5e PARTIE : BIBLIOGRAPHIE SECTORIELLE

Dans cette partie, nous esquissons une liste de quelques grands problèmes de l'analyse, accompagnée, pour chacun d'entre eux, d'une bibliographie limitée aux ouvrages scientifiques fondamentaux. Les numéros qui suivent chaque nom d'auteur renvoient à la Bibliographie Générale.

Une analyse plus détaillée est ensuite effectuée pour trois de ces grands problèmes, à savoir : limites de suites, sommes de séries ; équations numériques ; nombres et fonctions attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal.

Pour finir, six livres importants sont analysés par des membres de la Commission Inter-IREM d'Analyse.

A. LISTE DE QUELQUES GRANDS PROBLEMES DE L'ANALYSE

par J.L. OVAERT et R. ROLLAND

La liste qui suit ne comporte que les problèmes susceptibles d'être abordés au niveau de l'enseignement secondaire.

1. Limites de suites, sommes de séries

Les problèmes se présentent sous un double aspect.

— *Qualitatif* : Etude de la convergence, exploration des divers types de divergence. Recherche de limites.

— *Quantitatif* : Approximations de nombres définis de cette manière, rapidité de convergence, performance des divers procédés d'approximation. Accélérations de convergence. Sommation de séries divergentes.

Ce thème met en jeu une dialectique entre deux points de vue :

— tantôt les suites et séries sont données et on veut étudier la convergence ;

— tantôt on se donne un nombre ou une fonction et on étudie les modes de représentation de ce nombre ou de cette fonction comme limite de suites ou somme de séries.

Ce thème est lié de manière étroite à celui des équations numériques (cf. 2), des évaluations asymptotiques (cf. 6) et de l'approximation des nombres réels (cf. 7).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Demidovitch et Maron IA [9] ; Engel IA [11] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Chevallard et Rolland IB [9] et [28] ; Dieudonné IB [11].

2. Equations numériques

Ici aussi, les problèmes se présentent sous un double aspect.

— *Qualitatif* : Existence et unicité de solutions. Séparation des solutions. Stabilité des solutions et des processus d'approximation.

— *Quantitatif* : Calcul de solutions approchées, comparaison de la rapidité de convergence et de la performance des divers procédés. Accélérations de convergence.

Ce thème met en jeu une dialectique entre l'étude de processus donnés et l'élaboration de nouveaux procédés afin d'améliorer la performance pour une classe de cas donnée.

Ce thème est lié à celui des suites et séries (cf. 1).

A ce thème, se rattachent les méthodes de traitement numérique des matrices utilisant l'analyse linéaire :

— résolution de systèmes d'équations linéaires,
— inversion de matrices,
— problèmes de valeurs propres et de vecteurs propres.

Ces méthodes fournissent un terrain d'exploration des différentes manières de normer les espaces vectoriels de matrices et d'applications linéaires.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Bakhvalov IA [2] ; Demidovitch et Maron IA [9] ; Engel IA [11] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] et [21] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Durand IB [13] ; Gantmacher IB [16] ; Stewart IB [29] ; Varga IB [35].

3. Variations des fonctions d'une variable réelle

Les différents problèmes : monotonie, convexité, continuité, taux de variation, étude locale, étude asymptotique, peuvent prendre, suivant les cas, un aspect qualitatif ou quantitatif.

Peuvent être rattachés à ce thème :

— la comparaison de deux fonctions, des éléments d'une suite ou d'une famille de fonctions,
— l'étude de la monotonie et de la convexité des suites (intervention du continu sur le discret).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Chilov IA [7] ; Demidovitch IA [8] ; Lang IA [17] et [18] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22] ; Dieudonné IB [11] ; Smirnov IB [31].

4. Etude locale des fonctions d'une variable réelle

— Existence et recherche de développements limités des différents ordres, de développements asymptotiques. Recherche de limites.

— Allure locale d'une fonction (maxima, minima, inflexions) ; pour les fonctions à valeurs vectorielles, points réguliers.

— Calcul de valeurs approchées d'une fonction au voisinage d'un point.

— Extension des problèmes précédents au cas des fonctions de plusieurs variables.

Ce thème met en jeu une dialectique entre les concepts liés aux fonctions, aux graphismes, au calcul numérique et à la géométrie différentielle (problèmes de contact). L'aspect qualitatif est dominant, mais certains problèmes utilisent des majorations et des encadrements (aspect quantitatif).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Chilov IA [7] ; Demidovitch IA [8] ; Lang IA [17] et [18]; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22] ; Dieudonné IB [11] ; Smirnov IB [31].

5. Majorations et encadrements de nombres, de suites, de fonctions

Ce thème intervient dans presque toutes les questions d'analyse. On peut y regrouper, de manière transversale, différentes techniques employées pour obtenir des majorations :

— opérations algébriques, composition des fonctions,
— variations de fonctions,
— inégalités tayloriennes,
— inégalités de convexité,
— intégration et sommation d'inégalités.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Demidovitch et Maron IA [9] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] et [21] ; Dieudonné IB [11] ; Hardy et Littlewood IB [11] ; Polya et Szegö IB [26].

6. Ordres de grandeur, évaluations asymptotiques

— Etude de différents types de comportement asymptotique pour les suites et les fonctions : phénomènes linéaires, quadratiques, logarithmiques, exponentiels, oscillatoires, puis oscillatoires amortis, oscillatoires divergents.

— Recherche de limites et de parties principales.

— Evaluation de restes de séries et d'intégrales convergentes, de sommes partielles de séries et d'intégrales divergentes.

— Evaluation de racines d'équations dépendant d'un paramètre.

— Convergence des sommes du type de Riemann.

Ce thème met en jeu une dialectique entre le discret et le continu.

Il est lié à celui des limites de suites et sommes de séries (cf. 1) et des majorations et encadrements (cf. 5).

Il jette un pont entre les problèmes purement qualitatifs (existence et unicité, ...) et les problèmes quantitatifs (majorations...).

Il intervient de façon essentielle dans l'étude des systèmes dynamiques discrets et continus.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Engel IA [11] ; Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Arnold IB [3] ; Chambadal et Ovaert IB [8] ; Dieudonné IB [11] ; Hirsch et Smale IB [19] ; Whittaker et Watson IB [36].

7. Représentations et approximation des nombres

Etude de divers types de représentation des nombres :

— développements décimaux, dyadiques, triadiques,

— sommes de séries, limites de suites (déjà traitées au thème 1),

— intégrales,

— fractions continues.

Cette étude présente des aspects qualitatifs et quantitatifs.

Elle peut porter sur des nombres donnés, ou sur une classe de nombres donnée.

Ce thème est lié aux problèmes d'irrationnalité et de transcendance, et de mesure d'icelles.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Engel IA [11] ; Lax IA [19] : Ovaert et Verley IA [21] ; Chevallard et Rolland IA [9] ; Hardy et Wright IA [18].

8. Problèmes de maxima et de minima

— *Aspect qualitatif* : Existence et unicité d'extrema. Séparation des extrema locaux. Stabilité des extrema.

— *Aspect quantitatif* : Calcul des extrema par différentes techniques : inégalités, calcul différentiel. Problèmes d'extrema liés.

Ce thème recouvre notamment les problèmes d'optimisation :

— optimisation de majorations,

— optimisation d'un processus d'approximation,

— optimisation de valeurs d'une fonction numérique (coût, énergie,...),

— optimisation de fonctions : calcul des variations. En particulier, optimisation d'une distance (géodésiques, normales à une courbe, chemin optique, intégrales d'énergie).

Ce thème est d'une importance capitale pour les interventions de l'analyse en sciences physiques et économiques.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Chilov IA [7] ; Demidovitch IA [8] ; Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22] ; Arnold IB [3] ; Courant et Hilbert: Methods of Mathematical Physics ; Landau et Lifchitz: Mecanique (Mir).

9. Représentations et approximation des fonctions

— Etude de différents procédés de représentation : développements en série, représentations intégrales, interpolation.

— Etude, pour chacun de ces procédés, des différents modes de convergence et de leur pertinence (convergence simple, uniforme, en moyenne, en moyenne quadratique,...). Cette étude présente, comme pour le cas des nombres (cf. 1 et 7) des aspects qualitatifs et des aspects quantitatifs.

— Opérations sur les représentations : opérations algébriques, composition, dérivation, intégration. Ces problèmes mènent à l'étude systématique du comportement des concepts de l'analyse (continuité, caractère lipschitzien, dérivabilité, intégrabilité, ...) vis-à-vis des différents types de convergences étudiés.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Lang IA [17] et [18] ; Lax IA [19] ; Chevallard et Rolland IB [28] ; Davis IB [10] ; Dieudonné IB [11] ; Fomine et Kolmogorov IB [14] ; Lorentz IB [25] ; Rudin IB [30] ; Whittaker et Watson IB [36] ; Yosida IB [37].

10. Nombres attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal

(Il s'agit des intégrales et des dérivées). Calcul des dérivées et des primitives. Etude qualitative et quantitative de divers procédés d'approximations :

— interpolation et différences finies,

— développements en séries,

— développements tayloriens généralisés.

Le calcul des valeurs d'une fonction est traité au thème 4, celui de ses zéros au thème 2.

Ce thème est lié à celui de l'approximation des fonctions et de leurs différents modes de représentation (cf. 9).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Demidovitch et Maron IA [9] ; Engel IA [11] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Dieudonné IB [11].

11. Equations différentielles. Equations aux différences finies

a) *Equations linéaires à coefficients constants*

— Etude du problème de Cauchy ; structure de l'ensemble des solutions. Sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire. Classification des points singuliers. Stabilité des solutions. Comportement asymptotique des solutions.

b) *Equations linéaires*

— Etude du problème de Cauchy ; structure de l'ensemble des solutions, résolvante, dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales et aux coefficients. Classification des points singuliers et stabilité. Comportement asymptotique des solutions.

— Problèmes aux limites.

— Problèmes de contrôle et de commande.

— Recherche de solutions approchées : performance comparée de diverses méthodes.

— Etude dans le champ complexe : classification des singularités, recherche de représentation des solutions par des séries ou des intégrales.

c) *Equations non linéaires autonomes*

— Etude des champs de vecteurs, flots, orbites ; dérivation associée à un champ de vecteur, intégrales premières. Systèmes conservatifs. Classification des points singuliers.

d) *Equations non linéaires dépendant du temps*

Problème de Cauchy. Recherche de solutions approchées.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Lang IA [17] et [18] ; Lax IA [19] ; Arnold IB [3] et [4] ; Dieudonné IB [11] ; Hirsch et Smale IB [19] ; Ince - Ordinary differential equations (Dover) ; Lang IB [23] et [24] ; Pontriaguine IB [27] ; Roseau - vibrations non linéaires et théorie de la stabilité ; Whittaker et Watson IB [35].

B. ANALYSE DETAILLEE DES THEMES 1, 2 et 10

par J.L. OVAERT et R. ROLLAND

Cette analyse est conduite suivant plusieurs niveaux d'approfondissement. Les références bibliographiques sont relatives à des travaux didactiques (groupes IREM, brochures A.P.M.E.P., ouvrages didactiques, etc.). Les références aux groupes IREM sont conformes à la partie III de la présente brochure. Par exemple, le sigle Dijon[1] se réfère à l'approche heuristique des nombres réels... Les références concernant les calculatrices sont codées avec la lettre C. Par exemple, le sigle Bordeaux[C1] se réfère à mathématiques et calculatrice de poche. La plupart des rubriques comprend une brève note historique assortie de références bibliographiques concernant des ouvrages d'histoire des mathématiques, et des textes historiques. Pour les ouvrages scientifiques, on pourra se reporter au A.

THEME N°1 : Limites de suites, sommes de séries

Premier niveau

a) ***Recherche de limites*** de suites par comparaison avec les suites de références simples $n \mapsto n^p$, $n \mapsto a^n$ (exemples numériques). Comparaison de quelques suites de référence (exemples numériques) ; exemples de divergence vers $+\infty$, vers $-\infty$; comparaison aux suites de référence ; exemples de phénomènes d'oscillation et de chaos.

On peut faire ressortir la dialectique entre suites, graphismes et calcul numérique, et mettre en évidence la nécessité d'un contrôle théorique de la convergence.

b) *Rapidité de convergence*

— *Exemples de convergence rapide.* Calcul de e par la somme de la série : étude expérimentale, puis théorique. Moyennes arithmético-géométriques (exemples) : étude expérimentale, puis théorique. Voir aussi le calcul des racines carrées par la méthode de Héron (cf. thème n° 2).

— *Exemples de convergence géométrique.* Dichotomies, trichotomies. Calcul de π par la méthode d'Archimède (polygones inscrits). Calcul des logarithmes par la méthode de Briggs.

— *Exemples de convergence lente.*

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\dots = \frac{\pi}{4}$$

(Pas de contrôle théorique de la convergence, ni d'accélération de convergence à ce niveau).

Les exemples étudiés au b) sont à mener de front avec la mise en place des suites de référence.

— *Exemples de divergence lente.*

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{c(n)}}{n},$$

où c(n) est le nombre de chiffres de n .

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [1], [6], [9], [C1] ; Dijon [2], [6], [7] ; Grenoble [5], [C2] ; Lille [1], [6] ; Lyon [1], [4], [7] ; Marseille [1], [2], [C8] ; Nancy [1], [C9] ; Paris Sud [C1] ; Poitiers [3] ; Rennes [1].
Brochure A.P.M.E.P. 4e, 3e ; Lelionnais III [29] ; Goldstine (chap. 2) III [24] ; Naux III [30] ; Itard III [25] ; Dhombres III [10].

Deuxième niveau (on dispose des dérivées et de la convergence des suites monotones).

a) ***Recherche de limites*** de suites par comparaison avec les suites de référence $n \mapsto n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbf{R}$, $n \mapsto a^n$, où $a \in \mathbf{R}_+^*$, $n \mapsto n!$.

Comparaison de ces suites de référence (Etude systématique).

Exemples faisant intervenir $n \mapsto \log n$.

Etude analogue pour la divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exploration de la divergence oscillatoire par suites extraites (exemples).

Même dialectique qu'au premier niveau.

Suites définies par des relations de récurrence linéaires.

Bibliographie :

IREM : Marseille [1] ; Rennes [3].
Engel IA [11].