement persistent longtemps à conserver les expressions "infinitement petits" et "infinitement grands" en les définissant non comme des nombres mais comme des fonctions (Voir "Sur l'analyse des traités d'analyse 1870-1914" Cahier de Didactique n° 30 - IREM de Paris - Zerner).

En fait il est intéressant de constater que les deux théorèmes fondamentaux dégagés par des didacticiens comme Duhamel au XIXème (appelés "principe de substitution des infinitement petits") sont justement, sous leur forme NSA d'aujourd'hui, les deux théorèmes qui

fondent les applications pratiques du calcul infinitésimal en particulier dans les sciences physiques. Rappelons les :

Les principes de substitution des "infinitement petits" d'après M. DUHAMEL - Eléments de calcul infinitésimal - 1860.

Théorème 1 : La limite de la somme de quantités positives infinitement petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.

Théorème 2 : La limite du rapport de deux quantités infinitement petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.

Version infinitésimale :

1. Soient deux suites finies à termes positifs ; si leurs termes sont deux à deux équivalents alors leurs sommes sont équivalentes.
2. La division et la multiplication sont compatibles avec l'équivalence des nombres.

En fait, on s'aperçoit que le calcul classique utilisant l'équivalence des fonctions admet souvent pour paraphrase le calcul infinitésimal utilisant l'équivalence des nombres... Loin d'y voir une raison pouvant borner l'intérêt du calcul infinitésimal, il faut y puiser plutôt la volonté d'aller plus loin que dans le cadre classique en direction du vocabulaire infinitésimal : Aujourd'hui, il est possible de faire un pas de plus !

En effet la manipulation de *nombres en lieu et place de fonction* est un des grands avantages techniques du calcul infinitésimal sur l'analyse weierstrassienne. De plus elle permet de donner un sens à des morceaux de phrases comme " $f(x)$ tend vers 3", ce que la *xylolangue* classique des limites ne permet pas.

En mathématiques classiques, en effet, la phrase " $f(x)$ tend vers 3

quand x tend vers l'infini" ne peut pas être cassée en deux morceaux ayant chacun leur sens : ainsi " *$f(x)$ tend vers 3*" ne signifie rien et " *x tend vers l'infini*" encore moins (en dépit de ce dont on cherche à persuader les étudiants, ne se laisse-t-on pas pourtant aller à prononcer des phrases comme "étudier f quand x tend vers l'infini").

En calcul infinitésimal, " *$f(x)$ tend vers 3*" prend le sens de " *$f(x)$ est voisin de 3*", équivalent à " *$f(x) - 3$ est i -petit*". De même " *x tend vers $+\infty$* " prend le sens de " *x est i -grand*". La phrase " *$f(x)$ est voisin de 3 quand x est i -grand*" a alors le sens que lui donne tout simplement l'assemblage syntaxiquement correct de ces deux morceaux.

On peut raisonnablement supposer qu'un élève comprend mieux une phrase dont il peut analyser séparément chaque composant, qu'une phrase (longue) qu'il n'a pas le droit de couper pour la comprendre ou la traduire. Mais l'avantage est aussi technique comme on le constate dès la mise en oeuvre de démonstrations élémentaires utilisant les règles de Leibniz.

2.3. Des raisons épistémologiques

La notion de *nombre* s'est toujours construite à partir de la *mesure des grandeurs*. De Euclide à Cantor, le modèle mathématique s'est affiné et épuré : finalement $\mathbb{R}$ avec sa structure classique semble répondre "complètement" aux attentes et aux besoins des "mesureurs" que nous sommes.

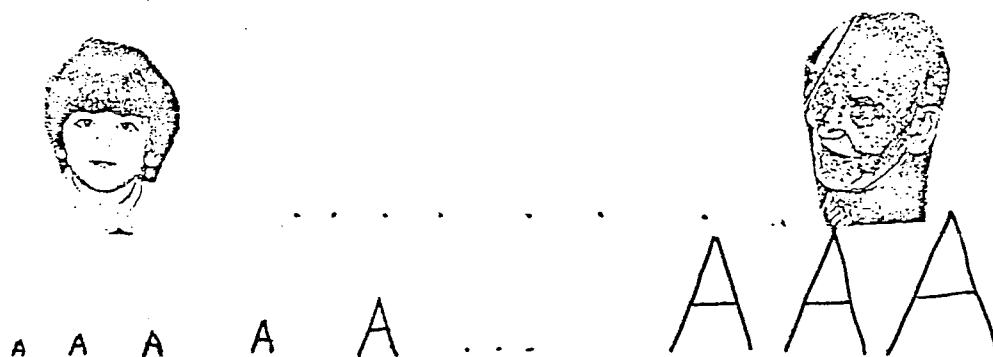
Il y a cependant, si l'on veut bien y réfléchir, au moins deux situations concrètes intéressant le domaine des nombres réels et que la structure de $\mathbb{R}$ ne traduit pourtant pas de façon satisfaisante ; ce sont :

- le changement d'*ordre de grandeur*
- la succession des *records*.

Le changement d'ordre de grandeur intervient dans les phénomènes d'évolution et provoque de sempiternelles discussions ("quand le singe devient-il un homme ?" - voir dans La Recherche n° 148) du genre suivant :

Il est manifeste qu'un bébé qui vient de naître n'est pas un adulte ; il est aussi manifeste qu'un grand-père est un adulte ; mais où se situe la frontière ?

Quand le "petit" devient il "grand" ?



On peut poser la question sous une forme plus numérique en demandant quand la hauteur des A dessinés ci-dessus devient-elle grande ?

Quelqu'un (ou quelques personnes) pourraient évidemment décider que telle hauteur est la limite entre les deux catégories : plus grand, on est "grand", plus petit, on ne l'est pas. Ce type de réponse est parfois nécessaire (légalement, la "majorité" est fixée à 18 ans ; en-dessous de 20g une lettre est timbrée à 2,30 F,...) mais ce type de réponse a le défaut d'introduire l'arbitraire. Et surtout il entre en contradiction avec une propriété sur laquelle tout le monde semble d'accord :

Lorsque des objets peuvent avoir différents ordres de grandeur, alors *si la différence entre deux objets est très petite, c'est que les deux objets sont du même ordre de grandeur.*

Plus finement, l'expérience serait heureuse de disposer d'un modèle théorique dans lequel :

Lorsque l'on passe d'un ordre de grandeur à l'autre par un certain nombre d'intermédiaires, alors c'est que le nombre d'intermédiaires est "très grand" ; autrement dit, après un nombre d'intermédiaires

"très petits" ou "appréciables", on doit rester dans le même ordre de grandeur.

Finalement, si l'on souhaite traduire de façon satisfaisante les situations d'ordres de grandeur, alors il faut affirmer l'impossibilité de donner une définition "numérique" de leurs frontières, c'est-à-dire une définition qui fasse simplement intervenir la relation d'ordre et les opérations arithmétiques usuelles.

Par contre, on doit pouvoir énoncer des propriétés relatives à certains résultats d'opérations, du genre :

Si n est "appréciable", et si e est "i-petit", alors $n+e$ est aussi "appréciable".

En fait les règles de calcul susceptibles de bien traduire ce que nous avons dans la tête au sujet des ordres de grandeur sont explicitement les règles de Leibniz.

La succession des records (mesurés par un nombre) présente une caractéristique bien réelle et pourtant contradictoire avec la structure classique de $\mathbb{R}$:

D'une part, pour tout record r , on est sûr qu'il sera un jour battu, c'est-à-dire qu'il existe un r' *significativement* plus grand ($r'-r$ n'est pas "infinitésimal"). Cependant on est aussi sûr que certains nombres ne seront pas atteints (l'ensemble des records possibles est borné !).

Ce type de situation n'est pas modélisable par l'analyse classique où l'existence d'une borne supérieure pour l'ensemble borné des records possibles oblige les progrès à devenir un jour plus petits que tout nombre fixé à l'avance ; comme dit le proverbe chinois "celui qui peut toujours faire un (vrai) pas de plus est-il vraiment sûr de pouvoir aller au bout du monde". N'est il pas réaliste et sage de répondre "non" à cette question ?

La limitation pragmatique du principe de récurrence s'impose donc à tout homme raisonnable comme le montre, paraboliquement, ci-dessous la "fable du maçon présomptueux" :

J'avais un jour un mur à bâtir, et je le voulais solide. Je demandais donc un devis à deux maçons, et discutais avec chacun de leur métier, de leurs réalisations et de leurs projets.

A chacun d'eux je tenais le discours suivant :

"Cela semble très simple de construire un mur, on pose une première rangée de briques, puis une seconde, et ainsi de suite jusqu'à la hauteur désirée. Mais y a-t-il une limite de hauteur que vous ne sauriez dépasser ?"

Le premier maçon était un français standard (rien ne lui était impossible) : "Mais je peux vous monter un mur aussi haut que vous le voulez, me dit-il. Donnez-moi une hauteur et je me fais fort de la dépasser, jusqu'à la lune si ça vous fait plaisir."

Le deuxième maçon (non standard) paraissait moins sûr de lui : "Je ne peux pas vous fixer de limite précise, car il se trouvera toujours quelqu'un pour battre un record de hauteur un jour ou l'autre. Mais il y a des hauteurs que personne n'atteindra jamais : la distance de la terre à la lune, par exemple."

Alors, à ma place, quel maçon auriez-vous choisi pour bâtir votre mur?

3 - LES OBSTACLES CLASSIQUES ET LE MODELE INFINITESIMAL

3.1. L'obstacle de la "récurrence pragmatique".

Il faut insister sur le fait que $\mathbb{R}$ reste un corps totalement ordonné archimédien où les i -grands et les i -petits sont des réels avec lesquels on calcule sans aucun état d'âme. Pour bien faire comprendre

notre choix qui n'est pas celui de Robinson ⁴ dans sa première version de l'ANS, revenons à l'argument principal qui a empêché les mathématiciens classiques de croire à la possibilité de coexistence de plusieurs ordres de grandeur :

Si un nombre ε est "très-petit", alors le calcul infinitésimal n'a d'intérêt pratique que si $\varepsilon + \varepsilon$ est aussi "très-petit". Mais alors 3ε est aussi "très-petit", et 4ε , et 5ε , et ainsi de suite..., "par récurrence", tout multiple de ε devrait donc être "très-petit".

Or ceci est en contradiction avec un énoncé dont on ne voudrait pas se passer et auquel est associé le nom d'Archimède :

Etant donné deux nombres (ε et 7 par exemple), il existe nécessairement un multiple de l'un qui dépasse l'autre ; il y a donc un entier n tel que $n\varepsilon$ soit plus grand que 7. Ce multiple ($n\varepsilon$) de ε , dépassant 7, ne sera donc pas "très-petit" ! La manière de se sortir de cette apparente contradiction paraît aujourd'hui tellement simple qu'on se demande comment on a fait pour ne pas y penser plus tôt (mais n'en est-il pas toujours ainsi ?).

Bien sûr, si ε est "très petit", 4ε , 10ε , 52ε sont aussi "très petits",... mais les multiples de ε ne sont pas TOUS "très petits". Car si l'on suppose qu'il y a des nombres "très petits" (comme ε), on doit supposer aussi qu'il y a des nombres "très grands" (par exemple son inverse $\frac{1}{\varepsilon}$). Et le facteur n dans $n\varepsilon$ peut être lui-même "très grand". Plus précisément, on doit pouvoir dire ceci :

Lorsque n n'est pas "très grand" et que ε est "très petit", $n\varepsilon$ est

⁴ quoiqu'il faille distinguer la construction que Robinson a été amené à produire pour traduire ses intuitions, de ce qu'il avait effectivement dans la tête : on peut avoir quelques raisons de penser qu'il aurait souscrit à la conception en couleurs de R s'il avait pu la théoriser immédiatement (cf. l'article d'Imré Lakatos qui a eu la chance de discuter très tôt avec Robinson, et des écrits bien antérieurs de Robinson (par exemple : 1951 colloque sur les mathématiques et l'intuitionnisme).

effectivement "très petit" !

Par contre lorsque n est "très grand" et que ε est "très petit", le produit ne peut être "très petit" ou bien ne pas l'être... Et c'est d'ailleurs cette très intéressante situation qui sera l'objet de nombreux problèmes d'analyse.

Ce qu'il faut donc mettre en cause, ce n'est pas l'énoncé d'Archimède, mais l'énoncé du principe d'induction :

Comme on l'a discuté, en effet, dans le paragraphe 2.3, le passage d'un entier à son suivant n'assure pas "en fait" (c'est le cas de le dire !) le passage à N tout entier, mais simplement le passage aux entiers non i -grands. De sorte que le "bon" énoncé du principe de récurrence en calcul infinitésimal est le suivant :

(PRP) Si une propriété est vérifiée par l'entier N_0 , et si on démontre que, vérifiée par l'entier n , elle est vérifiée par $n+1$, alors cette propriété est vérifiée par tous les entiers appréciables supérieurs à N_0 .

On va voir (comme nous l'avons énoncé dans les premières lignes du paragraphe 1.1) que cela ne change rien dans le cadre classique, puisque toute propriété classique vérifiée par tous les entiers appréciables s'étend à tous les entiers. Poincaré [dans la *Science et l'Hypothèse*] pouvait donc avec confiance affirmer la puissance de l'esprit, qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte, dès que cet acte est une fois possible.

3.2. Les principes de Cauchy et du Transfert.

Nous venons de voir comment tourner ou dissoudre l'obstacle essentiel que nos connaissances classiques avaient installé contre la coexistence des ordres de grandeur. Il s'agit bien caricaturalement ici d'un "obstacle" au sens de Bachelard et dont les caractéristiques ont été bien détaillées par Guy Brousseau [*Constructions des savoirs : obstacles et conflits* - CIRADE 1989] ; en particulier cet obstacle

reparaît sous diverses formes avec opiniâtreté. Ainsi, par exemple, c'est encore lui qui se dresse avec l'énoncé classique :

(S) "Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure "

car on "déduit" soi-disant de cet énoncé l'existence d'une borne supérieure pour les infiniment petits, d'où il est élémentaire de tirer une contradiction.

Cependant cet énoncé S n'est qu'un sous-produit de celui-ci :

(N) "Toute partie de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément",

lequel se démontre par "descente infinie" (ainsi nommé, comme on le sait, parce qu'elle ne l'est pas !), c'est-à-dire par contraposition du principe de récurrence. On retrouve bien l'argumentation du paragraphe précédent : le théorème (N) ne s'applique pas à la "partie" constituée des i-grands de $\mathbb{N}$, car on peut bien "descendre" d'une marche" en restant chez les i-grands : "si n est i-grand, alors $n-1$ est aussi i-grand" ; on peut bien aussi descendre d'un nombre appréciable de marches, mais on ne peut pas descendre d'un nombre i-grand de marches en étant sûr de rester chez les i-grands.

Ceci étant, les théorèmes (S) et (N) se démontrent sans problème pour toutes les *parties classiques* de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$ c'est-à-dire celles qui peuvent être définies sans parler de la "couleur" des nombres ; leur validité ne peut être entachée que pour les collections de nombres dont les définitions nécessitent le recours à la différenciation des ordres de grandeur. Il faut alors, comme d'habitude en cas de nouveauté, y regarder de plus près.

L'obstacle se résume finalement à l'impossibilité de définir des frontières entre les ordres de grandeur. Mais, si l'on veut bien y réfléchir un peu, c'est justement cette impossibilité que l'on souhaite modéliser en la traduisant par une théorie adéquate (voir § 2.3.) ; il ne faut donc pas s'étonner que la NSA y parvienne.

Concernant nos conceptions, la résistance de cet obstacle est d'autant plus forte qu'il a constitué une connaissance essentiellement importante : en effet, c'est justement l'affirmation (par Dedekind et alii) que toute partie bornée vient buter sur un "nombre" qui a permis la compréhension de la notion de nombre "réel". Il nous est donc

difficile de relativiser cette conviction, devenue intime, aux nombres auxquels notre propre ordre de grandeur nous permet d'accéder et seulement à ceux-là.

Cette impossibilité de définir des frontières classiques entre les ordres de grandeur se traduit sous une forme plus positive : en effet, si un ensemble défini par des propriétés classiques ne peut pas s'identifier aux *i*-petits, il ne peut donc nécessairement que déborder sur les appréciables !

Plus formellement, nous appelons *principe de Cauchy* ou *principe de débordement*, un "principe" ici éclaté en plusieurs énoncés dont le premier fut effectivement invoqué par Cauchy :

Si une propriété classique est vraie pour tous les *i*-petits, alors elle est vraie sur un intervalle $[0, a]$ où a est appréciable.

Si une propriété classique est vraie pour tous les réels du halo de x , alors elle est vraie sur un intervalle $[x-a, x+a]$ où a est appréciable.

Si une propriété classique est vraie pour tous les *i*-grands, alors elle est vraie pour tous les réels supérieurs à A où A est appréciable.

Ce "débordement" d'un ordre de grandeur sur un autre est évidemment "essentiel" en calcul infinitésimal ; ceux qui approfondiront l'analyse non standard le verront apparaître sous la forme de principes dits de "permanence" ; le premier et le plus important d'entre eux est l'axiome de Transfert qui est l'outil principal de généralisation des propriétés classiques :

Si une propriété classique est vraie pour tout réel standard, alors elle est vraie pour tout réel.

3 - POURQUOI LA NSA (a posteriori)

3.1. Des raisons techniques.

Disposant d'un vocabulaire, d'énoncés et d'outils supplémentaires, il n'est pas anormal que leur utilisation simplifie et souvent éclaire la manipulation d'objets et de concepts même exclusivement classiques. Le phénomène n'est pas nouveau : on sait bien comment le passage aux complexes rend parfois lumineux, triviaux ou excitants certains résultats et situations pourtant bien réels ; de même pour l'usage de vecteurs en géométrie où l'on fait usage d'un "dictionnaire" assurant la traduction des propriétés géométriques en langage vectoriel et inversement,

En pratique, on se persuade très vite du confort et du gain de sagacité apportés par la NSA ; pour rester court, nous nous accommoderons de l'évocation choisie des trois points qui nous ont paru les plus significatifs :

1. L'adéquation entre les expressions formelles et certaines représentations mentales.
2. La manipulation de nombres à la place de fonctions.
3. La possibilité de calculer sur des nombres de termes finis (le *i*-grand n'ayant rien à voir avec l'infini).

Le point numéro 1 (*adéquation entre les expressions formelles et certaines représentations mentales*) est particulièrement présent dans le dictionnaire Analyse classique/NSA que nous avons esquissé avec la traduction des notions de limites de suites et de fonctions en termes d'ordre de grandeur ; insistons un peu avec les deux définitions suivantes :

La continuité : Une fonction classique f est continue en x standard ssi pour tout h *i*-petit $f(x+h)$ est *i*-voisin de f .

L'intégrabilité : Une fonction classique f est intégrable sur l'intervalle classique I ssi pour tout découpage infinitésimal $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de I , la somme $\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ reste i -voisine d'un même standard (qui sera l'intégrale de f sur I).

[Un découpage infinitésimal de I est naturellement une suite finie de termes deux à deux i -voisins, dont les premiers et derniers termes sont les extrémités de I].

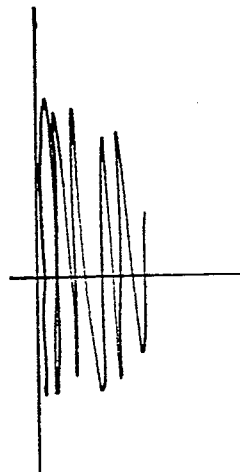
Un minimum de pratique montre la facilité de mise en oeuvre et l'efficacité de ces critères, dans des situations d'enseignement, où il est, de surcroît, bien agréable de laisser l'intuition s'appuyer sur des images adaptées au formalisme nécessaire des démonstrations. Voyons, par exemple, comment se présentent deux démonstrations de non-continuité ou de non-intégrabilité, quasiment impossibles à assumer dans un cadre d'enseignement classique de niveau élémentaire :

La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Il suffit d'exhiber deux i -petits x_0 et x_1 pour lesquels $\sin \frac{1}{x_0}$ et $\sin \frac{1}{x_1}$ ne sont pas i -voisins ; choisissons n entier i -grand, $x_0 = \frac{1}{2n\pi}$ et $x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ sont bons pour cette exhibition.

Remarquez la différence très caractéristique avec une démonstration classique où, au lieu des nombres $\frac{1}{2n\pi}$ et $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, on doit introduire deux suites $u_n = (\frac{1}{2n\pi})$ et $v_n = (\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi})$ et un théorème sur les limites de suites extraites des valeurs d'une fonction...

On voit ici émerger le point numéro 2, déjà évoqué dans le paragraphe 2.2. où nous avons vu l'équivalence des nombres remplacer l'équivalence des fonctions.



La fonction caractéristique des rationnels n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Il suffit d'exhiber deux découpages $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ et $(x'_j)_{j=0,\dots,n'}$,

pour lesquels
$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{et}$$

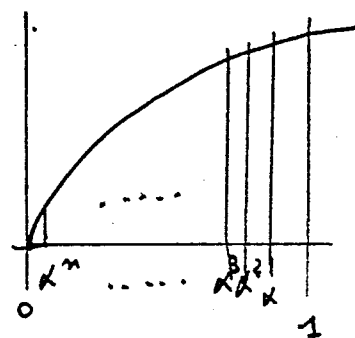
$$S' = \sum_{j=1}^{n'} f(x'_j) \cdot (x'_j - x'_{j-1})$$
 ne sont pas ε -voisins ; pour n entier

ε -grand, avec $x_i = \frac{i}{n}$, S prend la valeur 1 ; et pour ε ε -petit irrationnel, avec $x_i = i\varepsilon$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n'-1$ (n' étant le plus petit entier pour lequel $n'\varepsilon$ dépasse 1), S' prend la valeur ε (seul le dernier terme de la somme est non nul). cqfd.

Dans les cas où l'intégrabilité est assurée, il est vraiment très agréable de pouvoir calculer exactement une somme finie en se contentant de constater qu'elle est ε -voisine d'un nombre qui sera la valeur de l'intégrale.

Cette possibilité de limitation des suites à un nombre fini de termes permet de contourner les problèmes de convergence uniforme, par exemple lors de double passage à la limite, et autorise l'accès à des raisonnements que l'on n'oserait pas proposer à des étudiants de niveau élémentaire dans un cadre classique.

Ainsi, par exemple, l'idée de Fermat pour calculer $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ consistant à considérer un découpage géométrique $(0, \alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \dots, \alpha^2, \alpha, 1)$, où α doit être choisi d'une part "assez" proche de 1 pour que le découpage soit infinitésimal du côté de 1, mais d'autre part "pas trop" proche de 1 pour que α^n soit infinitésimalement proche de 0 pour n très grand.



Ainsi, le choix trivial $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ ne convient pas du côté de 0 ; mais $\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ est un choix intelligent qui permet aux calculs

d'aboutir avec bonheur !

Citons encore, comme illustration de notre point numéro 3, la belle démonstration (infinitésimale) du théorème des valeurs intermédiaires:

Si P est une fonction classique continue sur $[a,b]$ et telle que $P(a).P(b) < 0$, alors il existe un x de $[a,b]$ tel que $P(x) = 0$.

Démonstration : Soit $(x_i)_{i=0,1,\dots,n}$ un découpage fini infinitésimal de $[a,b]$, par exemple $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ pour n i -grand. Soit i le plus petit indice i tel que $P(x_i).P(b) \geq 0$ (cet i existe parce que le découpage est fini). Puisque $P(x_{i-1}).P(b) < 0$, $P(x_{i-1})$ et $P(x_i)$ sont de signes contraires ; pour le standard x_i voisin de x_{i-1} et de x_i , P prend donc par continuité une valeur à la fois négative ou nulle et positive ou nulle. On a donc bien $P(x) = 0$. cqfd.

3.2. Des raisons conceptuelles.

La constante de Planck ne tend pas vers zéro.

Le concept de limite traîne avec lui quelques idées qui n'ont parfois rien à voir avec la situation où il est censé intervenir.

Par exemple, dans une situation physique, si un nombre a est "négligeable" devant un nombre b , pourquoi faudrait-il introduire une fonction a et une fonction b d'une certaine variable, et pourquoi faudrait-il faire tendre cette variable vers quelque chose ?

Que signifie cette construction ? qui aboutit parfois à un degré d'abstract non sense qui dépasse le supportable : il est par exemple, assez curieux d'exiger d'un physicien (acceptant de faire des mathématiques) qu'il veuille bien faire tendre la constante de Planck vers zéro, car c'est le seul moyen légitime que lui offre le calcul classique pour "négliger" un nombre approchant les 6.10^{-34} ; faire tendre une constante vers zéro, est-ce bien raisonnable ?

Dans le même ordre d'idée, pour exprimer que l'aire d'un carré est

très grande quand la longueur du côté est très grande, est-il vraiment raisonnable de devoir énoncer que l'aire de ce carré "tend vers l'infini" quand la longueur de son côté "tend vers l'infini". Ne serait-il pas plus normal de dire que l'aire est (i-)grande quand le côté est (i-)grand ? et de le dire sachant que l'on reste sous le contrôle des mathématiques !

Cependant, ce qui m'a le plus frappé dans mes débuts d'exploration de la NSA, c'est l'étonnante sensation de voir apparaître "naturellement" (c'est-à-dire comme forcé par le déroulement du discours infinitésimal) les "bonnes idées". La subjectivité apparente de cette impression ne m'a cependant pas paru un argument suffisant pour chercher à la cacher. J'en donnerai trois exemples suffisamment simples pour pouvoir être exposés ici :

Le concept de suite convergente.

Cherchant à définir, pour un niveau très élémentaire et dans le cadre infinitésimal, la notion de "suite convergente vers une limite", nous avons d'abord cru rencontrer la difficulté suivante :

Si l'on traduit " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l " par " u_n est i-voisin de l ", alors u_n se trouve être aussi i-voisin de $l + \varepsilon$ pour n'importe quel ε i-petit. Comment reconnaître le nombre "limite" (en fait "standard") des autres nombres i-voisins de lui ?

Nous avons évidemment vite compris que la difficulté n'existerait pas si au lieu de vouloir définir la "convergence vers une limite" (comme une définition classique élémentaire nous y oblige), on définissait simplement la "convergence" :

" $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge" ssi "pour n i-grand, tous les u_n sont i-voisins les uns les autres" ou plus opérationnellement "pour n et m i-grands, u_n est i-voisin de u_m ".

On retrouve alors le point de vue originel de Cauchy et de Dedekind et l'on pourra ensuite affirmer que toute suite classique convergente

définit un seul réel standard : celui dans le halo duquel viennent s'accumuler ses termes d'indices i-grands.

En fait pour le débutant en analyse, aucun support intuitif ne vient illustrer le privilège de distinction des réels standards et le théorème "tout réel limité est i-voisin d'un réel standard et d'un seul" est le premier théorème fin de la vraie analyse (évidemment équivalent au théorème de complétude de $\mathbb{R}$ ou à ses avatars).

La différenciation de $\mathbb{R}$ en ordre de grandeur doit être vue, à notre avis, comme un palier vers cette "véritable" analyse.

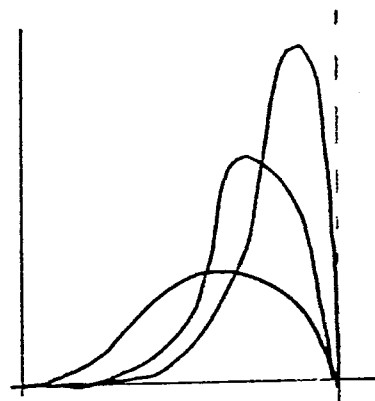
Le concept d'ombre

On sait bien la grande difficulté qu'il y a à faire comprendre des phénomènes comme la non-égalité de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{et de} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx .$$

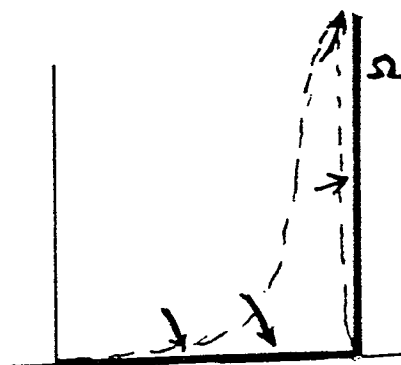
Exemple : $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$.

Le fait que f_n converge vers la fonction nulle tout en ayant une intégrale tendant vers l'infini est généralement dur à faire passer.



En fait les outils formels de l'analyse classique élémentaire ne permettent pas de bien décrire la situation.

Il faudrait pouvoir dire que le graphe de la fonction f_n ne tend pas, quand n tend vers l'infini, vers un graphe de fonction mais vers le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ représenté sur la figure.



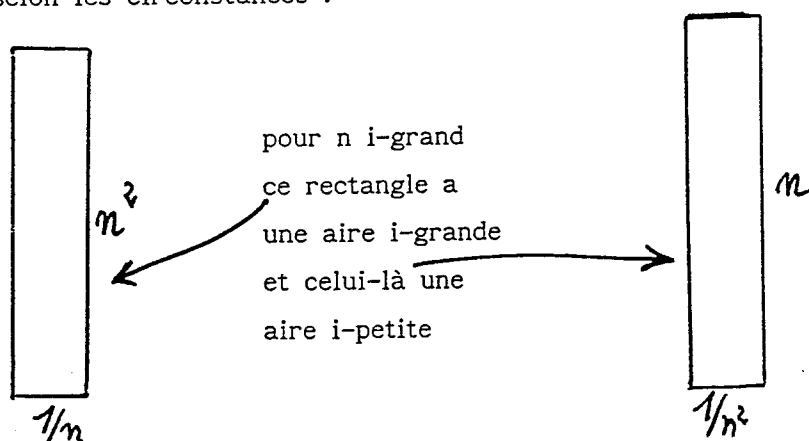
En calcul infinitésimal, on peut déjà faire des expériences numériques utiles. Par exemple pour n i-grand

$$f_n(1 - \frac{1}{n}) = n^3(1 - \frac{1}{n})^n \frac{1}{n} \approx \frac{n^2}{e}.$$

A la distance $\frac{1}{n}$ de l'abscisse 1 le graphe de f_n monte donc à une ordonnée de l'ordre de n^2 , ce qui explique bien des choses.

Remarque : de nombreux professeurs (nous y compris) diront que c'est exactement ce qu'ils disent pour faire comprendre leur discours classique ; la différence avec un discours accompagnant un calcul infinitésimal c'est que le sens de ce discours émane immédiatement des calculs et non d'une intuition très éloignée du discours formel nécessaire à une démonstration.

Insistons sur le fait que, en calcul infinitésimal, on regarde ce qui se passe pour un n fixé, sans aucune obligation de faire "tendre" n vers quoi que ce soit. et il est alors assez simple d'expliquer ce qui arrive à l'intégrale de f_n , car on a l'habitude (en calcul infinitésimal) de ce qui peut arriver au produit d'un i-grand par un i-petit selon les circonstances :



En fait, dans cette situation, le concept explicatif est le concept d'ombre.

[L'ombre d'un ensemble E est l'ensemble standard dont chaque point est i-voisin d'un point de E]. Les difficultés viennent de ce que l'ombre du graphe de f_n n'est pas un graphe de fonction et contient un morceau de verticale.

Le concept de tangente.

Pour étudier localement une courbe, il y a deux attitudes possibles :

- *se faire tout petit* pour marcher le long de la courbe, comme une fourmi le long d'une autoroute... et l'on constate, dans le cas C^1 , que l'on marche tout droit pendant un bon moment. C'est l'approche *différentielle* qui se traduit classiquement par un développement limité à l'ordre 1 et, en calcul infinitésimal, par l'énoncé

"pour h i-petit $f(x+h) - f(x)$ est équivalent à $a(x).h$ ".

Ainsi au lycée on fait généralement constater par des calculs numériques la proportionnalité approchée de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable.

Exemple :

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$4,1 \mapsto 2,024845$$

$$4,01 \mapsto 2,002498$$

$$4,001 \mapsto 2,000249$$

$$4,0001 \mapsto 2,000025$$

- *agrandir la portion de courbe* qui nous intéresse pour en amener un "petit" morceau à notre échelle, comme si on le regardait à la loupe (encore un "bon" concept infinitésimal)... et l'on constate, dans le cas C^1 , que le petit morceau est vu, à notre échelle, comme un segment de droite.

C'est ce que l'on peut faire aujourd'hui au lycée sur les écrans des ordinateurs où l'on peut choisir une représentation à grande échelle tout en étant assuré de la justesse des calculs.

Comment, cependant, démontrer à un lycéen par exemple qu'un arc de cercle, vu à la loupe, se présente comme un segment de droite ?

On peut faire un homothétie de rapport h au voisinage d'un point du cercle puis faire tendre ω vers l'infini ; mais cette "tendance" de ω va tout gâcher car la compréhension risque de se perdre dans les questions de limites avec tout ce que cela comporte comme idée de mouvement et d'inaccessibilité. La démonstration infinitésimale, elle, n'engendre vraiment pas d'état d'âme :

La validité des modèles abstraits d'une situation pratique.

Je voudrais enfin signaler une difficulté que l'on rencontre souvent au niveau du discours explicatif entourant la NSA.

On commence par dire, par exemple, que 10^{30} est un très grand nombre et que 10^{-20} est très petit. Plus tard, on sera obligé de faire comprendre que les nombres dont on peut voir écrit une écriture décimale sont standard et donc appréciables; le nombre 10^{30} n'est donc pas i-grand et le nombre 10^{-20} n'est pas i-petit.

Le problème vient de ce que la phrase " 10^{30} est très grand" n'est pas d'abord énoncée dans un discours mathématique mais dans un contexte pratique. Par contre on peut dire, en mathématiques, que "X est i-grand" et appliquer ces mathématiques comme modèle d'une situation pratique où X vaut 10^{30} . Le fait que 10^{30} puisse être manipulé sous la même forme en mathématique et dans les situations pratiques oblige à une gymnastique schizoïde qui peut parfois engendrer le quiproquo.

Pour tenter de dissiper ces quiproquos, il faut élargir un peu le cadre de nos réflexions : les mathématiques proposent des *modèles* idéaux ; lorsqu'on décide d'appliquer un tel modèle à des situations concrètes et réalistes, il faut toujours être conscients des *limites pratiques de validité*.

Par exemple, en géométrie euclidienne, "par deux points passe une et une seule droite" ; cependant, dans la réalité, si les points marqués sur une feuille sont trop près l'un de l'autre (et leur "épaisseur" aidant) plusieurs droites pourront être tracées qui passent par ces deux points. Plus généralement, on sait bien que des erreurs de tracé se glissent toujours dans les figures géométriques, soient que des points soient trop gros, soient que des angles soient trop petits,...

De la même manière lorsqu'on fait des calculs numériques, on est amené à négliger certains nombres par rapport à d'autres. Cela revient souvent à considérer des nombres "petits" dans la pratique, comme "idéalement petits" dans le modèle mathématique.

Quelques habitudes sont alors assez courantes ; par exemple, dans la vie de tous les jours le "grand" commence en général au-delà de 1000 (ou même de 100) ; et donc le "petit" commence à 1/1000ème. C'est pourquoi on garde la plupart du temps trois (ou même deux seulement) chiffres significatifs à l'écriture des différents nombres.

Il faut alors savoir à la fois profiter des règles de Leibniz et être conscient des limites pratiques de validité. Par exemple, si, dans une situation particulière, on considère 1000 comme "idéalement grand", et 1,2,3, comme "négligeables" devant 1000, alors on peut dire que dans cette situation :

- . 1,2,3 et quelques suivants sont "appréciables"
- . l'inverse de 1000, c'est-à-dire 0,001 est "idéalement petit"
- . la somme $0,001 + 0,001 = 0,002$ est "idéalement petite"
- . tant que l'on additionne 0,001 un nombre appréciable de fois, on reste idéalement petit, mais si on l'additionne un nombre idéalement grand de fois (1000 fois par exemple), le résultat risque de ne pas être idéalement petit.

Cependant, de la même manière que la géométrie ne "fonctionne pas" si on veut dessiner deux points trop près l'un de l'autre, les mathématiques des ordres de grandeur ne fonctionnent pas si on considère des nombres qui pourraient approcher la frontière entre deux ordres de grandeur ; ainsi, dans notre situation, il faut se garder de faire intervenir des nombres atteignant quelques centaines. Si on ne peut pas faire autrement, c'est que le modèle mathématique des ordres de grandeur, n'est pas utilisable dans cette situation et qu'il faut revenir à un modèle plus homogène, sans la distinction des ordres de grandeur.

Ainsi, l'apparition d'une contradiction dans la pratique concrète est l'indice que le modèle doit être, soit abandonné, soit limité dans sa validité.

ANS - BIBLIOGRAPHIE AMICALE

Articles :

- . Imre Lakatos - *Cauchy and the continuum : the signifiante of Non Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics* - 1966 - paru dans *Mathematical Intelligencer*, vol.1, 77-78.
- . Georges Reeb - *Mathematiques non standard (essai de vulgarisation)* - bulletin APMEP, n° 328, avril 1981.
- . Jacques Harthong - *L'analyse non standard* - La recherche, N° 148, octobre 1983.
- . R. Lutz - *Rêveries infinitésimales* - La gazette des mathématiciens n° 34, octobre 1987.
- . Francine Diener & Marc Diener - *Les applications de l'analyse non standard* - La recherche n° 206, janvier 1989.
- . André Deledicq - *Introduction au i-calcul, pratique de l'analyse non standard* - Quadrature, n° 6 et 7, septembre 90 et janvier 91.

Livres :

- . *La mathématique non standard* - Collectif - Editions du CNRS, 1989.
(contient la *Théorie des Ensembles Internes* de Edward Nelson, 1977 ; *Was sind und was sollen die Zählen ?* de Pierre Cartier ; *Une théorie du continu* de Jacques Harthong , ...).
- . Francine Diener & Georges Reeb - *Analyse non standard* - Hermann, 1989.
- . André Deledicq & Marc Diener - *Le calcul infinitésimal* - Colin, 1989.
- . Abraham Robinson - *Non Standard Analysis* - North Holland, 1966. (Pour mémoire).

Brochure de l'IREM de l'Université Paris 7 (2 place Jussieu - 75005) :

- . *La nouvelle et simple analyse* - André Deledicq, 1989
- . *Les débuts en analyse* - André Deledicq et Jean Louis Forgues, 1990.
- . *L'infini, est-ce bien raisonnable ?* - André Deledicq, 1990.
- . *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal* - Thérèse Antoine, André Beaumont, André Deledicq, Jean Louis Forgues, Marc Diener, 1991.

L'HISTOIRE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET LE NON STANDARD

Contribution au débat

M. Zerner
Université de Nice
et équipe REHSEIS

A deux mille ans de distance, Marx fait écho à Euclide : "Il n'y a pas de route royale pour la science et ceux-là seulement ont chance d'arriver à ses sommets lumineux qui ne craignent pas de se fatiguer à gravir ses sentiers escarpés." Certes, il faut éviter de faire compliqué quand on peut faire simple et nous savons que cela aussi est difficile. Mais lorsqu'on présente une nouvelle méthode capable de rendre simple l'enseignement des mathématiques, et particulièrement de l'analyse où les difficultés semblent bien se concentrer, il y a lieu de se méfier. Au demeurant, chat échaudé craint l'eau froide ; je suis un des nombreux enseignants qui ont cru que les "mathématiques modernes" permettraient un exposé simplifié, beaucoup plus naturel etc, et un enseignement s'appuyant sur l'activité des élèves. Je sais que cette affirmation paraît aujourd'hui difficile à croire. Mais que celui qui en doute lise des bulletins de l'A.P.M. des années 60 ou quelques autres écrits de l'époque. Or je ne crois pas qu'il soit plus facile de maîtriser les ensembles externes et internes que de se former une idée raisonnable de ce qu'est un compact. Le progrès vers un raisonnement logique sûr sur l'infini, ou au moins le non borné, se poursuit à travers toute la très longue histoire des mathématiques et on ne peut pas imaginer un procédé qui permette à chaque individu de se l'approprier sans peine.

De toute façon, les choses sont, comme d'habitude, ce qu'elles sont. Le plus urgent est que chaque certifié ait une bonne compréhension de l'analyse d'une variable réelle et ce n'est pas toujours le cas. Ceci doit bien se faire dans le cadre standard, en tout cas tant que l'enseignement du non standard ne sera pas rodé et qu'on ne disposera pas d'assez d'enseignants qui le connaissent. Une bonne expérience serait de mettre un minimum de non standard au programme de l'agrégation (je serais partisan de laisser aux candidats le choix entre l'exposé par les ultraproducts et celui par les axiomes IST).

Tout cela dit de façon assez abrupte pour fixer ma position, j'espère contribuer à clarifier le débat en résumant à grands traits l'histoire des infinitésimaux dans l'enseignement. Je me limiterai à la France depuis le début du XIXème siècle.

Mais d'abord une précision Je parlerai des infinitésimaux tels qu'ils étaient compris à chaque période concernée. Ils n'ont pas grand chose à voir avec le non standard. Traiter, comme cela se voit trop souvent, l'histoire des infinitésimaux comme une sorte de préhistoire du non standard, c'est faire injure à l'oeuvre de Robinson. Son apport est d'avoir montré qu'on pouvait faire un traitement des infinitésimaux (pas seulement comme quantité tendant vers zéro) dans le cadre de toute la puissance et la rigueur de l'analyse moderne. Et ce cadre fait toute la différence.

Deux manuels dominent le XIX^{ème} siècle : Lacroix (1802) et Boucharlat (1813). Au mépris de la chronologie, je commence par le deuxième qui déclare dans sa préface que les trois méthodes en compétition pour l'exposé du calcul intégral, la méthode des limites, les infiniment petits et la méthode algébrique de Lagrange sont équivalentes et "n'en forment au fond qu'une". Il refuse donc de choisir mais son livre a une tonalité nettement lagrangienne avec une préférence pour les développements en séries entières mal distingués des développements limités. Les infiniment petits y jouent un rôle très effacé. (Le lecteur qui aurait le sérieux de vérifier ce que je dis est invité à se méfier des éditions tardives ; à partir de 1881 le livre a été dopé en infiniment petits par Laurent). Quant à Lacroix, il emploie la méthode des limites et rejette les infiniment petits qui ne sont mentionnés que dans quelques notes en bas de page où il indique le point de vue de Leibniz.

Vient Cauchy. Il donne un contenu technique aux notions de limite et de fonction continue et fonde son exposition dessus. Ses cours paraissent dans les années 1820 et semblent avoir été très peu lus. Les *leçons de calcul différentiel et de calcul intégral rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. Augustin Louis Cauchy* du chanoine Moigno (1840) commence comme du Boucharlat en plus confus.

En 1847 paraît la deuxième édition du cours de Polytechnique de Duhamel (la première reste pour moi un mystère). Il y construit une nouvelle exposition du calcul différentiel et intégral entièrement basée sur les infiniment petits désormais définis comme quantités variables qui ont zéro pour limite. Elle allait être suivie par tous les cours des facultés des sciences et de Polytechnique, à l'exception du très spécial *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* de Méray (1872), jusque vers la fin des années 1880. Plusieurs cours se réfèrent explicitement à Cauchy.

La fin des années 1880, c'est l'époque où apparaît et s'impose en France l'exposition basée sur les travaux de l'école de Weierstrass, celle qu'on emploie encore aujourd'hui. Les cours les plus importants qui emploient cette méthode sont celui de Jordan à partir de sa deuxième édition (1893) à cause de son apport scientifique et celui de Goursat (1902) parce qu'il domine l'enseignement jusque vers 1950. Mais les infinitésimaux ne disparaissent pas pour autant. Devenus sans utilité dans l'exposé des bases de l'analyse, ils sont couramment employés dans les chapitres, nombreux et importants, qui traitent de la géométrie différentielle.

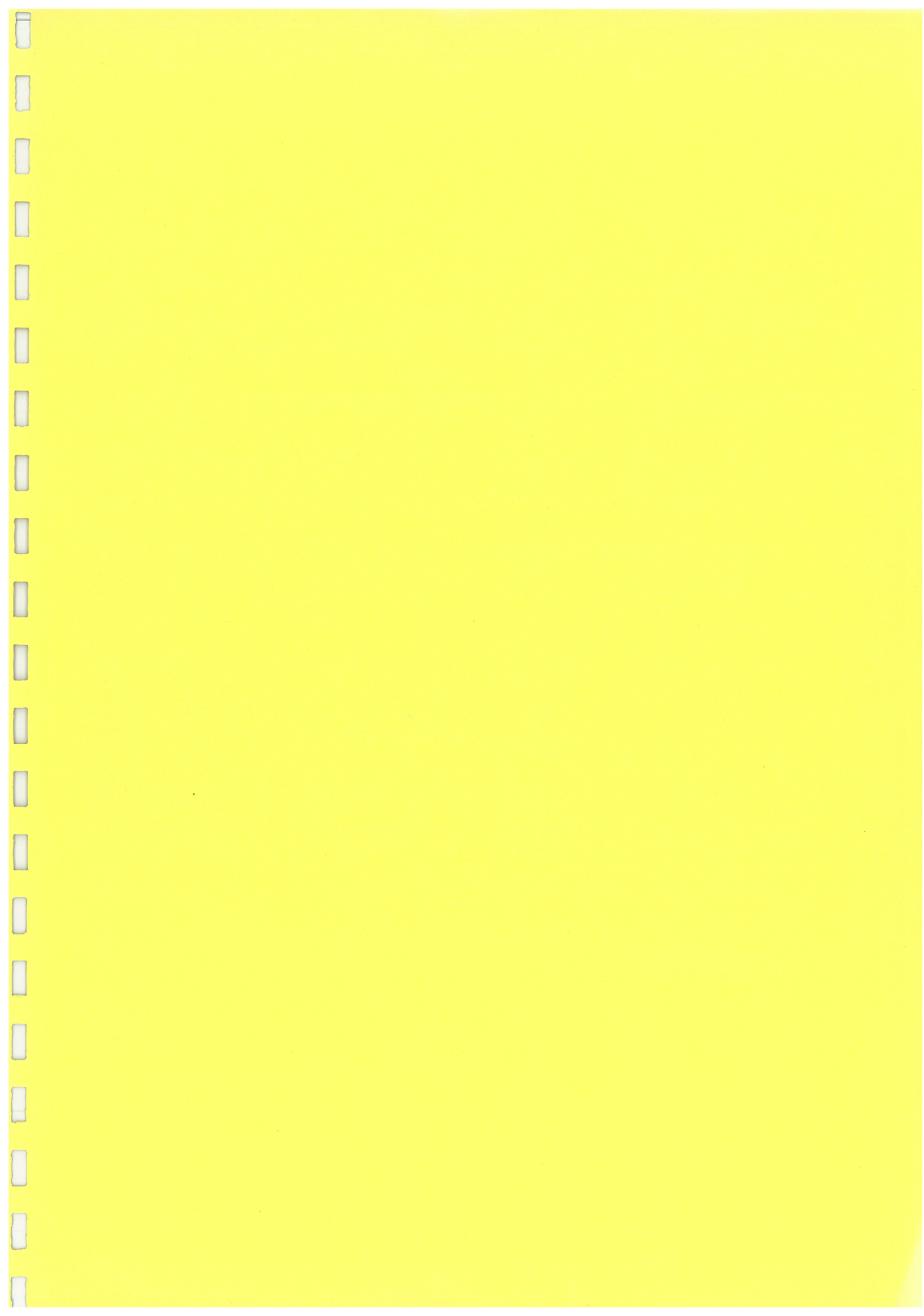
En résumé, les infinitésimaux ne sont absents que pendant une très brève période qui commence quelque part dans les années 1960. Le drame, c'est qu'à part les pionniers (Luxembourg, Reeb ...) les adeptes du non standard ont été formés pendant cette période. Outre la fâcheuse publication de contre vérités historiques (les infinitésimaux auraient disparu de l'enseignement à la suite de l'oeuvre de Cauchy !) cela les amène à ne pas comprendre la puissance de l'analyse classique quand elle est accompagnée d'une bonne intuition des ordres de grandeur. Comment former cette intuition est le problème central qui dépasse de loin le cadre de ces quelques notes. J'espère au moins qu'elles peuvent aider à éviter que ce problème ne soit déplacé.



LISTE DES PARTICIPANT(E)S

ARTIGUE Michèle	PARIS
BAUCRY Jean-Michel	LILLE
CHENIOT Denis	NICE
DELEDICQ André	PARIS
DOUADY Régine	PARIS
DURAND Louis-Marie	NICE
GIORGI Agnès	NICE
GUYOT Monique	NICE
LEGRAND Marc	GRENOBLE
LOBRY Claude	NICE
LOMBARDI	BESANCON
LOPEZ Pierre	TOULOUSE
MAUREL Maryse	NICE
MERIGOT Michel	NICE
NOSMAS Jean-Clarence	NICE
PINAUD Jacques	ORLEANS
PROTEAU Roger	PARIS
RAMPAL Daniel	NICE
SACKUR Catherine	NICE
SCHNEIDER Maggy	LOUVAIN LA NEUVE
SPERANDIO Danièle	PARIS
TAVERNIER Alain	NICE
TESTARD Frédéric	NICE
TROUCHE Luc	MONTPELLIER
ZERNER Martin	NICE





TITRE : Actes de la Commission Inter Irem Analyse - L'enseignement de l'analyse au lycée, pourquoi et comment ?

AUTEURS : Artigue - Deledicq - Legrand - Schneider

FORMAT : A 4

PUBLIC CONCERNE : Enseignant(e)s de lycée en lycée et en DEUG - Etudiant(e)s IUFM

DATE : Novembre 1992

RESUME : Obstacles dans l'enseignement du calcul intégral en lycée. Le débat scientifique en cours d'analyse. L'histoire des fonctions de référence en 1^{er}S. Apports de l'analyse non standard en lycée et en DEUG.

MOTS-CLES : - didactique - enseignement - analyse - lycée - calcul intégral - obstacle - aire - volume - indivisible - débat scientifique - fonction de référence - suite de référence - analyse non standard -

EDITEUR : IREM DE NICE

RESPONSABLE DE PUBLICATION : Maryse MAUREL

DEPOT LEGAL :