III. MAJORER - MINORER - ENCADRER

Michel VIALLARD (IREM de Rennes)

Tout professeur de Mathématiques sait que le début de l'enseignement de l'Analyse est assez délicat et que les notions de base (continuité, limites,...) pourtant vues plusieurs fois ne sont pas assimilées. Il nous semble que les raisons principales de cet état de fait sont d'une part *le grand nombre de difficultés réunies* au début de l'enseignement de l'Analyse, d'autre part l'accent presque exclusivement mis sur les propriétés locales qui ne sont accessibles qu'au travers d'un formalisme compliqué, au détriment des *propriétés globales* (ou quantitatives) beaucoup plus directement accessibles, et enfin *un manque d'activités d'initiation à l'Analyse.* C'est en espérant supprimer en partie ces trois raisons d'échecs fréquents dans notre enseignement de l'Analyse que nous avons réalisé un document "Activités en Analyse - Majorer - Minorer - Encadrer" dont sont extraits la plupart des exemples constituant cet article. Ces exemples portent sur l'ensemble des connaissances du Second Cycle car nous pensons que de telles activités doivent être reprises durant toute la scolarité. Ces exemples utilisent autant les fonctions que les suites car nous pensons que l'étude des fonctions et l'étude des suites ont la même importance et doivent être menées de façon autonome.

I — QUELQUES DIFFICULTES ACCUMULEES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Nous ne prétendons pas les recenser toutes ici mais seulement en dégager trois qui nous ont paru les plus importantes :

1) Difficultés techniques

Apprendre à manipuler des *valeurs absolues, des inégalités* (et non des inéquations) et les deux ensemble. Apprendre à *majorer, minorer* et *encadrer*, en particulier des sommes, des produits ou des quotients (pouvant comporter un grand nombre de termes).

Exemple : soit f définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x^3+x^2 \sin x}$$

Démontrer que le dénominateur peut être minoré par x^2 et en déduire une majoration de f sur $[1, +\infty[$.

Exemple : On considère la fonction définie sur $]0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - x.E(\frac{1}{x^2})$$

Démontrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$.

Exemple : On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

Trouver un encadrement de u_n permettant de déterminer la limite de la suite.

Exemple : Calculer $E(\sqrt{n^2+n+1})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exemple : Majorer sur $[\frac{3}{2}, 2]$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2x-x^2}}$$

2) Difficultés du raisonnement par condition suffisante

Apprendre à perdre volontairement de l'information pour faciliter l'obtention d'un résultat. Trop souvent notre enseignement privilégie les conditions nécessaires et suffisantes, les propriétés caractéristiques et les élèves ne sont pas habitués à remplacer un problème par un problème plus simple, par exemple à majorer une fonction par une fonction plus simple pour obtenir ensuite une de ses propriétés ($x \sin(\frac{1}{x})$ définie pour $x \neq 0$ et majorée en valeur absolue par $|x|$ ce qui fournit immédiatement sa limite en 0).

Exemple : x désignant un nombre réel, donner une condition suffisante du type $x > A$ pour que :

1) $x^3+2x^2+1 \geqslant 27 \,.\, 10^6$
2) $x^3-300x^2+1 \geqslant 27 \,.\, 10^5$
3) $x^3-10^{50}x^2-1 \geqslant 27 \,.\, 10^5$

Exemple : Majorer $\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^4}$ sur $\mathbf{N}^*$.

Exemple : Majorer la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-E(x)}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Exemple : Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout $\epsilon > 0$ et tout x réel on ait :

$$|x-1| \leqslant 3\epsilon \Rightarrow |f(x)| \leqslant \epsilon$$
$$\text{et } |x-1| \leqslant 7\epsilon \Rightarrow |g(x)-3| \leqslant \epsilon$$

Trouver un réel positif α tel que $|x-1| \leqslant \alpha$ soit une condition suffisante pour que :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{1}{100}$$

Exemple : Si $x>0$, majorer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ et en déduire sa limite quand x tend vers $+\infty$.

3) Difficultés logiques

Une propriété portant sur 3 quantificateurs (notion de limite quand la limite est connue) ou a fortiori sur 4 quantificateurs (quand la limite n'est pas connue ou n'existe pas) est bien sûr nettement plus compliquée à bien assimiler (à cause, en particulier, de l'ordre des quantificateurs) qu'une propriété portant sur 2 quantificateurs (fonction ou suite majorée) et a fortiori qu'une propriété portant sur un seul (fonction ou suite admettant un majorant donné).

Exemple : Démontrer que pout tout $x \geqslant 0, \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{2}$ et en déduire, pour $n \in \mathbf{N}, E(\sqrt{n^2+n})$.

Exemple :
1 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $q \in [0,1[$

$$1+q+q^2+\ldots+q^n \leqslant \frac{1}{1-q}$$

2 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $n\,! \geqslant 2^{n-1}$, et en déduire une majoration pour tout $n \in \mathbf{N}$ de :

$$u_n = 1+\frac{1}{2\,!}+\ldots+\frac{1}{n\,!}$$

Exemple : Montrer que $1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{8}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+a}$ avec une incertitude inférieure à $\frac{a^3}{16}$ si $0 \leqslant a \leqslant 4$, et une incertitude inférieure à $\frac{3|a|^3}{16}$ si $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$.

En déduire une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{10}$ (en précisant un majorant de l'erreur).

Exemple : On considère la suite :

$$u_n = \frac{1.3.5\ \ldots\ (2n-1)}{2.4.6\ \ldots\ 2n},\ n>0$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ et en déduire la limite de la suite.

Il nous a paru évident que ces trois difficultés pouvaient être en grande partie surmontées dès le début de l'enseignement de l'Analyse et même *bien avant l'enseignement des notions de limites* (fonctions et suites) et de *continuité*. Nous avons voulu, grâce aux exemples que nous avons fournis, concrétiser cette possibilité de mieux commencer l'enseignement de l'Analyse et de mieux le centrer sur ses véritables difficultés.

Ainsi peut-on espérer que les élèves retiendront quelque chose de l'Analyse alors qu'actuellement tous les efforts déployés pour leur faire assimiler des notions abstraites sont vains : il ne leur reste pratiquement rien si ce n'est quelques recettes de calcul sur les limites et quelques algorithmes.

II - L'OPPOSITION LOCAL - GLOBAL

Tout notre enseignement élémentaire de l'Analyse, sans doute à cause du développement de la Topologie, privilégie les résultats locaux (limite, continuité en un point) au détriment des résultats globaux souvent plus riches d'information. C'est ainsi qu'il est plus intéressant de savoir que pour tout x réel, $|f(x)| \leqslant |x|$ que de savoir que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, ou de savoir que pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 \leqslant f(x) \leqslant e^x$ que de savoir que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. De même, pour pour les suites, il est bien sûr essentiel de savoir qu'une suite converge mais curieusement on oublie trop souvent de se demander vers quoi, et, quand la limite n'est pas connue exactement, on cherche rarement à en déterminer une valeur approchée ce qui devrait conduire à s'intéresser à la rapidité de la convergence (remarque particulièrement évidente pour les suites se présentant comme des sommes partielles de séries ou des suites définies par itération). Enfin, il ne suffit pas de savoir qu'une suite diverge ou qu'une fonction n'a pas de limite ; il est intéressant de connaître leur développement asymptotique (comportement oscillatoire ou divergent).

Les thèmes que nous proposons sont presque tous relatifs à des résultats globaux, et ils doivent permettre de rétablir l'équilibre, dans l'enseignement de l'Analyse, avec les résultats locaux qui ont actuellement une part trop importante. Il est clair en plus que beaucoup de résultats locaux sont en fait obtenus à partir de majorations globales, et que le travail global prépare utilement l'introduction de techniques locales plus faibles en informations mais plus systématiques. Tout le monde sait que l'idée essentielle pour montrer qu'une suite (u_n) est convergente vers ℓ, est de trouver une suite (v_n) convergente vers 0 telle que pour tout n on ait $|u_n - \ell| \leqslant v_n$.

Exemple : Si $n \in \mathbf{N}^*$, S_n désigne le nombre de chiffres de n en écriture décimale. En cherchant un encadrement de S_n trouver les limites de $\frac{S_n}{n}$ et $\frac{S_n}{\log_{10} n}$.

Exemple : On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

a - Montrer que pour tout n : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

b - Démontrer que : $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}$.

On double ainsi (à condition d'avoir pris un u_0 convenable) à chaque itération le nombre de décimales exactes.

c - En déduire que pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{2}{2^{2^{n+1}}}$$

d - trouver n_0 pour que $0 \leqslant u_{n_0} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{30.000}$ et préciser u_{n_0}.

Exemple : Démontrer que les trois parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes sont convexes :

1) $E = \{(x, y) / y \geqslant x^2\}$

2) $F = \{(x, y) / xy \geqslant 1 \text{ et } x \geq 0\}$

3) $G = \{(x,y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\}$

Exemple : On admet (ou démontre selon le niveau) que pour tout x réel, il existe un unique y tel que :

$$y^7 + y^3 = x$$

Voulant étudier le comportement de y(x) pour les grandes valeurs de x, on constate que $y^7 + y^3$ est alors de l'ordre de y^7 et on démontre d'abord que pour

$x > 1, y(x) \leq x^{1/7}$

puis que $y(x) \geq (x - x^{3/7})^{1/7}$

et enfin que $y(x) \leq (x - x^{3/7} + x^{-1/7})^{1/7}$

Exemple : Ayant démontré qu'il existe une fonction f de **R** dans **R** vérifiant

$$\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$$

étudier le comportement de f(x) au voisinage de $+\infty$ grâce à un encadrement de f(x) (on peut d'ailleurs facilement faire une étude complète de f).

III - UN NOUVEAU MODE D'INITIATION A L'ANALYSE

1 - Ce qui vient d'être dit et les exemples fournis montrent déjà qu'il est souhaitable et possible de commencer l'enseignement de l'Analyse dès la classe de Seconde et même avant, grâce à des activités du type de celles proposées dans ce document. Il est aussi bon d'enrichir les exemples de fonctions connues des élèves et, en particulier, d'introduire très tôt l'usage des fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes.

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$ où $d(x, \mathbb{Z})$ désigne la distance de x à l'entier relatif le plus proche.

a - Montrer que pour tout x réel $f(x + 1) = f(x)$

b - Majorer f sur **R**

c - Majorer $\left| \frac{f(x)}{x} \right|$ pour $x \neq 0$.

Exemple : Soit f définie sur **R*** par $f(x) = \frac{E(x)}{x}$

a - Montrer que f est majorée sur $]0, +\infty[$

b - Montrer que f est majorée sur $]-\infty, -1]$

c - f est-elle majorée sur **R*** ?

Exemple : Majorer $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

1 - Sur $\{(x,y) / x > 0, y > 0\}$

2 - Sur $\{(x,y) / x - y \geq 0, x + 2y \geq 0, x \neq 0\}$

Exemple : Trouver la plus petite et la plus grande valeur de :

$$\frac{1}{4+x+y+xy} \text{ sur } \{(x,y) / |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$$

2 - Il est enfin nécessaire de signaler ce que des calculatrices du type H.P. 33 peuvent apporter au démarrage de l'enseignement de l'Analyse :

a) Si, grâce à une calculatrice programmable, on fait le calcul de la somme des inverses des entiers de 1 à 100 puis 1000 ou 2000, les élèves arriveront à penser que la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

doit converger, et ils seront d'autant plus réceptifs à toute démonstration du contraire et à toute évaluation de la croissance de cette suite. En recommençant à "bricoler" avec d'autres suites analogues

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \text{ ou } 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^n},$$

ils prendront conscience de la nécessité d'effectuer des démonstrations précises.

b) Considérons la fonction réelle définie par

$$f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 7}.$$

Dans un premier temps, on peut faire calculer f(10), f(100), $f(10^3)$, $f(10^4)$ et quelques autres valeurs analogues. La calculatrice montre clairement que, pour ces valeurs, f(x) est toujours très voisin de 3x + 4. Dans un deuxième temps, on cherche à comprendre *intuitivement* ce résultat, ce qui est possible en écrivant

$$f(x) = 2x + 3 + x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}},$$

pour $x > 0$, et en remplaçant

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} \text{ par } 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)$$

comme le suggère un résultat figurant dans les programmes. On n'a, bien sûr, toujours rien démontré mais ayant compris intuitivement, il devient intéressant et pas très difficile d'obtenir pour $x > 0$ la majoration :

$$\left| 3x + 4 - (2x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 7}) \right| \leq \frac{3}{x}.$$

Pour conclure, nous voulons insister sur le fait qu'il s'agit, avec ces thèmes, de développer les *activités de résolution de problèmes* plutôt que les "beaux discours" formels du maître, de développer *l'intuition et l'initiative* des élèves plutôt que d'introduire trop de concepts et trop tôt. Pour réaliser ces derniers objectifs, il faut proposer aux élèves des *situations plus riches* que celles qui nécessitent d'appliquer mécaniquement les théorèmes "algébriques" sur les limites ou les calculs de dérivées.

BIBLIOGRAPHIE

1 Activités en Analyse - Majorer - Minorer - Encadrer par M. Viallard (IREM de Rennes).

2 J. Dieudonné - Calcul Infinitésimal (Hermann)

3 Activités numériques et d'Analyse en Seconde : Résolution approchée d'équations (IREM de Rennes -Juillet 1981)