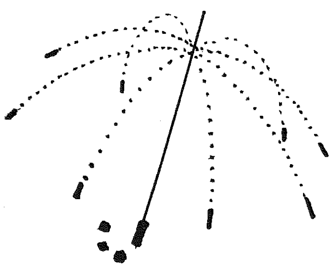
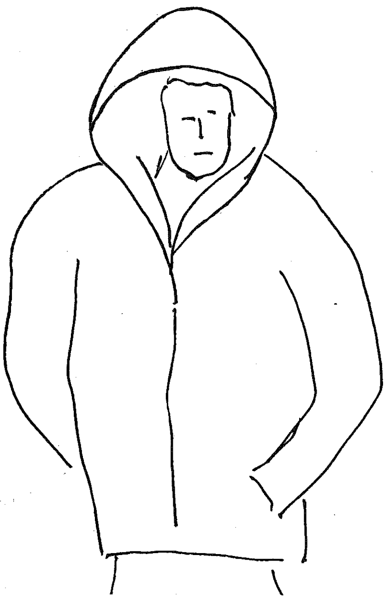
IV. CALCUL INTEGRAL ET MESURE DES GRANDEURS

IREM de LYON

Parapluie



Parapluie approché
(pour un calcul de
centre de gravité).



Parapluie approché
(en cas d'intempéries).

INTRODUCTION

Ce travail est le fruit des recherches menées pendant trois ans par plusieurs équipes de l'IREM de Lyon, mais aussi des activités de groupes appartenant à d'autres IREM, ainsi que de discussions d'ordre historique et philosophique que la structure semi-universitaire, semi-pédagogique des IREM permet d'entreprendre.

Le texte ci-dessous reproduit pour l'essentiel un document "Intégration" publié en Janvier 1979 par l'IREM de Lyon. Il propose une réflexion sur l'enseignement plutôt que des solutions toutes faites. Il se compose de deux parties : une bibliographie commentée des livres et documents qui ont été utilisés ou fabriqués par les auteurs, une série de propositions pour un enseignement possible de l'Intégration.

I BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

I-1) "Aires" (chapitre IV de "Premiers Balbutiements" — IREM de Lyon ①)

Il s'agit d'une fiche introduisant la fonction Log par l'aire associée. Le document vise avant tout à provoquer une réflexion sur la notion "d'aire d'un ensemble quarrable" et sur la question : "quel est le contenu réel de l'enseignement du calcul intégral en Terminale ? La construction d'un objet mathématique (ici l'Intégrale de Riemann) doit-elle précéder (voire remplacer !) l'étude du fonctionnement de cet objet, et de ses domaines d'utilisation ?"

I-2) "A first course in Calculus" (S. Lang)

Le groupe "Analyse" de l'IREM de Lyon a étudié ou consulté plusieurs ouvrages écrits par des mathématiciens professionnels pour les élèves des collèges américains. En particulier l'étude du livre de S. Lang a été très fructueuse et a permis de dégager deux idées forces :

1. L'Intégration opère sur des fonctions, sur des intervalles... ; mais à un niveau plus général elle est un procédé adapté à la mathématisation et à la résolution d'un type de problèmes [voir II-2)b)]

2. On peut utiliser les "applications" du calcul intégral pour *introduire* et *étudier* l'Intégration.

I-3) Un texte d'un groupe "Math-Physique" (IREM de Lyon ①) sur le travail d'une force :

Ce groupe n'était pas parvenu à réaliser la synthèse entre le vocabulaire mathématique et l'argumentation du physicien fondée sur les découpages infinitésimaux. En travaillant sur ce texte il nous est apparu qu'en fait on mélangeait deux problèmes : celui du calcul du travail d'une force et celui de la définition d'un objet mathématique représentant le travail de la force. Pour les physiciens aucun problème de définition ni d'existence du travail de la force ne se posait ; il s'agissait [voir I-2)1.] de trouver la réponse numérique d'un problème. Pour les matheux, seules la cohérence logique et la rigueur de la construction comptaient.

Nous avons conservé le point de vue du physicien (l'existence du travail de la force est provisoirement hors sujet) et "retourné" les applications du calcul intégral en les utilisant dans la définition même de l'Intégration [voir II-2)b).].

I-4) Les textes de l'IREM de Marseille : Intégration — Quelques méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales (Marseille ④)

Nous avons eu connaissance en Janvier 1977, aux Journées de Dijon, d'une première version de ces textes. L'idée de base en est que le calcul intégral ne se réduit pas au calcul de primitives [voir déjà I-1)] : des intégrales peuvent être calculées sans recours aux primitives. Par le biais *d'activités appropriées* il faut donc faire sentir cela aux élèves dès les *premiers* moments où l'on aborde avec eux la notion d'intégrale. La définition de l'Intégrale ne doit pas se résumer à une construction formelle.

Par ailleurs les textes de Marseille ont renforcé notre conviction concernant l'importance des problèmes numériques et de l'approximation dans l'enseignement de l'Analyse (voir le chapitre "Calculs numériques avec ou sans machines" — Lyon ⑦). Les activités numériques soulèvent des questions à propos des rapports entre l'approfondissement théorique et l'approfondissement expérimental en Mathématiques. Par exemple, la complexité du calcul d'erreur dans la méthode de Simpson comparée à la simplicité et à l'efficacité du calcul de l'intégrale approchée amène à se poser la question suivante : "comment enseigner la rigueur dans les problèmes numériques, les critères de rigueur sont-ils les mêmes que dans d'autres secteurs des Mathématiques. Finalement qu'est-ce que la rigueur ?"

I-5) Barycentre et centre de gravité :

Le groupe de travail entre animateurs s'est interrogé sur les concepts de l'Analyse et de la Géométrie utilisés en Physique. Le "livre du problème" sur le Barycentre publié par l'IREM de Strasbourg a tout spécialement apporté une lumière nouvelle à notre réflexion sur l'Intégration.

I-6) Textes d'intérêt plus général :

— Statut et fonctionnement d'une notion (Marion-Ovaert, pour la Coprem).

— La Physique du maître entre la Physique du physicien et la Physique de l'élève (F. Halwachs).

— Philosophie et calcul de l'infini (Houzel - Ovaert - Raymond - Sansuc - Ed. Maspéro)

— Textes de R. Thom dans "Pourquoi la mathématique" (Collection 10-18).

— Article de G. Glaeser : "La didactique de l'Analyse" (Bulletin A.P.M. n° 302)

L'influence de ces ouvrages ou articles est difficile à préciser, mais sans doute a-t-elle été déterminante pour nous aider à renouveler notre travail.

* *
*

II PROPOSITIONS POUR UN ENSEIGNEMENT DE L'INTEGRATION

II-1) INTRODUCTION — IDEES GENERALES :

— Enseigner une notion mathématique, c'est aussi faire en sorte qu'elle soit utilisable

— Or il n'est pas évident de faire fonctionner un concept, même si on en connaît une définition ou une construction. Il s'agit donc d'enseigner la façon dont on utilisera l'Intégration.

— De plus il n'est pas immédiat de reconnaître quel est le modèle qui va "donner le résultat". Evidemment lors du chapitre "Applications du calcul intégral", un élève, même distrait, songera à utiliser le calcul intégral pour résoudre l'exercice qu'on lui propose. Mais les exercices sont-ils - et doivent-ils être - toujours posés avec un titre de chapitre ? Il faut donc concevoir un enseignement de l'Intégration comme méthode de résolution d'un type de problèmes.

— Enfin, tout cela ne doit faire l'objet d'activités concentrées dans le temps, ni d'activités s'enchaînant l'une à l'autre de façon linéaire. Il s'agit au contraire de revenir sur un même problème avec de nouveaux moyens, poser un nouveau problème dès que c'est possible, le faire évoluer... (voir l'article de G. Glaeser : "La didactique en Analyse" — Bulletin de l'A.P.M. n° 302).

II-2) UNE STRATEGIE POUR L'ENSEIGNEMENT DE L'INTEGRATION :

Voici quelques grandes lignes possibles pour une telle stratégie. Il nous paraît indispensable de les mettre en œuvre dès le niveau Première (et parfois avant).

a) Premières activités de calcul intégral :

L'intention n'est pas d'expliquer à Monsieur Jourdain, entrant en Première, qu'il fait du calcul intégral depuis sa plus tendre enfance. Ces activités visent en préparant le terrain de façon consciente et cohérente, à ce que l'élève qui aborde le calcul intégral dispose d'exercices déjà résolus, à ce qu'il ait déjà rencontré les principaux problèmes que pose la théorie nouvelle, à ce qu'il ait déjà une certaine pratique des méthodes et des résultats de cette théorie. Ainsi la conceptualisation (en Terminale), s'appuyant sur un substrat suffisamment riche, sera pour l'élève plus compréhensible et plus féconde.

Quelques exemples de premières activités de calcul intégral :

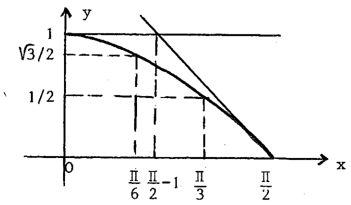
— Etude des surfaces, des volumes. Comparaison, additivité. (Notions à manipuler tout au long de la scolarité, dès l'école élémentaire)

— Activités autour du nombre π : longueur d'un cercle, aire d'un disque (comment la mesurer ?), volume d'un cylindre de révolution. Mesure du volume d'un récipient en étudiant la quantité d'eau qu'il peut contenir.

— Au moment où les fonctions apparaissent (fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques...), on peut poser simultanément des problèmes de construction de courbe, de longueurs d'arcs, d'aires, de volumes liés à ces courbes.

Le fait que l'étude théorique de ces problèmes ne soit pas au programme ne doit pas empêcher de proposer aux élèves des exercices sur ces thèmes. Ainsi après avoir introduit les fonctions trigonométriques (même si ce n'est que par usage des touches de la calculatrice) on peut s'intéresser au problème de l'aire limitée par l'arc de sinusoïde.

La concavité de l'arc de sinusoïde étant admise, on construit les trapèzes dont les sommets sont les points de la courbe d'abscisse $o, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, puis les tangentes aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. A partir de là on montre



que l'aire A du domaine délimité par l'arc de sinusoïde et les axes satisfait aux inégalités : $0{,}977 \leqslant A \leqslant 1{,}071$.

— En Seconde, on construit la courbe d'équation $y = x^2$ pour $x \in [0,1]$. La méthode des rectangles (avec découpages réguliers) donne un encadrement de l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe Ox, et la droite d'équation $x = 1$. On peut étudier directement la suite obtenue.

Un exercice, plus facile encore, et intéressant parce que le résultat ne se devine pas aisément, est le calcul du volume d'un "bol parabolique" obtenu en faisant tourner la courbe précédente autour de l'axe Oy.

b) Quelques démarches fondamentales pour enseigner l'Intégration en Première-Terminale :

Il convient tout d'abord de *recenser les problèmes de calcul intégral* dont il est possible de parler avec les élèves. Par exemple : centre de gravité, volume de révolution, quantité d'électricité, moment d'inertie, travail d'une force, distance parcourue par un mobile, aire d'un domaine plan associé à une courbe d'équation $y = f(x)$...

α) **Une première démarche :**

$\alpha - 1$ *Cette démarche vise à mettre en lumière les idées suivantes :*

(P_0) A tout intervalle [a,b] et à toute fonctions f suffisamment régulière sur [a,b] est associé un nombre (souvent positif) mesurant la quantité étudiée.

(P_1)Additivité type Chasles (et selon l'exemple on peut se demander si une formulation algébrique est possible ou non)

(P_2) Influence quantitative de la fonction f : densité, vitesse... (Exemple : pour les aires, si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur [a,b], alors : $0 \leqslant A_a^b(f) \leqslant A_a^b(g)$).
Cette propriété se dédouble pour le moment d'inertie (influence de la densité et de la distance).

(P_3) Si tout est constant, on connaît la quantité étudiée (Exemples : mesure d'un volume de révolution, quantité d'électricité en courant continu)

Dans les exemples cités au début du paragraphe, mis à part le problème du centre de gravité, ces propriétés apparaissent de façon naturelle.

En outre on dégagera dans chaque exemple les autres propriétés de l'intégrale qui y sont facilement illustrées :

$$\int_b^a f = -\int_a^b f, \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

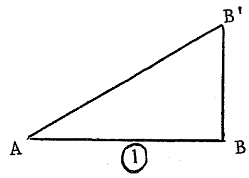
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \ ...$$

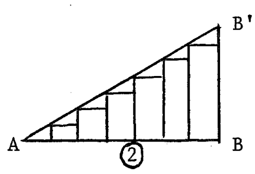
$\alpha - 2$ *Dans tous les cas, deux méthodes de calcul,* et il convient qu'au cours des activités les deux se révèlent de *même importance* :

• *Recherche d'une méthode "exacte"* — Lien avec le calcul des primitives : en laissant de côté le problème de l'existence du nombre envisagé, on peut interpréter son calcul comme la recherche d'une fonction F (Exemple : mesure d'un volume de révolution entre $x = a$ et $x = t$), étudier cette fonction, et montrer que, sous des hypothèses simples, on connaît la dérivée f de F. Si on connaît une primitive de f , le problème est alors résolu.

• *Recherche d'une méthode d'approximation :* en laissant toujours de côté l'existence du nombre cherché, on construit une ou plusieurs méthodes permettant de l'obtenir à ε près. Dans les exemples proposés on peut procéder par des découpages.

Remarque : on remplace ainsi le problème par un "problème approché". Il est intéressant de faire constater que ce dernier ne serait pas forcément pertinent pour autre chose. Exemple : calcul de l'aire d'un triangle.





L'aire obtenue grâce à la figure 2 approche l'aire du triangle ABB', mais ce découpage ne serait en rien une approximation dans un problème différent (problème de longueur par exemple) — Voir aussi le dessin de la première page de cet article.

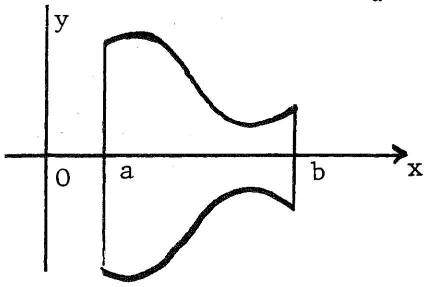
• *Remarque :* il est toujours enrichissant de montrer, à l'intérieur d'un même type de problèmes, combien il est utile de savoir multiplier les points de vue ou méthodes de calcul :
— si on connaît une primitive, on peut calculer...
— si on connaît l'aire, la mesure du volume... on peut dans certains cas en déduire une primitive
— si on ne connaît pas de primitive, on utilise un procédé d'approximation.

$\alpha - 3$ *Exemples d'illustration de cette démarche :*

* **Volumes de révolution** (Voir S. Lang).

1) Propriétés de base :

(P_0) La description d'un volume de révolution se fait à l'aide d'une méridienne définie par un intervalle [a,b] et par une fonction positive f (on peut remarquer que c'est la même fonction quel que soit le plan méridien choisi). A l'intervalle [a,b] et à f on associe la mesure du volume notée $V_a^b(f)$.



(P_1) Additivité par "tranches" le long de l'axe. Cette additivité ne peut avoir "naturellement" un aspect algébrique général, car les mesures de volume sont "naturellement" positives.

(P_2) Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur [a,b], alors $V_a^b(f) \leqslant V_a^b(g)$.

(P_3) On connaît la formule $V = \pi r^2 h$ pour un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r.

2) Procédés d'approximation :

On découpe l'intervalle [a,b] en tranches régulières. Dans les exemples, la méthode des rectangles (ici des cylindres de révolution) fournit un encadrement de la mesure du volume.

Suivant les classes et les élèves, les moyens de calcul et le temps dont on dispose... on pourra s'en tenir à un encadrement explicite, trouver une suite d'encadrements, montrer que le procédé s'applique à toutes sortes de fonctions et constitue une méthode de calcul approché, étudier en tant que telle cette méthode...

3) Lien avec le calcul des primitives :

On étudie la fonction $F : x \mapsto V_a^x(f)$ où $x \in [a,b]$.
Si $x_1 < x_2$ et si $f(x_1) - \alpha \leqslant f(x) \leqslant f(x_1) + \alpha$ pour tout $x \in [x_1,x_2]$, alors (en appliquant P_1,P_2,P_3) on a :

$$\pi(x_2 - x_1)[f(x_1) - \alpha]^2 \leqslant F(x_2) - F(x_1) \leqslant \pi(x_2 - x_1)[f(x_1) + \alpha]^2$$

Si f est continue sur [a,b], alors

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = \pi f^2(x_1)$$

On traite de même la limite à gauche. En résumé, pour tout $x \in [a,b]$, on a : $F'(x) = \pi f^2(x)$. Ce qui permet de calculer F si on connaît une primitive de f^2.

*** Moment d'inertie d'une barre par rapport à un axe**

On peut commencer par étudier le moment d'inertie d'une tige rectiligne homogène par rapport à un axe orthogonal à la tige passant en l'une de ses extrémités. On suppose la tige suffisamment longue par rapport à sa section pour l'assimiler à un segment de droite. On découpe la tige de longueur ℓ en n sous-tiges de longueur $\frac{\ell}{n}$. Si la tige est représentée par le segment [0,l], le découpage correspond à une subdivision $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = l$ de ce segment, et si n est assez grand on peut physiquement assimiler le tronçon $[x_k, x_{k+1}]$ à un point matériel de masse $\frac{M}{n}$ (M étant la masse de la tige) situé à la distance x_k de l'axe, son moment d'inertie est alors

$$\frac{M}{n} x_k^2 = \frac{M}{\ell} x_k^2 (x_{k+1} - x_k).$$

D'où une valeur approchée du moment d'inertie de la tige :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{\ell} x_k^2 (x_{k+1} - x_k).$$

On pourrait étudier aussi le moment d'inertie par rapport à un axe ne passant pas par une extrémité de la tige, et examiner l'influence de la distance de l'axe à l'une des extrémités de la tige choisie pour origine. Dans une deuxième étape on peut considérer une tige non homogène : la densité p(x) serait fonction de la distance x à l'origine.

On peut également étudier les moments d'inertie d'un disque homogène ou d'un cylindre de révolution homogène par rapport à leur axe, ou d'une sphère homogène par rapport à un axe passant en son centre.

*** Un exemple d'aspect quelque peu différent**

L'objet cherché est géométrique et il dépend d'une fonction de plusieurs variables — C'est le cas du *centre de gravité* d'une plaque, la fonction est la densité.

1) Propriétés de base :

(P'_0) Il existe un point du plan centre de gravité de la plaque.

(P'_1) Si P_1 et P_2 sont deux plaques disjointes de masses m_1 et m_2, de centres de gravité G_1 et G_2, la plaque "réunion" de P_1 et P_2 a pour centre de gravité le barycentre de (G_1,m_1) et (G_2, m_2)

(P'_2) Si la plaque P est contenue dans un disque D, le centre de gravité G de P est un point de D (et la distance de G à tout point de P est inférieure au diamètre de D)

2) Procédé d'approximation :

Pour approcher à ε près le centre de gravité G de la plaque P :
— on découpe la plaque en sous-plaques P_i de diamètres inférieurs à ε, de masses m_i.
— on choisit un point M_i dans chaque plaque P_i
— on note H le barycentre des points M_i affectés des coefficients respectifs m_i. Alors $d(H,G) \leqslant \varepsilon$

La preuve de ce résultat se trouve dans le livre de l'IREM de Strasbourg. Pour y arriver on remarque que, si G_i est le centre de gravité de P_i, alors G est le barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i. Puis on écrit $(\Sigma m_i)\overrightarrow{HG} = \Sigma m_i \overrightarrow{M_i G_i}$. D'où $(\Sigma m_i)\|\overrightarrow{HG}\| \leqslant (\Sigma m_i)\varepsilon$ (en tenant compte du fait que tous les m_i sont positifs)

Remarque :

Au niveau où nous nous plaçons, nous n'insistons pas sur la possibilité de prouver l'existence de l'objet cherché (le centre de gravité) par une méthode de suite de Cauchy (ce qui est fait dans le livre de l'IREM de Strasbourg). Cet aspect, certes important, nous paraît plus abstrait et peut donc être étudié plus tard, quand le problème d'une construction de l'Intégrale est mûr. C'est le genre d'exercices que nous renvoyons au delà de l'enseignement secondaire (tout comme nos collègues de Strasbourg).

β) **Une deuxième démarche :**

$\beta - 1$ *Cette démarche vise à mettre en lumière les idées suivantes :*

(Q_0) La quantité cherchée (cas d'un signal par exemple) est décrite par une fonction à valeurs réelles, non nécessairement positive, sur un intervalle fixé [a,b]. A cette fonction f est associé un nombre I(f).

(Q_1) L'application $f \mapsto I(f)$ est linéaire (ce qui correspond au principe de superposition des signaux).

(Q_2) Si $f \geqslant 0$ sur [a,b], alors $I(f) \geqslant 0$

(Q_3) Si $f = k$ (constante) sur $[c,d] \subset [a,b]$ et si $f = 0$ sur $[a,b] \setminus [c,d]$ (cas d'un signal en créneau), alors $I(f) = k(d-c)$

$\beta - 2$ Dans les exemples traités on utilisera, selon le cas, la *méthode de recherche d'une primitive*, ou *celle de recherche d'une valeur approchée* ; et ici encore les deux devront être illustrées de façon égale.

$\beta - 3$ *Exemples d'illustration de cette démarche :*
Les problèmes tels que quantité d'électricité, intensité moyenne, charge d'un condensateur, vitesse moyenne... sont intéressants à plusieurs titres :
— situations simples, expériences élémentaires faisables avec les élèves en T.P.
— Deux types de courants bien différenciés : continu et alternatif
— Une mathématisation utilisant le programme de Première et les nombres complexes
— La quantité d'électricité dépend d'une fonction de signe variable. On peut superposer les courants (générateurs en série), et donc faire apparaître la linéarité des phénomènes. Cette propriété importante de l'Intégration apparaît ainsi complètement dans cet exemple (Remarquons cependant que la propriété $\int \alpha f = \alpha \int f$ peut aussi s'interpréter, dans le cas des aires notamment, à l'aide d'un changement d'unité sur l'axe des ordonnées seul).

γ) **Synthèse :**

La diversité des problèmes étudiés permet ainsi de mettre en lumière, petit à petit, et de façon naturelle, les propriétés fondamentales de l'Intégrale : l'additivité par rapport à l'intervalle apparaît clairement dans le cas des volumes de révolution, tandis que la linéarité par rapport à la fonction apparaît bien dans les problèmes d'étude de signaux (électriques, acoustiques ou optiques)... Inversement l'utilisation des propriétés générales permet de traiter aisément des problèmes dont l'étude directe serait difficile ou artificielle.

En outre par cette diversité de situations on peut illustrer les deux modes de construction du calcul intégral : partir de la mesure des ensembles pour en arriver à l'intégration des fonctions, ou le contraire. Ainsi la notion de probabilités, l'étude des distributions de masses ou de charges conduisent de façon naturelle à choisir un point de vue mesure des ensembles, mais ultérieurement on a besoin d'intégrer des fonctions (espérance mathématique, variance, centre de gravité, moment cinétique, énergie cinétique). Inversement l'intégration des fonctions permet aussi la mesure des ensembles.

Additif bibliographique : les démarches étudiées en α) et β) sont abondamment exploitées dans le livre de S. LANG, *A first course in Calculus,* et dans celui de P. LAX, *Calculus with applications and computing* (ces livres sont analysés à la fin de ce Bulletin).

II-3) EN GUISE DE CONCLUSION, QUELQUES QUESTIONS

— Comment lier cela à l'enseignement de la Mécanique, de la Physique ?

— Comment prendre le temps de visiter calmement tous ces problèmes ?

— Etudier les calculateurs analogiques et, en particulier, les intégromètres. De quoi s'agit-il ? Comment ça fonctionne ? Comment ça "arrondit" ? (Voir par exemple l'Encyclopédie Universelle des sciences et techniques)

— En quoi les infiniment petits sont-ils un support efficace pour l'imagination ? Tout le monde (physiciens, mécaniciens...) utilise des découpages infinitésimaux, néglige "à vue de nez" les infiniment petits négligeables en conservant ceux qui ne le sont pas... "tout le monde sait que ça marche". Ceux qui professionnellement devraient expliquer ce phénomène sont les professeurs de Mathématiques. Or ils se contentent en général (tout en utilisant fréquemment eux-mêmes ces procédés) de donner un ou deux exemples, plus ou moins significatifs, où ce genre de raisonnement mène à une erreur, sans vraiment préciser pourquoi, ici, "ça ne marche pas", alors que si souvent "ça marche". Certes l'explication serait difficile. Peu à peu les mathématiciens ont élaboré une théorie de l'Analyse sans recours aux infiniment petits ; elle est très satisfaisante pour la rédaction d'un texte mathématique, mais pour l'enseignant de Mathématiques un problème pédagogique demeure.

— Questions plus générales : le calcul différentiel a fait faire des progrès au calcul intégral, et réciproquement. Comment ? Dans quelles situations ? Pour quel type de problèmes ? Enseignons-nous les rapports entre les deux tels qu'ils se sont établis à l'origine ? Pourquoi ?