

c) Equations non linéaires autonomes

— Etude des champs de vecteurs, flots, orbites ; dérivation associée à un champ de vecteur, intégrales premières. Systèmes conservatifs. Classification des points singuliers.

d) Equations non linéaires dépendant du temps

Problème de Cauchy. Recherche de solutions approchées.

B. ANALYSE DETAILLEE DES THEMES 1, 2 et 10 par J.L. OVAERT et R. ROLLAND

Cette analyse est conduite suivant plusieurs niveaux d'approfondissement. Les références bibliographiques sont relatives à des travaux didactiques (groupes IREM, brochures A.P.M.E.P., ouvrages didactiques, etc.). Les références aux groupes IREM sont conformes à la partie III de la présente brochure. Par exemple, le sigle Dijon[1] se réfère à l'approche heuristique des nombres réels... Les références concernant les calculatrices sont codées avec la lettre C. Par exemple, le sigle Bordeaux[C1] se réfère à mathématiques et calculatrice de poche. La plupart des rubriques comprend une brève note historique assortie de références bibliographiques concernant des ouvrages d'histoire des mathématiques, et des textes historiques. Pour les ouvrages scientifiques, on pourra se reporter au A.

THEME N°1 : Limites de suites, sommes de séries

Premier niveau

a) *Recherche de limites* de suites par comparaison avec les suites de références simples $n \mapsto n^p$, $n \mapsto a^n$ (exemples numériques). Comparaison de quelques suites de référence (exemples numériques) ; exemples de divergence vers $+\infty$, vers $-\infty$; comparaison aux suites de référence ; exemples de phénomènes d'oscillation et de chaos.

On peut faire ressortir la dialectique entre suites, graphismes et calcul numérique, et mettre en évidence la nécessité d'un contrôle théorique de la convergence.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Lang IA [17] et [18] ; Lax IA [19] ; Arnold IB [3] et [4] ; Dieudonné IB [11] ; Hirsch et Smale IB [19] ; Ince - Ordinary differential equations (Dover) ; Lang IB [23] et [24] ; Pontriaguine IB [27] ; Roseau - vibrations non linéaires et théorie de la stabilité ; Whittaker et Watson IB [35].

b) Rapidité de convergence

— *Exemples de convergence rapide.* Calcul de e par la somme de la série : étude expérimentale, puis théorique. Moyennes arithmético-géométriques (exemples) : étude expérimentale, puis théorique. Voir aussi le calcul des racines carrées par la méthode de Héron (cf. thème n° 2).

— *Exemples de convergence géométrique.* Dichotomies, trichotomies. Calcul de π par la méthode d'Archimède (polygones inscrits). Calcul des logarithmes par la méthode de Briggs.

— *Exemples de convergence lente.*

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4}$$

(Pas de contrôle théorique de la convergence, ni d'accélération de convergence à ce niveau).

Les exemples étudiés au b) sont à mener de front avec la mise en place des suites de référence.

— *Exemples de divergence lente.*

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^p \frac{(-1)^{c(n)}}{n},$$

où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n .

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [1], [6], [9], [C1] ; Dijon [2], [6], [7] ; Grenoble [5], [C2] ; Lille [1], [6] ; Lyon [1], [4], [7] ; Marseille [1], [2], [C8] ; Nancy [1], [C9] ; Paris Sud [C1] ; Poitiers [3] ; Rennes [1].
Brochure A.P.M.E.P. 4^e, 3^e ; Lelionnais III [29] ; Goldstine (chap. 2) III [24] ; Naux III [30] ; Itard III [25] ; Dhombres III [10].

Deuxième niveau (on dispose des dérivées et de la convergence des suites monotones).

a) *Recherche de limites* de suites par comparaison avec les suites de référence $n \mapsto n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \mapsto a^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \mapsto n!$.

Comparaison de ces suites de référence (Etude systématique).

Exemples faisant intervenir $n \mapsto \log n$.

Etude analogue pour la divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exploration de la divergence oscillatoire par suites extraites (exemples).

Même dialectique qu'au premier niveau.

Suites définies par des relations de récurrence linéaires.

Bibliographie :

IREM : Marseille [1] ; Rennes [3].
Engel IA [11].

Note historique : Pour la comparaison des suites de référence, voir Cauchy. Cours d'analyse algébrique. (Chap. II § 3) IV [6].

b) Existence de limites par monotonie et suites adjacentes

Retour sur e , π , $\log 2$, sur les racines carrées.
Moyennes arithmético-géométriques.
Etude de la rapidité de convergence.

Bibliographie :

IREM : Lille [6] ; Dijon [2], [6], [7] ; Marseille [1], [C8] ; Poitiers [3].
Engel IA [11].

c) Approfondissement des méthodes de calcul de π

Méthodes d'Archimède, d'Al Khasi, de Viète, de Snellius.

Etude expérimentale et théorique. Bon terrain pour montrer l'intérêt des développements limités pour améliorer la performance.

Bibliographie :

IREM : Dijon [6], [7] ; Lille [6] ; Lyon [4] ; Marseille [2], [6].
Engel IA [11] ; Lelionnais III [29] ; Itard III [25] ; Goldstine III [24] ; Numéro spécial sur π du petit Archimède.

Textes historiques : Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits (chap. 6) IV [10].

d) Calcul des fonctions exponentielles et trigonométriques par les séries

Bon terrain pour faire apparaître une majoration du reste, à partir du principe de Lagrange, thème à lier à celui de la construction d'une table trigonométrique (cf. 2).

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [3] ; Lille [3] ; Marseille [3], [6] ; Paris Sud [11].
Engel IA [11] ; Lax IA [19].

Note historique : Pour comparer sur ce thème les conceptions de la convergence des séries, voir :
Newton. Papers vol. IV, cité dans Goldstine page 62 III [24].

Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits, (chap. 8) IV [10].

Lagrange. Théorie des fonctions analytiques (art. 25 à 29) IV [18].

Leçons sur le calcul des fonctions (leçon 5) IV [19].
Cauchy. Analyse algébrique, (chap. 9 - § 2) IV [6].

e) Calcul des logarithmes (on peut prendre comme objectif la construction d'une table)

Méthode de Briggs : étude expérimentale et théorique.

Méthode de Mercator ; emploi de techniques arithmétiques pour améliorer la performance : étude expérimentale et théorique.

Méthode de Newton et Halley ; accélérations de convergence : étude expérimentale.

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [3] ; Lyon [C7] ; Marseille [3], [6] ; Paris Sud [11].
Engel IA [11] ; Lax IA [19] ; Goldstine (chap. 2) III [24] ; Naux III [30].

Note historique : Pour comparer sur ce thème les conceptions de la convergence des séries, voir :

Newton. Méthode des fluxions et des suites infinies, (chap. 9) IV [24].

Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits, (chap. 6 et 7) IV [10].

Lagrange. Théorie des fonctions analytiques (art. 19 à 24) IV [18].

Leçons sur le calcul des fonctions (leçon 4) IV [19].
Cauchy. Analyse algébrique, (chap. 6 - § 4) IV [6].

f) Accélérations de convergence pour les séries numériques

Approfondissement de l'étude de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Etude de convergence. Mise en évidence expérimentale de la partie principale du reste. Amélioration de la performance qui en résulte. Ce thème est à mener de front avec les problèmes d'évaluations asymptotiques (cf. Problèmes de l'analyse - Thème 6).

Bibliographie :

IREM : Dijon [6], [7] ; Marseille [C8] ; Lyon [5], [C7] ; Grenoble [C2] ; Paris Sud [C11].
Article A.P.M.E.P. (Bull. 320) de Reisz ; Engel IA [11] ; Ovaert et Verley IA [21].

Troisième niveau (on dispose des nombres complexes, du calcul intégral, des théorèmes sur les fonctions continues, et des développements limités des fonctions transcendantes élémentaires).

a) Recherche de limites de suites par comparaison avec les suites de référence $n \mapsto n^\alpha$, $n \mapsto a^n$, $n \mapsto n!$, $n \mapsto (\log n)^\alpha$.

Comparaison de ces suites de référence. Emploi des dérivées, des parties principales et des développements limités pour la recherche de limites.

Bibliographie :

IREM : Marseille [1] ; Rennes [3].
Demidovitch IA [8] ; Barra IA [4] ; Ovaert et Verley IA [21].

b) Etude de convergences et de divergences de suites

— Par monotonie et suites adjacentes. Cas des séries numériques à termes positifs et des séries alternées.

— Par des majorations du type $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, $k < 1$, preuves de divergence par paquets de Cauchy (sur exemples). La condition $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ ne suffit pas pour établir la convergence.

Ce thème met en évidence, sur des exemples simples, l'importance des paquets de Cauchy.

— Exploration de la divergence par suites extraites : quelques exemples d'oscillations et de phases tournantes.

— Cas des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. (Se reporter au thème n° 2 - Equations numériques).

Bibliographie :

IREM : Marseille [8] ; Rennes (à paraître) ; Nancy (à paraître).
Chevallard et Rolland IB [9] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21].

c) *Développement en série des fonctions transcendantes élémentaires*

$x \mapsto \exp x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \log(1+x)$ et $x \mapsto \text{Arc tg } x$. Intérêt de l'intégration par parties et de la forme intégrale du reste. Accélération de convergence pour $x \mapsto \log(1+x)$ et $x \mapsto \text{Arc tg } x$.

— Méthode d'Euler pour le calcul de π et ses variantes. Comparaison des diverses méthodes et analyse des facteurs mis en jeu ;

— méthode d'Euler pour le calcul des logarithmes. Comparaison des méthodes.

Bibliographie :

IREM : Bordeaux - relations n° 0, 1, 2 ; Marseille (à paraître).

Chevallard et Rolland IB [28] ; Dieudonné IB [11].

Note historique : Le problème du développement en série entière des fonctions transcendantes élémentaires a été longtemps fort difficile. Voici quelques points de repère :

L. Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits - (chap. 6 à 8) IV [10]

J.L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques - (Art. 19 à 29) IV [18]

Leçons sur le calcul des fonctions - (Leçons 4 et 5) IV [19]

A.L. Cauchy. Analyse algébrique, (chap. 6 et 9) IV [6]

N. Abel. Lettre à Holmbœ et mémoire sur la série du binôme (œuvres complètes)

C. Jordan. Cours d'Analyse à l'Ecole polytechnique IV [16]

E. Picard. Traité d'analyse IV [25].

d) *Accélération de convergence pour les suites et séries numériques*

Reprise des exemples $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \log p, \log n !.$$

— Approche expérimentale des restes, rôle des paquets de Cauchy ; contrôle théorique du reste grâce au calcul intégral.

— Amélioration de la précision sur le reste par intégrations par parties (début, sur ces exemples, de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin). Gain de performance qui en résulte.

— Exploration de la sommation de quelques séries divergentes.

Bibliographie :

IREM : Marseille [6], [C8] ; Lyon [C7] ; Grenoble [C2] ; Dijon [7].

Chevallard et Rolland IB [9] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Goldstine (chap. 3) III [24].

Note historique : Pour la sommation des séries divergentes, voir L. Euler IV [11] ; J.L. Lagrange IV [18] ; Lacroix IV [17] ; A.L. Cauchy IV [6] ; N. Abel, (œuvres complètes) ; E. Borel IV [4].

Pour les procédés d'accélération de convergence, voir : L. Euler IV [11] et Jacobi "De usu legitimo...", œuvres complètes (vol. 6).

THEME N° 2 : Equations numériques.

Premier niveau (étude à mener de front avec une première approche des suites numériques).

a) *Calcul des racines carrées* par dichotomie, trichotomie.

Méthode de Héron ; emploi de l'algorithme $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$. Comparaison expérimentale, puis théorique, de la rapidité de convergence et de la performance.

Thèmes associés : cas des racines cubiques, de la recherche d'un inverse avec grande précision, du calcul des racines cubiques connaissant les racines carrées,...

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [1], [6], [9], [C1] ; Dijon [4], [6], [7] ; Grenoble [C2] ; Lille [6] ; Lyon [7], [C7] ; Marseille [6], [8], [C8] ; Nancy (à paraître) ; Poitiers [3] ; Rennes (à paraître) ; Paris Sud [C11].

Dhombres III [10] ; Boyer (chap. 3) III [2] ; Kline III [27] ; Engel IA [11].

b) *Construction d'une table trigonométrique* par la méthode de Ptolémée (à mener de front avec la géométrie des polygones réguliers et le calcul trigonométrique). Intervention de l'interpolation linéaire pour le calcul de $\sin 1^\circ$ à partir de $\sin 3^\circ$. Amélioration de la performance par Al Khasi : on pose $x = \sin 1^\circ$; dans ces conditions

$$x = \frac{1}{3}[\sin 3^\circ + 4x^3].$$

Mise en place, sur cet exemple, de la méthode des approximations successives. Evaluation expérimentale, puis théorique, de la rapidité de convergence. Application ou calcul de valeurs approchées de π .

Bibliographie :

IREM : Marseille [2], [6].

Abdeljaouad III [1] ; Boyer (chap. 10) III [2] ; Youschkevitch III [36] ; Kline (chap. 5) III [27].

Deuxième niveau (on dispose des dérivées et de la convergence des suites monotones).

a) *Etude qualitative des équations*

— Existence et unicité de solutions (emploi de suites monotones).

— Exemples de séparation de solutions par étude de variations et par dichotomie.

— Cas des équations à point fixe — convergence en escalier et en spirale —. Etude de la stabilité (exemples). Exemples d'oscillations et de chaos.

Bibliographie :

IREM : Marseille [6], [8], [C8] ; Lyon [7] ; Dijon [4], [7] ; Limoges [3].

Ovaert et Verley IA [21] ; Demidovitch et Maron IA [9].

Note historique :

I. Newton. Arithmétique Universelle.

J.L. Lagrange. Leçons élémentaires de Mathématiques.

b) *Recherche de solutions approchées d'équations numériques*

— Description de quelques méthodes : dichotomie, interpolation linéaire, méthode des tangentes, méthode

des approximations successives. (Pas d'accélération de convergence à ce niveau).

— Sur quelques exemples, comparaison expérimentale et théorique de la rapidité de convergence et de la performance.

— Intervention de la dichotomie pour l'existence des solutions ; exemple des racines carrées. Dans le cas des équations à point fixe, exploration des facteurs gouvernant la rapidité de convergence (pente des sécantes et des tangentes). On pourra mettre en valeur l'importance d'inégalités lipschitziennes.

Bibliographie :

IREM : Marseille [6], [8], [C8].

Berezin et Zhydkov IB [5] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Goldstine (chap. 2) III [24].

Note historique :

— La dichotomie et ses variantes (subdivisions) ont eu une importance considérable dans le développement des concepts fondamentaux de l'analyse :

J.L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques - Art. 48 - IV [18]. Leçons sur le calcul des fonctions - Leçon 9 - IV [19]

B. Bolzano. Une preuve analytique... Revue d'histoire des sciences, tome 17.

A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique, note 3, IV [6].

On pourra trouver des références ultérieures (Weierstrass, Dini) dans les livres de Dugac, III [13] et III [15].

— Méthode d'interpolation linéaire :

R. Descartes. La géométrie.

J.L. Lagrange. Résolution des équations numériques (œuvres complètes).

— Méthode de Newton :

I. Newton. La méthode des fluxions et des suites infinies, IV [24]. Principes mathématiques de la philosophie naturelle, livre 1. (Problème p. 31, Problème p. 22 et Scholie).

A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique, note 3, IV [6].

— Méthode des approximations successives :

F. Viète. Extrait dans Goldstine, chap. 2, § 4, III [24].

J. Wallis. Extrait dans Goldstine, chap. 2, § 4, III [24].

A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique, note 3, IV [6].

Troisième niveau (on dispose de la continuité, des développements limités, du concept de contact, et du calcul intégral).

a) Etude qualitative des équations

— Existence et unicité des solutions : emploi des suites monotones, des théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues, du critère de Cauchy sous la forme $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, où $k < 1$. Cette étude permet de mettre en évidence les divers procédés de démonstration d'existences en analyse (monotonie et bornes supérieures, connexité, compacité, critère de Cauchy). Emploi des valeurs d'adhérence pour les phénomènes d'oscillation.

— Etude de la stabilité des solutions d'une équation à point fixe (par monotonie).

Bibliographie :

IREM : Marseille [8].

Demidovitch et Maron IA [9] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Durand IB [13].

b) Séparation des solutions d'une équation

— Utilisation de variations de fonctions (exemples).

— Comparaison d'équations (exemples).

— Cas des équations algébriques. Majoration du module des racines, exemples utilisant les méthodes de Descartes et de Sturm.

Bibliographie :

Durand IB [13] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Kuroth. Cours d'algèbre supérieure (MIR) ; Fadeev et Sominski. Exercices d'algèbre (MIR).

c) Recherche de solutions approchées d'équations numériques

Approfondissement de l'étude des méthodes classiques : dichotomie, interpolation linéaire, méthode des tangentes, méthode des approximations successives :

— La méthode de dichotomie peut être employée pour démontrer l'existence de racines (théorème des valeurs intermédiaires) et l'existence de maxima et de minima (propriétés des fonctions continues sur un compact).

— Intervention de la convexité dans les méthodes d'interpolation linéaire et des tangentes.

— Exemples d'accélération de convergence ; lien entre méthode des tangentes et méthode des approximations successives. Procédés utilisés pour ramener l'étude de $g(x) = 0$ à celle de $f(x) = x$. Emploi combiné des différentes méthodes précédentes.

— Sur exemples, évaluation asymptotique de la rapidité de convergence pour la méthode des approximations successives. Rôle du contact dans le cas $f(a) = a$, $f'(a) = 0$, et dans le cas $f(a) = a$, $|f'(a)| = 1$. Construction d'algorithmes ayant une performance donnée.

Bibliographie :

IREM : Marseille [6], [8] ; Limoges [3].

Demidovitch et Maron IA [9] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21].

d) Systèmes linéaires et inversion de matrices carrées

Sur des exemples simples, emploi de la méthode des approximations successives. Cas des matrices à diagonale strictement dominante.

Bibliographie :

Ovaert et Verley IA [20] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Durand IB [13] ; Gautmacher IB [16] ; Varga IB [35].

THEME N° 10 : nombres et fonctions attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal.

Premier niveau (on dispose des dérivées et des primitives).

a) *Calcul des dérivées.* Emploi des opérations sur les fonctions (opérations algébriques, composition) ; emploi des développements limités (sur exemples).

b) *Calcul des primitives.* Primitives usuelles ; emploi de l'intégration par parties ; construction des fonctions transcendantes élémentaires.

c) *Calcul de valeurs approchées de dérivées* par différences finies. Instabilité des dérivées (sur exemples) ; étude expérimentale et théorique.

d) *Emploi des dérivées et des primitives pour la mesure des grandeurs*

— en géométrie : (aires, volumes de sphères, cônes, cylindres, pyramides).

— en électricité : quantité d'électricité, intensité efficace, énergie.

— en mécanique : quantité de mouvement, travail, énergie.

Bibliographie :

IREM : Limoges [4] ; Lyon [6], [7] ; Marseille [4] ; Poitiers [4] ; Rennes [2], [3] ; Paris Sud [C11].
Lang IA [17] ; Lax IA [19].

Deuxième niveau (on dispose des dérivées, des primitives et des intégrales).

a) *Calcul des dérivées.* Approfondissement des méthodes (composition, fonctions réciproques) ; calcul et emploi de développements limités.

Bibliographie :

IREM : Lyon [7] ; Marseille (à paraître).
Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22].

b) *Calcul des primitives.* Emploi de l'intégration par parties et de changements de variables simples ($x \mapsto ax + b$, $x \mapsto x^2$) ; emploi des fonctions transcendantes élémentaires directes et réciproques ; exemples d'intégrales conduisant à de nouvelles transcendentes.

Ce thème permet de dégager une classification grossière des fonctions.

Bibliographie :

Smirnov IB [31] ; Valiron IB [34] ; Goursat IV [14] ; Piskounov IA [22].

Note historique concernant la classification des fonctions :

L. Euler. Introduction à l'analyse infinitésimale (chap. 1) IV [10] et [11].

J.L. Lagrange. Leçons sur le calcul des fonctions (leçons 1 et 2) IV [19].

A.L. Cauchy. Cours d'analyse (chap. 1) IV [6].

Ch. Hermite. Cours d'analyse (chap. 1) IV [15].

A ce sujet, on pourra aussi consulter les ouvrages suivants :

Ch. Houzel sur les travaux d'Euler in III [23].

J.L. Ovaert sur les travaux de Lagrange in III [23].

Youschkevitch in III [35].

DEA didactique Bordeaux (à paraître).

c) *Calcul de valeurs approchées de dérivées.* Cas des dérivées d'ordre supérieur, majoration des erreurs commises.

Bibliographie :

IREM : Marseille (à paraître) ; Paris Sud [C11].

Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Berezin et Zhydkov IB [5].

d) *Calcul de valeurs approchées d'intégrales*

— Méthodes interpolatoires simples (rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson). Etude expérimentale. Contrôle théorique des erreurs. Comparaison expérimentale et théorique de la performance de ces méthodes. Optimisation de l'interpolation linéaire et parabolique (méthode de Gauss à l'ordre 2 et 3).

— Développements tayloriens : exemples d'utilisation de développements en série entière. Méthode d'Euler-Maclaurin à l'ordre inférieur à 3 et comparaison avec les méthodes interpolatoires.

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [5] ; Marseille [4], [6].

Demidovitch et Maron IA [9] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] ; Piskounov IA [22].

e) *Emploi du calcul différentiel et intégral pour la mesure des grandeurs :*

— en géométrie : aires, volumes de révolution, emploi de coordonnées polaires ;

— en mécanique : centres d'inertie, moments d'inertie, travail, énergie ;

— en électricité (électrostatique et électrocinétique) : tension, intensité, énergie ;

— en mécanique des fluides, pressions, flux, travail ;

— en optique : chemin optique ;

— en thermodynamique : quantité de chaleur, travail, entropie.

Bibliographie :

IREM : Lyon [3] ; Marseille (à paraître) ; Strasbourg, livre du problème, vol. 5.

Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Arnold IB [4] ; Demidovitch IA [8] ; Piskounov IA [22].