V. INTERPOLATION ET APPROXIMATION DE FONCTIONS

Daniel REISZ (IREM de Dijon)

...L'esprit scientifique est essentiellement une rectification du savoir, un élargissement du cadre de la connaissance... Scientifiquement on pense le vrai comme rectification historique d'une longue erreur, on pense l'expérience comme rectification de l'illusion commune et première.

G. BACHELARD

INTRODUCTION

Les problèmes d'interpolation et d'approximation de fonctions sont des exemples significatifs de ce que nous appellons un "grand problème" c'est-à-dire un ensemble de situations pouvant donner lieu à "une étude suivie et pouvant être reprise à différents niveaux" fournissant "des problématiques pour l'approfondissement des concepts" et, en retour, s'offrant comme "le terrain privilégié de mise à l'épreuve des outils théoriques élaborés". (cf. page 4)

Il me semble aussi que sur ces problèmes on peut répondre affirmativement aux trois questions fondamentales qui doivent justifier le choix d'un thème d'activité (cf. page 5) :

- importance du thème dans la formation scientifique
- terrain d'approfondissement théorique et expérimental
- champ d'activités mathématiques intéressantes pour les élèves ; et qu'on y trouve (cf page 6) "le qualitatif et le quantitatif", les "références culturelles et historiques", "la priorité aux concepts dynamiques".

Enfin, il semble que l'on peut transférer sur le plan didactique ce que Jean-Louis Ovaert remarque sur le plan épistémologique : "... l'histoire des mathématiques montre (...) qu'il y a interaction constante entre les progrès du calcul et l'approfondissement des concepts" [11]

Au niveau du second cycle de l'enseignement secondaire, approximation et interpolation constituent un terrain privilégié pour l'émergence et/ou l'investissement de concepts d'analyse dans des problématiques intuitivement accessibles, même si leur maîtrise fait appel à des techniques souvent raffinées. Il s'agit en tout cas d'un terrain très riche en activités mathématiques véritables qui ne feront pas, en général, l'objet d'exposés synthétiques au niveau d'enseignement considéré, mais qui participeront de façon fondamentale à l'élaboration correcte du concept central de fonction dont la perception actuelle est souvent restreinte à celle d'une expression algébrique donnée, quand ce n'est pas au discours dogmatique

"correspondance →
→ fonction → application $\rightrightarrows$ injection / surjection $\rightrightarrows$ bijection"
suivi de la ritournelle

"domaine de définition → intervalle d'étude → continuité → dérivée → tableau de variations →..."

Il s'agit aussi d'un terrain privilégié pour montrer aux élèves, qu'à tout niveau, les mathématiques procèdent par approfondissements successifs et, par ailleurs, que les calculatrices (ou les microordinateurs) ne sont pas de simples outils de calcul mais permettent d'approfondir la dialectique entre le champ conceptuel et le champ des problèmes.

I - ANALYSE SOMMAIRE DES PROBLEMES D'INTERPOLATION ET D'APPROXIMATION

Dans l'analyse forcément sommaire que nous faisons des deux problèmes : interpolation et approximation, nous donnons souvent l'impression illusoire de deux problèmes distincts. En réalité, tant au niveau de problèmatiques qu'au niveau des méthodes, le lecteur s'apercevra que s'il s'agit de problèmes différents, ils sont loin d'être disjoints.

A - Interpolation

Le problème général de l'interpolation est le suivant : pour les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on connait les valeurs d'une certaine fonction f :

$$b_1 = f(a_1) \quad , \quad b_2 = f(a_2) \quad , \ldots, \quad b_n = f(a_n).$$

On désire, pour une valeur donnée de a, avoir une valeur approchée de f(a). Selon que $a_i < a < a_{i+1}$, ou que $a < a_0$ ou $a > a_n$, on parlera plus précisément d'interpolation ou d'extrapolation. De tels problèmes se rencontrent en particulier lorsque la fonction f n'est connue que par une table de valeurs numériques. Mais il ne faudrait pas croire que ce soit là la seule situation où l'on soit amené à faire des interpolations. En effet, il est souvent possible de calculer formellement f(a), mais dans la réalité un tel calcul peut exiger un investissement de temps disproportionné à l'usage et à la précision nécessaire. Dans des problèmes d'interpolation, la qualité de l'approximation lorsqu'on substitue à la fonction f, une fonction interpolatoire φ, est déterminée par la valeur $|f(a) - \varphi(a)|$. Cette quantité, évidemment inconnue, dépend de différents facteurs. Les plus significatifs sont :

— le nombre et la répartition des a_i et, en particulier la longueur des segments $[a_i, a_{i+1}]$
— l'allure des courbes représentatives de f et φ sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$
— la position de a par rapport aux valeurs a_i et en particulier par rapport aux plus proches de ces valeurs.

Moyennant certaines conditions de "régularité" de la fonction donnée f, moyennant certains choix du type de la fonction interpolatoire φ (polynôme de degré n, fonction rationnelle, fonction trigonométrique, fonction exponentielle,...) on peut espérer minimiser la quantité $|f(a) - \varphi(a)|$ ou plutôt un majorant connu de cette quantité inconnue.

B - Approximation

S'il est facile de comprendre l'idée générale de l'approximation d'une fonction f par une fonction φ sur un intervalle donné (trouver une fonction φ telle que, pour tout x de l'intervalle, $\varphi(x)$ soit une "bonne" approximation de f(x)) les problèmes soulevés par les techniques d'approximation, techniques sous-tendues par des problèmes spécifiques, sont souvent très délicates et ne sauraient tous, loin s'en faut, être abordés ici, même au niveau des généralités.

Afin de clarifier un peu ce type de problème on peut regarder de plus près les différents "paramètres" qui interviennent :

1) *La façon dont est connue la fonction f*

a) On en connaît un nombre fini de couples $(x_i, f(x_i))$ soit à la suite d'observations expérimentales, soit par une table numérique.

b) On peut déterminer $f(x_i)$ pour un x_i que l'on choisit (Exemples : f est connue par un enregistrement expérimental continu, f est donnée par une formulation mathématique explicite,...). On a alors le choix de la subdivision et ce choix est souvent un paramètre important de la qualité de l'approximation.

On peut se demander quel peut être l'intérêt d'une approximation lorsqu'on connaît f par une formulation mathématique explicite. En réalité ce cas n'est nullement artificiel car il est souvent utile d'approcher une fonction f par une fonction φ d'un type bien particulier (polynôme, fonction rationnelle, somme de sinus ou cosinus,...). Sur les calculatrices par exemple, les fonctions transcendantes habituellement préprogrammées (sinus, exp,...) sont approchées par les constructeurs à l'aide de fonctions polynômes ou de fonctions rationnelles dont la forme explicite reste hélas trop souvent un "secret de fabrication" (il ne faut pas croire, contrairement à une opinion trop répandue, qu'il s'agit systématiquement de développements de Taylor).

2) *Le type de la fonction approximante φ*

Parmi les familles de fonction les plus utilisées :

— les fonctions affines
— les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n
— les fonctions rationnelles
— les fonctions logarithmes ou exponentielles
— les sommes de sinus et de cosinus (séries de Fourier)

Toutes ces fonctions peuvent, par ailleurs, être utilisées par morceaux.

3) *La définition de la qualité de l'approximation*

a) On peut exiger (ou ne pas exiger) que la fonction approximante passe par des points donnés de f, c'est-à-dire, vérifie $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour une famille de x_i. On rejoint par là le problème de l'interpolation.

b) Lorsque les données $(x_i, f(x_i))$ sont trop nombreuses par rapport aux "degrés de liberté" de φ on peut minimiser

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2 \text{ (méthode des moindres carrés)}$$

c) On peut mesurer la qualité de l'approximation par l'intermédiaire de différentes normes. Parmi les plus fréquentes :

$$\text{Sup } |f(x) - \varphi(x)|$$

qui privilégie les accidents locaux (approximation uniforme)

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx$$

qui, au contraire, néglige les accidents locaux et mesure un caractère plus global de l'approximation

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 \, dx$$

qui elle aussi néglige les accidents locaux, mais qui en outre a, pour de nombreux phénomènes, une signification physique ou mathématique importante (intégrale d'énergie, probabilité...). Enfin son traitement mathématique (il s'agit d'une norme euclidienne ou hermitienne) est en général plus commode que celui de la norme précédente.

II - QUELQUES SECTEURS D'INTERVENTION DE L'INTERPOLATION ET DE L'APPROXIMATION

A - Problèmes numériques

a) Lissage de fonctions données expérimentalement : [10], [13], [17].

b) Ajustement de fonctions d'une classe donnée à un tableau de valeurs numériques. Rôle de la méthode des moindres carrés dans les cas surdéterminés (plus d'équations que d'inconnues) : [2], [13], [18].

c) Calcul de valeurs approchées d'une fonction sur un intervalle donné : [13].

d) Calcul de nombres attachés à des fonctions (intégrales, dérivées, mesure de grandeurs diverses) : [2], [11], [13], [14].

e) Recherche de solutions approchées d'équations numériques $F(x) = 0$

— par des procédures itératives (Newton, dichotomie,..)
— on remplace F par une approximation polynomiale P et on résoud $P(x) = 0$.

[2], [6], [13].

f) Résolution d'équations différentielles ou intégrales

— par discrétisation
— on donne les solutions sous forme de séries (entières, Fourier,...)

[13], [16].

g) Equations aux dérivées partielles.

B - Problèmes théoriques

Très souvent, pour démontrer des propriétés concernant des fonctions d'une classe assez générale (fonctions continues, fonctions intégrables, mesures, distributions,...) il est commode de démontrer ces propriétés pour des classes de fonctions plus particulières (fonctions polynomiales, polynômes trigonométriques, fonctions de classe C^∞,...) et de passer au cas général par densité. Cette méthode est d'un emploi constant en analyse fonctionnelle.

III - QUELQUES EXEMPLES D'ACTIVITES POSSIBLES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

D'une façon générale les problèmes d'interpolation sont, au niveau d'enseignement où nous nous plaçons, plus abordables que ceux d'approximation. Dans les quelques exemples d'activités possibles que nous donnons nous avons voulu garder en toile de fond les aspects pédagogiques et les programmes de l'enseignement secondaire plutôt que de rédiger des "sous-cours" d'analyse numérique. Par ailleurs nous insisterons plus sur les idées directrices que sur une rédaction "finie" d'énoncés d'exercices. Pour d'autres exemples et des compléments mathématiques, on consultera [1], [2], [3].

A - INTERPOLATION LINÉAIRE

Certains aspects élémentaires de l'interpolation linéaire peuvent être abordés dès les classes de 4ème-3ème en même temps que l'étude "point par point" des premières fonctions non affines.

Exercice 1 : Cas de la parabole

Cet exercice, outre la mise en place du principe même de l'interpolation linéaire a pour objectif de regarder le comportement de l'erreur et de faire prendre conscience des facteurs qui l'influencent.

x	f(x)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Soit $f : x \mapsto y = x^2$ dont on considère les valeurs pour x entier (tabl. ci-contre). On décide qu'entre deux entiers consécutifs x_i et x_{i+1}, f sera approché par la fonction affine : $x \mapsto \varphi(x) = ax + b$, définie par

$$\varphi(x_i) = f(x_i) = x_i^2$$
$$\varphi(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2$$

1) Après avoir déterminé φ pour $x_i = 2$, $x_{i+1} = 3$, calculer et comparer

$\varphi(2,1)$ $\quad$ $f(2,1)$
$\varphi(2,2)$ $\quad$ $f(2,2)$
...

Refaire le même travail sur les segments [100 ; 101] [1000 ; 1001]

2) Etudier sur le segment [n,n+1] la fonction

$$E_n : x \mapsto E_n(x) = |f(x) - \varphi(x)|$$

3) Etudier l'erreur relative

$$\frac{E_n}{n^2}$$

Exercice 2 : Cas de la fonction racine carrée

On reprend la démarche précédente pour la fonction $f : x \mapsto y = \sqrt{x}$
x_i et x_{i+1} étant deux carrés parfaits consécutifs
x_i et x_{i+1} étant deux entiers consécutifs.

Remarque :

On trouvera, sur les deux exercices précédents, des compléments très intéressants concernant les aspects quantitatifs dans "Premiers balbutiements" (I.R.E.M. de Lyon, 1975-1976)

Exercice 3 : Cas d'une fonction inconnue des élèves

On reprend toujours la même démarche mais cette fois avec une fonction *inconnue* des élèves, mais calculable sur une calculatrice (bien préciser que les valeurs obtenues sur une calculatrice sont elles-mêmes des valeurs approchées mais dont la précision est de l'ordre de 10^{-n}, n dépendant du matériel utilisé). On pourra choisir les fonctions cos ou sin dès le premier cycle, les fonctions exponentielles ou logarithmes en seconde puis, dans les classes ultérieures, les fonctions hyperboliques, les fonctions trigonométriques réciproques, voire la fonction Γ, préprogrammée sur certaines calculatrices.

Exercice 4 : Halte aux excès

En considérant la fonction $x \mapsto y = x^{12}$ qu'on interpolera linéairement entre 0 et 1, on montrera les dangers auxquels peut conduire une interpolation linéaire intempestive, ainsi que les facteurs qui déterminent la qualité de l'interpolation.

Exercice 5 : Fonction uniquement connue par des données numériques discrètes

Une fonction n'est connue que par une table de valeurs numériques (par exemple d'origine expérimentale). On calculera des valeurs intermédiaires par des interpolations linéaires. On ne manquera pas de faire préciser les hypothèses implicites de régularité de la fonction f.

Exemple :

x	f(x)
0	0
1	3
4	5
5	7
9	9
10	11

B - INTERPOLATION PARABOLIQUE (OU QUADRATIQUE)

Exercice 1 : Détermination d'une parabole par 3 points

1) Déterminer a, b, c pour que la courbe représentative de la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points (1,2) (2,4) (4,7).

2) Montrer que si deux des points sont trop près l'un de l'autre, le déterminant du système donnant les valeurs de a, b, c prend des valeurs proches de 0 ce qui rend aléatoires les valeurs numériques obtenues pour a, b et c (système mal conditionné). On montrera alors qu'il est préférable de remplacer la donnée de deux points proches par la donnée de l'un des points et de la tangente en ce point (remplacer des données exactes amenant à un système mal conditionné par une approximation amenant un système bien conditionné).

Remarque :
Ce genre d'activités doit détacher un peu l'élève des réflexes "tout ou rien" : un système admet une solution ou n'admet pas de solution. On retrouvera cette idée fondamentale plus loin, sous un autre aspect (méthode des moindres carrés).

Exercice 2 : Cas des 3 points d'abscisses équidistantes

On utilise souvent une interpolation parabolique en prenant trois points équidistants de la fonction f à interpoler (exemple : intégration numérique par la méthode de Simpson).

1) Déterminer a, b, c pour que la courbe représentative de $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points

$$(\alpha, f(\alpha) = \alpha') \quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \gamma'\right) \quad (\beta, f(\beta) = \beta')$$

2) Application à $f : x \mapsto y = \sqrt{x}$ qu'on interpolera paraboliquement en utilisant les trois points

$$(1 ; \sqrt{1} = 1) \quad (5 ; \sqrt{5} \simeq 2,236) \quad (9 ; \sqrt{9} = 3)$$

Exercice 3 : Comparaison entre interpolation linéaire et interpolation quadratique

On se propose dans cet exercice de comparer tant au niveau de la longueur des calculs que de la précision obtenue, interpolation linéaire et interpolation parabolique. On utilisera pour cela la fonction sin en deux endroits différents (près de 0 où la courbure est faible, près de 90° où la courbure est plus forte).

On a $\sin 0° = 0$, $\sin 5° \simeq 0,08715$, $\sin 10° \simeq 0,17364$, $\sin 80° \simeq 0,98481$, $\sin 85° \simeq 0,99619$, $\sin 90° = 1$

1) Faire deux interpolations linéaires φ_1 et φ_2 respectivement entre 0° et 5° et entre 5° et 10°, puis une interpolation parabolique π basée sur (0°, 5°, 10°). Etablir et étudier le tableau suivant :

	f(x)	φ(x)	π(x)
0°			
1°			
2°			
⋮			
10°			

2) Refaire le même travail pour 80°, 85°, 90°.

3) Quel pas de subdivision faudrait-il choisir pour que des interpolations linéaires assurent la même qualité d'approximation que l'approximation parabolique ?

C - MÉTHODE DE LAGRANGE

La méthode de Lagrange repose sur un fait dont on se convainc facilement : par n + 1 points distincts on peut faire passer une courbe et une seule, représentative d'une fonction polynôme de degré au plus égal à n ; et sur une difficulté dont on se convaincra tout aussi facilement : dès que n est un peu grand (n > 4) la détermination, sans méthode adaptée, de la fonction polynôme amène des calculs inextricables.

La méthode de Lagrange trouve son efficacité dans le choix judicieux d'une base du sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré $\leqslant$ n. Elle permet des interpolations plus complexes que celles vues précédemment (les interpolations linéaires et paraboliques ne sont jamais que des interpolations de Lagrange pour n = 1 et n = 2). Enfin, elle est à la base, sous des formes particulières, de la plupart de méthodes d'interpolations (méthodes de Newton, Gauss, Stirling, Bessel, ...). Voir [1], [2], [3], et [4]

Exercice 1 : Bases de l'espace vectoriel des polynômes

1) Montrer qu'on peut écrire le polynôme

$$F(x) = 3x - x^2 + 8x^3$$

sous les différentes formes

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x - x^2 + 8x^3 \\ &= 10 - 10(1-x) - 7(x-x^2) - 8(x^2-x^3) \\ &= -3 + 4(1+x) - 9(1+x+x^2) + 8(1+x+x^2+x^3) \end{aligned}$$

2) Après avoir vérifié que l'ensemble $\mathcal{T}_3$ des polynômes de degré $\leqslant 3$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynômes, on montrera que

$\{1, x, x^2, x^3\}$ (base canonique)

$\{1, 1-x, x-x^2, x^2-x^3\}$

$\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$

sont différentes bases de $\mathcal{T}_3$.

Exercice 2 : Choix d'une base pour le problème de l'interpolation

Soit les cinq points (x_i,y_i) :

$$(-2,3), \quad (0,-2), \quad (1,5), \quad (5,1), \quad (6,7)$$

et $\mathcal{T}_4$ le sous espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 4$.

1) Montrer que

$\{1, x+2, (x+2)x, (x+2)x(x-1), (x+2)x(x-1)(x-5)\}$

est une base de $\mathcal{T}_4$.

2) Montrer qu'il en est de même de

$\{x(x-1)(x-5)(x-6), \quad (x+2)(x-1)(x-5)(x-6), \quad (x+2)x(x-5)(x-6), \quad (x+2)x(x-1)(x-6), \quad (x+2)x(x-1)(x-5)\}$

3) On veut déterminer le polynôme $F(x)$ de degré $\leqslant 4$ qui vérifie $F(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \ldots, 5$

a) Mettre en place (*sans les effectuer*) les calculs qui seraient nécessaires pour déterminer F en partant de

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

c'est-à-dire en utilisant la base canonique

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

b) Montrer l'intérêt des deux bases précédemment mises en place pour le problème d'interpolation posé.

c) Résoudre le problème dans chacune des deux bases.

On trouvera

$$F(x) = 3 - \frac{5}{2}(x+2) + \frac{19}{6}(x+2)x - \frac{143}{210}(x+2)x(x-1) + \frac{31}{210}(x+2)x(x-1)(x-5) \text{ (forme de Newton)}$$

et

$$F(x) = 3\,\frac{x(x-1)(x-5)(x-6)}{336} - 2\,\frac{(x+2)(x-1)(x-5)(x-6)}{60} + 5\,\frac{(x+2)x(x-5)(x-6)}{60} - 1\,\frac{(x+2)x(x-1)(x-6)}{140} + 6\,\frac{(x+2)x(x-1)(x-5)}{240}$$

(forme de Lagrange)

Remarque :

On trouvera sur la méthode d'interpolation de Lagrange et les formes d'interpolation qui en dérivent des renseignements complémentaires (d'ordre théorique, organisation algorithmique des calculs, ...) dans les ouvrages d'analyse numérique (par exemple [1], [2], [3], [4]). Signalons toutefois les avantages réciproques de la forme de Lagrange et de la forme de Newton, c'est-à-dire l'intérêt du choix judicieux d'une base d'un espace vectoriel :

— la base de Lagrange ne dépend que des abscisses des points d'interpolations. Cette base est donc particulièrement efficace si, pour des abscisses invariantes, on a à faire différentes interpolations pour différentes valeurs des ordonnées (situation fréquente dans les applications).

— la base de Newton n'a pas cette particularité mais donne pour une interpolation donnée, des calculs plus simples. En outre elle permet, sans reprendre tous les calculs, d'ajouter un point à l'ensemble des points d'interpolations (autre situation fréquente dans les applications).

D - INTERPOLATION UTILISÉE COMME MÉTHODE D'APPROXIMATION

On peut avoir à approcher une fonction f à partir de données du type $(x_i, f(x_i))$ d'origine expérimentale ou théorique. Une interpolation donne alors une fonction φ, mais on peut (on doit) en plus essayer d'apprécier la qualité de l'approximation. Cela exige d'avoir sur f des renseignements plus complets qu'une simple liste de valeurs $(x_i, f(x_i))$, renseignements qui concernent en général la dérivabilité à différents ordres de f. On trouvera une étude mathématique complète de ces questions dans [1], [2] ou [3]. Les exercices qui suivent n'ont d'autre prétention que de dégager des idées directrices relatives à ces méthodes. On est, pour ces questions, amené à utiliser le théorème de Rolle : Pour toute fonction dérivable sur $[a, b]$ et telle que $f(a) = f(b)$ il existe au moins une valeur $c \in [a,b]$ telle que $f'(c) = 0$.

Exercice 1 : Approximation linéaire

Soit $f : x \mapsto y = f(x)$ une fonction deux fois continûment dérivable dont on connaît les valeurs :

$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2)$$

On approche f par une fonction affine L_1 entre ces deux valeurs (cf. A) et on pose

$$R(x) = f(x) - L_1(x)$$

On se propose de majorer $R(x)$ sur $[x_1, x_2]$

1) Soit $\bar{x}$ un réel quelconque de $]x_1,x_2[$ et u l'application

$$x \mapsto u(x) = f(x) - L_1(x) - k(x-x_1)(x-x_2)$$

Vérifier que $u(x_1) = u(x_2) = 0$ et montrer qu'un choix convenable de k permet en plus d'avoir $u(\bar{x}) = 0$.

Application numérique : $f(x) = \sin x$

$$x_1 = \frac{5\pi}{12} \qquad y_1 = \sin\frac{5\pi}{12} \simeq 0{,}96592$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} \qquad y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

On trouvera

$$k = \frac{\sin\bar{x} - L_1(x)}{\left(\bar{x} - \frac{5\pi}{12}\right)\left(\bar{x} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

2) En appliquant à u, puis à u', le théorème de Rolle, montrer qu'il existe une valeur ξ de $[x_1, x_2]$ telle que

$$u''(\xi) = f''(\xi) - 2k$$

En déduire

$$R(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_1(\bar{x}) = \frac{f''(\xi)}{2} (\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)$$

3) Soit

$$M_2 = \sup_{x \in [x_1, x_2]} |f''(x)|$$

Montrer qu'alors

$$|R(\bar{x})| \leqslant \frac{M_2}{2} |(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)|$$

c'est-à-dire, x étant un réel quelconque de $[x_1,x_2]$, on a pour tout $x \in [x_1,x_2]$

$$|R(x)| \leqslant \frac{M_2}{2} |(x - x_1)(x - x_2)|$$

Application numérique : appliquer ces résultats au cas numérique décrit en 1)

Exercice 2 : Approximation parabolique

Soit $f : x \mapsto y = f(x)$ une fonction trois fois continûment dérivable dont on connaît les valeurs :

$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2) \qquad x_1 < x_2 < x_3$$
$$y_3 = f(x_3)$$

On approche f par une fonction trinôme L_2 passant par les trois points donnés (cf.B) et on pose

$$R(x) = f(x) - L_2(x)$$

On se propose, comme dans l'exercice précédent, de majorer R(x) sur $[x_1,x_3]$. On reprend pour cela la même méthode, c'est à dire que l'on introduit la fonction auxiliaire :

$$u(x) = f(x) - L_2(x) - k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

et, pour une valeur arbitraire $\bar{x}$, distincte de x_1, x_2 et x_3 on choisira k tel que $u(\bar{x}) = 0$.

En utilisant alors trois fois le théorème de Rolle, montrer que

$$R(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_2(\bar{x}) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)$$

où $\xi \in [x_1,x_3]$.

Puis, en désignant par $M_3 = \sup_{x \in [x_1,x_3]} |f'''(x)|$, en déduire

$$|R(x)| \leqslant \frac{M_3}{3!} |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|$$

Application numérique : $f(x) = \sin x$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad y_1 = f(x_1) = \sin\frac{\pi}{3} \simeq 0{,}86602$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{12} \quad y_2 = f(x_2) = \sin\frac{5\pi}{12} \simeq 0{,}96592$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} \quad y_3 = f(x_3) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Remarque :

La méthode utilisée dans les deux exercices précédents se généralise sous certaines conditions restrictives sur f. On démontre que si f est une fonction (n + 1) fois dérivable sur [a,b] et que si L_n désigne son polynôme interpolatoire de Lagrange, basé sur les points d'abscisses $x_0, x_1, \ldots x_n$ avec $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$ alors

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} f^{(n+1)}(x)$

E - INTERPOLATION DE TCHEBYCHEV

La formule précédente montre que l'erreur $R_n(x)$ dépend de trois facteurs :

1) Du nombre (n + 1) des points d'interpolation

2) Du nombre M_{n+1} qui dépend de la fonction donnée f et sur lequel on ne peut donc pas agir

3) Du polynôme
$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

Pour un nombre donné de points d'interpolation la borne supérieure de $\Pi_{n+1}(x)$ sur [a,b] peut varier considérablement selon la répartition des valeurs x_i sur le segment [a,b] (Par exemple si les x_i sont concentrés près de a, $\Pi_{n+1}(x)$ peut devenir très grand pour x voisin de b). On peut donc se poser le problème de la meilleure répartition des points d'interpolation, c'est-à-dire de la meilleure répartition des x_i sur [a,b] pour que $\Pi_{n+1}(x)$ "s'écarte de zéro sur [a,b] le moins possible". Ce problème a été résolu en 1874 par Tchebychev qui a démontré que le meilleur choix des x_i était

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i+1}{2n+2} \pi$$

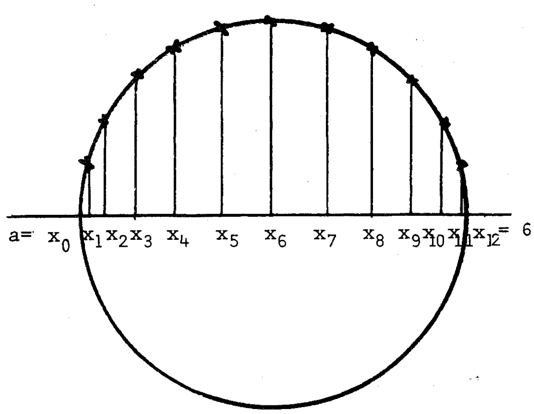
Les nombres $\cos \frac{2i+1}{2n+2} \pi$ sont alors les zéros du polynôme de Tchebychev

$$T_{n+1}(x) = \cos [(n+1) \operatorname{Arccos} x]$$

et on a

$$|\Pi_{n+1}(x)| = |T_{n+1}(x)| \leqslant 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

On remarquera que la répartition optimale des x_i n'est pas régulière, mais qu'il y a accumulation des points vers les extrémités du segment [a,b]. Ils sont projections des 2n sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre $\frac{b+a}{2}$ et de rayon $\frac{b-a}{2}$



répartition optimale des x_i pour n = 12

On trouvera dans [7], pages 20 et suivantes, une suite d'exercices accessibles à un élève de terminale et mettant en évidence les résultats énoncés ci-dessus.

Remarque

On démontre que la qualité de l'approximation obtenue avec les polynômes de Tchebychev vérifie sur $[-1,+1]$ les deux propriétés suivantes :

1) si f est lipschitzienne alors

$$\|f-L_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,+1]} |f(x)-L_n(x)| = O\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n}\right)$$

2) si f est de classe C^{p+1} alors

$$\|f-L_n\|_\infty = O\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n^p}\right)$$

F - INDICATIONS SOMMAIRES SUR QUELQUES AUTRES TYPES D'APPROXIMATIONS

Dans un problème d'interpolation il s'agit de *créer* une fonction qui passe par des *points donnés* (x_i, y_i). Dans un problème d'approximation il s'agit de trouver une fonction φ qui soit une "bonne approximation" d'une autre fonction f *pour toute valeur x* d'un intervalle.

Dans la pratique on a vu, dès les exemples précédents, que certaines méthodes interpolatoires peuvent être utilisées comme méthodes d'approximation dans la mesure où les valeurs y_i sont des valeurs particulières prises par une fonction $f : y_i = f(x_i)$. On a par ailleurs vu que certains renseignements sur f permettent alors de "mesurer" la qualité de l'approximation obtenue.

Il existe d'autres types d'approximations où l'on peut approcher une fonction donnée f par une fonction φ :

— approximations tayloriennes
— séries de Fourier
— approximations rationnelles
— méthodes de moindres carrés
— méthode spline cubique
— ...

Il s'agit ici simplement de donner quelques idées directrices et quelques ébauches d'activités permettant à des élèves du secondaire d'avoir quelques ouvertures vers d'autres méthodes d'approximations couramment utilisées.

I - Approximations Tayloriennes

Exercice 1 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,x]$. On peut alors écrire

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

1) En choisissant comme primitive de 1 la fonction

$$t \mapsto -(x-t)$$

montrer qu'une intégration par parties permet d'écrire

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)dt$$

2) En réutilisant la même méthode, montrer qu'on obtient

$$f(x)-f(a) = f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t)dt$$

puis plus généralement la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x)-f(a) = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n$$

avec

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Le polynôme

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

est alors une approximation de f(x) avec une erreur (reste)

$$R_n = f(x) - T_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

3) Application aux fonctions sin x et e^x

Exercice 2 : Majoration de l'erreur

Soit $M_{n+1} = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$

Montrer qu'alors $|R_n| \leqslant M_{n+1} \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

Exercice 3 : Formule de Mac-Laurin

1) Réécrire ce qui précède, en particulier pour les fonctions sinus et exponentielle, dans le cas où $a=0$.

2) Etudier graphiquement la qualité des approximations obtenues au voisinage de 0 pour $n=1,2,3$, avec les fonctions sin x et e^x.

II - Résolution approchée de système d'équations linéaires et approximations s'y rattachant

Il ne s'agit pas de trouver une approximation d'une solution d'un système, mais d'aborder un type de problème qui se rencontre ~~fréquemment~~ dans des problèmes d'approximation de fonctions et aussi dans de nombreuses situations pratiques : on est en présence d'un système de n équations linéaires à p inconnues avec $n>p$ (système surdéterminé).

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots\dots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots\dots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{aligned}$$

Un tel système peut s'interpréter vectoriellement dans $\mathbf{R}^n$ par

$$x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \dots\dots + x_p\vec{a_p} = \vec{b}$$

et de ce point de vue le système admet ou n'admet pas de solution selon que $\vec{b}$ appartient ou n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}, \dots \vec{a_p})$. Il est regrettable, pour la formation de nos élèves, que l'on s'en tienne dans la plupart des cas à cette vision manichéenne. Le praticien (mathématicien, physicien, ingénieur, économiste, ...) ne peut, en général, pas se contenter d'affirmer que si $\vec{b}$ n'appartient pas au s.e.v. $(\vec{a}_1,\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$ alors il n'y a pas de solution, mais il lui faut faire "pour le mieux" c'est-à-dire trouver le vecteur $\vec{b}'$ du sous-espace qui soit le plus "proche" de $\vec{b}$ c'est-à-dire minimiser

$$\|\vec{b}-\vec{b}'\| \text{ avec } \vec{b}' = \sum_{i=1}^{p} x_i\vec{a}_i$$

Lorsque la norme est euclidienne, une telle approximation repose sur un fait géométrique bien connu. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{a}_1,\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$ et F′ son orthogonal. Le vecteur $\vec{b}$ s'écrit alors d'une façon et d'une seule sous la forme

$\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}''$, $\vec{b}' \in F$, $\vec{b}'' \in F'$

et

$$\| \vec{b} - \vec{b}' \| = \|\vec{b}''\| = \operatorname*{Inf}_{\vec{\beta}\in F} \| \vec{b} - \vec{\beta} \|$$

Le vecteur $\vec{b}'$, vecteur de F le "plus proche" de $\vec{b}$ apparaît donc comme la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur F. Lorsqu'on dispose dans F d'une base orthonormée $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$
alors

$$\vec{b}' = \sum_{i=1}^{k} (\vec{b} \cdot \vec{e}_i)\, \vec{e}_i \qquad \text{(voir [18])}$$

Exercice 1 :

Dans une usine on produit x objets A et y objets B. La production (x, y) devrait vérifier les conditions suivantes

$$2x + 3y = 53$$
$$3x - 5y = 21$$
$$x - y = 200$$

Déterminer la "meilleure" production possible, c'est-à-dire le couple (x_0, y_0) pour lequel le vecteur

$$\vec{b}_0 \begin{pmatrix} 2x_0+3y_0 \\ 3x_0-5y_0 \\ x_0+y_0 \end{pmatrix} \quad \text{minimise} \quad \|\vec{b} - \vec{b}_0\| \text{ avec } \vec{b}=(53,21,200)$$

Exercice 2 :

Soit les 4 points A(1,2) , B(2,3) , C(3,5) , D(4,4).

Déterminer la droite (d) d'équation $y=ax+b$ qui passe "au plus près" des quatre points, au sens décrit précédemment. Utiliser les formules habituelles d'ajustement linéaire et comparer les résultats.

Exercice 3 :

Soit les 4 points A(−1,4) , B(0,3) , C(1,4) , D(3,5).

En utilisant la méthode décrite précédemment, déterminer la fonction $x \to y = ax^2+bx+c$ passant, sinon par les quatre points, le "plus près possible" de ces 4 points.

Il est intéressant de voir que par cette méthode on peut "visualiser géométriquement" une première approche de l'approximation d'une fonction périodique par des polynômes trigonométriques. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de période 1. On vérifiera que

$$(f,g) \mapsto (f\,|\,g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

est un produit scalaire et pour ce produit scalaire les fonctions

$$c_n : t \mapsto c_n(t) = \sqrt{2}\cos 2\pi nt \qquad n>0 \text{ et } c_0=1$$
$$s_n : t \mapsto s_n(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi nt \qquad n>0$$

forment une famille orthonormée. Soit F_p le sous espace engendré par $\{c_0,c_1, \ldots, c_p\} \cup \{s_1,s_2, \ldots, s_p\}$. On obtient alors, pour une fonction f de E les $2p+1$ premiers termes de sa série de Fourier en écrivant que

$$f=f_F+f_{F'},$$

avec

$$f_F = \sum_{n=0}^{p} a_n c_n \qquad f_{F'} = \sum_{n=1}^{p} b_n s_n$$

et

$$a_n=(f\,|\,c_n) \qquad b_n=(f\,|\,s_n)$$

Remarque :

Cette présentation des séries de Fourier trouvera un cadre plus naturel et plus efficace dans l'espace vectoriel hermitien des fonctions continues de période 1 à valeurs complexes, muni du produit hermitien

$$(f,g) \to (f\,|\,g) = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

et en considérant la famille orthonormée

$$e_n : t \mapsto e^{2\pi i n t}, \; n \in \mathbf{Z}$$

III - Lissage par fonctions spline cubique

On a vu que les méthodes d'interpolation précédentes utilisaient, pour interpoler n + 1 points, soit des polynômes de degré élevé (n en général, moins dans des cas particuliers), on a alors une fonction de classe C^∞ sur **R**, soit des interpolations linéaires ou paraboliques "segment par segment", on a alors une fonction continue, mais présentant en général des points anguleux aux points d'interpolation.

On peut envisager de faire une interpolation "segment par segment" avec des arcs de polynômes de faible degré mais en imposant de "bons raccordements" c'est-à-dire en exigeant dérivée première ou, mieux, dérivée seconde continue.

Exercice 1 : Impossibilité de "bons raccordements" paraboliques

Soit 3 points (x_1,y_1) ; (x_2,y_2) ; (x_3,y_3) et deux fonctions f et g :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

On désirerait choisir a,b,c,a′,b′,c′ tels que

$f(x_1) = y_1$
$f(x_2) = g(x_2) = y_2$
$g(x_3) = y_3$
$f'(x_1) = \alpha$ (α et β sont deux réels donnés)
$g'(x_3) = \beta$
$f'(x_2) = g'(x_2)$

Montrer pourquoi ce problème n'admet, en général, pas de solution.

Exercice 2 : "Bons raccordements" cubiques

Soit toujours les mêmes trois points que dans l'exercice précédent, ainsi que les mêmes conditions ; mais ici on choisit deux fonctions f et g polynômes du 3ᵉ degré :

$$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$$
$$g(x) = a'x^3+b'x^2+c'x+d'$$

Montrer que, non seulement le problème admet toujours des solutions, mais qu'il reste même un paramètre indéterminé.

Remarque :

Le simple fait qu'il reste "mathématiquement" un paramètre indéterminé permet de s'offrir le luxe supplémentaire :

$$f''(x_2) = g''(x_2)$$

et ceci n'est pas simplement un luxe gratuit, mais est particulièrement intéressant pour des questions physiques (exemple : raccordement "en douceur" de deux virages d'une route) et de résistance des matériaux : lorsqu'on impose à une tringle élastique de passer par des points donnés elle se met en position de raccordement cubique avec dérivée seconde continue. C'est de ce dernier fait, très utilisé par les praticiens, que vient la dénomination de cette méthode (spline = tringle).

IV - Approximations rationnelles de fonctions

Les approximations utilisées dans la pratique ne sont pas seulement des approximations polynomiales ou trigonométriques. En particulier, contrairement à une idée répandue, les valeurs de certaines fonctions transcendantes sont calculées par des calculatrices électroniques à l'aide d'approximations rationnelles non polynomiales. Nous ne donnons aucune indication sur les méthodes utilisées pour obtenir de telles approximations (voir [1]). Ces méthodes sont en général basées sur le développement en fraction continue de *fonctions*. Mais nous proposons ici l'étude expérimentale de la qualité de certaines de ces approximations.

Exercice 1 :

Vérifier que

$$|x| < \frac{\text{Log}2}{2} \Rightarrow \left| e^x - \frac{12(x^2+10)+x(x^2+60)}{12(x^2+10)-x(x^2+60)} \right| \leqslant 10^{-8}$$

Exercice 2 :

Comparer

$$e^x \text{ et } \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

et déterminer un intervalle [a,b] tel que

$$x \in [a,b] \Rightarrow \left| e^x - \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \right| < 10^{-3}$$

Exercice 3 :

Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right]$, puis sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$

comparer

$$\text{Log}(1+x), \quad \frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}, \quad \frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3}$$

BIBLIOGRAPHIE

Les titres [1] à [4] sont des ouvrages d'analyse numérique donnant de larges développements aux questions abordées ici, abordant d'autres questions fondamentales en analyse numérique (résolution d'équations, de systèmes,...).

Les titres [5] à [8], sans être consacrés à l'analyse numérique, en donnent des applications et des éclairages intéressants.

Les titres [9] à [11] donnent un éclairage plus historique.

Les titres [13] à [18] sont, pour la plupart, des ouvrages de niveau plus élevés ou abordant des questions plus spécifiques.

[1] HILDEBRAND F.B.
Introduction to Numerical Analysis ; Mc. Graw-Hill - New-York, 1974.

[2] DEMIDOVITCH B. et MARON I.
Elements de Calcul Numérique ; Editions de Moscou 1973

[3] BAKHVALOV N.
Méthodes numériques ; Editions de Moscou 1976

[4] BARANGER J.
Introduction à l'Analyse Numérique ; Hermann, Paris

[5] ENGEL A.
Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique ; CEDIC, Paris, 1979.

[6] I.R.E.M. de MARSEILLE
Analyse 1, 2, ...

[7] YAGLOM A. M. et YAGLOM I.M.
Chalenging Mathematical Problems, volume 2 ; Holden-Day, San Francisco

[8] Calculateurs programmables dans les collèges et les lycées - Recherches pédagogiques N° 75 ; I.N.R.P., Paris

[9] TCHEBYCHEV P.L.
Sur les quadratures, J. Math. Pures Appl. 19, p. 118-120 (1874)

[10] GOLDSTINE H.
A History of Numerical Analysis; Springer, Berlin, 1978.

[11] OVAERT J.L.
Calcul numérique in "Encyclopédia Universalis" (supplément 1980)

[12] OVAERT J.L. et VERLEY J.L.
Algèbre 1 ; Cedic 1981

[13] BEREZYN I.S. - ZHYDKOW N.P.
Computing Methods (2 volumes) ; Pergamon Press, Oxford, 1963

[14] DAVIS P.
Interpolation and Approximation ; Blondsdell, New-York, 1963

[15] LORENTZ C.G.
Approximation of functions ; Holt, New-York, 1964

[16] VARGA R.S.
Matrix iterative analysis ; Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962

[17] AHLBERG J.H., NILSON E.N., WALSH J.L.
The theory of splines and their applications ; Academic Press, New-York,

[18] STEWART G.W.
Introduction to matrix computation ; Academic Press, New-York.